TEORIA GEOMÉTRICA DE GRUPOS Y ALGUNAS APLICACIONES

Gabriel Mauricio Vergara Ríos

Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Octubre de 2009

Teoría Geométrica de grupos y algunas aplicaciones

por

Gabriel Mauricio Vergara Ríos

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al Título de

Magister en Matemáticas

Directora: **Olga Patricia Salazar Díaz**

Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Octubre de 2009

Resumen

En este trabajo se hace una introducción a la teoría geométrica de grupos; veremos como a partir de una presentación finita de un grupo se construye un espacio métrico, se discute la acción del grupo sobre dicho espacio y se estudian propiedades geométricas que se preservan bajo cierta condición que llamaremos cuasi-isometría. Además revisaremos algunas de estas ideas para el grupo F de Thompson.

Contenido

Agradecimientos

Agradezco a Dios por darme las fuerzas y el conocimiento necesario para que este sueño se hiciera realidad, a mis padres por traerme a este mundo hermoso y así poder estar escribiendo estas palabras después de una ardua lucha día a dia. También agradezco de manera muy especial a la profesora Olga Patricia Salazar por su infinita paciencia y por su valiosa colaboración durante el desarrollo de este trabajo. Gracias a la Universidad Nacional de Colombia (Sede Medellín) por haber sido mi casa durante este tiempo. Gracias a los profesores Juan Diego Vélez y Luis Alberto Wills por haber aceptado ser jurados de este trabajo y por sus valiosos aportes para la feliz culminación de éste. A mi hija Angelly por ser el motivo que me inspira a seguir adelante.

1 Introducción

La teoría geométrica de grupos permite estudiar grupos finitamente generados, explorando la conexión entre propiedades algebraicas y topológicas, con propiedades geométricas de los espacios sobre los cuales estos grupos actúan. Esta teoría permite estudiar grupos finitamente generados, vía su grafo de Cayley, al cual se le puede dotar con la estructura de un espacio métrico, usuando la métrica de la palabra. La teoría geométrica de grupos también interactúa con la geometría hiperbólica, la topología algebraica, la teoría computacional de grupos, la lógica matemática, los sistemas dinámicos, la teoría grupos de Lie y sus subgrupos discretos.
A mediados del siglo XX, Dhen, Nielsen, Reidemeister y Shereier, Whitehead y Van Kampen entre otros, introdujeron algunas ideas geométricas y topológicas para el estudio de grupos disretos. Los otros precursores de la teoría geométrica de grupos incluyen la teoría de pequeña cancelación y teoría de Bass-Serre, siendo la primera introducida por Lyndon y Paul Schupp, quienes estudiaron los diagramas de Van Kampen correspondientes a presentaciones finitas de grupos, de las cuales se derivan propiedades algebraicas y algorítmicas de grupos. Algunos de los estudios más importantes sobre teoría geométrica de grupos, se han hecho con el objetivo de resaltar las propiedades geométricas de estos.
Una propiedad $(\wp)$ de grupos finitamente generados es **geométrica** si para un par (G_1, G_2) de grupos finitamente generados, los cuales tienen la propiedad de ser cuasi-isométricos, G_1 tiene la propiedad $(\wp)$ si y sólo si G_2 también la tiene.

Dentro de la gran variedad de propiedades geométricas que se preservan por cuasi-isometría entre grupos finitamente generados, vale la pena resaltar aquellas que de algún modo serán tratadas durante el desarrollo de este trabajo, estas propiedades son las siguientes:

1. G_1 es **finito** si y sólo si G_2 también lo es.
2. G_1 es **finitamente presentado** si y sólo si G_2 también lo es.
3. G_1 tiene un **subgrupo libre de índice finito** si y sólo si G_2 tiene un subgrupo libre de índice finito.
4. G_1 tiene un **subgrupo abeliano libre de índice finito** si y sólo si G_2 tiene un subgrupo abeliano libre de índice finito.

Mediante este trabajo pretendemos hacer una introducción a esta teoría, considerada como una nueva área de las matemáticas que surge en la decada de 1980. Nuestra discusión se centra en construir a partir de un grupo finitamente presentado su grafo de Cayley, el cual se puede dotar de una estructura de espacio métrico con la métrica de la palabra y posteriormente, visto como espacio topológico estudiar propiedades que puedan ser traducidas en propiedades algebraicas del grupo del que se partió.
En el primer capítulo presentamos algunos resultados de la teoría combinatoria de grupos, puesto que es a partir de su presentación que los definiremos. Nos concentraremos también

en este capítulo en revisar conceptos básicos de topología, necesarios para el estudio de espacios métricos que encontraremos en los capítulos restantes.
En el segundo capítulo estudiamos acciones de grupos en espacios métricos, el Grafo de Cayley y el importante concepto de cuasi-isometrías, el cual nos permitirá probar dos importantes resultados, a saber:

1. Un grupo es finitamente presentado si y sólo si actúa propia, cocompactamente y por isometrías en un espacio geodésico simplemente conexo y

2. Si G_1 es cuasi-isométrico a G_2, G_1 es finitamente presentado si y sólo si G_2 es finitamente presentado.

Los grupos de Thompson F, T y V fueron introducidos por R.Thompson en 1965. Ellos fueron introducidos dada la necesidad de la creación de un grupo finitamente generado con problema de la palabra no soluble, y después fueron redescubiertos en muchos otros contextos. Los grupos de Thompson T y V fueron los primeros ejemplos de grupos infinitos, finitamente presentados, simples y actualmente son la base de muchas preguntas de la teoría geométrica de grupos, pues son considerados los casos de verificación de muchas conjeturas, o son instrumentos para medir el buen entendimiento de una cierta propiedad. El grupo F de Thompson es el tema central del tercer capítulo de este trabajo. Allí inicialmente definiremos el grupo F de Thompson como el grupo de homeomorfismos lineales por tramos del intervalo unidad $[0, 1]$ en sí mismo, que son diferenciables excepto en finitos racionales de la forma $\frac{a}{2^n}$, $a, n \in \mathbb{N}$ (los cuales llamaremos racionales diádicos) y tales que, en sus intervalos de diferenciabilidad, su derivada es una potencia de 2. Seguidamente, daremos su definición en términos de pares de árboles binarios ordenados con raíz y describiremos dos de sus presentaciones isomorfas, a saber: $F = \langle x_0, x_1 \mid [x_0x_1^{-1}, x_0^{-1}x_1x_0], [x_0x_1^{-1}, x_0^{-2}x_1x_0^2]\rangle$ y $F = \langle x_k,\ k \geq 0 \mid x_i^{-1}x_jx_i = x_{j+1},\ si\ i < j\rangle$. Mostraremos que $F \times \mathbb{Z}$ está embebibo cuasi-isométricamente en F, lo cual será la base para la prueba del resultado más importante de este capítulo, en el cual probaremos que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y todo entero $m \geq 0$, $F^n \times \mathbb{Z}^m$ está embebido cuasi-isométricamente en el grupo de Thompson F, prueba que se basará en algunas ideas tomadas de [4].

2 Preliminares

2.1 Introducción a la presentación de grupos

Iniciaremos este capítulo definiendo cuándo un grupo F es libre en un conjunto $X \subset F$. Posteriormente probaremos que dado un conjunto arbitrario X, existe un grupo que es libre en X. Seguidamente enunciaremos y probaremos resultados importantes de la teoría combinatoria de grupos, como el hecho de que todo grupo tiene una presentación y todo grupo finito es finitamente presentado. Finalizamos con algunas nociones básicas de topología, entre ellos el Teorema de Hopf-Rinow, resultado que será fundamental en la prueba de dos resultados importantes del Capítulo 2.

Definición 2.1.1. *Un grupo F se dice **libre en un subconjunto** $X \subseteq F$ si para todo grupo G y toda función $\theta : X \to G$, existe un único homomorfísmo $\varphi : F \to G$ que extiende a θ, es decir $\varphi \mid_X = \theta$. Decir que φ extiende θ equivale a que el siguiente diagrama conmute:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\theta"'] & F \arrow[d, "\varphi"] \\ & G \end{tikzcd}$$

*donde $i : X \to F$ denota la función inclusión. En tal caso decimos que X **genera libremente a** F y que X es un **conjunto generador** para F o una **base** para F. Si X es finito decimos que F es **finitamente generado**.*

Notación: $F = \langle X | \ \rangle$ indica que F es libre con base X. En particular, si $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, escribimos $F = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n | \ \rangle$.

Observación 2.1.1.1. *Sean F y G grupos cualesquiera y sea $X \subseteq F$ un subconjunto. Si $Hom(F, G) := \{\psi : F \to G \mid \psi \ es\ homomorfismo\}$, $Map(X, G) := \{\gamma : X \to G \mid \gamma \ es\ función\}$ y si $\rho : Hom(F, G) \to Map(X, G)$ está definida por $\rho(\psi) = \psi \mid_X$, entonces F es libre en X si y sólo si ρ es biyectiva.*

Lema 2.1.2. *Si F es libre en X, entonces $F = \langle X \rangle$.*

Demostración. Sea $H = \langle X \rangle = \bigcap\{K \leq F \mid K \supseteq X\}$, entonces H es un grupo, y como F es libre en X, para $\theta : X \to H$ existe un único homomorfismo $\varphi : F \to H$ tal que $\varphi \mid_X = \theta$. Sean $i_1 : X \to F$ y $i_2 : H \to F$ respectivamente, las funciones inclusión. Si $\tau = i_2 \circ \varphi$ y $\gamma = i_2 \circ \theta$, entonces para todo $x \in X$ se tiene que:
$\tau(x) = (i_2 \circ \varphi)(x) = i_2(\varphi(x)) = i_2(\theta(x)) = (i_2 \circ \theta)(x) = i_1(x)$, es decir τ extiende a i_1, pero la identidad $1_F : F \to F$ es también una extensión de i_1 y como F es libre en X, necesariamente $\tau = 1_F$.

Gráficamente:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\theta"] & F \arrow[dl, "\varphi"] \\ H \arrow[d, "i_2"] & \\ F & \end{tikzcd}$$

Luego, $F = 1_F(F) = \tau(F) = ((i_2 \circ \varphi)(F)) = i_2(\varphi(F)) \subseteq i_2(H) = H$, y como por definición $H \subseteq F$, entonces $H = F$. Por tanto $F = H = \langle X \rangle$ ■

Proposición 2.1.3. *Sea F_i un grupo libre en X_i $(i = 1, 2)$. Entonces $F_1 \cong F_2$ si y sólo si $|X_1| = |X_2|$.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Tomando $G = \mathbb{Z}_2$ en la Observación 2.1.1.1 y usando el hecho de que F_i es libre en X_i $(i = 1, 2)$, tenemos que:
$\rho_1 : Hom(F_1, \mathbb{Z}_2) \to Map(X_1, \mathbb{Z}_2)$ y $\rho_2 : Hom(F_2, \mathbb{Z}_2) \to Map(X_2, \mathbb{Z}_2)$ son biyectivas. Luego, $|Hom(F_1, \mathbb{Z}_2)| = |Map(X_1, \mathbb{Z}_2)|$, $|Hom(F_2, \mathbb{Z}_2)| = |Map(X_2, \mathbb{Z}_2)|$, y como $F_1 \cong F_2$, entonces $|Hom(F_1, \mathbb{Z}_2)| = |Hom(F_2, \mathbb{Z}_2)|$, por lo cual

$$|Map(X_1, \mathbb{Z}_2)| = |Map(X_2, \mathbb{Z}_2)| \tag{1}$$

Pero sabemos que sí A y B son conjuntos con $|A| = a$ y $|B| = b$, entonces $|Map(A, B)| = b^a$. En nuestro caso, como $|\mathbb{Z}_2| = 2$, de la igualdad (1) se sigue que $2^{|X_1|} = 2^{|X_2|}$ y de aquí que $|X_1| = |X_2|$.

$(\Leftarrow)$ Si $|X_1| = |X_2|$, entonces existe $f : X_1 \to X_2$ biyectiva; además, como F_i es libre en X_i $(i = 1, 2)$, para las funciones $\theta_1 = i_2 \circ f : X_1 \to F_2$ *y* $\theta_2 = i_1 \circ f^{-1} : X_2 \to F_1$, existen homomorfismos únicos $\varphi : F_1 \to F_2$ *y* $\psi : F_2 \to F_1$ tales que $\varphi |_{X_1} = \theta_1$ y $\psi |_{X_2} = \theta_2$. Luego, para todo $x_1 \in X_1$:
$(\psi \circ \varphi)(x_1) = \psi(\varphi(x_1)) = \psi(\theta_1(x_1)) = \psi(f(x_1)) = \theta_2(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_1)) = x_1$, entonces $\psi \circ \varphi$ es una extensión de la función inclusión i_1, pero como 1_{F_1} también es una extensión de i_1 y como F_1 es libre en X_1, entonces $\psi \circ \varphi = 1_{F_1}$. De manera análoga se prueba que $\varphi \circ \psi = 1_{F_2}$. Tenemos así que $\psi \circ \varphi = 1_{F_1}$ y que $\varphi \circ \psi = 1_{F_2}$, es decir, φ es biyectiva y como φ es homomorfismo entonces φ es un isomorfismo. Por tanto $F_1 \cong F_2$. ■

Observación 2.1.3.1. *Como consecuencia de la proposición anterior se sigue que todas las bases para un grupo libre F, tienen el mismo cardinal. A dicho cardinal lo llamaremos el* ***rango*** *de F y lo denotaremos por $r(F)$.*

Definición 2.1.4. *Sea X un conjunto. Una* ***palabra*** *en X es una sucesión $w = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde $x_i \in (X \cup \{1\})^{\pm}$ y $1^{\pm} = 1$. Si $x_i = 1$ para todo i, diremos que w es la* ***palabra vacía*** *y escribiremos $w = 1$.*

Notación: En lo que sigue, escribiremos $w = x_1x_2\dots x_n$ en lugar de $w = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. También se acostumbra a escribir $w = x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}\dots x_n^{\varepsilon_n}$, donde $x_i \in X \cup \{1\}$ y $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$.

Definición 2.1.5. *Dadas dos palabras $w_1 = x_1x_2\dots x_n$ y $w_2 = y_1y_2\dots y_n$ en X, diremos que w_1 es* ***igual*** *a w_2 y escibiremos $w_1 = w_2$ si $x_i = y_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Definición 2.1.6. *Sea X un conjunto arbitrario y $w = x_1x_2\dots x_n$ una palabra en X*

- *La* ***inversa*** *de w, denotada w^{-1} se define como $w^{-1} = x_n^{-1}x_{n-1}^{-1}\dots x_1^{-1}$.*
- *A una palabra de la forma $w' = x_ix_{i+1}\dots x_j$, donde $1 \leq i \leq j \leq n$, la llamaremos una* ***subpalabra*** *de $w = x_1x_2\dots x_n$.*
- *Si $w' = x_1x_2\dots x_j$, diremos que w' es el segmento inicial de w que finaliza en x_j.*
- *Diremos que $w = x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}\dots x_n^{\varepsilon_n}$ con $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, es una palabra* ***reducida*** *si no contiene subpalabras de la forma $x^{\varepsilon_i}x^{-\varepsilon_i}$ para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.*
- *Si $v = y_1y_2\dots y_m$ es otra* ***palabra reducida*** *en X, definimos el producto de w con v como la palabra $wv = x_1x_2\dots x_ny_1y_2\dots y_m$.*
- *Una* ***transformación elemental*** *sobre w consiste en insertar o eliminar palabras de la forma $x^\varepsilon x^{-\varepsilon}$ con $\varepsilon = \pm 1$. Si al aplicar una transformación elemental a w obtenemos una palabra w', decimos que w' se* ***deriva*** *de w y escribiremos $w \to w'$.*
- *Si denotamos por W al conjunto de todas las palabras reducidas en X, diremos que $v, w \in W$ son* ***equivalentes*** *si existen palabras $w_1,\ w_2,\ \dots,\ w_n$ en W tales que $w \to w_1 \to w_2 \to \dots \to w_n = v$. En este caso escribiremos $w \sim v$.*

Observación 2.1.6.1. *Se puede probar que la relación "$\sim$"definida arriba, es una relación de equivalencia en W y preserva el producto en W, es decir si $w \sim v$ y $w' \sim v'$, entonces $ww' \sim vv'$.*

Definición 2.1.7. *Dado un conjunto arbitrario X, denotamos por $F(X)$ al conjunto de palabras reducidas en X; es decir, $F(X) = \{\overline{w} | w \in W\}$, donde W está definido como arriba.*

Observación 2.1.7.1.

- *De la definición anterior es claro que $X \subseteq F(X)$, pues basta considerar la inyección $\psi : X \to F(X)$, definida por $x \mapsto x1\dots 1$.*
- *Nótese además que si $X = \Phi$ entonces $F(X) = \{1\}$, es decir $F(X)$ consiste sólo de la palabra vacía $w = 1$.*
- *Si $v, w \in F(X)$ entonces wv no necesariamente está en $F(X)$; sin embargo, si aplicamos operaciones elementales a wv obtenemos una palabra reducida $w'v' \sim wv$, donde w' y v' son subpalabras de w y v respectivamente. De este modo, definiremos en $F(X)$ el* ***producto*** *de w y v denotado también por wv como la palabra reducida $w'v'$. Demostraremos que $F(X)$ con esta operación, la cual llamaremos yuxtaposición, es un grupo libre con base X.*

Definición 2.1.8. *Sea $w \in F(X)$. La longitud de w, denotada $l(w)$ se define por $l(w) = n$, si $n \geq 1$ y $w = x_1x_2 \ldots x_n$, y $l(w) = 0$ si $w = 1$.*

Teorema 2.1.9. *Dado un conjunto X, existe un grupo F que es libre en X.*

Demostración. Ver [5]. ∎

Proposición 2.1.10. *Todo grupo es isomorfo a un grupo factor de algún grupo libre.*

Demostración. Sea G un grupo y sea X un conjunto generador de G. Entonces existe el grupo $F(X)$ el cual es libre en X, luego para $\theta : X \to G$ existe un único homomorfismo $\varphi : F(X) \to G$ tal que $\varphi\mid_X = \theta$. Así, como $G = \langle X \rangle$ y $F(X) = \langle X \rangle$, entonces $\varphi(F(X)) = G$, i.e $Im\varphi = G$, luego si $K = ker\varphi$, por el primer teorema de isomorfismos, $F(X)/ker\varphi \cong Im\varphi$, es decir $F(X)/K \cong G$. Por tanto G es isomorfo al grupo factor $F(X)/K$. ∎

2.2 Libre Presentación de Grupos

Definición 2.2.1. *Sea F un grupo libre en X, $R \subset F$ y N la clausura normal de R en F (es decir el subgrupo normal más pequeño de F que contiene a R). Si G es un grupo tal que $G \cong F/N$, diremos que G* ***tiene la presentación*** *$\langle X|R \rangle$ y escribiremos $G = \langle X|R \rangle$. Los elementos de X serán llamados* ***generadores*** *de G y los elementos de R,* ***relaciones****. Además, si X y R son finitos, diremos que G es* ***finitamente presentado****.*

Observación 2.2.1.1. *Abusando de la notación, supondremos que $X \subset F$ es un conjunto generador de G y los elementos de R son relaciones que equivalen a la identidad en G; i.e $r = e$ para todo $r \in R$.*
Nótese que lo anterior tiene sentido puesto que, si $\pi : F \to F/N$ es el homomorfismo canónico, entonces $\pi(X)$ es un conjunto generador de $G \cong F/N$ y para todo $r \in R$, $\pi(r)$ es igual a la identidad en $G \cong F/N$.

Proposición 2.2.2. *Todo grupo tiene una presentación y todo grupo finito es finitamente presentado.*

Demostración. Sea G un grupo, $X \subset G$ un conjunto generador para G y F el grupo libre en X. Como F es libre en X, para la función $\theta : X \to G$ existe un único homomorfismo $\varphi : F \to G$ tal que $\varphi|_X = \theta$. Ahora, puesto que X genera a G entonces φ es sobreyectiva, es decir $Im\varphi = G$. Por el primer teorema de isomorfismos, $F/Ker\varphi \cong Im\varphi$, es decir $F/N \cong G$ donde $N = Ker\varphi$. Por tanto $\langle X|N \rangle$ es una presentación para G, es decir $G = \langle X|N \rangle$.
Supongamos ahora que G es finito; luego F es libre de rango finito, es decir,
$r(F) = |X| < \infty$. Además, $[F : N] = |F/N| = |G| < \infty$. Por el teorema de Nielsen-Schreier (ver [5]) $r(N) = (|X| - 1)|G| + 1$, es decir $N = Ker\varphi$ es libre de rango finito; luego existe $R \subset N$ conjunto finito de generadores para N, es decir $N = \langle R \rangle$ y como $\overline{R}$ es el subgrupo normal más pequeño de N que contiene a R entonces $N = \overline{R}$.
Tenemos que $F/N \cong G$ con $N = \overline{R}$, por lo que $G = \langle X|R \rangle$ con X y R finitos. Por tanto G es finitamente presentado. ∎

2.3 Homomorfismos Inducidos

Lema 2.3.1. *Sean F, G, H grupos y $\nu : F \to G$, $\alpha : F \to H$ homomorfismos tales que:*
i) $Im\nu = G$ y
ii) $Ker\nu \subset Ker\alpha$.
Entonces existe un homomorfismo $\alpha' : G \to H$ tal que $\alpha' \circ \nu = \alpha$.

Demostración. Ver [5]. ■

Proposición 2.3.2. (*Test de Sustitución*) *Sean $G = \langle X \mid R \rangle$, H un grupo y $\theta : X \to H$ una función, entonces θ extiende a un homomorfismo $\alpha : G \to H$ si y sólo si para todo $x \in X$ y para todo $r \in R$, al sustituir x por $\theta(x)$ en r se obtiene la identidad en H.*

Demostación. Sean $\eta : R \to F$, $\varphi : X \to F$ las funciones inclusión de R en F y de X en F, respectivamente y sea $\pi : F \to G$ el homomorfismo canónico al cociente, (viendo a G como F/N donde $N = \overline{R}$).
De otra parte, como F es libre en X, para la función $\theta : X \to H$ existe un único homomorfismo $\upsilon : F \to H$ tal que $\upsilon\mid_X = \theta$.
$\Rightarrow$) Supongamos que existe $\alpha : G \to H$ homomorfismo que extiende a θ. Luego, para $f \in F$:

$$\begin{aligned}\alpha(\pi(f)) = \alpha(\pi(x_1x_2\dots x_n)) = \alpha(x_1x_2\dots x_n) = \alpha(x_1)\alpha(x_2)\dots\alpha(x_n) &= \theta(x_1)\theta(x_2)\dots\theta(x_n)\\ &= \upsilon(x_1)\upsilon(x_2)\dots\upsilon(x_n)\\ &= \upsilon(x_1x_2\dots x_n)\\ &= \upsilon(f),\end{aligned}$$

donde $f = x_1x_2\dots x_n$. Así, para probar el resultado, basta ver que $R \subset Ker\upsilon$. Ahora, puesto que $G \cong F/N$, entonces $R \subset \overline{R} = N = Ker\pi \subset Ker(\alpha\circ\pi) = Ker\upsilon$.
Note que si $x \in Ker\pi$, entonces $\pi(x) = 1_G$. Luego $(\alpha\circ\pi)(x) = \alpha(\pi(x)) = \alpha(1_G) = 1_H$, es decir $x \in Ker(\alpha\circ\pi) = Ker\upsilon$. Por tanto, $Ker\pi \subset Ker(\alpha\circ\pi)$.
$\Leftarrow$) Supongamos que para todo $r \in R$ el hecho de sustituir x por $\theta(x)$ en r da la identidad en H, es decir, supongamos que $R \subset Ker\upsilon$. Como $\overline{R}$ es el subgrupo normal más pequeño de F que contiene a R, entonces $\overline{R} \subset Ker\upsilon$ y como $\overline{R} = Ker\pi$, entonces $Ker\pi \subset Ker\upsilon$. Además, como $\upsilon : F \to H$ y $\pi : F \to G$ son homomorfismos con $Im\pi = G$, por el Lema 2.3.1 se sigue que existe $\alpha : G \to H$ homomorfismo tal que $\alpha\circ\pi = \upsilon$. Veamos ahora que $\alpha\mid_X = \theta$. En efecto, para todo $x \in X$, $\alpha(x) = \alpha(\pi(x)) = (\alpha\circ\pi)(x) = \upsilon(x) = \theta(x)$ (La última igualdad se tiene pues $\upsilon\mid_X = \theta$). Por tanto $\alpha\mid_X = \theta$, es decir α es una extensión de θ. ■

2.4 Productos directos

El teorema que enunciaremos a continuación, aunque no lo usaremos por ahora, si lo utilizaremos en la demostración de que $F \times \mathbb{Z}$ está embebido cuasi-isométricamente en el grupo de Thompson F.

