

Superficies regladas y desarrollables a lo largo de curvas de Bézier

Mauricio Alejandro Londoño Arboleda

Trabajo presentado como requisito parcial
para optar al título de
Magíster en Matemáticas

Director
Marco Paluszny Kluczynsky

Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín
Facultad de Ciencias
2010

Resumen

Se estudian superficies regladas y se abordan sus elementos básicos como la línea de estricción y el parámetro de distribución. Se estudian algoritmos para el diseño de superficies desarrollables, a saber el algoritmo de Aumann y el algoritmo proyectivo de Pottmann, en este último las superficies desarrollables racionales de Bézier se interpretan como curvas en el espacio proyectivo dual $(\mathbb{P}^3)^*$. Se estudia de manera exhaustiva el problema de diseño de superficies desarrollables de grado polinomial 3; cuando la curva base es una curva de Bézier cúbica no plana y la generatriz es cuadrática. Las técnicas estudiadas se implementan en el diseño de superficies desarrollables a lo largo de curvas B-spline cúbicas.

Agradecimientos

Deseo expresar los más sinceros agradecimientos:

A mi esposa Claudia, por su incondicional apoyo y comprensión en todo momento.

A mis padres, a los cuales les debo todo.

Al profesor Marco, por todo su tiempo, energía y colaboración brindadas.

A los profesores Marianela Lentini y Edgar Ramos por el tiempo empleado en la revisión de este trabajo.

Índice general

Introducción	IV
1. Preliminares	1
1.1. El espacio afín	1
1.2. Nociones básicas sobre curvas	4
1.3. Curvas de Bézier y curvas b-spline	6
1.3.1. Forma polar	10
1.3.2. Curvas B-spline de grado 3	12
1.4. El espacio proyectivo	16
1.4.1. Coordenadas homogéneas y afines	16
1.4.2. Rectas y planos en espacios proyectivos	17
1.4.3. Dualidad en espacios proyectivos	19
2. Familias paramétricas de rectas	21
2.1. Superficies regladas	21
2.1.1. Línea de estricción	24
2.1.2. Parámetro de distribución	25
2.2. Superficies desarrollables	27
3. Diseño de superficies desarrollables	32
3.1. Algoritmo de Aumann	32
3.2. Construcción de superficies desarrollables sobre cúbicas de Bézier	33
3.2.1. Diseño de superficies desarrollables sobre curvas B-spline cúbicas	47
3.3. Superficies desarrollables vía dualidad con curvas en $(\mathbb{P}^3)^*$	49
3.3.1. Curvas de Bézier en espacios proyectivos	49
3.3.2. Algoritmo proyectivo	50
Bibliografía	56

Introducción

En este trabajo se estudia el diseño de superficies desarrollables sobre curvas polinómicas y en especial para curvas polinómicas de grado 3, para tal estudio consideramos dichas curvas representadas en la base de polinomios de Bernstein; polinomios que surgen naturalmente al estudiar la geometría afín de \mathbb{R}^n . Además consideramos curvas B-spline de grado 3. Previo a esto ofrecemos nociones básicas sobre geometría afín, geometría proyectiva y curvas de Bézier. Las nociones de geometría proyectiva se presentan con el fin de abordar el algoritmo proyectivo para diseñar superficies desarrollables racionales dado por H. Pottmann y G. Farin en [8].

El marco teórico de este trabajo se desarrolla en el capítulo 2, en el cual se ofrecen con detalle las herramientas básicas para el estudio de las superficies regladas y desarrollables. A continuación ofrecemos un resumen de este capítulo.