Proposición 2.4.1. *Sean G y H grupos con presentaciones $\langle X \mid R \rangle$ y $\langle Y \mid S \rangle$ respectivamente. Entonces su* ***producto directo*** *$G \times H$ tiene una presentación dada por $\langle X, Y \mid R, S, [X,Y] \rangle$ donde $[X,Y] = \{x^{-1}y^{-1}xy \mid x \in X \ \wedge \ y \in Y\}$.*

Demostración. Sean $T = R \cup S \cup [X, Y]$ y $D = \langle X \cup Y \mid T \rangle$. Por el Test de Sustitución, las inclusiones $\iota_1 : X \to D$ y $\iota_2 : Y \to D$ inducen homomorfismos $\phi : G \to D$ y $\varphi : H \to D$. Sea $\alpha : G \times H \to D$ definida por $\alpha(g, h) = \phi(g)\varphi(h)$. Respecto a α podemos afirmar que:
i) α está bien definida: Esto es claro pues ϕ y φ lo están.
ii) α es homomorfismo: Sean (g_1, h_1) y (g_2, h_2) elementos de $G \times H$. Como $G = \langle X \mid R \rangle$ y $H = \langle Y \mid S \rangle$, entonces $h_1 = y_1^{\varepsilon_1} y_2^{\varepsilon_2} \dots y_n^{\varepsilon_n}$ y $g_2 = x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} \dots x_m^{\delta_m}$, donde $x_i \in X$, $y_i \in Y$ y $\varepsilon_i, \delta_i \in \{1, -1\}$ para $1 \leq i \leq n, m$. Luego,

$$\begin{aligned}
\alpha((g_1, h_1)(g_2, h_2)) = \alpha(g_1 g_2, h_1 h_2) &= \phi(g_1 g_2)\varphi(h_1 h_2) \\
&= \phi(g_1)\phi(g_2)\varphi(h_1)\varphi(h_2) \\
&= \phi(g_1)\phi(x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} \dots x_m^{\delta_m})\varphi(y_1^{\varepsilon_1} y_2^{\varepsilon_2} \dots y_n^{\varepsilon_n})\varphi(h_2) \\
&= \phi(g_1) x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} \dots x_m^{\delta_m} y_1^{\varepsilon_1} y_2^{\varepsilon_2} \dots y_n^{\varepsilon_n} \varphi(h_2) \\
&= \phi(g_1) y_1^{\varepsilon_1} y_2^{\varepsilon_2} \dots y_n^{\varepsilon_n} x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} \dots x_m^{\delta_m} \varphi(h_2) \\
&= \phi(g_1)\varphi(h_1)\phi(g_2)\varphi(h_2) \\
&= \alpha(g_1, h_1)\alpha(g_2, h_2)
\end{aligned}$$

Por tanto α es homomorfismo.
Por otro lado, sea $\nu : X \cup Y \to G \times H$ definida por $\nu(x) = (x, 1_H)$ y $\nu(y) = (1_G, y)$ para todo $x \in X$ y todo $y \in Y$. Por la Proposición 2.3.2, existe $\beta : D \to G \times H$ homomorfismo que extiende a ν.

Afirmamos que $\beta = \alpha^{-1}$. En efecto, dado $f \in D$, como $D = \langle X \cup Y \mid T \rangle$, entonces $f = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_r^{\varepsilon_r}$ donde $x_i \in X \cup Y$ y $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$. Luego,

$$\begin{aligned}
(\alpha \circ \beta)(f) = \alpha(\beta(x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_r^{\varepsilon_r})) &= \alpha(\beta(x_1)^{\varepsilon_1} \beta(x_2)^{\varepsilon_2} \dots \beta(x_r)^{\varepsilon_r}) \\
&= \alpha(\beta(x_1)^{\varepsilon_1})\alpha(\beta(x_2)^{\varepsilon_2}) \dots \alpha(\beta(x_r)^{\varepsilon_r})
\end{aligned} \tag{2}$$

Como $x_i \in X \cup Y$ entonces $x_i \in X$ ó $x_i \in Y$.
Caso *i)* Si $x_i \in X$, entonces $\beta(x_i) = \nu(x_i) = (x_i, 1_H)$ y por tanto

$$\alpha(\beta(x_i)^{\varepsilon_i}) = \alpha((x_i^{\varepsilon_i}, 1_H)) = \pi(x_i)^{\varepsilon_i}\varphi(1_H) = x_i^{\varepsilon_i} 1_H = x_i^{\varepsilon_i}$$

Caso *ii)* Si $x_i \in Y$, entonces $\beta(x_i) = \nu(x_i) = (1_G, x_i)$ y por tanto

$$\alpha(\beta(x_i)^{\varepsilon_i}) = \alpha(1_G, x_i^{\varepsilon_i}) = \phi(1_G)\varphi(x_i^{\varepsilon_i}) = 1_G x_i^{\varepsilon_i} = x_i^{\varepsilon_i}.$$

Así en (2) se tiene que $(\alpha \circ \beta)(f) = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_r^{\varepsilon_r} = f = id_D$.
Sea $(g, h) \in G \times H$, entonces $g \in G = \langle X \mid R \rangle$ y $h \in H = \langle Y \mid S \rangle$, entonces $g = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$

y $h = y_1^{\varepsilon_1} y_2^{\varepsilon_2} \dots y_m^{\varepsilon_m}$ con $x_i \in X$ y $y_i \in Y$. Luego,

$$\begin{aligned}
(\beta \circ \alpha)(g,h) = \beta(\alpha(g,h)) = \beta(\phi(g)\varphi(h)) &= \beta(\phi(g))\beta(\varphi(h)) \\
&= \beta(\phi(x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}))\beta(\phi(y_1^{\varepsilon_1} y_2^{\varepsilon_2} \dots y_m^{\varepsilon_m})) \\
&= \beta(x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n})\beta(y_1^{\varepsilon_1} y_2^{\varepsilon_2} \dots y_m^{\varepsilon_m}) \\
&= \nu(x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n})\nu(y_1^{\varepsilon_1} y_2^{\varepsilon_2} \dots y_m^{\varepsilon_m}) \\
&= (x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_m}, 1_H)(1_G, y_1^{\varepsilon_1} y_2^{\varepsilon_2} \dots y_m^{\varepsilon_m}) \\
&= (x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_m^{\varepsilon_m}, y_1^{\varepsilon_1} y_2^{\varepsilon_2} \dots y_m^{\varepsilon_m}) \\
&= (g,h)
\end{aligned}$$

Así, $\beta \circ \alpha = id_{G \times H}$. Por tanto $\beta = \alpha^{-1}$
De i), ii) y de lo anterior se sigue que $\alpha : G \times H \to D$ es un isomorfismo.
Por tanto $G \times H \cong D = \langle X \cup Y \mid T \rangle$; es decir, $G \times H$ tiene la presentación
$\langle X, Y \mid R, S, [X,Y] \rangle$. ∎

2.5 Nociones básicas de topología

Definición 2.5.1.

- *Sea (X,d) un espacio métrico.* ***La longitud*** *$\ell(c)$ de una curva $c : [a,b] \to X$ es*

$$\ell(c) = \sup_{a=t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b} \sum_{i=0}^{n-1} d(c(t_i), c(t_{i+1}))$$

  donde el supremo se toma sobre todas las posibles particiones con $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$. La longitud $\ell(c)$ o bien es un número no negativo o es infinita. Si $\ell(c)$ es finita, diremos que la curva c es rectificable.

- *Un espacio métrico (X,d) se dice* ***espacio de longitud*** *si la distancia entre cada par de puntos $x, y \in X$ es igual al ínfimo de la longitud de curvas rectificables uniendo a x con y.*

- *Sea (X,d) un espacio métrico. X se dice* ***espacio propio*** *si toda bola cerrada de radio finito es compacta.*

- *Sea (X,d) un espacio métrico. Una* ***geodésica*** *que une a $x \in X$ y a $y \in X$ es una función $c : [0, d(x,y)] \to X$, tal que $c(0) = x$, $c(d(x,y)) = y$ y $d(c(t), c(t')) = |t - t'|$ para todo $t, t' \in [0, d(x,y)]$. El espacio métrico (X,d) se dice* ***geodésico*** *si cada par de puntos en X pueden ser unidos mediante una geodésica.*

Definición 2.5.2. *Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos. Podemos dotar a $X \times Y$ de una métrica, definiendo la siguiente distancia para cada por de puntos $z = (x,y)$, $z' = (x', y') \in X \times Y$, como sigue:*

1. $d_{X\times Y}(z,z') = d_X(x,x') + d_Y(y,y')$ *ó*

2. $d_{X\times Y}(z,z') = max\{d_X(x,x'), d_Y(y,y')\}$ *ó*

3. $d_{X\times Y}(z,z') = \sqrt{d_X(x,x')^2 + d_Y(y,y')^2}$

Nota: Se puede probar que las tres métricas definidas anteriormente, son equivalentes. Para una prueba de ello, ver el Capítulo II de [6].

El siguiente teorema, dada su utilidad en la prueba de dos resultados importantes del siguiente capítulo, será enunciado solamente, pero su prueba puede ser consultada en la referencia que allí se da.

Teorema 2.5.3. ($Teorema\ de\ Hopf - Rinow$) *Sea X un espacio de longitud. Si X es completo y localmente compacto, entonces X es un espacio geodésico propio.*

Demostración. Ver [9]. ■

3 Acción de grupos y cuasi-isometrías

En este capítulo estudiaremos acciones de grupos en espacios métricos y en espacios topológicos. Describiremos cómo construir una presentación para un grupo arbitrario G, el cual actúa por homeomorfismos sobre un espacio topológico simplemente conexo X. Como resultados principales de este capítulo probaremos que:
i) Si X es un espacio de longitud simplemente conexo y G actúa propia y cocompactamente por isometrías en X, entonces G tiene una presentación finita.
ii) Si G_1 y G_2 son grupos con conjuntos generadores finitos A_1 y A_2 y si G_1 es cuasi-isométrico a G_2 y G_2 tiene una presentación finita $\langle A_2 \mid R_2 \rangle$, entonces G_1 tiene una presentación finita $\langle A_1 \mid R_1 \rangle$.

3.1 Acciones de grupos

Definición 3.1.1. *Una **acción** de un grupo G sobre un espacio topológico X es un homomorfismo $\phi : G \to Homeo(X)$, donde $Homeo(X)$ es el grupo de homeomorfismos de X.*

Notación:

- Usaremos $g{\cdot}x$ para denotar la imagen de $x \in X$ bajo $\phi(g)$; es decir, $\phi : G \to Homeo(X)$ definida para todo $g \in G$ por $\phi(g)$, donde $\phi(g) : X \to X$ está definida para todo $x \in X$ por $\phi(g)(x) = g \cdot x$. Así, una acción de un grupo G en un espacio topológico X es una función $h : G \times X \to X$, definida para todo $(g, x) \in G \times X$ por $h(g, x) = g \cdot x$.
- Para cualquier subconjunto $Y \subset X$, $g \cdot Y = \phi(g)(Y)$.
- Escribiremos $G \cdot Y$ para denotar $\bigcup\{g \cdot Y \mid g \in G\}$.

Definición 3.1.2. *Sea G un grupo actuando en un espacio métrico X.*

- *Diremos que la acción ϕ es **fiel** si $Ker\phi = \{1\}$.*
- *La acción de G en X se dice **libre** si para cada $x \in X$ y cada $g \neq 1$, $g \cdot x \neq x$.*
- *Denotaremos por G_x al **estabilizador** de $x \in X$, es decir, $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$.*
- *Diremos que G **actúa en X por isometrías** si $Im\phi \subseteq Isom(X) \subseteq Homeo(X)$.*
- *G actúa **cocompactamente** en X si existe $K \subset X$ compacto tal que $G \cdot K = X$.*
- *La acción de G en X se dice **propia** (o que G actúa propiamente en X) si para cada $x \in X$ existe $r > 0$ tal que $\{g \in G \mid g \cdot B(x, r) \cap B(x, r) \neq \Phi\}$ es finito.*

Observación: La definición anterior implica que para cada subconjunto compacto $K \subseteq X$, existe una vecindad abierta U tal que $\{g \in G \mid g \cdot U \cap U \neq \Phi\}$ es finito. En efecto, sea $K \subseteq X$ compacto. Como para todo $x \in K$, $x \in X$, y la acción de G en X es propia, existe $r_x > 0$ tal que $\{g \in G \mid g \cdot B(x, r_x) \cap B(x, r_x) \neq \Phi\}$ es finito. Claramente $K \subseteq \bigcup_{x_i \in K} B(x_i, \frac{r_i}{4})$ y como K es compacto, existen $x_1, x_2, \cdots, x_n \in K$ tales que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{r_i}{4})$, con $x_i \in K$ y $S(i) = \{g \in G \mid g \cdot B(x_i, r_i) \cap B(x_i, r_i) \neq \Phi\}$ es finito. Sea $U = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{r_i}{4})$, entonces U es una vecindad abierta de K. Afirmamos que $\{g \in G \mid g \cdot U \cap U \neq \Phi\}$ es finito. En efecto, si existiesen infinitos $g_n \in G$ (distintos) tales que $g_n \cdot U \cap U \neq \Phi$, entonces
$(g_n \cdot \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{r_i}{4})) \cap \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \frac{r_j}{4}) \neq \Phi$ para infinitos $g_n \in G$, de donde se sigue que
$(\bigcup_{i=1}^{n} g_n \cdot B(x_i, \frac{r_i}{4})) \cap \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \frac{r_j}{4}) \neq \Phi$ para infinitos $g_n \in G$; es decir,
$\bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{n} (g_n \cdot B(x_i, \frac{r_i}{4}) \cap B(x_i, \frac{r_i}{4})) \neq \Phi$ para infinitos $g_n \in G$. Luego existen
$i_0, i_1 \in \{1, \cdots, n\}$ tales que $g_n \cdot B(x_{i_0}, \frac{r_{i_0}}{4}) \cap B(x_{i_1}, \frac{r_{i_1}}{4}) \neq \Phi$ para infinitos $g_n \in G$, lo que a su vez implica que $B(x_{i_0}, \frac{r_{i_0}}{4}) \cap g_n^{-1} \cdot B(x_{i_1}, \frac{r_{i_1}}{4}) \neq \Phi$ para infinitos $g_n \in G$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $r_{i_0} \geq r_{i_1}$, entonces $g_n^{-1} \cdot B(x_{i_1}, \frac{r_{i_1}}{4}) \subset B(x_{i_0}, r_{i_0})$.
De otra parte, si $g_m \in G$ es tal que $g_m \cdot B(x_{i_0}, \frac{r_{i_0}}{4}) \cap B(x_{i_1}, \frac{r_{i_1}}{4}) \neq \Phi$, entonces
$g_n^{-1} g_m \cdot B(x_{i_0}, \frac{r_{i_0}}{4}) \cap g_n^{-1} \cdot B(x_{i_1}, \frac{r_{i_1}}{4}) \neq \Phi$ (ésto pues $g_m \cdot B(x_{i_0}, \frac{r_{i_0}}{4}) \cap B(x_{i_1}, \frac{r_{i_1}}{4}) \neq \Phi$ implica que $g_n^{-1} \cdot [g_m \cdot B(x_{i_0}, \frac{r_{i_0}}{4}) \cap B(x_{i_1}, \frac{r_{i_1}}{4})] \neq \Phi$ y
$g_n^{-1} \cdot [g_m \cdot B(x_{i_0}, \frac{r_{i_0}}{4}) \cap B(x_{i_1}, \frac{r_{i_1}}{4})] = g_n^{-1} g_m \cdot B(x_{i_0}, \frac{r_{i_0}}{4}) \cap g_n^{-1} \cdot B(x_{i_1}, \frac{r_{i_1}}{4}) \neq \Phi$); así existen infinitos $g_n^{-1} g_m \in G$ tales que $(g_n^{-1} g_m) \cdot B(x_{i_0}, \frac{r_{i_0}}{4}) \cap g_n^{-1} \cdot B(x_{i_1}, \frac{r_{i_1}}{4}) \neq \Phi$ y de aquí que existen infinitos $g_n^{-1} g_m \in G$ tales que $(g_n^{-1} g_m) \cdot B(x_{i_0}, \frac{r_{i_0}}{4}) \cap B(x_{i_0}, r_{i_0}) \neq \Phi$, lo que a su vez implica que existen infinitos $g_n^{-1} g_m \in G$ tales que $(g_n^{-1} g_m) \cdot B(x_{i_0}, r_{i_0}) \cap B(x_{i_0}, r_{i_0}) \neq \Phi$; es decir, $S(i_0) = \{g \in G \mid g \cdot B(x_{i_0}, r_{i_0}) \cap B(x_{i_0}, r_{i_0}) \neq \Phi\}$ es infinito, lo cual contradice el hecho de que $S(i_0) = \{g \in G \mid g \cdot B(x_{i_0}, r_{i_0}) \cap B(x_{i_0}, r_{i_0}) \neq \Phi\}$ es finito. En consecuencia, $\{g \in G \mid g \cdot U \cap U \neq \Phi\}$ finito.

Lema 3.1.3. *Sea X un espacio de longitud. Si existe un grupo actuando propia, cocompactamente y por isometrías en X, entonces X es completo y localmente compacto, así por el Teorema de Hopf-Rinow, X es un espacio geodésico propio.*

Demostración. Sea G un grupo actuando propia y cocompactamente por isometrías en X. Entonces existe $K \subseteq X$ compacto tal que $G \cdot K = X$, es decir $X = \bigcup_{g \in G} g \cdot K$. Como la acción es propia, por la observación anterior existe U vecindad abierta de K tal que $\{g \in G \mid g \cdot U \cap U \neq \Phi\}$ es finito.
Sea $x \in X$, entonces $x \in K$ ó $x \in X \setminus K$. Haremos el análisis solo para el caso $x \in K$, pues si $x \in X \setminus K$, como $X = \bigcup_{g \in G} g \cdot K$, existe $g_0 \in G$ tal que $x \in g_0 \cdot K = \phi_{g_0}(K)$, el cual es compacto pues ϕ_{g_0} es un homeomorfismo.
Si $x \in K$, sea $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset U$. Consideremos $\overline{B}(x, \frac{r}{2})$; claramente $\overline{B}(x, \frac{r}{2}) \subset U$. Afirmamos que $\overline{B}(x, \frac{r}{2})$ es compacta. En efecto, dada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión en $\overline{B}(x, \frac{r}{2})$, como para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in X = \bigcup_{g \in G} g \cdot K$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $(g_n) \subset G$ y $(k_n) \subset K$ tales que $x_n = g_n \cdot k_n$. Nótese que para todo n, $x_n \in g_n \cdot U \cap U$; por lo que $g_n \cdot U \cap U \neq \Phi$, pero como $\{g \in G \mid g \cdot U \cap U \neq \Phi\}$ es finito, entonces $\{g_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{g_1, g_2, \cdots, g_k\}$. Luego exiten $g \in \{g_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ y $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ subsucesión de (x_n) tales que $x_{n_j} = g \cdot k_{n_j}$. Consideremos $(k_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$, entonces $(k_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en K y como K es compacto, existe $(k_{n_{j_l}})_{l \in \mathbb{N}}$

subsucesión de $(k_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ y existe $k_0 \in K$ tal que $k_{n_{j_l}} \to k_0(l \to \infty)$; luego $g \cdot k_{n_{j_l}} \to g \cdot k_0$. Así $\{g \cdot k_{n_{j_l}}\}$ converge a $g \cdot k_0$. Por tanto $(x_{n_{j_l}})$ es una subsucesión de (x_n), convergente a $g\cdot k_0 \in \overline{B}(x, \frac{r}{2})$. Por tanto $\overline{B}(x, \frac{r}{2})$ es compacta. En consecuencia, X es localmente compacto.

Probemos ahora que X es completo. En efecto, sea (x_n) una sucesión de Cauchy en X. Como $X = \bigcup_{g\in G} g \cdot K$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n = g_n \cdot k_n$, con $(k_n) \subseteq K$ y $(g_n) \subseteq G$. Como $(k_n) \subseteq K$ y K es compacto, existe $(k_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ subsucesión de (k_n) y existe $k_0 \in K$ tales que $k_{n_j} \to k_0(j \to \infty)$. Como $k_0 \in X$ y la acción de G en X es propia, existe $r_0 > 0$ tal que $\{g \in G \mid \ g \cdot B(k_0, r_0) \cap B(k_0, r_0) \neq \Phi\}$ es finito.
De otra parte, como $k_{n_j} \to k_0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \geq N_1$, $d(k_{n_j}, k_0) < \frac{\varepsilon}{3}$. Como (x_n) es Cauchy, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \geq N_2$, $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{3}$. Sea $N := máx\{N_0, N_1\}$. Entonces, para todo $i, j \geq N$,

$$\begin{aligned}
d(g_{n_j}^{-1} g_{n_i} \cdot k_0, k_0) &= d(g_{n_i} \cdot k_0, g_{n_j} \cdot k_0)\\
&\leq d(g_{n_i} \cdot k_0, g_{n_i} \cdot k_{n_i}) + d(g_{n_i} \cdot k_{n_i}, g_{n_j} \cdot k_{n_j}) + d(g_{n_j} \cdot k_{n_j}, g_{n_j} \cdot k_0)\\
&= d(k_0, k_{n_i}) + d(x_{n_i}, x_{n_j}) + d(k_{n_j}, k_0)\\
&< \frac{r_0}{3} + \frac{r_0}{3} + \frac{r_0}{3}\\
&= r_0
\end{aligned}$$

Por tanto, para todo $i, j \geq N$, $g_{n_j}^{-1} g_{n_i} \cdot k_0 \in B(k_0, r_0)$ y como $g_{n_j}^{-1} g_{n_i} \cdot k_0 \in (g_{n_j}^{-1} g_{n_i}) \cdot B(k_0, r_0)$, entonces para todo $i, j \geq N$, $g_{n_j}^{-1} g_{n_i} \cdot k_0 \in B(k_0, r_0) \cap (g_{n_j}^{-1} g_{n_i}) \cdot B(k_0, r_0)$; es decir, para todo $i, j \geq N$, $B(k_0, r_0) \cap (g_{n_j}^{-1} g_{n_i}) \cdot B(k_0, r_0) \neq \Phi$; pero como $\{g \in G \mid \ g \cdot B(k_0, r_0) \cap B(k_0, r_0) \neq \Phi\}$ es finito, entonces $\{g_{n_j}^{-1} g_{n_i} \mid i, j \geq N\} = \{g_1, g_2, \cdots, g_k\}$; luego existe $g_t \in \{g_1, g_2, \cdots, g_k\}$ y existe $(x_{n_{j_l}})$ subsucesión de (x_n) tales que $x_{n_{j_l}} = g_t \cdot k_{n_{j_l}}$. Consideremos la sucesión $(k_{n_{j_l}})$, entonces $(k_{n_{j_l}})$ es una subsucesión de (k_{n_j}) y como $k_{n_j} \to k_0$, entonces $k_{n_{j_l}} \to k_0$. Luego, $g_t \cdot k_{n_{j_l}} \to g_t \cdot k_0 \in X$; es decir, $x_{n_{j_l}} \to g_t \cdot k_0 \in X$. Por tanto $(x_{n_{j_l}})$ es una subsucesión convergente de (x_n). En consecuencia X es completo. ■

Lema 3.1.4. *Sea G un grupo actuando propiamente y por isometrías en un espacio métrico X. Entonces para todo $g \in G$ y todo subconjunto abierto $U \subset X$, $g \cdot U$ es abierto en X.*

Demostración. Sea $z \in g.U$, entonces $z = g \cdot u$ con $u \in U$. Como $u \in U$ y U es abierto en X, existe $r > 0$ tal que $B(u, r) \subset U$. Afirmamos que $B(z, r) \subset g \cdot U$. En efecto, dado $y \in B(z, r)$, $d(y, z) < r$, es decir $d(y, g \cdot u) < r$, por lo que $d(g^{-1} \cdot y, u) < r$, por lo cual $g^{-1} \cdot y \in B(u, r) \subset U$, de donde se sigue que $y \in g \cdot U$. Por tanto $B(z, r) \subset g \cdot U$; en consecuencia $g \cdot U$ es abierto en X. ■

Nota: Del lema anterior se sigue que para todo $g \in G$, $g \cdot B(x, r)$ es abierto en X.

Proposición 3.1.5. *Sea G un grupo actuando propiamente y por isometrías en un espacio métrico X. Entonces:*
i) Para cada $x \in X$ existe $\epsilon > 0$ tal que si $g \cdot B(x, \epsilon) \cap B(x, \epsilon) \neq \Phi$ entonces $g \in G_x$.

ii) La distancia entre órbitas en X define una métrica en el espacio $G\backslash X$ de G-órbitas.
iii) Si un subespacio Y de X es invariante bajo la acción de un subgrupo $H \leq G$, entonces la acción de H sobre Y es propia.
iv) Si la acción de G es cocompacta entonces existe sólo un número finito de clases conjugadas de subgrupos isotópicos en G.

Demostración.
i) Recordemos que la órbita de x bajo la acción de G en X, es la clase de equivalencia $G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$. Sea $x \in X$, como G actúa propiamente en X, existe $r > 0$ tal que $A = \{g \in G \mid g \cdot B(x,r) \cap B(x,r) \neq \Phi\}$ es finito. Si $g \notin A$, $g \cdot B(x,r) \cap B(x,r) = \Phi$, de donde se sigue que $g \cdot x \notin B(x,r)$ y de aquí que $G \cdot x \cap B(x,r) \subseteq \{g \cdot x \mid g \in A\}$, el cual es finito pues A es finito. Luego $G \cdot x \cap B(x,r)$ es finito.
Sea $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño de manera que $G \cdot x \cap B(x, 2\epsilon) = \{x\}$.
Si $g \cdot B(x,\epsilon) \cap B(x,\epsilon) \neq \Phi$, afirmamos que $g \cdot x = x$. En efecto, si $z \in g \cdot B(x,\epsilon) \cap B(x,\epsilon)$, entonces $z = g \cdot y$ con $y, z \in B(x,\epsilon)$. Luego, $d(x,z) < \epsilon$ y $d(x,y) < \epsilon$, de donde

$$\begin{aligned} d(x, g\cdot x) \leq d(x,z) + d(z, g\cdot x) = d(x,z) + d(g\cdot y, g\cdot x) &= d(x,z) + d(y,x) \\ &< \epsilon + \epsilon \\ &= 2\epsilon \end{aligned}$$

Así $g \cdot x \in B(x, 2\epsilon)$ y como $g \cdot x \in G \cdot X$ entonces $g \cdot x \in G \cdot x \cap B(x, 2\epsilon) = \{x\}$, por lo que $g \cdot x = x$, es decir, $g \in G_x$.

ii) Dados $G \cdot x$, $G \cdot y$ en $G\backslash X$, $d(G\cdot x, G\cdot y) = inf\{d(x, g\cdot y) \mid g \in G\}$. Veamos que d es una seudo métrica. En efecto:
a) Como para todo $g \in G$, $d(x, g\cdot y) \geq 0$, entonces $inf\{d(x, g\cdot y) \mid g \in G\} \geq 0$, es decir, $d(G\cdot x, G\cdot y) \geq 0$. Es claro que $d(G\cdot x, G\cdot x) = 0$.
b)

$$\begin{aligned} d(G\cdot x, G\cdot y) = inf\{d(x, g\cdot y) \mid g \in G\} &= inf\{d(g\cdot y, x) \mid g \in G\} \\ &= inf\{d(g^{-1}\cdot(g\cdot y), g^{-1}\cdot x) \mid g \in G\} \\ &= inf\{d(y, g^{-1}\cdot x) \mid g \in G\} \\ &= inf\{d(y, \hat{g}\cdot x) \mid \hat{g} \in G\} \\ &= d(G\cdot y, G\cdot x). \end{aligned}$$

c) Veamos que para todo $G\cdot x$, $G\cdot y$ y $G\cdot z \in G\backslash X$, $d(G\cdot x, G\cdot z) \leq d(G\cdot x, G\cdot y) + d(G\cdot y, G\cdot z)$. En efecto, como $d(G\cdot x, G\cdot y) = inf\{d(x, g'\cdot y) \mid g' \in G\}$, existe $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sucesión en G tal que $\inf_{g'\in G} d(x, g'\cdot y) = \lim_{i\to\infty} d(x, g_i\cdot y)$. Además, como para todo $g, g' \in G$,

$d(x, g \cdot z) \leq d(x, g' \cdot y) + d(g' \cdot y, g \cdot z)$, entonces:

$$
\begin{aligned}
inf\{d(x, g \cdot z) \mid g \in G\} &\leq inf\{d(x, g' \cdot y) + d(g' \cdot y, g \cdot z) \mid g, g' \in G\} \\
&\leq \lim_{i \to \infty} inf\{d(x, g_i \cdot y) + d(g_i \cdot y, g \cdot z) \mid g \in G\} \\
&\leq \lim_{i \to \infty} inf\{d(x, g_i \cdot y) + d(y, (g_i^{-1} g) \cdot z) \mid g \in G\} \\
&= \lim_{i \to \infty} inf\{d(x, g_i \cdot y) + d(y, \widehat{g} \cdot z) \mid \widehat{g} \in G\} \\
&\leq \lim_{i \to \infty} inf\{d(x, g_i \cdot y)\} + \lim_{i \to \infty} inf\{d(y, \widehat{g} \cdot z) \mid \widehat{g} \in G\} \\
&\leq \lim_{i \to \infty} d(x, g_i \cdot y) + inf\{d(y, \widehat{g} \cdot z) \mid \widehat{g} \in G\} \\
&\leq d(G \cdot x, G \cdot y) + d(G \cdot y, G \cdot z)
\end{aligned}
$$

Es decir, $d(G \cdot x, G \cdot z) \leq d(G \cdot x, G \cdot y) + d(G \cdot y, G \cdot z)$.

$d)$ Veamos que si $G \cdot x \neq G \cdot y$ entonces $d(G \cdot x, G \cdot y) > 0$. En efecto, si $d(G \cdot x, G \cdot y) = 0$, entonces $inf_{g \in G} d(x, g \cdot y) = 0$. Luego existe $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sucesión en G tal que $\lim_{i \to \infty} d(x, g_i \cdot y) = 0$. Como $x \in X$, por $i)$ existe $\varepsilon > 0$ tal que si $g \cdot B(x, \varepsilon) \cap B(x, \varepsilon) \neq \Phi$ entonces $g \cdot x = x$. Como $\lim_{i \to \infty} d(x, g_i \cdot y) = 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \geq N$, $d(x, g_i \cdot y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego, para todo $i, j \geq N$,

$$
\begin{aligned}
d(x, (g_i g_j^{-1}) \cdot x) \leq d(x, g_i \cdot y) + d(g_i \cdot y, (g_i g_j^{-1}) \cdot x) &= d(x, g_i \cdot y) + d(y, g_j^{-1} \cdot x) \\
&= d(x, g_i \cdot y) + d(x, g_j \cdot y) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

Es decir, para todo $i, j \geq N$, $d(x, (g_i g_j^{-1}) \cdot x) < \varepsilon$ y de aquí que para todo $i, j \geq N$, $(g_i g_j^{-1}) \cdot x \in B(x, \varepsilon)$ y como $(g_i g_j^{-1}) \cdot x \in (g_i g_j^{-1}) \cdot B(x, \varepsilon)$, entonces para todo $i, j \geq N$ $g_i g_j^{-1} \in B(x, \varepsilon) \cap (g_i g_j^{-1}) \cdot B(x, \varepsilon)$. Por $i)$ se sigue que para todo $i, j \geq N$, $(g_i g_j^{-1}) \cdot x = x$. De otra parte, para todo $i, j \geq N$, $d(x, g_i \cdot y) \leq d(x, (g_i g_j^{-1}) \cdot x) + d((g_i g_j^{-1}) \cdot x, g_i \cdot y)$; entonces para todo $i, j \geq N$, $d(x, g_i \cdot y) \leq d(g_j^{-1} \cdot x, y) = d(x, g_j \cdot y)$. Análogamente, para todo $i, j \geq N$, $d(x, g_j \cdot y) \leq d(x, g_i \cdot y)$ y por tanto, para todo $i, j \geq N$, $d(x, g_i \cdot y) = d(x, g_j \cdot y)$. En particular, $d(x, g_i \cdot y) = d(x, g_{_N} \cdot y)$ para todo $i \geq N$. Luego,
$0 = \lim_{i \to \infty} d(x, g_i \cdot y) = \lim_{i \to \infty} d(x, g_{_N} \cdot y) = d(x, g_{_N} \cdot y)$; por lo que $x = g_{_N}$. Por tanto $G \cdot x = G \cdot y$.

$iii)$ Sean $Y \leq X$ y $H \leq G$ tales que $H \cdot Y = Y$. Veamos que H actúa propiamente en Y. En efecto, veamos inicialmente que H actúa por isometrías en Y; es decir, si $\phi : H \to Homeo(Y)$ es la acción de H en Y, entonces $Im(\phi) \subseteq Isom(Y)$. Nótese que $Im(\phi) = \{\phi_h \mid h \in H\}$. Dado $\phi_h \in Im(\phi)$, $\phi_h : Y \to Y$, definida para todo $y \in Y$ por $\phi_h(y) = h \cdot y = y$ (ésto pues $H \cdot Y = Y$); luego, para todo $y_1, y_2 \in Y$, $d(\phi_h(y_1), \phi_h(y_2) = d(h \cdot y_1, h \cdot y_2) = d(y_1, y_2)$. Por tanto ϕ_h es una isometría y en consecuencia $Im(\phi) \subseteq Isom(Y) \subseteq Homeo(Y)$.

Para ver que H actúa propiamente en Y, basta probar que para cada $y \in Y \leq X$, existe $r > 0$ tal que $\{h \in H \mid h \cdot B(y, r) \cap B(y, r) \neq \Phi\}$ es finito. En efecto, sea $y \in Y \leq X$ entonces $y \in X$ y como G actúa propiamente en X, existe $r > 0$ tal que $\{g \in G \mid g \cdot B(y, r) \cap B(y, r) \neq \Phi\}$ es finito. Afirmamos que $\{h \in H \mid h \cdot B(y, r) \cap B(y, r) \neq \Phi\}$ es finito, pues de existir infinitos $h \in H$ con $h \cdot B(y, r) \cap B(y, r) \neq \Phi$, entonces existirían infinitos $h \in G$ tales que $h \cdot B(y, r) \cap B(y, r) \neq \Phi$, lo que contradice el hecho que la acción de G en X es propia.

iv) Supongamos que G actúa en X cocompactamente, entonces existe $K \subseteq X$ compacto tal que $G \cdot K = X$. Como G actúa en X propiamente, para cada $x \in X$ existe $r_x > 0$ tal que $\{g \in G \mid g \cdot B(x, r_x) \cap B(x, r_x) \neq \Phi\}$ es finito. Como $K \subseteq X$, claramente $K \subseteq \bigcup_{x_i \in K} B(x_i, r_i)$ y $S(i) = \{g \in G \mid g \cdot B(x_i, r_i) \cap B(x_i, r_i) \neq \Phi\}$ es finito. Como K es compacto, existen $x_1, \ldots, x_n \in K$ tales que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i)$ y para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $S(i) = \{g \in G \mid g \cdot B(x_i, r_i) \cap B(x_i, r_i) \neq \Phi\}$ es finito.
Sea $\sum := \bigcup_{i=1}^{n} S(i)$. Como $X = G \cdot K = \bigcup_{g \in G} g \cdot K$, entonces para cada $x \in X$ existe $g \in G$ tal que $x \in g \cdot K$, es decir $x = g \cdot k$, para algún $k \in K$.

Afirmamos que $g^{-1}G_x g = G_{g^{-1} \cdot x}$. En efecto,
$g^{-1}G_x g = \{g^{-1}hg \mid h \in G_x\} = \{g^{-1}hg \mid h \cdot x = x\}$ y $G_{g^{-1} \cdot x} = \{h \in G \mid h \cdot (g^{-1} \cdot x) = g^{-1} \cdot x\}$.
Sea $t \in g^{-1}G_x g$, entonces $t = g^{-1}hg$ con $h \cdot x = x$. Luego,
$t \cdot (g^{-1} \cdot x) = (tg^{-1}) \cdot x = (g^{-1}h) \cdot x = g^{-1} \cdot (h \cdot x) = g^{-1} \cdot x$, es decir $t \in G_{g^{-1} \cdot x}$. Por tanto $g^{-1}G_x g \subseteq G_{g^{-1} \cdot x}$. De otra parte, si $m \in G_{g^{-1} \cdot x}$, entonces $m \cdot (g^{-1} \cdot x) = g^{-1} \cdot x$. Luego, si
$h = gmg^{-1}$, $m = g^{-1}(gmg^{-1})g = g^{-1}hg$ y
$h \cdot x = (gmg^{-1}) \cdot x = g \cdot (m \cdot (g^{-1} \cdot x)) = g \cdot (g^{-1} \cdot x) = x$, de donde $m = g^{-1}hg$ con $h \cdot x = x$, es decir, $m \in g^{-1}G_x g$. Por tanto $g^{-1}G_x g = G_{g^{-1} \cdot x}$.

Afirmamos que $g^{-1}G_x g \subseteq \sum$. En efecto, Sea $t \in g^{-1}G_x g = G_{g^{-1} \cdot x}$. Entonces
$t \cdot (g^{-1} \cdot x) = g^{-1} \cdot x$. Además, como $x \in G \cdot K$ (esto pues $X = G \cdot K$) y $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i)$, entonces $G \cdot K \subseteq g \cdot \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i) = \bigcup_{i=1}^{n} g \cdot B(x_i, r_i)$, es decir, $x \in G \cdot K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} g \cdot B(x_i, r_i)$, por lo que existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in g \cdot B(x_i, r_i)$ y $S(i) = \{g \in G \mid g \cdot B(x_i, r_i) \cap B(x_i, r_i) \neq \Phi\}$ es finito. Luego, $x = g \cdot z$ con $z \in B(x_i, r_i)$. Así, $t \cdot (g^{-1} \cdot x) = t.z = z$ con $z \in B(x_i, r_i)$, lo que equivale a que $t.B(x_i, r_i) \cap B(x_i, r_i) \neq \Phi$, lo que a su vez equivale a que
$t \in S(i) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S(i) = \sum$. Por tanto, para cada $x \in X$, $g^{-1}G_x g \subseteq \sum$ (el cual es finito), por lo que para cada $x \in X$, $g^{-1}G_x g$ es finito. En consecuencia, existen sólo finitas clases conjugadas de subgrupos isotópicos en G. ■

3.2 Presentando grupos de homeomorfismos

En esta secccción construiremos una presentación para un grupo arbitrario G actuando por homeomorfismos sobre un espacio topológico simplemente conexo X. Además, Si X es un espacio de longitud simplemente conexo y G actúa propia, cocompactamente y por isometrías en X, entonces la construccción que describiremos dará una presentación finita para G.

Grupos libres y presentaciones

Definición 3.2.1.

- *Un grafo combinatorio* Γ *consiste de un par* (ν, ϵ) *donde* ν *es el conjunto de vértices y* ϵ *es el conjunto de aristas, y un par de funciones* $\partial_0, \partial_1 : \epsilon \to \nu$*, llamadas puntos finales. Supondremos que* $\nu = \partial_0(\epsilon) \cup \partial_1(\epsilon)$*. Asociaremos a* Γ *el conjunto* X_Γ *o simplemente* X*, donde* $X := (\epsilon \times [0,1])/\sim$ *y donde "*$\sim$*"es la relación de equivalencia generada por* $(e,i) \sim (\hat{e}, \hat{i})$*, si* $\partial_i(e) = \partial_{\hat{i}}(\hat{e})$*; con* $e, \hat{e} \in \epsilon$ *y* $i, \hat{i} \in \{0,1\}$*. Seguidamente, sea* $P : \epsilon \times [0,1] \to X$ *la función cociente, tal que* $\nu = p(\epsilon \times \{0,1\})$*. Para cada* $e \in \epsilon$*, sea* $f_e : [0,1] \to X$*, definida para todo* $t \in [0,1]$ *por* $f_e(t) = P(e,t)$*. Si* $f_e(0) = f_e(1)$*,diremos que la arista* e *es un lazo (loop).*

- *Un camino lineal por tramos es una función* $c : [0,1] \to X$ *para la cual existe una partición* $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = 1$ *tal que para cada* $i \in \{0, \ldots, n-1\}$*,* $c\,|_{[t_i, t_{i+1}]} = f_{e_i} \circ c_i$*, donde* $e_i \in \epsilon$ *y* $c_i : [t_i, t_{i+1}] \to [0,1]$ *es una función afín. Diremos que* c *une a* x *con* y *si* $c(0) = x$ *y* $c(1) = y$*. La longitud de* c*, denotada* $l(c)$ *está definida por* $l(c) = \sum_{i=0}^{n-1} l(c_i)$*, donde* $l(c_i) = \lambda(e_i)\,|c_i(t_i) - c_{i+1}(t_{i+1})|$ *y* $\lambda : \epsilon \to (0, \infty)$ *es una función que asocia una longitud* $\lambda(e)$ *a cada arista* e*.*

- *Definimos una seudo métrica* $d : X \times X \to [0, \infty]$*, por:*
  $d(x,y) = inf\,\{l(c) \mid c : [0,1] \to X$ *es un camino lineal por tramos que une a* x *y* $y\}$
  (X, d) *será llamado un grafo métrico.*

- *Un grafo combinatorio* Γ *es un árbol si el correspondiente grafo métrico* X*, donde todas las aristas tienen longitud 1, es conexo y simplemente conexo.*

Nota: En la definición anterior, supondremos que X es conexo, es decir, que cualquier par de puntos $x, y \in X$ se pueden unir mediante un camino lineal por tramos.

Definición 3.2.2. *El grafo de Cayley* $Ç_A(G)$ *de un grupo* G *con respecto a un conjunto de generadores* A*, es el grafo métrico cuyos vértices están en correspondencia 1-1 con los elementos de* G *y el cual tiene una arista (marcada a) de longitud 1 uniendo* g *a* ga *para cada* $g \in G$ *y cada* $a \in A$*. Aquí,* $\nu = G$*,* $\epsilon = \{(g,a) \mid g \in G,\ a \in A\}$*,* $\partial_0(g,a) = g$*,* $\partial_1(g,a) = ga$ *y* $\lambda : \epsilon \to [0, +\infty]$ *es la función constante 1.*
Las aristas dirigidas en $Ç_A(G)$ *están marcadas por los generadores y sus inversos y por tanto existe una correspondencia 1-1 entre las palabras en* $F(A)$ *y los caminos de aristas saliendo desde cada vértice de* $Ç_A(G)$*. Una arista camino es un lazo si y sólo si la palabra marcando a esta arista es la identidad en* G*. La acción de* G *en sí mismo por multiplicación a izquierda extiende a una acción libre sobre* $Ç_A(G)$*, a saber: la acción de* g_0 *envía la arista marcada a e iniciando en* g *a la arista marcada a e iniciando en el vértice* $g_0 g$*.*

Pegando 2-celdas

En este aparte describiremos cómo construir un nuevo espacio M a partir de un espacio dado A, pegando fronteras de n-bolas en A. Esta descripción será de gran utilidad en la siguiente sección cuando abordemos la prueba del Lema 3.3.1 y otros resultados de gran importancia para el desarrollo de este trabajo.

Definición 3.2.3. *Sea I un conjunto de índices, sea $n \geq 0$ y sea $B^n(I) = \coprod_{\alpha \in I} B^n_\alpha$, donde cada $B^n_\alpha = B^n$, es decir, la suma topológica de copias de B^n indizadas por I.*
Sea $S^{n-1}(I) = \coprod_{\alpha \in I} S^{n-1}_\alpha$ donde $S^{n-1}_\alpha = S^{n-1}$. Sea $f : S^{n-1}(I) \to A$ y sea "$\sim$"la relación de equivalencia en $A \coprod B^n(I)$ generada por: $x \sim f(x)$ siempre que $x \in S^{n-1}(I)$. Entonces el espacio cociente $M := (A \coprod B^n(I))/\sim$ es el espacio obtenido pegando $B^n(I)$ a A usando f.

Proposición 3.2.4. *Sea $q : A \coprod B^n(I) \to M$ la función cociente que envía cada punto en su clase de equivalencia. Entonces $q\mid_A : A \to M$ es un embebimiento cerrado y $q \mid_{B^n(I)-S^{n-1}(I)}$ es un embebimiento abierto.*

Demostración. Ver [7]. ■

Observación 3.2.4.1.

- *Identificaremos $a \in A$ con $q(a) \in M$ y veremos a A como un subconjunto cerrado de M.*
- *Sea $e^n_\alpha = q(B^n_\alpha)$. Los conjuntos e^n_α serán llamados las n-celdas del par (M, A).*
- *Sea $e^{0\ n}_\alpha = e^n_\alpha - A$. Por la Proposición anterior $e^{0\ n}_\alpha$ es abierto en M. Además, sea $\dot{e} = e^n_\alpha \cap A$.*
- *La función $q_\alpha := q \mid_{B^n_\alpha} : (B^n_\alpha, S^{n-1}_\alpha) \to (e^n_\alpha, \dot{e}^n_\alpha)$ es llamada la función característica para la celda e^n_α y la función $f_\alpha := f \mid_{S^{n-1}_\alpha} : S^{n-1}_\alpha \to A$ es llamada la función pegamiento para la celda e^n_α.*

Definición 3.2.5. *Un CW complejo consiste de un espacio K y una sucesión $\{x^n \mid n \geq 0\}$ de subespacios tales que*
i) x^0 es discreto;
ii) Para cada $n \geq 1$, x^n es obtenido de x^{n-1} pegando n-celdas;
iii) $K = \bigcup_n x^n$;
iv) K tiene la topología débil respecto a $\{x^n\}$.

Notaciones:

- Se acostumbra a decir "Sea K un CW complejo"; pero dos CW complejos diferentes pueden tener el mismo espacio fundamental. Entonces se escribe $(K, \{x^n\})$.
- Para efectos de pruebas por inducción, consideramos $x^{-1} = \Phi$.
- El subespacio x^n es llamado el n-esqueleto del CW complejo K.
- Si $K = x^n$ para algún n, entonces la dimensión del CW complejo es $dim(K) = min\{n \mid K = x^n\}$ y en otro caso, es decir, si $K \neq x^n$ para todo n, entonces definimos $dim(K) = \infty$.

En lo que sigue, trabajaremos con CW-complejos 2-dimensionales; es decir, complejos combinatorios de dimensión 2. Para ello, sea K un CW complejo 2-dimensional y sea $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ la colección de 2-celdas asociadas a K. Sea x^1 el 1-esqueleto de K; así K es el 2-complejo obtenido pegando a x^1 las 2-celdas e_α, usando la función pegamiento f definida en la Observación 3.2.4.1.
Existe una manera obvia de dotar cualquier CW complejo 2-dimensional K de una estructura por piezas, a saber: Metrizamos el 1-esqueleto de K de modo que pueda ser visto como un grafo métrico con aristas de longitud 1 y que cada e_α sea polígono Euclídeo regular con lados de longitud 1.