Una superficie reglada es una superficie que está conformada por rectas llamadas reglas o generadores, de lo cual se sigue que dado cualquier punto de la superficie reglada, existe una recta que pasa por dicho punto y dicha recta está totalmente contenida en la superficie. Usualmente, una superficie reglada se expresa por medio de una curva base llamada directriz y un vector sobre cada punto de la curva base, este vector es el que otorga la dirección al generador en dicho punto. El cilindro y el cono son ejemplos de superficies regladas, otro ejemplo es el hiperboloide de una hoja. Todos los generadores de un cilindro son rectas paralelas y todos los generadores de un cono tienen un punto en común, a saber; el vértice del cono. La diferencia fundamental entre el cilindro y el hiperboloide de una hoja es el comportamiento del plano tangente a lo largo de un generador; en el caso del cilindro el plano tangente a lo largo de un generador es siempre el mismo, esto no se cumple para el hiperboloide de una hoja.

Para cualquier superficie reglada no cilíndrica se puede definir una curva sobre la superficie llamada línea de estricción, esta curva es de gran importancia, debido a la siguiente propiedad: Si una superficie reglada tiene singularidades, éstas se

encuentran sobre su línea de estricción.

Una clase importante de las superficies regladas lo constituyen las superficies desarrollables. Una superficie es desarrollable si el plano tangente a lo largo de cada uno de sus generadores es el mismo. En este sentido el cilindro y el cono son superficies desarrollables pero el hiperboloide de una hoja no lo es. Otro ejemplo muy importante de superficie desarrollable son las superficies regladas que se obtienen tomando como generador el vector tangente a la curva base, estas superficies se llaman superficies tangentes.

Por medio de un "pegado suave" entre generadores de superficies desarrollables (i.e., haciendo que los planos tangentes sobre los generadores coincidan) es posible obtener de nuevo una superficie desarrollable. En general las superficies desarrollables son de gran interés en aplicaciones de diseño geométrico, debido a que se pueden "aplicar" sobre una región plana de forma isométrica; es decir, sin deformación métrica i.e., sin alterar distancias entre puntos.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se enunciarán algunas definiciones y resultados básicos sobre geometría afín, teoría básica de curvas, curvas de Bézier, curvas B-spline y geometría proyectiva, los cuales serán necesarios para el estudio sobre superficies desarrollables realizado en este trabajo.

1.1. El espacio afín

Para los propósitos del diseño geométrico, es conveniente expresar ciertos lugares geométricos (conjuntos de puntos del espacio euclídeo), en términos de la geometría afín. Consideramos el conjunto de n -tuplas de números reales \mathbb{R}^n con la estructura de espacio vectorial usual y a la vez como un espacio afín, para esto hacemos una distinción entre vectores y puntos en \mathbb{R}^n .

Cuando se habla de la estructura afín de \mathbb{R}^n , se hace referencia a este como un conjunto de puntos, el cual no cuenta con puntos privilegiados (como el origen de \mathbb{R}^n , visto como espacio vectorial) y cada par de puntos determina una dirección (un elemento de \mathbb{R}^n visto como espacio vectorial). Las propiedades y subestructuras (subespacios) de interés, son aquellas que son invariantes bajo transformaciones lineales compuestas con traslaciones.

Daremos a continuación la definición general de espacio afín.

Definición 1.1.1. Sea \mathbb{A} un conjunto (sus elementos se llamarán puntos) y sea V un espacio vectorial sobre un campo K , se dice que \mathbb{A} es un *espacio afín con direcciones en el espacio vectorial V* si existe una función $\varphi : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow V$, con $\varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{v}$, que verifica lo siguiente:

- I. Para todo $\mathfrak{a} \in \mathbb{A}$ y $\mathfrak{v} \in V$ existe un único $\mathfrak{b} \in \mathbb{A}$ tal que $\varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{v}$.

II. Si $\varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathbf{0}$ entonces $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

III. Para toda terna de puntos $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ en \mathbb{A} se da la identidad $\varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}) = \varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) + \varphi(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$.

La dimensión de \mathbb{A} es por definición la dimensión de V .