3.3 2-Complejos asociados a presentaciones de grupos

Dado cualquier grupo G, una presentación de G, $\langle A \mid R\rangle$ y $Ç_A(G)$ su correspondiente grafo de Cayley, podemos asociar a esta presentación un 2-complejo $K := K(A;R)$, el cual es compacto si y sólo si la presentación es finita. K tiene un vértice y éste tiene una arista ϵ_a (orientada y marcada a) por cada generador $a \in A$; así las aristas lazos en el 1-esqueleto de K están en correspondencia 1-1 con las palabras en $F(A)$, a saber: la letra a^{-1} corresponde a atravesar la arista ϵ_a en dirección opuesta a su orientación y la palabra $w = a_1 \dots a_n$ corresponde a el lazo que es la yuxtaposición de las aristas dirigidas a_1,a_2,...,a_n; en este caso decimos que w marca este lazo.

Las 2-celdas e_α de K son indizadas por las relaciones $r \in R$, es por eso que de ahora en adelante escribiremos e_r en lugar de e_α. De acuerdo con lo dicho en el párrafo anterior, si $r = a_1a_2 \dots a_n$ entonces e_r es pegada a lo largo del lazo marcado $a_1a_2 \dots a_n$.

Lema 3.3.1. *Sea G un grupo con conjunto generador A y sea R un subconjunto del kernel de la función natural $F(A) \to G$. Consideremos el 2-complejo que obtenemos pegando 2-celdas a todas las aristas lazos en el grafo de Cayley $Ç_A(G)$ que son marcadas por las palabras reducidas $r \in R$. Este 2-complejo es simplemente conexo si y sólo si $\overline{R} = Ker(F(A) \to G)$.*

Demostración. Como $F(A)$ es el grupo libre en A, entonces de la definición del grafo de Cayley para un grupo con conjunto generador, es claro que $Ç_A(F(A))$ no tiene ciclos (ésto, pues en $F(A)$ no hay relaciones) y que para cualquier par de vértices en $Ç_A(F(A))$ siempre existe un camino de aristas uniendo dichos vértices, es decir $Ç_A(F(A))$ es conexo; además, la longitud de cada arista es 1. Por tanto $Ç_A(F(A))$ es un árbol.
Sea $\varphi : F(A) \to G$, definida para todo $w \in F(A)$ por $\varphi(w) = \overline{w}$ y sea $N = Ker(\varphi)$. Como G es libre en A, φ es sobreyectiva y por el primer teorema de isomorfismos, $G \cong F(A)/N$. Ahora, puesto que los vértices de $Ç_A(G)$ corresponden a elementos de G, las aristas son palabras en $F(A)$, y como las aristas de $Ç_A(F(A))$ son palabras en $F(A)$ y los vértices están marcados por los elementos del grupo libre $F(A)$, es claro que la acción libre de N sobre $Ç_A(F(A))$, envía clases de vértices de $Ç_A(F(A))$ en clases de vértices de $Ç_A(G)$ y envía clases de aristas de $Ç_A(F(A))$ en clases de aristas de $Ç_A(G)$ y por tanto $Ç_A(G)$ es el cociente de

$Ç_A(F(A))$ por la libre acción de N.

Afirmamos que $\pi_1(Ç_A(G),1) = N$. En efecto, sea $a \in Ç_A(G)$ una arista lazo basada en 1. Por la definición de arista lazo en $Ç_A(G)$, a es una palabra en $F(A)$ que equivale a la identidad en G; luego $[a] = \{1\}$; es decir $\varphi(a) = 1$, por lo que $a \in Ker(\varphi) = N$. Por tanto $\pi_1(Ç_A(G),1) \subseteq N$.
De otra parte, si $w \in N$, entonces $w \in F(A)$ y $[w] = \{1\}$, de aquí que w es una palabra en $F(A)$ que equivale a la identidad en G, es decir w es una arista lazo de $Ç_A(G)$ basada en 1. Por tanto $w \in \pi_1(Ç_A(G),1)$. En consecuencia $\pi_1(Ç_A(G),1) = N$.

Afirmación: Sea $w \in F(A)$, entonces $w \in N$ si y sólo si w etiqueta a un lazo de $Ç_A(G)$ basado en 1.

Demostración.
$\Rightarrow$) Si $w \in N$, entonces $\varphi(w) = \overline{w} = \{1\}$, pero como las aristas lazos de $Ç_A(G)$ corresponden a palabras en $F(A)$ que equivalen a la identidad en G, necesariamente w es la etiqueta de un lazo en $Ç_A(G)$, basado en 1.
$\Leftarrow$) Inmediata. ■

Ahora, por cada palabra reducida $r \in R$ y cada vértice g de $Ç_A(G)$, peguemos una 2 celda alrededor de la arista lazo marcada r que empieza en g y llamemos $u := u_r$ a la palabra reducida en $F(A)$ que inicia en 1 y finaliza en g. Sea $K := K(A;R)$ el 2-complejo obtenido de esta manera y sea $\widetilde{N} = \langle u_i^{-1} r_i u_i \mid r_i \in R\rangle$ el subgrupo normal de $\pi_1(Ç_A(G),1)$ generado por todos los lazos $u_i^{-1} r_i u_i$; entonces $\widetilde{N} \subseteq Ker(\pi_1(Ç_A(G),1) \to \pi_1(K,1))$. Por la Proposición 1.26 [8, pag. 50], la inclusión $i : Ç_A(G) \to K$ induce una sobreyección $i^* : \pi_1(Ç_A(G),1) \to \pi_1(K,1)$ con $Ker(i^*) = \widetilde{N}$; por tanto $\pi_1(K,1) \cong \pi_1(Ç_A(G),1) \diagup \widetilde{N}$. Es decir, como $\pi_1(Ç_A(G),1) = N$, $\pi_1(K,1) \cong N \diagup \langle u_i^{-1} r_i u_i\rangle$
Afirmamos que $\widetilde{N} = \overline{R}$. En efecto, para todo $r_i \in R$, $r_i = 1^{-1} r_i 1 \in \widetilde{N}$, por lo que $R \subseteq \widetilde{N}$. Pero claramente $\widetilde{N} \lhd N$. Tenemos que $R \subseteq \widetilde{N} \lhd N = \pi_1(Ç_A(G),1)$ y como $\overline{R}$ es el subgrupo normal más pequeño de N que contiene R, entonces $\widetilde{N} = \overline{R}$. Por tanto
$\pi_1(K,1) \cong N \diagup \overline{R}$. Finalmente, $K := K(A;R)$ es simplemente conexo si y sólo si
$\pi_1(K,1) = \{1\}$, es decir, $|\pi_1(K,1)| = 1$ y esto ocurre si y sólo si $N = \overline{R}$. ■

Teorema 3.3.2. *Sea X un espacio topológico, sea G un grupo actuando en X por homeomorfismos y sea $U \subseteq X$ abierto tal que $X = G \cdot U$.*
i) Si X es conexo, entonces el conjunto $S = \{g \in G \mid g \cdot U \cap U \neq \Phi\}$ genera a G.
ii) Sea A_S un conjunto de símbolos a_s indizados por S. Si tanto X como U son conexos por caminos y X es simplemente conexo, entonces $G = \langle A_S \mid R\rangle$, donde
$R = \{a_{s_1} a_{s_2} a_{s_3}^{-1} \mid s_i \in S;\ U \cap (s_1 \cdot U) \cap (s_3 \cdot U) \neq \Phi;\ s_1 s_2 = s_3 \text{ en } G\}$.

Demostración.
i) Sea $H = \langle S\rangle = \bigcap\{K \leq G \mid K \supset S\}$, es decir, H es el subgrupo de G generado por S. Sea $V = H \cdot U = \bigcup_{h\in H} h \cdot U$ y sea $V' = (G \setminus H) \cdot U$. Entonces $V \cap V' = \Phi$; pues de existir $x \in X$

tal que $x \in V \cap V'$, entonces $x \in V$ y $x \in V'$; pero $V = \bigcup_{h \in H} h \cdot U$y $V' = \bigcup_{h' \in G \setminus H} h' \cdot U$, entonces existen $h \in H$ y $h' \in G \setminus H$ tales que $x \in h \cdot U$ y $x \in h' \cdot U$, es decir, $x \in h' \cdot U \cap h \cdot U$. Luego, $h' \cdot U \cap h \cdot U \neq \Phi$. Así,

$$\begin{aligned} h^{-1} \cdot (h' \cdot U \cap h \cdot U) \neq \Phi \Leftrightarrow h^{-1} \cdot (h' \cdot U) \cap h^{-1} \cdot (h \cdot U) \neq \Phi &\Leftrightarrow (h^{-1}h') \cdot U \cap (h^{-1}h) \cdot U \neq \Phi \\ &\Leftrightarrow (h^{-1}h') \cdot U \cap U \neq \Phi \end{aligned}$$

Entonces $h^{-1}h' \in S$, por lo que $h' \in hS \subset HS \subset H$ (ésto, pues $S \subset H$). Así $h' \in H$, lo que contradice el hecho que $h' \in G \setminus H$. En consecuencia, $V \cap V' = \Phi$, es decir, los abiertos V y V' son disjuntos.
Tenemos que X conexo con $X = G \cdot U = (G \setminus H \cup H) \cdot U = (G \setminus H) \cdot U \cup H \cdot U = V' \cup V$ y como V, V' son abiertos con $V \neq \Phi$ (pues $H \neq \Phi$, ya que $S \subseteq H = \langle S \rangle$ y $S \neq \Phi$ pues $(1 \in S)$ y $V \cap V' = \Phi$, entonces $V' = \Phi$ y $V = X$; pero $V = X \Leftrightarrow H \cdot U = G \cdot U$. Entonces $H = G$, pues de existir $g \in G \setminus H$, entonces $g \cdot U \notin H \cdot U$ y $g \cdot U \in G \cdot U$, así $H \cdot U \neq G \cdot U$, lo cual es una contradicción. Por tanto $G = H = \langle S \rangle$, es decir S genera a G.

ii) Recordemos que dado un grupo G y G-conjuntos X, Y, una equivarianza es una función continua $f : X \to Y$ tal que $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ para todo $x \in X$ y todo $g \in G$.
Consideremos el grafo de Cayley $Ç_{A_S}(G)$ y sea K el 2-complejo combinatorio obtenido de $Ç_{A_S}(G)$ pegando 2-celdas a cada una de las aristas lazos, marcadas por las palabras $r \in R$. Sea $\varphi : F(A_S) \to G$ el homomorfismo natural. Para probar que $G = \langle A_S \mid R \rangle$; es decir, $G \cong F(A_S) \diagup \overline{R}$, por el lema anterior es suficiente probar que K es simplemente conexo. En efecto, como el disco 2-dimensional D es simplemente conexo, construiremos una función continua $\widehat{\phi} = D \to K$ con $\widehat{\phi}(D) = K$. En efecto, sea $x_0 \in U$ fijo. Como U es conexo por caminos, entonces para cada $s \in S$, $s \cdot U$ es conexo por caminos; además, como para cada $s \in S$, $U \cap s \cdot U \neq \Phi$, entonces para cada $s \in S$ podemos tomar un punto $x_s \in U \cap s \cdot U$. Como $x_0, x_s \in U$ y U es conexo por caminos, existe un camino en U desde x_0 hasta x_s; análogamente, como $x_s, s \cdot x_0 \in s \cdot U$ y $s \cdot U$ es conexo por caminos, existe un camino en $s \cdot U$ uniendo a x_s y $s \cdot x_0$. Sea c_s la yuxtaposición de estos caminos.
Sea $P : Ç_{A_S}(G) \to X$ la función G-equivariante continua que envía 1 en x_0 y envía la arista marcada a_s que inicia en 1, en el camino c_s. Como X es simplemente conexo, podemos extender P continuamente a una función G-equivariante $\widehat{P} : K \to X$.
Sea $\ell : \partial D \to Ç_{A_S}(G)$ continua, entonces $P\ell : \partial D \to X$ es continua y como X es simplemente conexo, $P\ell$ extiende a una función continua $\phi : D \to X$.
De otra parte, como D es compacto y U es abierto, existe una triangulación finita T de D con la propiedad que para cada vértice v de T existe $g_v \in G$ tal que ϕ envía todos los triángulos que inciden en v a $g_v \cdot U$
Sea t un triángulo de T con vértices v_1, v_2, v_3; tenemos que:

$$\begin{aligned} \phi(t) \subseteq g_{v_1} \cdot U \cap g_{v_2} \cdot U \cap g_{v_3} \cdot U &= g_{v_1} \cdot [U \cap (g_{v_1}^{-1} g_{v_2}) \cdot U \cap (g_{v_1}^{-1} g_{v_3}) \cdot U] \neq \Phi \\ &= g_{v_2} \cdot [(g_{v_2}^{-1} g_{v_1}) \cdot U \cap U \cap (g_{v_1}^{-1} g_{v_3}) \cdot U] \neq \Phi \end{aligned} \tag{3}$$

pues si $g_{v_2} \cdot [(g_{v_2}^{-1} g_{v_1}) \cdot U \cap U \cap (g_{v_1}^{-1} g_{v_3}) \cdot U] = \Phi$, entones $\phi(t) = \Phi$, lo cual es absurdo. Por tanto $g_{v_2} \cdot [(g_{v_2}^{-1} g_{v_1}) \cdot U \cap U \cap (g_{v_1}^{-1} g_{v_3}) \cdot U] \neq \Phi$ y $g_{v_1} \cdot [U \cap (g_{v_1}^{-1} g_{v_2}) \cdot U \cap (g_{v_1}^{-1} g_{v_3}) \cdot U] \neq \Phi$, por lo que $(g_{v_1}^{-1} g_{v_2}) \cdot U \cap U \neq \Phi$, $(g_{v_1}^{-1} g_{v_3}) \cdot U \cap U \neq \Phi$ y $(g_{v_2}^{-1} g_{v_3}) \cdot U \cap U \neq \Phi$, lo que implica que $s_1 := g_{v_1}^{-1} g_{v_2}$, $s_2 := g_{v_2}^{-1} g_{v_3}$ y $s_3 := g_{v_1}^{-1} g_{v_3}$ están en S, es decir $s_1, s_2, s_3 \in S$; además nótese que $s_1 s_2 = s_3$, $U \cap s_1 \cdot U \cap s_3 \cdot U \neq \Phi$ (por (3)), por lo que $a_{s_1} a_{s_2} a_{s_3}^{-1} \in R$. Lo anterior nos permite extender la función $v \mapsto g_v$ a una función continua $\widehat{\psi}$ del 1-esqueleto de T sobre $Ç_{A_S}(G)$, mandando la arista que conecta v_i con v_{i+1} a la arista marcada s_i que inicia en el vértice g_{v_i} (índice mod 3).
Si $v_i \in \partial D$, como $\ell : \partial D \to Ç_{A_S}(G)$ es continua, podemos elegir $g_{v_i} \in G$ de modo que $\widehat{\psi}\,|_{\partial D}$ sea una reparametrización de ℓ. Como $\widehat{\psi}$ envía la frontera de cada triángulo de T en un circuito en $Ç_{A_S}(G)$ marcado por un elemento de R y como cada circuito es la frontera de una 2-celda en K, podemos extender $\widehat{\psi}$ a una función continua $\widehat{\phi} : D \to K$. Por tanto K es simplemente conexo. ■

Corolario 3.3.3. *Un grupo G es finitamente presentado si y sólo si éste actúa propia, cocompactamente y por isometrías en un espacio geodésico simplemente conexo.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Supongamos que G tiene la presentación finita $\langle A \mid R \rangle$. Consideremos el grafo de Cayley $Ç_A(G)$ de G y sea $K := K(A; R)$ el 2-complejo combinatorio obtenido pegando 2-celdas en todas las aristas lazos de $Ç_A(G)$ marcadas por las palabras reducidas $r \in R$. Por el Lema 3.3.1, este 2-complejo es simplemente conexo. Seguidamente metricemos a este 2-complejo simplemente conexo, como un complejo Euclídeo por piezas, digamos $\widetilde{K}$, en el cual todas las aristas tengan longitud 1 y todas las 2-celdas sean polígonos regulares (Ver[9, pag. 153]) de lados de longitud 1.
Ahora, la acción de G sobre $Ç_A(G)$ la podemos extender a una acción de G por isometrías sobre $\widetilde{K}$. Además, como este 2-complejo es Euclídeo por piezas y conexo, entonces dados dos puntos cualesquiera, existe un segmento geodésico uniendo dichos puntos. Como G es finitamente presentado, $\widetilde{K}$ es un espacio de longitud, pues dados dos puntos cualesquiera g_1, g_2 en $\widetilde{K}$, existe un camino de longitud mínima uniendo g_1 con g_2 y dicha longitud es la distancia entre los puntos g_1 y g_2.

Afirmamos que la acción de G sobre $\widetilde{K}$ es propia. En efecto, sea g_0 cualquier vértice de $\widetilde{K}$. Como G tiene presentación finita, existe un número finito de aristas de longitud que comienzan en g_0. Tomando $r = 2$, tenemos que $\{g \in G \mid g \cdot B(g_0, 2) \cap B(g_0, 2) \neq \Phi\}$ es finito (esto pues G tiene la presentación finita $\langle A \mid R \rangle$).
Como g_0 fue tomado arbitrariamente, concluimos que para cualquier vértice $g_0 \in \widetilde{K}$, existe $r > 0$ tal que $\{g \in G \mid g \cdot B(g_0, r) \cap B(g_0, r) \neq \Phi\}$ es finito. Por tanto la acción de G sobre $\widetilde{K}$ es propia.
De otro lado, dado un vértice cualquiera g de $\widetilde{K}$, sabemos que existe un número finito de aristas de longitud 1 que inciden en 1, digamos $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Consideremos la bola $\overline{B}(g, 1)$, entonces $\overline{B}(g, 1)$ es un compacto de $\widetilde{K}$ y contiene todos los puntos finales de $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

Seguidamente consideremos cada uno de los polígonos aristas teniendo vértice inicial y final el punto final de cada arista a_i y sea $C := \overline{B}(g,1) \cup \bigcup_{i=1}^{n} P_i$, donde los P_i son los polígonos descritos arriba. Entonces C es compacto y es claro que $G \cdot C = \widetilde{K}$. Por tanto G actúa propia, cocompactamente y por isometrías sobre el espacio geodésico simplemente conexo $\widetilde{K}$.

$\Leftarrow$) Sea G un grupo actuando propia, cocompactamente y por isometrías sobre un espacio geodésico simplemente conexo X. Como G actúa en X cocompactamente, existe $C \subset X$ compacto tal que $G{\cdot}C = X$. Sean $x_0 \in X$ y $r > 0$ tales que $C \subset B(x_0, R)$; sea $U = B(x_0, R)$, entonces U es un subconjunto abierto de X.
Afirmamos que $X = G \cdot U$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\textit{Sea } y \in G \cdot C = \bigcup_{g \in G} g \cdot C \Rightarrow \exists g \in G \mid y \in g \cdot C \\
&\Rightarrow \exists g \in G \mid y = g \cdot c \textit{ con } c \in C \subset B(x_0, R) \\
&\Rightarrow \exists g \in G \mid y = g \cdot c \textit{ con } c \in B(x_0, R) = U \\
&\Rightarrow \exists g \in G \mid y \in g \cdot U \\
&\Rightarrow y \in \bigcup_{g \in G} g \cdot U = G \cdot U
\end{aligned}$$

Tenemos así que $X = G \cdot C \subset G \cdot U \subset X$ y por tanto $X = G \cdot U$.
Como X es un espacio simplemente conexo y geodésico, entonces X es un espacio de longitud; además, como G actúa en X propia, cocompactamente y por isometrías, por el Lema 3.1.3, X es completo y localmente compacto y por el Teorema 2.5.3, cada subconjunto cerrado y acotado de X es compacto, es decir, X es propio. Como G actúa propiamente en X y $x_0 \in X$, entonces $\{g \in G \mid g \cdot B(x_0, R) \cap B(x_0, R) \neq \Phi\}$ es finito; es decir, por el Teorema 3.3.2(i), el conjunto de generadores de G, $S = \{g \in G \mid g \cdot U \cap U \neq \Phi\}$ es finito; y por el Teorema 3.3.2(ii) se tiene que $G = \langle A_S \mid R \rangle$, donde A_S es un conjunto de símbolos indizados por S (y por tanto finito) y $R = \{a_{s_1} a_{s_2} a_{s_3}^{-1} \mid s_i \in S;\ U \cap s_1 \cdot U \cap s_3 \cdot U \neq \Phi;\ s_1 s_2 = s_3 \textit{ en } G\}$ (por tanto finito). En consecuencia, G es finitamente presentado. ∎

Observación 3.3.3.1. *En el Teorema 3.3.2 (ii) la condición de que X sea simplemente conexo es necesaria. Para ver esto, sea G el grupo de orden 4 generado por una rotación ρ del círculo s^1 por un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ y sea U un arco abierto de longitud π en el circulo. Aquí $S = \{\rho, \rho^{-1}\}$ y $R = \Phi$; por tanto $\langle S \mid R \rangle$ no es una presentación para G.*
Este ejemplo muestra que existen grupos finitamente generados, pero que no tienen presentación finita.

3.4 Cuasi-Isometrías

Iniciamos esta sección definiendo el concepto de cuasi-isometría, el cual será usado posteriormente para probar algunos resultados importantes de propiedades geométricas de grupos que son invariantes bajo este tipo de funciomes.

Definición 3.4.1. *Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos. Una función (no necesariamente continua) $f : X_1 \to X_2$ se dice un (λ, ε) embebimiento cuasi-isométrico si existen constantes $\lambda \geq 1$ y $\varepsilon \geq 0$ tales que para todo $x, y \in X_1$:*
$\frac{1}{\lambda}d_1(x, y) - \varepsilon \leq d_2(f(x), f(y)) \leq \lambda d_1(x, y) + \varepsilon.$
Además si existe una constante $C \geq 0$ con la propiedad de que para todo $x_2 \in X_2$ existe $x_1 \in X_1$ tal que $d_2(f(x_1), x_2) < C$, f se dice una (λ, ε) cuasi-isometría y X_1 se dice cuasi-isométrico a X_2 y escribiremos X_1 C-I X_2.

Nota: Si existe una (λ, ε) cuasi-isometría $f : X_1 \to X_2$, entonces existe una (λ', ε') cuasi-isometría $f' : X_2 \to X_1$ (para algunas λ', ε') y una constante $K \geq 0$ tal que
$d_{X_2}(ff'(x'), x') \leq K$ y $d_{X_1}(f'f(x), x) \leq K$ para todo $x' \in X_2$ y toda $x \in X_1$. Una prueba análoga a la prueba de este hecho, se hará en la prueba de *ii*) del Lema 3.4.2. La función f' es llamada una cuasi-inversa de f.

Lema 3.4.2. *La relación "ser C-I a ", es una relación de equivalencia.*

Demostración.
i) Para todo espacio métrico (X, d), (X, d) es C-I a (X, d). Para ello basta tomar la función ι_{d_X}, $\lambda = 1$ y $\varepsilon = C = 0$ en la Definición 3.4.1.

ii) Si (X_1, d_1) es C-I a (X_2, d_2), existe $f : X_1 \to X_2$ y existen constantes $\lambda \geq 1$, $\varepsilon, C \geq 0$ tales que: Para todo $x_1, y_1 \in X_1$, $\frac{1}{\lambda}d_1(x_1, y_1) - \varepsilon \leq d_2(f(x_1), f(y_1)) \leq \lambda d_1(x_1, y_1) + \varepsilon$ y para todo $x_2 \in X_2$, existe $x_1 \in X_1$ tal que $d_2(x_2, f(x_1)) < C$. Sea $f' : X_2 \to X_1$ definida por $f'(x_2) = x_1$, para todo $x_2 \in X_2$. Sean $z_1, z_2 \in X_2$, entonces existen $y_1, y_2 \in X_1$ tales que $d_2(z_1, f(y_1), d_2(z_2, f(y_2)) < C$. Luego,

$$d_2(z_1, z_2) \leq d_2(z_1, f(y_1)) + d_2(f(y_1), f(y_2)) + d_2(f(y_2), z_2) < C + C + \lambda d_1(y_1, y_2) + \varepsilon \quad (4)$$

Tomando $\lambda' = 1$, $\varepsilon' = 2C + d_1(y_1, y_2) + \varepsilon$ y $C' = C + 1$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda'}d_2(z_1, z_2) - \varepsilon' = d_2(z_1, z_2) - 2C - \lambda d_1(y_1, y_2) - \varepsilon < 0 = d_1(f'(z_1), f'(z_2)) = d_1(x_1, x_1)\\ \leq \lambda' d_1(x_1, x_2) + \varepsilon'.\end{aligned}$$

De otra parte, dado $x_1 \in X_1$, sea $x_2 = f(x_1) \in X_2$, entonces
$d_1(f'(x_2), x_1) = d_1(f'(f(x_1)), x_1) = d_1(x_1, x_1) = 0 \leq C < C + 1 = C'$. Por tanto f' es una (λ', ε') cuasi-isometría; en consecuencia (X_2, d_2) es C-I a (X_1, d_1).
Nota: Nótese que para todo $x_1 \in X_1$, $d_1(f'(f(x_1)), x_1) < C'$ y que para todo $x_2 \in X_2$, $d_2(f(f'(x_2)), x_2) = d_2(f(x_1), x_2)) < C < C + 1 = C'$.

iii) Si (X_1, d_1) es C-I a (X_2, d_2) y (X_2, d_2) es C-I a (X_3, d_3), entonces existen $f : X_1 \to X_2$, $g : X_2 \to X_3$ y existen $\lambda_1, \lambda_2 \geq 1$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$, $C_1, C_2 \geq 0$ tales que:
para todo $x_1, y_1 \in X_1$, $\frac{1}{\lambda_1}d_1(x_1, y_1) - \varepsilon_1 \leq d_2(f(x_1), f(y_1)) \leq \lambda_1 d_1(x_1, y_1) + \varepsilon_1$ y

Para todo $x_2, y_2 \in X_2$, $\frac{1}{\lambda_2}d_2(x_2,y_2) - \varepsilon_2 \leq d_3(g(x_2), g(y_2)) \leq \lambda_2 d_2(x_2,y_2) + \varepsilon_2$. Sean $h = g \circ f$, $\lambda = \lambda_1\lambda_2$ y $\varepsilon = \lambda_2\varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Entonces $h : X_1 \to X_3$ y para todo $y_1, z_1 \in X_1$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda}d_1(y_1,z_1) - \varepsilon = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}d_1(y_1,z_1) - (\lambda_2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) &\leq \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}d_1(y_1,z_1) - \frac{1}{\lambda_2}\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\
&\leq \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}[\lambda_1 d_2(f(y_1), f(z_1)) + \lambda_1\varepsilon_1] - (\frac{1}{\lambda_2})\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\
&\leq \frac{1}{\lambda_2}d_2(f(y_1), f(z_1)) + \frac{\varepsilon_1}{\lambda_2} - \frac{\varepsilon_1}{\lambda_2} - \varepsilon_2 \\
&= \frac{1}{\lambda_2}d_2(f(y_1), f(z_1)) - \varepsilon_2 \\
&\leq d_3(g(f(y_1)), g(f(z_1)))
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
d_3(g \circ f(y_1), g \circ f(z_1)) = d_3(g(f(y_1)), g(f(z_1))) &\leq \lambda_2 d_2(f(y_1), f(z_1)) + \varepsilon_2 \\
&\leq \lambda_2[\lambda_1 d_1(y_1,z_1) + \varepsilon_1] + \varepsilon_2 \\
&= \lambda_1\lambda_2 d_1(y_1,z_1) + (\lambda_2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \\
&= \lambda d_1(y_1,z_1) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Por tanto (X_1, d_1) es C-I a (X_3, d_3). ■

Ejemplo 3.4.3. *Un espacio métrico es cuasi-isométrico a un espacio de un solo punto si y sólo si este tiene diámetro finito. Más generalmente, la inclusión $i : Y \to X$ de un subconjunto Y de un espacio métrico X es una cuasi-isometría si y sólo si Y es cuasi denso en X, es decir existe una constante $C > 0$ tal que cada punto de X vive en una C-vecindad de algún punto de Y. En efecto:*
i) Sea (X_1, d_1) un espacio métrico y sea $X_2 = \{x_2\}$ y sea $f : X_1 \to X_2$
$\Rightarrow$) Si f es una (λ, ε) cuasi-isometría, existen $\lambda \geq 1$ y $\varepsilon \geq 0$ tales que para todo $x_1, y_1 \in X_1$, $\frac{1}{\lambda}d_1(x_1,y_1) - \varepsilon \leq d_2(f(x_1), f(y_1)) \leq \lambda d_1(x_1,y_1) + \varepsilon$, pero $f(x_1) = f(y_1) = x_2$, por lo que $d_2(f(x_1), f(y_1)) = 0$. Por tanto, para todo $x_1, y_1 \in X_1$, $\frac{1}{\lambda}d_1(x_1,y_1) - \varepsilon \leq 0$ y de aquí que para todo $x_1, y_1 \in X_1$, $d_1(x_1,y_1) \leq \lambda\varepsilon < \infty$. Luego,
$diam(X_1) := sup\{d_1(x_1,y_1) \mid x_1, y_1 \in X_1\} \leq \lambda\varepsilon < \infty$, por lo que $diam(X_1)$ es finito.

$\Leftarrow$) Si $diam(X_1)$ es finito, entonces existe un número real $C > 0$ tal que para todo $x_1, y_1 \in X_1$, $d_1(x_1,y_1) \leq C$. Sea $\lambda = C + 1 > 1$ y $\varepsilon = 1$. Entonces para todo $x_1, y_1 \in X_1$,

$$\frac{1}{\lambda}d_1(x_1,y_1) - \varepsilon = \frac{1}{C+1}d_1(x_1,y_1) - 1 \leq 0 = d_2(f(x_1), f(y_1)) < \lambda d_1(x_1,y_1) + \varepsilon.$$

Finalmente, como para todo $x_2 \in X_2$, $d_2(f(x_1), x_2) = 0$ para todo $x_1 \in X_1$, tomando $C = 1$ se tiene que para todo $x_2 \in X_2$, $d_2(f(x_1), x_2) = 0 < 1 = C$ para todo $x_1 \in X_1$. Por tanto f es una (λ, ε) cuasi-isometría.

Lema 3.4.4. *Todo grupo finitamente generado es un espacio métrico, bien definido salvo cuasi-isometrías.*

Demostración. Sea G un grupo con conjunto generador (finito) A. Sea $d_A : G \times G \to \mathbb{R}$ definida para todo g_1, g_2 en G por:
$d_A(g_1, g_2) = min\{n \geq 0 \mid g_1^{-1}g_2 = a_1^{\varepsilon_1}a_2^{\varepsilon_2}\cdots a_n^{\varepsilon_n};\ a_i \in A;\ \varepsilon_i \in \{\pm 1\}\}$. Afirmamos que d_A es una métrica. En efecto:
i) De la definición de d_A, es claro que $d_A(g_1, g_2) \geq 0$ y que $d_A(g_1, g_2) = 0$ si y sólo si $g_1^{-1}g_2 = 1$, lo que a su vez equivale a que $g_1 = g_2$.
ii) Tenemos que para todo $g_1, g_2 \in G$,
$d_A(g_1, g_2) = min\{n \geq 0 \mid g_1^{-1}g_2 = a_1^{\varepsilon_1}a_2^{\varepsilon_2}\cdots a_n^{\varepsilon_n};\ a_i \in A;\ \varepsilon_i \in \{\pm 1\}\}$. Sea $d_A(g_1, g_2) = n$, entonces $g_1^{-1}g_2 = w$ con $l(w) = n$ y de aquí que $g_1 = g_2w^{-1}$ con $l(w^{-1}) = n$, es decir $g_2^{-1}g_1 = \widehat{w}$ con $\widehat{w} = w^{-1}$ y $l(\widehat{w}) = n$. Por tanto $d_A(g_2, g_1) = n$. En consecuencia, $d_A(g_1, g_2) = d_A(g_2, g_1)$.
iii) Sean $g_1, g_2, g_3 \in G$. Si $d_A(g_1, g_2) = p$, $d_A(g_2, g_3) = q$, entonces $g_2 = g_1w$ con $l(w) = p$ y $g_3 = g_2\widehat{w}$ con $l(\widehat{w}) = q$. Luego, $g_3 = g_2\widehat{w} = (g_1w)\widehat{w} = g_1(w\widehat{w})$ con $l(w\widehat{w}) \leq l(w)+l(\widehat{w}) = p+q$. Por tanto $d_A(g_1, g_3) \leq l(w\widehat{w}) \leq p + q = d_A(g_1, g_2) + d_A(g_2, g_3)$. Por tanto d_A es una métrica y en consecuencia (G, d_A) es un espacio métrico.

Veamos ahora que la clase de cuasi-isometrías de (G, d_A) es independiente de la elección de A. En efecto:
Sean A_1, A_2 dos conjuntos generadores(finitos) de G. Veamos que (G, d_{A_1}) es C-I a (G, d_{A_2}). En efecto, tomemos la identidad $\imath_d : (G, d_{A_1}) \to (G, d_{A_2})$. Además, sean
$\lambda_1 = max\{d_{A_1}(a_1, 1) \mid a_1 \in A_1\}$, $\lambda_2 = max\{d_{A_2}(a_2, 1) \mid a_2 \in A_2\}$ y sea $\lambda = max\{\lambda_1, \lambda_2\}$; entonces $\lambda \geq 1$. Sean $g_1, g_2 \in (G, d_{A_1})$. Tenemos los siguientes dos casos:
Caso i) Si $g_1 = g_2$, tomando $\varepsilon = 0$ se tiene que:
$\frac{1}{\lambda}d_{A_1}(g_1, g_2) - \varepsilon = 0 = d_{A_2}(\iota_d(g_1), \iota_d(g_2) \leq \lambda d_{A_1}(g_1, g_2) + \varepsilon$.
Caso ii) Si $g_1 \neq g_2$, entonces $g_1^{-1}g_2 \neq 1$, por lo que $d_{A_2}(g_1^{-1}g_2, 1) \geq 1$. Tomando $\varepsilon = 0$, tenemos que:

$$\frac{1}{\lambda}d_{A_1}(g_1, g_2) - \varepsilon = \frac{1}{\lambda}d_{A_1}(g_1^{-1}g_2, 1) \leq \frac{\lambda_1}{\lambda} \leq 1 \tag{5}$$

De ota parte,

$$1 \leq d_{A_2}(g_1^{-1}g_2, 1) \leq \lambda_2 \leq \lambda \leq \lambda d_{A_1}(g_1^{-1}g_2, 1) = \lambda d_{A_1}(g_1, g_2) + \varepsilon \tag{6}$$

es decir, como $d_{A_2}(g_1.g_2) = d_{A_2}(\iota_d(g_1), \iota_d(g_2))$, $1 \leq d_{A_2}(\iota_d(g_1), \iota_d(g_2)) \leq \lambda d_{A_1}(g_1, g_2) + \varepsilon$. De la desigualdad (5) y la desigualdad (6), se sigue que:
$\frac{1}{\lambda}d_{A_1}(g_1, g_2) - \varepsilon \leq d_{A_2}(\iota_d(g_1), \iota_d(g_2)) \leq \lambda d_{A_1}(g_1, g_2) + \varepsilon$. De los dos casos anteriores se sigue que (G, d_{A_1}) está embebido cuasi-isométricamente en (G, d_{A_2}).
De otra parte, dado $h \in (G, d_{A_2})$, sea $g := h$, entonces $g \in (G, d_{A_1})$ y
$d_{A_2}(\iota_d(g), h) = d_{A_2}(g, h) = d_{A_2}(g, g) = 0 < 1$. Tomando $C = 1$ se sigue que para todo $h \in (G, d_{A_2})$, existe $g \in (G, d_{A_1})$ tal que $d_{A_2}(\iota_d(g), h) < C$. Por tanto (G, d_{A_1}) es C-I a (G, d_{A_2}). ■

Observación 3.4.4.1.

- *Nótese que la acción de G sobre sí mismo por multiplicación a izquierda induce un embebimiento $\phi_g : G \to Isom(G, d_A)$, ésto pues dado $g \in G$, si definimos $\phi_g : G \to G$ por $\phi_g(g_0) = gg_0$, para todo $g_0 \in G$, entonces $\phi_g \in Isom(G, d_A)$, ya que para todo $g_1, g_2 \in G$:*

$$\begin{aligned} d_A(\phi_g(g_1), \phi_g(g_2)) = d_A(gg_1, gg_2) &= d_A((gg_1)^{-1}(gg_2), 1) \\ &= d_A(g_1^{-1}g_2, 1) \\ &= d_A(g_1, g_2) \end{aligned}$$

  Así el embebimiento inducido es $\varphi : G \to Isom(G, d_A)$ definido para todo $g \in G$ por $\varphi(g) = \phi_g$.

- *Si para todo $g_1, g_2 \in G$, existe $\lambda \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda}d_{A_1}(g_1, g_2) \leq d_{A_2}(g_1, g_2) \leq \lambda d_{A_1}(g_1, g_2)$, diremos que d_{A_1} y d_{A_2} son Lipschitz equivalentes.*

- *Si dos métricas d y d' en un conjunto X son Lipschitz equivalentes, entonces la identidad $\imath_d : (X, d) \to (X, d')$ es una cuasi-isometría.*

- *El grafo de Cayley $Ç_A(G)$ de un grupo G con respecto a un conjunto de generadores A es un grafo métrico con aristas de longitud 1. Como los vértices de $Ç_A(G)$ corresponden a palabras en $F(A)$, la métrica que asociaremos al conjunto de vértices de $Ç_A(G)$ es la métrica de la palabra definida en el Lema 3.4.4.*

- *(G, d_A) es cuasi-isométrico a $Ç_A(G)$ y grafos de Cayley asociados a diferentes conjuntos generadores(finitos) para G, son cuasi-isométricos.*

- *También podemos pensar en la inclusión $G \hookrightarrow Ç_A(G)$, la cual proviene de la acción natural de G sobre $Ç_A(G)$, es decir $g \mapsto g \cdot 1$. Desde este punto de vista, el hecho que $G \hookrightarrow Ç_A(G)$ sea una cuasi-isometría es una aplicación de la primera proposición de la siguiente sección.*

3.5 Cuasi-isometrías provenientes de la acción de grupos

Lema 3.5.1. *Sea (X, d) un espacio métrico; sea G un grupo con conjunto generador A y métrica de la palabra asociada d_A. Si G actúa por isometrías en X, entonces para cada punto base $x_0 \in X$ existe una constante $\mu > 0$ tal que $d(g \cdot x_0, g' \cdot x_0) \leq \mu d_A(g, g')$ para todo $g, g' \in G$.*

Demostación. Sea $\mu = max\{d(x_0, a \cdot x_0) \mid a \in A \cup A^{-1}\}$ y sean $g, g' \in G$. Si $d_A(g, g') = n$, entonces $g^{-1}g' = a_1a_2 \cdots a_n$, donde $a_i \in A \cup A^{-1}$ para todo i. Ahora, si $g_i = a_1 \cdots a_i$, por la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned}
d(g \cdot x_0, g' \cdot x_0) &= d(x_0, (g^{-1}g') \cdot x_0) \\
&= d(x_0, (a_1 \cdots a_n) \cdot x_0) \\
&= d(x_0, g_n \cdot x_0) \\
&\leq d(x_0, g_1 \cdot x_0) + d(g_1 \cdot x_0, g_2 \cdot x_0) + \cdots + d(g_{n-1} \cdot x_0, g_n \cdot x_0) \\
&= d(x_0, g_1 \cdot x_0) + d(g_1 \cdot x_0, g_2 \cdot x_0) + \cdots + d(g_{n-1} \cdot x_0, (g^{-1}g') \cdot x_0).
\end{aligned}$$

Además, para cada i se tiene que:

$$d(g_{i-1} \cdot x_0, g_i \cdot x_0) = d(x_0, (g_{i-1}^{-1}g_i) \cdot x_0) = d(x_0, a_i \cdot x_0) \leq \mu$$

Por tanto para todo $g, g' \in G$,

$$\begin{aligned}
d(g \cdot x_0, g' \cdot x_0) &\leq d(x_0, a_1 \cdot x_0) + d(x_0, a_2 \cdot x_0) + \cdots + d(x_0, a_n \cdot x_0) \\
&\leq \underbrace{\mu + \mu + \cdots + \mu}_{n \text{ -términos}} = \mu n = \mu d_A(g, g')
\end{aligned}$$

■

Proposición 3.5.2. *(Lema de Švar-Milnor)*
Sea X un espacio de longitud. Si G actúa propia, cocompactamente y por isometrías en X, entonces G es finitamente generado y para cualquier punto base $x_0 \in X$, la función $g \mapsto g \cdot x_0$ es una cuasi-isometría.

Demostración. Como G actúa cocompactamente en X, existe $C \subseteq X$ compacto tal que $G \cdot C = X$. Sea $x_0 \in X$ y $D > 0$ tal que $C \subseteq B(x_0, \frac{D}{3})$. Entonces $G \cdot B(x_0, D) = X$ (ésto pues $X = G \cdot C \subseteq G \cdot B(x_0, \frac{D}{3}) \subseteq G \cdot B(x_0, D) \subseteq X$, por lo que $X = G \cdot B(x_0, D)$). Como X es un espacio de longitud y G actúa propia, cocompactamente y por isometriás en X, por el Lema 3.1.3, X es un espacio geodésico propio y por tanto conexo. Como la acción de G en X es propia, entonces $A = \{g \in G \mid g \cdot B(x_0, D) \cap B(x_0, D) \neq \Phi\}$ es finito; luego, tomando $U = B(x_0, D)$ se tiene que U es un subconjunto abierto de X con $G \cdot U = X$ y como X es conexo, por el Teorema 3.3.2, A genera a G (sin embargo, haremos una prueba directa de este hecho a continuación). Así G es finitamente generado.
Sea d_A la métrica de la palabra en G asociada a A. Como G actúa en X por isometrías, por el Lema 3.5.1 existe $\mu > 0$ tal que

$$d(g \cdot x_0, g' \cdot x_0) \leq \mu d(g, g') \tag{7}$$

para todo $g, g' \in G$. Afirmamos que d y d_A son G-equivariantes. En efecto, sea $g \in G$ y sean $x, y \in X$, entonces $d(g \cdot x, g \cdot y) = d(x, y)$ pues G actúa en X por isometrías.
Análogamente, para todo $g_1, g_2 \in G$,

$$d_A(g \cdot g_1, g \cdot g_2) = d_A((gg_1)^{-1}(gg_2), 1) = d_A(g_1^{-1}g_2, 1) = d_A(g_1, g_2) \tag{8}$$

Sea $\varphi : G \to X$, definida para todo $g \in G$ por $\varphi(g) = g \cdot x_0$. Por (8), para todo $g_1, g_2 \in G$,

$$d(\varphi(g_1), \varphi(g_2)) \leq \mu d_A(g_1, g_2) \tag{9}$$

Sea $g \in G$ y sea $c : [0,1] \to X$ un camino en X de longitud finita con $c(0) = x_0$ y $c(1) = g \cdot x_0$ (ésto es posible pues X es un espacio de longitud). Tomemos una partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ de $[0,1]$ tal que $d(c(t_i), c(t_{i+1})) \leq \frac{D}{3}$ para todo $i \in \{1, \cdots, n-1\}$. Para cada t_i, tomemos un elemento $g_i \in G$ tal que $d(c(t_i), g_i \cdot x_0) \leq \frac{D}{3}$; además tomemos $g_0 = 1$ y $g_n = g$. Entonces para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} d(g_i \cdot x_0, g_{i-1} \cdot x_0) &\leq d(g_i \cdot x_0, c(t_i)) + d(c(t_{i-1}), c(t_i)) + d(c(t_{i-1}), g_{i-1} \cdot x_0) \\ &\leq \frac{D}{3} + \frac{D}{3} + \frac{D}{3} \\ &= D. \end{aligned}$$

La ecuación anterior equivale a

$$d(g_{i-1}^{-1} g_i \cdot x_0, x_0) \leq D \tag{10}$$

Luego, si para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, $a_i := g_{i-1}^{-1} g_i$, entonces de (3) se sigue que $d(a_i \cdot x_0, x_0) \leq D$, por lo que $a_i \cdot x_0 \in B(x_0, D)$ y como $a_i \cdot x_0 \in a_i \cdot B(x_0, D)$, entonces para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, $a_i \in A$. De otra parte, nótese que

$$g = g_0(g_0^{-1} g_1)(g_1^{-1} g_2) \cdots (g_{n-2}^{-1} g_{n-1})(g_{n-1}^{-1} g_n) = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n \in F(A) \tag{11}$$

ésto pues $g_0 = 1$ y $g_n = g$.
Por tanto A genera a G. Aún más, g es una palabra en $F(A)$ de longitud n.
Como X es un espacio de longitud y $x_0,\ g \cdot x_0 \in X$, entonces
$d(x_0, g \cdot x_0) = inf\{\ell(c) \mid c\ es\ una\ curva\ rectificable\ uniendo\ x_0\ y\ g \cdot x_0\}$; luego podemos tomar la curva c considerada arriba, de manera que

$$\ell(c) \leq d(x_0, g \cdot x_0) + 1 \tag{12}$$

Sea $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ la partición más fina de $[0,1]$, tal que $d(c(t_i), c(t_{i+1})) \leq \frac{D}{3}$ para todo $i \in \{0, \cdots, n-1\}$. Como (X, d) es un espacio métrico, por definición

$$\ell(c) = \sup_{a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b} \sum_{i=0}^{n-1} d(c(t_i), c(t_{i+1})),$$

pero

$$\sum_{i=0}^{n-1} d(c(t_i), c(t_{i+1})) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{D}{3} = (n-1)\frac{D}{3}.$$

Luego,

$$\ell(c) = (n-1)\frac{D}{3} \tag{13}$$

De (12) y (13) se tiene que $(n-1)\frac{D}{3} = \ell(c) \leq d(x_0, g \cdot x_0) + 1$, de donde se sigue que $(n-1) \leq [d(x_0, g\cdot x_0)+1]\frac{3}{D}$ y por tanto, $n \leq [d(x_0, g\cdot x_0)+1]\frac{3}{D}+1$. De lo anterior y de (11), tenemos que $d_A(1,g) \leq n \leq [d(x_0, g\cdot x_0)+1]\frac{3}{D}+1$, es decir, $d_A(1,g) \leq \frac{3}{D}d(x_0, g\cdot x_0)+(\frac{3}{D}+1)$, lo que a su vez equivale a: $\frac{D}{3}d_A(1,g) - \frac{D+3}{3} \leq d(x_0, g\cdot x_0)$, para todo $g \in G$. En particular, para $g = g_1^{-1}g_2$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{D}{3}d_A(1, g_1^{-1}g_2) - \frac{D+3}{3} \leq d(x_0, (g_1^{-1}g_2)\cdot x_0) &\Leftrightarrow \frac{D}{3}d_A(g_1, g_2) - \frac{D+3}{3} \leq d(g_1\cdot x_0, g_2\cdot x_0)\\ &\Leftrightarrow \frac{D}{3}d_A(g_1, g_2) - \frac{D+3}{3} \leq d(\varphi(g_1), \varphi(g_2))\end{aligned}$$

De esta última desigualdad y de (9), se tiene que para todo $g_1, g_2 \in G$,
$\frac{D}{3}d_A(g_1,g_2) - \frac{D+3}{3} \leq d(\varphi(g_1), \varphi(g_2)) \leq \mu d_A(g_1,g_2)$ y como $\frac{D}{D+3} \leq \frac{D}{3}$, entonces
$\frac{D}{D+3}d_A(g_1,g_2) - \frac{D+3}{3} \leq d(\varphi(g_1), \varphi(g_2)) \leq \mu d_A(g_1,g_2) + \frac{D+3}{3}$. Sea $\lambda = max\{\frac{D+3}{D}, \mu\}$, entonces $\lambda \geq 1$. Tomando $\varepsilon = \frac{D+3}{3}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}d_A(g_1,g_2) - \frac{D+3}{3} \leq \frac{D}{D+3}d_A(g_1,g_2) - \frac{D+3}{3} \leq d(\varphi(g_1), \varphi(g_2)) &\leq \mu d_A(g_1,g_2) + \frac{D+3}{3}\\ &\leq \lambda d_A(g_1,g_2) + \frac{D+3}{3},\end{aligned}$$

es decir, para todo $g_1, g_2 \in G$, $\frac{1}{\lambda}d_A(g_1,g_2) - \varepsilon \leq d(\varphi(g_1), \varphi(g_2)) \leq \lambda d_A(g_1,g_2) + \varepsilon$.
Finalmente, dado $x_2 \in X$, como $X = G\cdot B(x_0, D) = \bigcup_{g\in G} g\cdot B(x_0, D)$, entonces existen $g \in G$ y $y_1 \in B(x_0, D)$ tales que $x_2 = g\cdot y_1$. Luego, $d(\varphi(g), x_2) = d(g\cdot x_0, g\cdot y_1) = d(x_0, y_1) < D$.
Hemos probado que para todo $x_2 \in X$ existe $x_1 = g \in G$ y $C = D > 0$ tales que
$d(\varphi(g), x_2) < D$. Por tanto φ es una cuasi-isomertría. ■

Cuasi-geodésicas

Definición 3.5.3. *Una (λ, ε) cuasi-geodésica en un espacio métrico X es un embebimiento (λ, ε)- cuasi-isométrico $c : I \to X$, donde I es un subintervalo de $\mathbb{R}$ o la intersección de $\mathbb{Z}$ con tal intervalo. Más explicitamente, $\frac{1}{\lambda}|t-t'| - \varepsilon \leq d(c(t), c(t')) \leq \lambda|t-t'| + \varepsilon$ para todo $t, t' \in I$.*
Si $I = [a, b]$ entonces $c(a)$ y $c(b)$ se dicen los puntos finales de c; mientras que si $I = [0, \infty)$, entonces c se dice un rayo cuasi-geodésico.

Algunas invariantes de cuasi-isometrías

En este aparte estudiaremos un resultado que muestra que las cuasi-isometrías preservan algunas estructuras algebraicas de pares de grupos cuasi-isométricos, como se mencionó en la introducción de este trabajo.

Proposición 3.5.4. *Sean G_1 y G_2 grupos con conjuntos generadores finitos A_1 y A_2. Si G_1 es C-I a G_2 y G_2 tiene una presentación finita $\langle A_2 \mid R_2\rangle$, entonces G_1 tiene una presentación finita $\langle A_1 \mid R_1\rangle$.*

Demostración. Procederemos de la siguiente manera: Como (G_1, d_{A_1}) es C-I a (G_2, d_{A_2}), por la Obsevación 3.5.1, (G_1, d_{A_1}) es C-I a $(\text{Ç}_{A_1}(G_1), d_{A_1})$ y (G_2, d_{A_2}) es C-I a $(\text{Ç}_{A_2}(G_2), d_{A_2})$ y como la relación "ser C-I a ", es una relación de equivalencia (ver Observación 3.4.3), entonces $(\text{Ç}_{A_1}(G_1), d_{A_1})$ es C-I a $(\text{Ç}_{A_2}(G_2), d_{A_2})$. De otra parte, sean K_1, y K_2 los 2-complejos combinatorios obtenidos pegando una colección finita de 2-celdas a los grafos $\text{Ç}_{A_1}(G_1)$ y $\text{Ç}_{A_2}(G_2)$, respectivamente. Como G_2 tiene presentación $\langle A_2 \mid R_2 \rangle$, por el Lema 3.2.4.1, K_2 es simplemente conexo; por el mismo Lema, para probar que G_1 tiene la presentación $\langle A_1 \mid R_1 \rangle$, basta probar que K_1 es simplemente conexo. En efecto, como la métrica inducida sobre el conjunto de vértices de K_1 y K_2, es la métrica de la palabra d_{A_1} y d_{A_2}, entonces K_1 es C-I a K_2. Luego existe una (λ, ε) cuasi-isometría $f : K_1 \to K_2$; por lo que para todo $g_1, g_2 \in K_1$, $\frac{1}{\lambda} d_{A_1}(g_1, g_2) - \varepsilon \leq d_{A_2}(f(g_1), f(g_2)) \leq \lambda d_{A_1}(g_1, g_2) + \varepsilon$ y para todo $h_2 \in K_2$ existe $h_1 \in K_1$ tal que $d_{A_2}(f(h_1), h_2) < C$, para ciertos $\lambda \geq 1$, $\varepsilon, C \geq 0$.

Por la nota que sigue a la Definición 3.4.1, existe una (λ', ε') cuasi-isometría $f' : (K_2, d_{A_2}) \to (K_1, d_{A_1})$ y una constante $C' \geq 0$ tal que $d_{A_2}(ff'(x'), x') \leq C'$ y $d_{A_1}(f'f(x), x) \leq C'$ para todo $x' \in K_2$ y todo $x \in K_1$. Continuando con la prueba, sea $f' : (K_2, d_{A_2}) \to (K_1, d_{A_1})$ la cuasi-inversa de f. Para mostrar que K_1 es simplemente conexo, usaremos f para enviar lazos de K_1 a lazos de K_2; para ello, tomemos un llenamiento (es decir una curva homotópica al disco D) en K_2 y devolvamos éste a K_1 usando la cuasi-inversa f'. Una aproximación apropiada para el mapeo resultante de un disco en K_1, produce un llenamiento completo para el lazo original en K_1.
Sea $i \in \{1, 2\}$ y sea $C_i := \text{Ç}_{A_i}(G_i)$. Sea ρ la longitud de la palabra más grande en R_2. Entonces el 2-complejo K_2 es obtenido a partir de C_2 pegando 2-celdas a lo largo de las aristas lazo de longitud menor o igual que ρ.
Sea $m = max\{\lambda, \varepsilon, C', \rho\}$ y sea $M = 3(3m^2 + 5m + 1)$; entonces K_1 puede ser visto como el 2-complejo obtenido pegando 2-celdas a C_1 a lo largo de cada arista lazo de longitud menor o igual que M. Sea ℓ una arista lazo en C_1 que recorre los vértices $g_1, \ldots, g_n$ en este orden. Podemos ver a ℓ como una función $\ell : \partial D \to C_1$, donde D es el disco 2-dimensional. Como D es simplemente conexo, nuestra prueba quedará lista si podemos demostrar que ℓ tiene una extensión continua $\widehat{\ell} : D \to K_1$.
Sean $v_1, \ldots, v_n$ las imágenes inversas de los g_i, dispuestas en orden cíclico alrededor de ∂D y sea $\phi : \partial D \to C_2$ la función que manda la arista acotada por $\{v_i, v_{i+1}\}$ a una geodésica en C_2 conectando $f(g_i)$ a $f(g_{i+1})$, donde los índices son tomados módulo n. Puesto que K_2 es simplemente conexo, podemos extender ϕ a una función continua $\widehat{\phi} : D \to K_2$. Seguidamente, asociemos a cada punto $x \in D$ un elemento $h_x \in G_2$ tal que $\widehat{\phi}(x) = h_x$ o h_x es un vértice de la arista o 2-celda abierta a la cual $\widehat{\phi}(x)$ pertenece. Nótese que $h_{v_i} = f(g_i)$ y que puesto que $\widehat{\phi}$ es continua, $d(\widehat{\phi}(x_1), \widehat{\phi}(x_2)) \leq \rho$ para todo $x_1, x_2 \in D$ suficientemente cercanos. Notése además que para todo $x \in \partial D$, $d(\phi(x), h_x) = d(\widehat{\phi}(x), h_x) \leq \frac{1}{2}$ (ésto pues $\widehat{\phi} \mid_{\partial D} = \phi$). Fijemos una triangulación τ de D tal que $d(h_{x_1}, h_{x_2}) \leq \rho$ si x_1 y x_2 son vértices adyacentes. Además, supongamos que $v_1, \ldots, v_n$ son vértices de τ. Definamos $\widehat{\ell} \mid_{\partial D} = \ell$ y $\widehat{\ell}(x) = f'(h_x)$, para cada vértice x de τ que está en el interior de D.

Afirmamos que $\widehat{\ell}$ envía cada par de vértices adyacentes $x_1, x_2 \in \tau$ a elementos de G_1 que están a una distancia de a lo más $\frac{M}{3}$ en C_1. En efecto, dados $x_1, x_2 \in \tau$ vértices adyacentes, consideremos los siguientes casos:
Caso i) Si $x_1, x_2 \in \partial D$. En este caso, $d(\widehat{\ell}(x_1)\widehat{\ell}(x_2)) = d(\ell(x_1), \ell(x_2))$. Como $\phi : \partial D \to C_2$ envía la arista acotada $\{x_1, x_2\}$ a una geodésica en C_2 conectando $f(g_1)$ con $f(g_2)$; es decir una geodésica conectando h_{x_1} con h_{x_2}, donde $h_{x_1} = f(g_1)$ y $h_{x_2} = f(g_2)$. Entonces,

$$\begin{aligned} d(\widehat{\ell}(x_1)\widehat{\ell}(x_2)) = d(\ell(x_1), \ell(x_2)) = d(g_1, g_2) \leq \lambda d(f(g_1), f(g_2)) + \lambda\varepsilon &= \lambda d(h_{x_1}, h_{x_2}) + \lambda\varepsilon \\ &\leq \lambda\rho + \lambda\varepsilon \\ &\leq mm + mm \\ &= 2m^2 \\ &\leq 3m^2 + 5m + 1 \\ &= \frac{M}{3} \end{aligned}$$

Por tanto $d(\widehat{\ell}(x_1)\widehat{\ell}(x_2)) \leq \frac{M}{3}$.
Caso ii) Si $x_1, x_2 \in int(D)$. En este caso,

$$\begin{aligned} d(\widehat{\ell}(x_1)\widehat{\ell}(x_2)) = d(f'(h_{x_1}), f'(h_{x_2})) \leq \lambda d(h_{x_1}, h_{x_2}) + \varepsilon \leq \lambda\rho + \varepsilon &\leq m^2 + m \\ &\leq 3m^2 + 5m + 1 \\ &= \frac{M}{3}. \end{aligned}$$

Caso iii) Si $x_1 \in int(D)$ y $x_2 \in \partial D$, con x_2 entre v_i y v_{i+1}. En tal caso,

$$\begin{aligned} d(\widehat{\ell}(x_1), \widehat{\ell}(x_2)) &= d(f'(h_{x_1}), \ell(x_2)) \\ &\leq d(f'(h_{x_1}), f'(h_{x_2})) + d(f'(h_{x_2}), f'\phi(x_2)) + d(f'\phi(v_i), f'\phi(x_2)) + d(f'\phi(v_i), \ell(v_i)) \\ &\quad + d(\ell(v_i), \ell(x_2)) \\ &\leq (\lambda d(h_{x_1}, h_{x_2}) + \varepsilon) + [\lambda d(h_{x_1}, \phi(x_2)) + \varepsilon] + [\lambda d(\phi(v_i), \phi(x_2)) + \varepsilon] \\ &\quad + d(f'f(g_i), (g_i)) + 1 \end{aligned}$$

Como $v_i \in \partial D$, $\phi(v_i) = \widehat{\phi}(v_i) = h_{v_i} = f(g_i)$ y como $\ell : \partial D \to C_1$, con x_2 y v_i vértices consecutivos, entonces $d(\ell(v_i), \ell(x_2)) = 1$ (ésto pues en C_i cada arista tiene longitud 1). Además, $d(h_{x_1}, h_{x_2}) \leq \rho$, $d(h_{x_2}, \phi(x_2)) \leq \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} d(\phi(v_i), \phi(x_2)) \leq d(\phi(v_i), \phi(v_{i+1})) &= d(h_{v_i}, h_{v_{i+1}}) \\ &\leq \rho \end{aligned}$$

(ésto último pues v_i y v_{i+1} son vértices adyacentes) y $d(f'f(g_i), g_i) \leq C'$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
d(\widehat{\ell}(x_1), \widehat{\ell}(x_2)) \leq (\lambda\rho + \varepsilon) + (\lambda\frac{1}{2} + \varepsilon) + (\lambda\rho + \varepsilon) + C' + 1 &= \lambda\rho + \varepsilon + \frac{\lambda}{2} + \varepsilon + \lambda\rho + \varepsilon + C' + 1 \\
&\leq 2\lambda\rho + \frac{\lambda}{2} + 3\varepsilon + C' + 1 \\
&\leq 2m^2 + \frac{m}{2} + 3m + m + 1 \\
&= 2m^2 + \frac{9}{2}m + 1 \\
&\leq 3m^2 + 5m + 1 \\
&= \frac{M}{3}.
\end{aligned}$$

Caso iv) Si $x_1, x_2 \in int(D)$. En este caso, $\widehat{\ell}(x_1) = f'(h_{x_1})$ y $\widehat{\ell}(x_2) = f'(h_{x_2})$, por lo que

$$\begin{aligned}
d(\widehat{\ell}(x_1), \widehat{\ell}(x_2)) = d(f'(h_{x_1}), f'(h_{x_2})) \leq \lambda d(h_{x_1}, h_{x_2}) + \varepsilon \leq \lambda\rho + \varepsilon &\leq mm + m \\
&= m^2 + m \\
&\leq 3m^2 + 5m + 1 \\
&= \frac{M}{3}.
\end{aligned}$$

Por tanto, $d(\widehat{\ell}(x_1), \widehat{\ell}(x_2)) \leq \frac{M}{3}$ para todo par de vértices adyacentes $x_1, x_2 \in \tau$. En consecuencia, $\widehat{\ell} : D \to K_1$ es una función continua. Por tanto K_1 es simplemente conexo. ■

4 Embebimientos cuasi-isométricos en el grupo de Thompson F

En este capítulo discutiremos el grupo de Thompson F que, como habíamos mencionado, es caso de estudio en todas las discusiones de teoría geométrica de grupos y mostramos que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y todo $m \geq 0$, $F^n \times \mathbb{Z}^m$ está embebido cuasi-isométricamente en F.

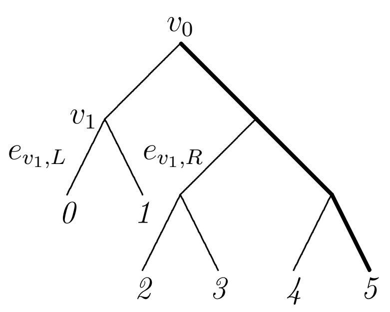
4.1 Arboles binarios ordenados con raíz

Definición 4.1.1. *Un* ***árbol binario ordenado con raíz*** *T, es un árbol que satisface:*
i) Tiene una raíz v_0.
ii) Si consiste de más vértices que v_0, entonces v_0 tiene valencia 2.
iii) Si v es un vértice en T, con valencia mayor que 1, entonces, hay exactamente 2 aristas $e_{v,L}$ y $e_{v,R}$ las cuales contienen a v y no están contenidas en el arco (geodésica) que une a v_0 con v.

Notaciones:

- Los bordes $e_{v,R}$ y $e_{v,L}$ son llamados **borde derecho** e **izquierdo** de T, respectivamente. Vértices con valencia 1 en T los llamaremos **hojas**. Ordenaremos las hojas de T de izquierda a derecha.
- Definimos el **lado derecho** de T como el arco maximal de aristas derechas en el árbol que empieza en la raíz de T; el lado izquierdo del árbol se define análogamente.
- Un **subárbol binario ordenado con raíz** T' de T es un árbol binario ordenado con raíz, el cual es un subárbol de T cuyas aristas derechas e izquierdas son las aristas derechas e izquierdas de T respectivamente, pero cuya raíz no es necesariamente la raíz de T.
- Un árbol con dos hojas será llamado una **careta**.

Ejemplo 4.1.2. *En la siguiente figura observamos un árbol binario ordenado con raíz en v_0, un vértice v_1 de valencia 3 con sus respectivos aristas derecha e izquierda. Además, nos muestra el borde derecho del árbol, con la línea un poco más oscura.*



4.2 El grupo F

Sea F el conjunto de todos los homeomorfismos lineales por tramos del intervalo unidad $[0,1]$ en sí mismo, que son diferenciables excepto en finitos racionales de la forma $\frac{a}{2^n}$, $a,n \in \mathbb{N}$ (los cuales llamaremos **racionales diádicos**) y tales que, en sus intervalos de diferenciabilidad, su derivada es una potencia de 2.

Observaciones: Sea $f \in F$.

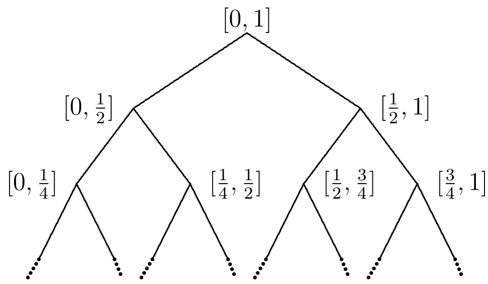
- f es una función creciente; así, $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$, puesto que f es continua.
- Si $0 < x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ son los racionales diádicos donde f no es diferenciable, entonces existen $a_1, \ldots, a_n$ potencias de 2 y $b_2, \ldots, b_n$ racionales diádicos tales que $f(x) = a_1 x$ para $x \in [x_0, x_1]$ y $f(x) = a_i x + b_i$ para $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 2, \ldots, n$.

Proposición 4.2.1. *F con la operación de composición de funciones es un grupo.*

Demostración. Ver [2]. ■

Definición 4.2.2. *Definimos un **intervalo diádico estándar IDE** en $[0,1]$ como un intervalo de la forma $[\frac{a}{2^n}, \frac{a+1}{2^n}]$, donde $a, n \in \mathbb{N}$ y $a \leq 2^n - 1$.*

Construiremos un árbol T usando una **partición diádica** en $[0,1]$, como sigue. Los vértices de T son los **IDE** en $[0,1]$, **un borde** es un par (I,J) de **IDE's** I,J tales que o I es la mitad izquierda de J, en cuyo caso (I,J) es un borde izquierdo, o I es la mitad derecha de J en cuyo caso (I,J) es un borde derecho.
Veámoslo mediante la siguiente figura:



Lema 4.2.3. *Sea $f \in F$. Entonces, existe una partición diádica estándar (PDE) $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ tal que f es lineal en todo intervalo de la partición y $0 = f(x_0) < f(x_1) < \cdots < f(x_n) = 1$ es una PDE.*

Demostración. Escojamos una partición P de $[0,1]$ cuyos puntos son racionales diádicos y tal que f es lineal en todo intervalo de P (existe puesto que $f \in F$). Sea $[a,b]$ uno de los intervalos de P. Como $f \in F$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f'(x) = 2^{-k}$, para todo $x \in [a,b]$.
Sea $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m \geq 0$, $m+k \geq 0$, $2^m a \in \mathbb{Z}$, $2^m b \in \mathbb{Z}$, $2^{m+k} f(a) \in \mathbb{Z}$ y $2^{m+k} f(b) \in \mathbb{Z}$.
Sean $n = (b-a)2^m$ (claramente un entero) y $x_0 = a, x_1 = a + \frac{1}{2^m}, \ldots, x_n = a + \frac{n}{2^m} = b$.
Así, $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ es una PDE. Ahora, supongamos que $f(x) = 2^{-k}x + c$, con c un racional diádico (puesto que $f'(x) = 2^{-k}$ en $[a,b]$ y f es lineal).
Luego, $f(x_i) = f(a + \frac{i}{2^m}) = 2^{-k}(a + \frac{i}{2^m}) + c = 2^{-k}a + c + \frac{i}{2^{k+m}} = f(a) + \frac{i}{2^{m+k}}$.
Así, $f(a) = f(x_0) < \cdots < f(x_n) = f(b)$ es una PDE. Aplicando el procedimiento anterior a cada uno de los intervalos de la partición P podemos obtener la partición pedida. ■

Definición 4.2.4. *Un* ***diagrama de árboles*** *es un par ordenado (T_-, T_+) de árboles tales que T_- y T_+ tienen el mismo número de hojas. El árbol T_- es llamado el dominio o árbol izquierdo del diagrama, y a T_+ se le llama el rango del diagrama o árbol derecho.*

Observación 4.2.4.1.

- *Suponga $f \in F$. Por el lema anterior, existen PDE P y Q, tales que f es lineal en cada intervalo de P y los envía a los intervalos de Q. Al elemento f se le asocia el diagrama de árboles (T_-, T_+), donde T_- es un árbol correspondiente a P y T_+ es el correspondiente a Q.*

- *Dado un diagrama de árboles (T_-, T_+) para f, se puede obtener otro diagrama para f adjuntando caretas a T_- y T_+ como sigue:*
  Sea I la n-ésima hoja de T_-, para algún entero positivo n, y J la n-ésima hoja de T_+. Sean I_1, I_2 las 2 hojas de la careta C con raíz en I y J_1, J_2 las hojas de la careta D con raíz en J.
  Como f es lineal en I, lo es en I_1 y en I_2; además, como $f(I) = J$, entonces $f(I_1) = J_1$ y $f(I_2) = J_2$. Así, claramente, (T'_-, T'_+) donde $T'_- = T_- \cup C$ y $T'_+ = T_+ \cup D$ es un diagrama de árboles para f.

- *Recíprocamente, si existe un entero positivo n tal que la n-ésima y $(n+1)$-ésima hojas de T_-, respectivamente T_+, son los vértices de una careta C, respectivamente D, con raíces I_C, J_D respectivamente. Se puede ver, fácilmente, que las pendientes de f en las hojas de C, son las mismas; así, f envía I_C linealmente a J_D. Es decir, el diagrama (T'_-, T'_+) donde $T'_- = T_- - C$, $T'_+ = T_+ - D$ es un diagrama para f.*

- *Decimos que un diagrama de árboles (T_-, T_+) para una función f* ***es reducido****, si no se le pueden quitar caretas como en el item anterior, obteniendo un árbol equivalente para f.*

- *Si (T_-, T_+) es un diagrama de árboles reducido para f, este es único.*

- *De ahora en adelante, cuando nos refiramos al diagrama de árboles (T_-, T_+) correspondiente a $f \in F$, nos referimos a su diagrama de árboles reducido y escribiremos $f = (T_-, T_+)$*

- *La multiplicación en el grupo F de $f = (T_-, T_+)$ y $g = (S_-, S_+)$ se establece generando diagramas reducidos representativos (T'_-, T'_+) de f y (S'_-, S'_+) de g, tales que $T'_+ = S'_-$; luego el producto fg es definido por $fg = (T'_-, S'_+)$.*

Teorema 4.2.5. *Sea f una función de $[0,1]$ en sí mismo. Entonces, $f \in F$ sii existe un diagrama reducido (T_-, T_+) para f.*

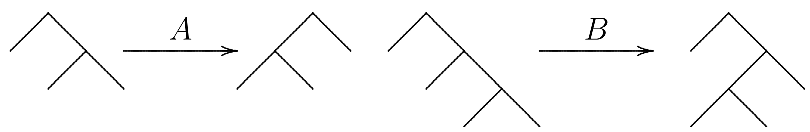
Demostración. Es inmediata de las observaciones anteriores. ∎

Ejemplo 4.2.6. *Mediante este ejemplo mostramos cómo visualizar las funciones de F mediante diagramas de árboles. Sean*

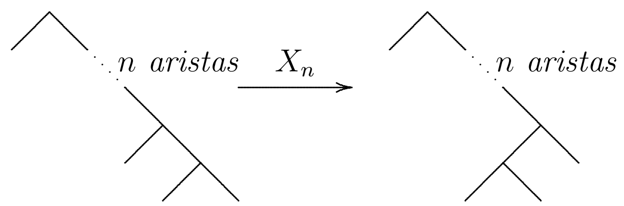
$$A(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & si\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ x - \frac{1}{4}, & si\ \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ 2x - 1, & si\ \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$B(x) = \begin{cases} x, & si\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{4}, & si\ \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ x - \frac{1}{8}, & si\ \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{7}{8}, \\ 2x - 1, & si\ \frac{7}{8} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Los diagramas de árboles para las funciones A, B definidas arriba, son:



Sea $x_0 = A$ y $x_n = A^{(1-n)}BA^{n-1}$, para $n \geq 1$. Fácilmente se puede ver que el diagrama de árbol para x_n es el siguiente:



Lema 4.2.7. *El grupo F de Thompson es generado por A y B.*

Demostración. Ver [2]. ∎

Lema 4.2.8. *Sean $F_1 = \langle A, B \mid [AB^{-1}, A^{-1}BA], [AB^{-1}, A^{-2}BA^2] \rangle$ y $F_2 = \langle x_k,\ k \geq 0 \mid x_i^{-1}x_jx_i = x_{j+1},\ si\ i < j \rangle$. Entonces, existe un isomorfismo de grupos de F_1 a F_2 el cual mapea A en x_0 y B en x_1.*

Demostración. Ver [2]. ∎

Lema 4.2.9. *Existe un isomorfismo de grupos de F_1 y F_2 en F.*

Demostración. Ver [2]. ■

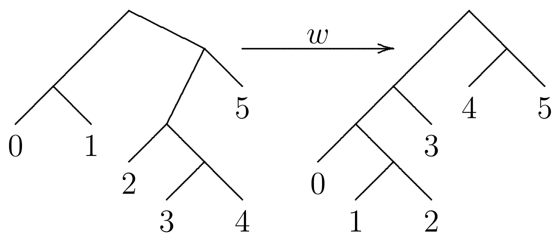
Observación 4.2.9.1.

- *En vista de los Lemas 4.2.8 y 4.2.9, se tiene que el grupo F de Thompson tiene dos presentacions isomorfas, a saber:*
  $F = \langle x_0, x_1 \mid [x_0x_1^{-1}, x_0^{-1}x_1x_0], [x_0x_1^{-1}, x_0^{-2}x_1x_0^2]\rangle$ *y*
  $F = \langle x_k,\ k \geq 0 \mid x_i^{-1}x_jx_i = x_{j+1},\ si\ i < j\rangle$
- *Por el Lema 4.2.8 y el Lema 4.2.7, se sigue que F es generado por x_0 y x_1.*
- *La distancia con respecto a la métrica de la palabra inducida por el conjunto finito estándar de generadores de F, $\{x_0, x_1\}$, entre elementos $v, w \in F$, es*
  $d_F(v, w) = |v^{-1}w|$.

4.3 Diagramas de pares de árboles y forma normal

Existe una correspondencia biyectiva entre el diagrama de árboles descrito en la sección anterior y la **forma normal** de un elemento en F, la cual describiremos a continuación.
El exponente de una hoja numerada n en T_- o T_+, es definido como **la longitud del camino maximal** consistente sólo de bordes izquierdos, iniciando en n y que no toca el lado derecho del árbol. Lo denotaremos por $E(n)$. Nótese que $E(n) = 0$ para una hoja marcada n que sea una hoja derecha de una careta, pues no existe un camino consistente sólo de bordes izquierdos iniciando en n.

Ejemplo 4.3.1. *Sea $w = x_0^2x_1x_3^{-1}x_2^{-1}x_0^{-1}$. Entonces su diagrama de par de árboles asociado es:*



Si numeramos las hojas del árbol izquierdo T_-, por 0, 1, 2, 3, 4, 5, *entonces los exponentes correspondientes son $E(0) = 1$, $E(1) = 0$, $E(2) = 1$, $E(3) = 1$, $E(4) = 0$ y $E(5) = 0$*

Una vez calculados los exponentes de las hojas en T_- y en T_+, podemos calcular la forma normal del elemento $w = (T_-, T_+) \in F$, de la siguiente manera:
$i)$ **La parte positiva** de la forma normal de w será:
$x_0^{E(0)}x_1^{E(1)} \cdots x_m^{E(m)}$, donde m es el número de hojas de T_- , T_+ y los exponentes son obtenidos de las hojas de T_+.

ii) **La parte negativa** de la forma normal de w será:
$x_m^{-a_m} x_{m-1}^{-a_{m-1}} \cdots x_1^{-a_1} x_0^{-a_0}$, donde los exponentes son obtenidos de las hojas de T_-.
Así, **la forma normal** de w, será:

$$x_0^{E(0)} x_1^{E(1)} \cdots x_m^{E(m)} x_m^{-a_m} x_{m-1}^{-a_{m-1}} \cdots x_1^{-a_1} x_0^{-a_0}$$

Nota: Para mayor referencia sobre la forma normal de un elemento $w \in F$, leer el Corolario 2.7 de [2].

4.4 Longitud de la palabra en F

Dado $w \in F$, usaremos el siguiente teorema para aproximar la longitud de w, usando sólo el número de caretas del diagrama de árbol reducido que representa a w.

Teorema 4.4.1. *Sea $w = (T_-, T_+)$ y sea $N(w)$ el número de caretas en T_-. Entonces $N(w) - 2 \leq |w| \leq 4N(w) - 4$.*

Demostración. Ver la demostración en [3]. ■

4.5 Embebimientos cuasi-isométricos

En este aparte daremos varios ejemplos de embebimientos cuasi-isométricos de $F^n \times \mathbb{Z}^m$ en F, para $n \in \mathbb{Z}^+$ y $m \geq 0$, los cuales si bien son homomorfismos, son tratables algebraicamente y se pueden describir geométricamente en términos de diagramas de árboles. A este tipo de embebimientos los llamaremos embebimientos geométricos cuasi-isométricos.

La función desplazamiento ϕ

Iniciamos esta sección con un ejemplo de un embebimiento cuasi-isométrico $F \to F$, el cual puede ser manipulado tanto geométrica como algebraicamente. Existe un homomorfismo $\phi : F \to F$, llamado función desplazamiento, definido sobre el grupo F de Thompson, respecto a la presentación infinita $F = \langle x_k,\ k \geq 0 \mid x_i^{-1} x_j x_i = x_{j+1},\ si\ i < j \rangle$, la cual aumenta el índice de cada generador en 1; es decir $\phi(x_k) = x_{k+1}$, para todo $k \geq 0$. Por ejemplo, si $w = x_3^2 x_5 x_{13} x_{10}^{-1} x_9^{-4}$, entonces $\phi(w) = x_4^2 x_6 x_{14} x_{11}^{-1} x_{10}^{-4}$; así, si w está en su forma normal, también lo estará $\phi(w)$.
El siguiente resultado muestra que cualquier potencia de ϕ es un embebimiento cuasi-isométrico.

Teorema 4.5.1. *Para cualquier entero positivo n, $\phi^n : F \to F$ es un embebimiento cuasi-isométrico.*

Demostración. Sea $w \in F$ y sea $w = (T_-, T_+)$ su correspondiente diagrama de árboles.
Si $\phi(w) = (S_-, S_+)$, de la definición de ϕ es claro que (S_-, S_+) es el árbol compuesto de una careta raíz, con (T_-, T_+) como el subárbol derecho. Así, si $v, w \in F$, el diagrama de árboles que representa al producto $\phi(w)^{-1}\phi(v)$ tiene una careta más en cada árbol que en el

diagrama de árboles que representa a $w^{-1}v$.
Sean $N(w^{-1}v)$ y $N(\phi(w)^{-1}\phi(v))$ el número de caretas de los árboles izquierdos en los diagramas de $w^{-1}v$ y de $\phi(w)^{-1}\phi(v)$, respectivamente. Por lo anteriormente expuesto, $N(\phi(w)^{-1}\phi(v)) = N(w^{-1}v)+1$; además, por el Teorema 4.4.1 aplicado a $w^{-1}v$ y a $\phi(w)^{-1}\phi(v)$, se tiene que:

$$N(w^{-1}v) - 2 \leq |w^{-1}v| \leq 4N(w^{-1}v) - 4 \tag{14}$$

y

$$N(\phi(w)^{-1}\phi(v)) - 2 \leq |\phi(w)^{-1}\phi(v)| \leq 4N(\phi(w)^{-1}\phi(v)) - 4 \tag{15}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}|w^{-1}v| \leq N(w^{-1}v) - 1 = N(\phi(w)^{-1}\phi(v)) - 2 &\leq |\phi(w)^{-1}\phi(v)| \\ &\leq 4N(\phi(w)^{-1}\phi(v)) - 4 \\ &= 4(N(w^{-1}v) + 1) - 4 \\ &= 4N(w^{-1}v) + 4 - 4 \\ &= 4N(w^{-1}v) \end{aligned} \tag{16}$$

De (14) se tiene que $N(w^{-1}v) \leq |w^{-1}v| + 2$, por lo que $4N(w^{-1}v) \leq 4|w^{-1}v| + 8$; así en (16) se tiene que: $\frac{1}{4}|w^{-1}v| \leq |\phi(w)^{-1}\phi(v)| \leq 4|w^{-1}v| + 8$. Pero, como $d_F(w, v) = |w^{-1}v|$, donde d_F es la métrica en F respecto al conjunto generador infinito $\{x_k \mid k \geq 0\}$ y $|\phi(w)^{-1}\phi(v)| = d_F(\phi(w), \phi(v))$, tomando $\lambda = 4$ y $\varepsilon = 8$ se tiene que para todo $w, v \in F$,

$$\frac{1}{\lambda}d(w, v) - \varepsilon \leq d(\phi(w), \phi(v)) \leq \lambda d(w, v) + \varepsilon \tag{17}$$

Por tanto ϕ es un (λ, ε) embebimiento cuasi-isométrico.
Finalmente nótese que para todo $w, v \in F$,

$$\begin{aligned} d(\phi^2(w), \phi^2(v)) = d(\phi\phi(w), \phi\phi(v)) \leq \lambda d(\phi(w), \phi(v)) + \varepsilon &\leq \lambda[\lambda d(w, v) + \varepsilon] + \varepsilon \\ &= \lambda^2 d(w, v) + \lambda\varepsilon + \varepsilon \\ &= \lambda^2 d(w, v) + (\lambda + 1)\varepsilon \end{aligned}$$

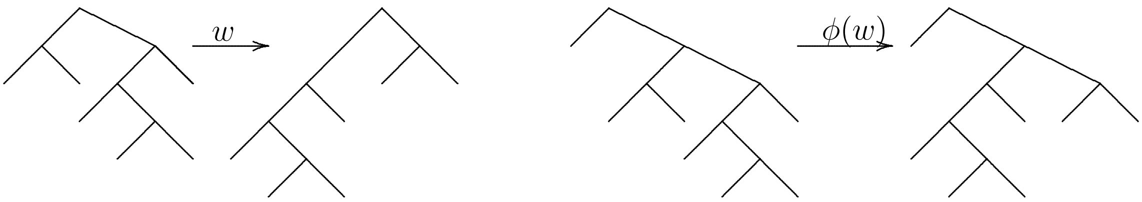
y

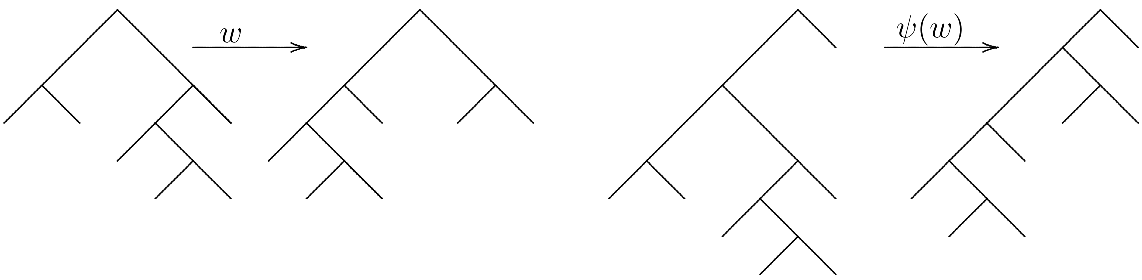
$$\begin{aligned} d(\phi^2(w), \phi^2(v)) = d(\phi\phi(w), \phi\phi(v)) \geq \frac{1}{\lambda}d(\phi(w), \phi(v)) - \varepsilon &\geq \frac{1}{\lambda}(\frac{1}{\lambda}d(w, v) - \varepsilon) - \varepsilon \\ &\geq \frac{1}{\lambda^2}d(w, v) - \varepsilon(\frac{1}{\lambda} + 1) \\ &= \frac{1}{\lambda^2}d(w, v) - \frac{(\lambda + 1)\varepsilon}{\lambda} \\ &\geq \frac{1}{\lambda^2}d(w, v) - (\lambda + 1)\varepsilon \end{aligned}$$

Tomando $\lambda' = \lambda^2 \geq 1$ y $\varepsilon' := (\lambda + 1)\varepsilon \geq 0$, se tiene que para todo $w, v \in F$, $\frac{1}{\lambda'}d(w, v) - \varepsilon' \leq d(\phi^2(w), \phi^2(v)) \leq \lambda' d(w, v) + \varepsilon'$, es decir ϕ^2 es un embebimiento cuasi-isométrico. Procediendo de manera inductiva sobre n, se llega a que para todo entero positivo n, ϕ^n es un embebimiento cuasi-isométrico. ■

La función desplazamiento reversa ψ

Dando una representación geométrica de la función desplazamiento ϕ, podemos definir la función desplazamiento inversa, la cual denotaremos por ψ y que actúa de la siguiente manera: si $w = (T_-, T_+) \in F$, $\psi(w) = (S_-, S_+)$, donde S_- y S_+ se obtienen pegando T_- y T_+ en las hojas izquierdas de una careta C. Por ejemplo, si $w = x_0^{-2}x_1x_3^{-1}x_2^{-1}x_0^{-1}$, los diagramas correspondientes a $\phi(w)$ y $\psi(w)$ son:

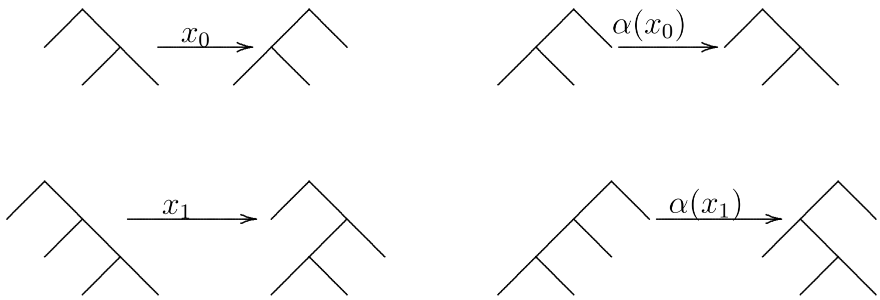




Observación 4.5.1.1. *Es natural considerar ψ como si fuese ϕ. Sin embargo, en la literatura ψ es menos mencionada y la razón es quizas por lo incomoda de tratar algebraicamente, distinto a lo que ocurre con ϕ. Más precisamente, si $w \in F$ está escrito en su forma normal, entonces la forma normal de $\phi(w)$ es fácilmente determinada, mientras que la forma normal de ψ es un poco más difícil de determinar; para ello, sea $w = (T_-, T_+)$ y $\psi(w) = (S_-, S_+)$, entonces las hojas con exponente 0 en T_- y T_+ serán hojas con exponente 1 en S_- y en S_+ respectivamente, lo que da origen a nuevos generadores que aparecerán en la forma normal de $\psi(w)$. Además, es difícil predecir teniendo solamente la forma normal de w, qué generadores adicionales aparecerán en la forma normal de $\psi(w)$. Por ejemplo, si $w = x_0^3x_1x_4x_5^3x_7^{-1}x_6^{-1}x_4^{-1}x_3^{-2}x_1^{-1}x_0^{-1}$, entonces $\psi(w) = x_0^3x_1x_4x_5^3x_7^{-1}x_6^{-1}x_4^{-1}x_3^{-2}x_1^{-1}x_0^{-1}$. Afortunadamente, desde el punto de vista geométrico, podemos obtener para ψ un análogo al Teorema 4.5.1 para ϕ.*

Teorema 4.5.2. *Para cualquier entero n, $\psi^n : F \to F$ es un embebimiento cuasi-isométrico.*

Demostración. Expresemos ψ geométricamente en términos de diagramas de árboles, usando la función ϕ y el automorfismo externo α de F, el cual efectua una reflexión vértical en cada árbol del par diagrama. Nótese que α envía los generadores x_0 y x_1 de F al conjunto generador alterno de F, $\{x_0^{-1}, x_0x_1x_0^2\}$. En efecto, ésto lo podemos comprobar mediante el siguiente par de diagramas:



Nótese de los dos primeros pares de árboles, que si $w = x_0$, $\alpha(w) = \alpha(x_0) = x_0^{-1}$ y de los dos últimos pares de árboles, que si $w = x_1$, $\alpha(w) = x_0x_1x_0^{-2}$.

Afirmamos que $\alpha : F \to F$ es una cuasi-isometría. En efecto, si $w = (T_-, T_+) \in F$, por lo mencionado arriba, vemos que si $\alpha(w) = (S_-, S_+)$, entonces T_- y S_- tienen el mismo número de caretas. Así, si $v, w \in F$, el diagrama representando a $\alpha^{-1}(v)\alpha(w)$ tiene el mismo número de caretas en cada árbol que los árboles corespondientes del diagrama representando $v^{-1}w$; luego $N(v^{-1}w) = N((\alpha(v))^{-1}\alpha(w))$ y por el Teorema 4.4.1,

$$N(v^{-1}w) - 2 \leq |v^{-1}w| \leq 4N(v^{-1}w) - 4$$

y

$$N((\alpha(v))^{-1}\alpha(w)) - 2 \leq |(\alpha(v))^{-1}\alpha(w)| \leq 4N((\alpha(v))^{-1}\alpha(w)) - 4$$

Luego, $\frac{1}{4}|v^{-1}w| + 1 \leq N(v^{-1}w)$, de donde se sigue que

$$\frac{1}{4}|v^{-1}w| - 1 \leq |(\alpha(v))^{-1}\alpha(w)|N(v^{-1}w) - 2 = N((\alpha(v))^{-1}\alpha(w)) - 2 \leq |(\alpha(v))^{-1}\alpha(w)| \quad (18)$$

De otra parte,

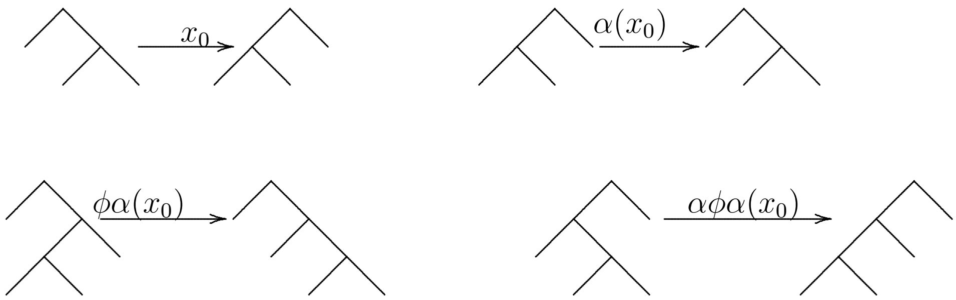
$$|(\alpha(v))^{-1}\alpha(w)| \leq 4N((\alpha(v))^{-1}\alpha(w)) - 4 = 4N(v^{-1}w) - 4 \leq 4|v^{-1}w| + 4 \quad (19)$$

De (18) y (19), tenemos que

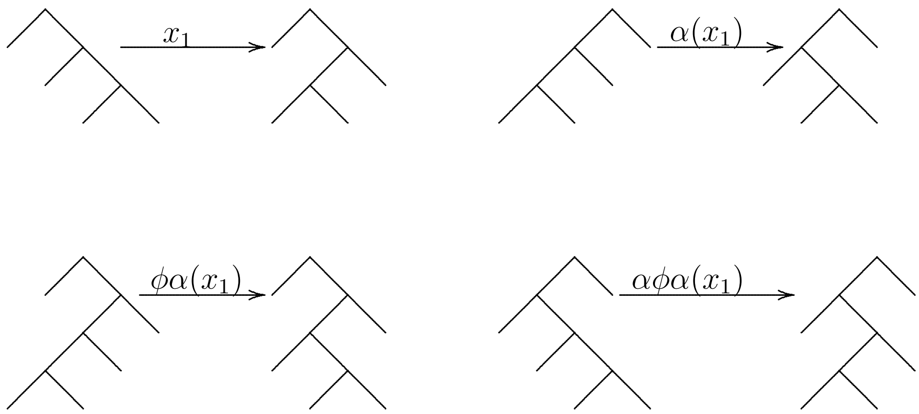
$$\frac{1}{4}|v^{-1}w| - 1 \leq |\alpha^{-1}(w), \alpha(v)| \leq 4|v^{-1}w| + 4$$

de lo cual $\frac{1}{4}d(w, v) - 4 \leq d(\alpha(w), \alpha(v)) \leq 4d(w, v) + 4$, por lo que α es un embebimiento cuasi-isométrico. Además, dado $w \in F$, como $\alpha : F \to F$ es un automorfismo, existe $v \in F$

talque $w = \alpha(v)$. Sea $\widehat{v} := v \in F$; tomando $C = 1$ se tiene que:
$d(w, \alpha(\widehat{v})) = d(w, \alpha(v)) = d(w, w) = 0 < 1 = C$. Por tanto α es una cuasi-isometría de F.
De otra parte, nótese que $\alpha \circ \phi \circ \alpha = \psi$. En efecto, como x_0 y x_1 generan a F, basta ver que $\alpha \circ \phi \circ \alpha(x_0) = \psi(x_0)$ y que $\alpha \circ \phi \circ \alpha(x_1) = \psi(x_1)$. Gráficamente:
Para x_0,



Para x_1,



Por tanto, $\alpha \circ \phi \circ \alpha = \psi$; pero como α y ϕ son embebimientos cuasi-isometricos y la composición de embebimientos es un embebimiento cuasi-isométrico (Ver la demostración del Lema 3.4.2), entonces ψ es un embebimiento cuasi-isométrico. Procediendo de manera análoga que en la prueba del Teorema 4.5.1, se llega a que ψ^n es un embebimiento cuasi-isométrico. ■

4.6 Subgrupos clon de F

En la sección anterior vimos que para cualquier entero positivo n, $\phi^n(F)$ y $\psi^n(F)$ están embebidos cuasi-isométricamente en F y que un elemento $w \in F$ y sus imágenes $\phi^n(w)$ y $\psi^n(w)$, difieren en un número finito de caretas; pero esta idea la podemos generalizar de la siguiente manera:
Sea $P = f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1$, donde cada f_i es o ϕ o ψ.

Definición 4.6.1. *Un* ***subgrupo clon*** *de F es la imagen de F bajo P, es decir $P(F)$.*

Los ejemplos más simples de subgrupos clon de F, son $\phi^n(F)$ y $\psi^n(F)$; sin embargo existen muchos ejemplos de subgrupos clon de F, sólo que existen muchas formas equivalentes de desarrollarlos.
Sea P definida como arriba y consideremos el subgrupo clon $P(F)$. La idea siguiente es describir este subgrupo, usando un direccionamiento binario; es decir en términos de árboles binarios, a saber: Un nodo en un árbol binario está dando una dirección, usando el siguiente método inductivo. Dado un nodo con marca s, el hijo izquerdo del nodo será marcada $s0$ y el hijo derecho del nodo será marcado por $s1$. Por ejemplo, el hijo derecho del hijo derecho del hijo izquierdo, del hijo derecho de la raíz tiene marca 1011.
Dada P como arriba y $w = (T_-, T_+) \in F$, sea $P(w) = (S_-, S_+)$. De las definiciones de ϕ, ψ y P, sabemos que el árbol T_- será un subárbol de S_- y que T_+ será un subárbol de S_+. Seguidamente, consideremos la marca $s = \varepsilon_n \cdots \varepsilon_2\varepsilon_1$ de la careta raíz de T_- como subárbol de S_- y usemos s para asignar una marca al subgrupo clon $P(F)$. Nos referiremos a $P(F)$ como C_s; por ejemplo, el subgrupo C_{1011} es la imagen $\phi\psi\phi^2$.
Podemos también describir subgrupos clonados por su representación como homeomorfismos lineales del intervalo unidad; a saber: cada intervalo diádico $[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}]$ es afín equivalente al intervalo unidad por una función afín con coeficientes diádicos; es decir, para cada
$\varphi : [\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}] \to [0,1]$, existe $\theta : [0,1] \to [0,1]$, homeomorfismo lineal tal que $\theta \mid_{[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}]} = \varphi$.
Para una mejor ilustración de lo anterior, ver la prueba del Lema 4.2.3.
Para un subgrupo clon fijo C_s, donde s tiene longitud n, existe un subintervalo diádico $I' \subset [0,1]$, el cual contiene la coordenada x de todos los puntos de salto de elementos de C_s. La longitud de I' es 2^{-n} y los puntos finales de I' son $\frac{i}{2^n}$ y $\frac{i+1}{2^n}$; es decir, los puntos finales de I' pueden ser calculados usando la marca s. Por tanto, cualquier elemento de F cuyos puntos de salto pertenecen todos al intervalo $[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}]$, será un elemento de C_s. Por ejemplo, en el subgrupo C_{1011}, el intervalo diádico que contiene todos los puntos de salto de éste, es $[\frac{11}{16}, \frac{3}{4}]$ o equivalentemente, $[\frac{11}{2^4}, \frac{12}{2^4}]$.

Observación 4.6.1.1. *Es fácil ver que cualquier subgrupo clon $C_s = P(F)$ es isomorfo a F.*

Demostración. Sea $\varphi : F \to C_s$, definida para todo $w \in F$ por $\varphi(w) = P(w)$. Respecto a φ podemos afirmar que:
i) Claramente φ es un homomorfismo, pues $P = f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1$ donde f_i es ϕ o ψ y tanto ϕ como ψ son homomorfismos.
ii) φ es inyectiva: Si $w = (T_-, T_+) \in F$ y $\varphi(w) = P(w) = (S_-, S_+)$, sabemos por definición que el par (T_-, T_+) es reducido; además, de las definiciones de ϕ, ψ y P, es claro no se puede realizar ninguna reducción adicional después de que el par (S_-, S_+) ha sido formado (ésto pues tanto ϕ como ψ envían elementos en forma su forma normal em F a elementos en su forma normal en $\phi(F)$ y $\psi(F)$, respectivamente). Así cada elemento de F genera un único elemento de $C_s := P(F)$. En consecuencia, φ es inyectiva.
φ es sobre: Dado $u \in C_s = P(F)$, $u = P(w)$ con $w \in F$; es decir, $u = \varphi(w)$ con $w \in F$. Por tanto φ es sobre.

De i), ii) y iii) se sigue que φ es un isomorfismo. En consecuencia, $C_s := P(F) \cong F$. ■

Teorema 4.6.2. *Cualquier subgrupo clon de F es un embebimiento cuasi-isométrico.*

Demostración. Sea $C_s := P(F)$, donde $P = f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1$ (donde $f_i = \phi$ ó $f_i = \psi$), un subgrupo clon de F. De la definición de C_s es claro que C_s está completamente determinado por P; además, como ϕ y ψ son embebimientos cuasi-isométricos y la composición de embebimientos cuasi-isométricos es un embebimiento cuasi-isométrico, entonces $P(F) : F \to F$ es un embebimiento cuasi-isométrico. Por tanto C_s es un embebimiento cuasi-isométrico. ■

4.7 Subgrupos embebidos cuasi-isométricamente en F

En esta sección mostraremos a manera de ejemplos, algunos resultados importantes respecto a subgrupos embebidos cuasi-isométricamente en el grupo de Thompson F.

Proposición 4.7.1. *El subgrupo $F \times \mathbb{Z}$ generado por $x_0x_1^{-1}$, x_2 y x_3 está cuasi-isométricamente embebido en F.*

Demostración. De la Observación 4.6.1.1, tenemos $\phi^n(F) \cong F$, por lo que la forma normal de un elemento en $\phi^n(F)$ es exactamente la misma cuando el elemento es considerado en F. Sea $x \in \phi^2(F) \cong F$, entonces $x = x_{i_1}^{r_1} x_{i_2}^{r_2} \cdots x_{i_n}^{r_n} x_{j_m}^{-s_m} \cdots x_{j_2}^{-s_2} x_{j_1}^{-s_1}$, donde todos los índices son al menos 2 (ésto es claro de la definición de ϕ).
Sea $D(x) = r_1 + r_2 + \cdots + r_n + s_1 + s_2 + \cdots + s_m + i_n + j_m$. Además, recordemos que como $\mathbb{Z} = \langle x \mid \rangle$ y $F = \langle x_0, x_1 \mid [x_0x_1^{-1}, x_0^{-1}x_1x_0], [x_0x_1^{-1}, x_0^{-2}x_1x_0^2] \rangle$, entonces el producto directo $F \times \mathbb{Z}$ tiene la presentación

$$F \times \mathbb{Z} = \langle x_0, x_1, x \mid [x_0x_1^{-1}, x_0^{-1}x_1x_0], [x_0x_1^{-1}, x_0^{-2}x_1x_0^2], x_0^{-1}x^{-1}x_0x, x_1^{-1}x^{-1}x_1x \rangle \tag{20}$$

Sea $F' = \langle x_0x_1^{-1}, x_2, x_3 \rangle$ y sea $\varphi : F \times \mathbb{Z} \to F'$, definida por $\varphi(x) = x_0x_1^{-1}$, $\varphi(x_0) = x_2$ y $\varphi(x_1) = x_3$. De la definición de φ, es claro que φ es un isomorfismo, por lo que
$F \times \mathbb{Z} \cong F' = \langle x_0x_1^{-1}, x_2, x_3 \rangle$.
Ahora, sea $\overline{x} = (x_0x_1^{-1})^k x$ un elemento en $F \times \mathbb{Z}$ y computemos la forma normal de $\overline{x}$ en F. En efecto, nótese que como $x_i^{-1}x_jx_i = x_{j+1}$ para todo $i < j$, en particular $x_j^{-1}x_0 = x_0x_{j+1}^{-1}$ para todo $j \geq 1$. Luego,

$$(x_0x_1^{-1})^2 = x_0x_1^{-1}x_0x_1^{-1} = x_0(x_1^{-1}x_0)x_1^{-1} = x_0(x_0x_2^{-1})x_1^{-1} = x_0^2x_2^{-1}x_1^{-1}$$

$$(x_0x_1^{-1})^3 = (x_0x_1^{-1})^2x_0x_1^{-1} = x_0^2x_2^{-1}x_1^{-1}x_0x_1^{-1} = x_0^3(x_0^{-1}x_2^{-1}x_0)(x_0^{-1}x_1^{-1}x_0)x_1^{-1} = x_0^3x_3^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1}$$

$$\begin{aligned}(x_0x_1^{-1})^4 = (x_0x_1^{-1})^3x_0x_1^{-1} = x_0^3x_3^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1}x_0x_1^{-1} &= x_0^4(x_0^{-1}x_3^{-1}x_0)(x_0^{-1}x_2^{-1}x_0)(x_0^{-1}x_1^{-1}x_0)x_1^{-1} \\ &= x_0^4x_4^{-1}x_3^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1}.\end{aligned}$$

En general, $(x_0x_1^{-1})^k = x_0^kx_k^{-1}x_{k-1}^{-1} \cdots x_1^{-1}$. Luego,

$$\overline{x} = (x_0x_1^{-1})^k x = (x_0^kx_k^{-1}x_{k-1}^{-1} \cdots x_2^{-1}x_1^{-1})(x_{i_1}^{r_1} \cdots x_{i_n}^{r_n} x_{j_m}^{s_m} \cdots x_{j_2}^{-s_2} x_{j_1}^{-s_1}) \tag{21}$$

Además, $x_i^{-1}x_j^2x_i = (x_i^{-1}x_jx_i)(x_i^{-1}x_jx_i) = x_{j+1}x_{j+1} = x_{j+1}^2$. Continuando de este modo, se llega a que $x_i^{-1}x_j^kx_i = x_{j+1}^k$. Luego,

$$\begin{aligned} x_0^kx_k^{-1}\cdots x_2^{-1}x_1^{-1}x_{i_1}^{r_1}x_{i_2}^{r_2}\cdots x_{i_n}^{r_n} &= x_0^kx_k^{-1}\cdots x_2^{-1}(x_1^{-1}x_{i_1}^{r_1}x_1)x_1^{-1}x_{i_2}^{r_2}\cdots x_{i_n}^{r_n} \\ &= x_0^kx_k^{-1}\cdots (x_2^{-1}x_{i_1+1}^{r_1}x_2)x_2^{-1}x_1^{-1}x_{i_2}^{r_2}\cdots x_{i_n}^{r_n} \\ &= x_0^kx_k^{-1}\cdots x_3^{-1}x_{i_1+2}^{r_1}x_2^{-1}x_1^{-1}\cdots x_{i_n}^{r_n} \\ &= x_0^kx_k^{-1}\cdots x_3^{-1}x_{i_1+2}^{r_1}x_2^{-1}(x_1^{-1}x_{i_2}^{r_2}x_1)x_1^{-1}\cdots x_{i_n}^{r_n} \\ &= x_0^kx_k^{-1}\cdots x_3^{-1}x_{i_1+2}^{r_1}x_2^{-1}x_{i_2+1}^{r_2}x_1^{-1}\cdots x_{i_n}^{r_n} \\ &\vdots \\ &= x_0^kx_{i_1+k}^{r_1}\cdots x_{i_n+k}^{r_n}x_k^{-1}\cdots x_2^{-1}x_1^{-1} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x_k^{-1}\cdots x_2^{-1}x_1^{-1}x_{j_m}^{-s_m}\cdots x_{j_2}^{-s_2}x_{j_1}^{-s_1} &= x_k^{-1}\cdots(x_1^{-1}x_{j_m}^{-s_m}x_1)x_1^{-1}\cdots x_{j_2}^{-s_2}x_{j_1}^{-s_1} \\ &= x_k^{-1}\cdots\ x_{j_m+1}^{-s_m}x_1^{-1}\cdots x_{j_2}^{-s_2}x_{j_1}^{-s_1} \\ &= x_k^{-1}\cdots(x_2^{-1}x_{j_m+1}^{-s_m}x_2)(x_2^{-1}x_1^{-1})\cdots x_{j_2}^{-s_2}x_{j_1}^{-s_1} \\ &= x_k^{-1}\cdots x_3^{-1}x_{j_m+2}^{-s_m}x_2^{-1}x_1^{-1}\cdots x_{j_2}^{-s_2}x_{j_1}^{-s_1} \\ &\vdots \\ &= x_{j_m+k}^{-s_m}\cdots x_{j_1+k}^{-s_1}x_k^{-1}x_{k-1}^{-1}\cdots x_1^{-1} \end{aligned}$$

Así, $\overline{x} = x_0^kx_{i_1+k}^{r_1}\cdots x_{i_n+k}^{r_n}x_{j_m+k}^{-s_m}\cdots x_{j_1+k}^{-s_1}x_k^{-1}x_{k-1}^{-1}\cdots x_1^{-1}$, por lo que
$D(\overline{x}) = r_1+r_2+\cdots+r_n+s_1+s_2+\cdots+s_m+2k+(i_n+k)+(j_m+k)$. Tenemos así que

$$\begin{aligned} k+D(x) &= k+(r_1+r_2+\cdots+r_n+s_1+s_2+\cdots+s_m+i_n+j_m) \\ &\leq D(\overline{x}) \\ &= 4k+(r_1+r_2+\cdots+r_n+s_1+s_2+\cdots+s_m+i_n+j_m) \\ &\leq 4k+4D(x) \\ &= 4(k+D(x)) \end{aligned}$$

es decir, para todo $\overline{x}\in F\times\mathbb{Z}$,

$$k+D(x)\leq D(\overline{x})\leq 4(k+D(x)) \tag{22}$$

Sea $\tau : F\to F\times\mathbb{Z}$, definida por $\tau(x)=\overline{x}=(x_0x_1^{-1})^kx$. Dados $x,y\in F$, por la Proposición 2 de [1], $\frac{D(x^{-1}y)}{6}-2\leq |x^{-1}y|_F\leq 3D(x^{-1}y)$ y por la Ecuación (22),
$k+D(x^{-1}y)\leq D(\tau(x)^{-1}\tau(y))\leq 4(k+D(x^{-1}y))$; así combinando estas dos últimas desigualdades, tenemos que:

$$\begin{aligned} d_{F\times\mathbb{Z}}(\tau(x),\tau(y)) = |\tau(x)^{-1}\tau(y)|_{F\times\mathbb{Z}} \leq 3D(\tau(x)^{-1}\tau(y)) &\leq 12k+12D(x^{-1}y) \\ &\leq 12k+72|x^{-1}y|_F+144 \\ &= 72|x^{-1}y|_F+12(k+12) \end{aligned}$$

es decir,

$$d(\tau(x), \tau(y)) \leq 72d(x, y) + 12(k + 12) \tag{23}$$

y

$$\begin{aligned} d(x, y) = |x^{-1}y| \leq 3D(x^{-1}y) &\leq 3D(\tau(x)^{-1}\tau(y)) - 3k \\ &\leq 18|\tau(x)^{-1}\tau(y)| + 36 - k \\ &= 18|\tau(x)^{-1}\tau(y)| + 3(12 - k) \\ &\leq 72|\tau(x)^{-1}\tau(y)| + 12(k + 12) \\ &= 72[|\tau(x)^{-1}\tau(y)| + \frac{1}{6}(k + 12)] \end{aligned}$$

por lo que $\frac{1}{72}d(x, y) - \frac{1}{6}(k + 12) \leq d_{F\times\mathbb{Z}}(\tau(x), \tau(y))$, de donde se sigue que

$$\frac{1}{72}d(x, y) - 12(k + 12) \leq d_{F\times\mathbb{Z}}(\tau(x), \tau(y)) \tag{24}$$

De la Ecuacion (23) y la Ecuación (24) tenemos que
$\frac{1}{72}d_F(x, y) - 12(k + 12) \leq d_{F\times\mathbb{Z}}(\tau(x), \tau(y)) \leq 72d_F(x, y) + 12(k + 12)$. Por tanto τ es un embebimiento cuasi-isométrico, es decir $F \times \mathbb{Z}$ está C-I embebido en F. ■

Proposición 4.7.2. *Si R, S, T y W son espacios métricos tales que R está C-I embebido en S y T está C-I embebido en W, entonces $R \times T$ está C-I embebido en $S \times W$.*

Demostración. Como R está C-I embebido en S y T está C-I embebido en W, existen $\alpha : R \to S$ y $\beta : T \to W$ y existen constantes $\lambda_1, \lambda_2 \geq 1$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$, tales que:
para todo $x, y \in S$,

$$\frac{1}{\lambda_1}d_R(x, y) - \varepsilon_1 \leq d_S(\alpha(x), \alpha(y)) \leq \lambda_1 d_R(x, y) + \varepsilon_1 \tag{25}$$

y para todo $s, t \in T$,

$$\frac{1}{\lambda_2}d_T(s, t) - \varepsilon_2 \leq d_W(\beta(s), \beta(t)) \leq \lambda_2 d_T(s, t) + \varepsilon_2 \tag{26}$$

Ahora, sea $\varphi : R\times T \to S\times W$, definida para todo $(v, w) \in R\times T$ por $\varphi(v, w) = (\alpha(v), \beta(w))$. Luego, para todo $(x, y), (v, w) \in R \times T$ tenemos que:

$$\begin{aligned} d_{S\times W}(\varphi(x, y), \varphi(v, w)) &= d_{S\times W}((\alpha(x), \beta(y)), (\alpha(v), \beta(w))) \\ &= d_S(\alpha(x), \alpha(v)) + d_W(\beta(y), \beta(w)) \\ &\leq \lambda_1 d_R(x, v) + \varepsilon_1 + \lambda_2 d_T(y, w) + \varepsilon_2 \end{aligned} \tag{27}$$

Sean $\lambda = max\{\lambda_1, \lambda_2\}$ y $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Entonces la ecuación (27) se transforma en:

$$d_{S\times W}(\varphi(x, y), \varphi(v, w)) \leq \lambda[d_R(x, v) + d_T(y, w)] + \varepsilon = \lambda d_{R\times T}((x, y), (v, w)) + \varepsilon \tag{28}$$

Además, $\frac{1}{\lambda_1}d_R(x,v) - \varepsilon_1 \leq d_S(\alpha(x),\alpha(v))$ y $\frac{1}{\lambda_2}d_T(y,w) - \varepsilon_2 \leq d_W(\beta(y),\beta(w))$, por lo que

$$\frac{1}{\lambda_1}d_R(x,v) + \frac{1}{\lambda_2}d_T(y,w) - (\varepsilon_1+\varepsilon_2) \leq d_S(\alpha(x),\alpha(v)) + d_W(\beta(y),\beta(w))$$

y como $\lambda \geq \lambda_1, \lambda_2$, entonces $\frac{1}{\lambda}d_R(x,v) + \frac{1}{\lambda}d_T(y,w) - \varepsilon \leq d_{S\times W}((\alpha(x),\beta(y)),(\alpha(v),\beta(w)))$, es decir,

$$\frac{1}{\lambda}d_{R\times T}((x,y),(v,w)) - \varepsilon \leq d_{S\times W}(\varphi(x,y),\varphi(v,w)) \tag{29}$$

De la ecuación (28) y la ecuación (29) se sigue que $R\times T$ está C-I embebido en $S \times W$. ■

Como un caso particular de la proposición anterior, se tiene el siguiente lema.

Lema 4.7.3. *Si X, Y son espacios métricos tales que X está C-I embebido en F y Y está C-I embebido en F, entonces $X \times Y$ está C-I embebido en $F \times F$.*

Demostración. La demostración es consecuencia inmediata de la Proposición anterior, tomando $S = W = F$. ■

Proposición 4.7.4. *$F \times F := F^2$ está C-I embebido en F.*

Demostración. Sea $\varphi : F \to F \times F$ definida para todo $w \in F$ por $\varphi(w) = (\phi(w),\psi(w))$.
Por el Teorema 4.6.2, $C_0 := \psi(F)$ y $C_1 := \phi(F)$ están C-I embebidos en F. Luego existen $\lambda_1, \lambda_2 \geq 1$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$, tales que:
i) Para todo $x, y \in F$, $\frac{1}{\lambda_1}d_F(x,y) - \varepsilon_1 \leq d_F(\phi(x),\phi(y)) \leq \lambda_1 d_F(x,y) + \varepsilon_1$ y
ii) para todo $v, w \in F$, $\frac{1}{\lambda_2}d_F(v,w) - \varepsilon_2 \leq d_F(\psi(v),\psi(w)) \leq \lambda_2 d_F(v,w) + \varepsilon_2$. Ahora, para todo $v, w \in F$, tenemos que:

$$d_F(v,w) \leq \lambda_1 d_F(\phi(v),\phi(w)) + \lambda_1\varepsilon_1 \leq \lambda_1 d_F(\phi(v),\phi(w)) + \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2 d_F(\psi(v),\psi(w)) + \lambda_2\varepsilon_2.$$

Sean $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 > 1$ y $\varepsilon = \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 \geq 0$, por lo que la ecuación anterior se transforma en:

$$\begin{aligned} d_F(v,w) \leq \lambda[d_F(\phi(v),\phi(w)) + d_F(\psi(v),\psi(w))] + \varepsilon &= \lambda d_{F\times F}((\phi(v),\psi(v)),(\phi(w),\psi(w))) + \varepsilon \\ &= \lambda d_{F\times F}(\varphi(v),\varphi(w)) + \varepsilon \\ &\leq \lambda d_{F\times F}(\varphi(v),\varphi(w)) + \lambda\varepsilon \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{1}{\lambda}d_F(v,w) - \varepsilon \leq d_{F\times F}(\varphi(v),\varphi(w)) \tag{30}$$

De otra parte,

$$\begin{aligned} d_{F\times F}(\varphi(v),\varphi(w)) = d_{F\times F}((\phi(v),\psi(v)),(\phi(w),\psi(w))) &= d_F(\phi(v),\phi(w)) + d_F(\psi(v),\psi(w)) \\ &\leq \lambda_1 d_F(v,w) + \varepsilon_1 + \lambda_2 d_F(v,w) + \varepsilon_2 \\ &\leq (\lambda_1+\lambda_2)d_F(v,w) + (\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2) \\ &= \lambda d_F(v,w) + \varepsilon \end{aligned}$$

Es decir,

$$d_{F\times F}(\varphi(v),\varphi(w)) \leq \lambda d_F(v,w)+\varepsilon \tag{31}$$

De las ecuaciones (30) y (31) se sigue que para todo $v, w \in F$,
$\frac{1}{\lambda}d_F(v,w)-\varepsilon \leq d_{F\times F}(\varphi(v),\varphi(w)) \leq \lambda d_F(v,w)+\varepsilon$. Por tanto F está C-I embebido en $F\times F$, lo que a su vez implica que $F \times F$ está C-I embebido en F. ■

Teorema 4.7.5. *Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y todo $m \geq 0$, $F^n \times \mathbb{Z}^m$ está embebido cuasi-isométricamente en el grupo de Thompson F.*

Demostración. Por la Proposición 4.7.1, $F \times \mathbb{Z}$ está C-I embebido en F y como $\mathbb{Z}$ está C-I embebibo en $\mathbb{Z}$, entonces por la Proposición 4.7.2, $(F\times\mathbb{Z})\times\mathbb{Z}$ está C-I embebido en $F\times\mathbb{Z}$ y como $F \times \mathbb{Z}$ está C-I embebido en F y la relación "estar C-I embebido en ", es una relación de equivalencia, entonces $F \times \mathbb{Z}^2$ esta C-I embebido en F. Análogamente, $F \times \mathbb{Z}^3$ esta C-I embebido en F. Procediendo de manera inductiva sobre m, llegamos a que para todo $m \geq 0$, $F \times \mathbb{Z}^m$ está C-I embebido en F.
De otra parte, como $F \times \mathbb{Z}^m$ está C-I embebido en F y $F \times F$ está C-I embebido en F, utilizando nuevamente la Proposición 4.7.2 y el hecho que la relación "estar C-I embebido en ", es una relación de equivalencia, se tiene que $F \times (F \times \mathbb{Z}^m)$ está C-I embebido en F, es decir $F^2 \times \mathbb{Z}^m$ está C-I embebido en F. Procediendo de manera inductiva sobre n se llega a que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, $F^n \times \mathbb{Z}^m$ está C-I embebido en F. Por tanto, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y todo $m \geq 0$, $F^n \times \mathbb{Z}^m$ está C-I embebido en F. ■

Bibliography

[1] José Burillo, *Quasi-isometrically embedded subgroups of Thompson's group F*, Journal of Algebra **212** (1999), 65–78.

[2] J.W. Cannon, W.J. Floyd, and W.R. Parry, *Introductory notes on Richard Thompson's groups*, L'Enseignement Mathématique **42** (1996), 215–256.

[3] Sean Cleary and Jennifer Taback, *Combinatorial properties of Thompson's group F*, Amer.Mat.Soc. (2003), 1–29.

[4] ______, *Geometric quasi-isometric embeddings into Thompson's group F*, New Jork J. Math. **9** (2003), 141–148.

[5] D.L.Johnson, *Presentations of groups*, London Mathematical Society, Cambridge, 1990.

[6] Elon.Lages, *Espacos Metricos*, Instituto de matemáticas puras y aplicadas (IMPA.Br), Rio de Janeiro, 2003.

[7] Ross Geoghegan, *Topological Methods in Group Theory*, Springer, Binghamtom, 2000.

[8] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University, Cambridge, 2001.

[9] Martin R.Bridson and André Haefliger, *Metrics spaces of non-positive curvature*, A series of comprehensive studies in mathematics, Springer-verlag Berlin Heidelberg, 1999.