Ejemplo 1.1.1. En este ejemplo veremos la estructura afín que posee el conjunto formado por las rectas del plano que no pasan por el origen. Consideremos

$$\mathbb{A} = \left\{ l \subset \mathbb{R}^2 : l \text{ es una recta que no pasa por el origen} \right\}.$$

Cada punto (aunque en realidad es una recta) $l \in \mathbb{A}$ puede representarse (de manera única) por medio de una ecuación de la forma $ax + by + 1 = 0$, con a y b en \mathbb{R}^2 , así dados dos puntos l_1 y l_2 en \mathbb{A} , éstos tienen representaciones únicas $a_1x + b_1y + 1 = 0$ y $a_2x + b_2y + 1 = 0$ respectivamente, definimos entonces $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}^2$ como $\varphi(l_1, l_2) = (a_2 - a_1, b_2 - b_1)$. La función φ definida satisface las tres condiciones de la definición de espacio afín.

Denotamos por \mathbb{A}^n al espacio afín cuyos puntos son n -tuplas de números reales con direcciones en el espacio vectorial \mathbb{R}^n . La estructura afín queda introducida por medio de la aplicación $\varphi : \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{b} - \mathfrak{a}$. Esta definición permite hacer una distinción entre lo que vamos a llamar *puntos* (denotados por $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, etc.) en \mathbb{A}^n y lo que vamos a llamar *vectores* (denotados por $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, etc.) en \mathbb{R}^n .

Es importante tener en cuenta que dado un vector \mathbf{v} existen infinitas parejas de puntos \mathfrak{a} y \mathfrak{b} tales que $\mathfrak{b} - \mathfrak{a} = \mathbf{v}$, pues basta considerar los puntos $\mathfrak{a} + \mathbf{w}$ y $\mathfrak{b} + \mathbf{w}$, para cualquier vector \mathbf{w} , con estos nuevos puntos también se sigue que $(\mathfrak{b} + \mathbf{w}) - (\mathfrak{a} + \mathbf{w}) = \mathbf{v}$. A continuación veremos parte del álgebra permitida en el espacio afín \mathbb{A}^n .

Definición 1.1.2. Sean $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_k$ puntos en \mathbb{A}^n , un punto \mathfrak{b} que pueda ser escrito de la forma

$$\mathfrak{b} = \sum_{i=0}^k \alpha_i \mathfrak{b}_i, \tag{1.1}$$

con $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 1$ se denomina una *combinación afín* de los puntos \mathfrak{b}_i , con $i = 0, 1, \dots, k$.

La ecuación (1.1) puede reescribirse como

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i (\mathfrak{b}_i - \mathfrak{b}_0),$$

la cual expresa al punto \mathfrak{b} como la suma del punto \mathfrak{b}_0 mas una combinación lineal de los vectores $\mathfrak{b}_1 - \mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_2 - \mathfrak{b}_0, \dots, \mathfrak{b}_k - \mathfrak{b}_0$.

Definición 1.1.3. Un conjunto de puntos $\{\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_k\}$ de \mathbb{A}^n se dice que es *afinmente independiente* si el conjunto de vectores $\{\mathfrak{b}_1 - \mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_2 - \mathfrak{b}_0, \dots, \mathfrak{b}_k - \mathfrak{b}_0\}$ de \mathbb{R}^n es linealmente independiente.

Definición 1.1.4. Sea \mathfrak{a} un punto en \mathbb{A}^n y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto linealmente independiente de \mathbb{R}^n , el conjunto $\{\mathfrak{a}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ se llama *sistema de referencia* para \mathbb{A}^n .

En términos de la definición anterior y de resultados básicos del álgebra lineal, se tiene que, dado cualquier punto \mathfrak{b} en \mathbb{A}^n existen números reales (únicos) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tales que

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n.$$

Los escalares α_i se denominan coordenadas afines respecto al sistema $\{\mathfrak{a}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$. Equivalentemente se tiene el siguiente resultado: Dado un conjunto $B = \{\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n\}$ afinmente independiente en \mathbb{A}^n y un punto \mathfrak{b} de \mathbb{A}^n existen escalares (únicos) $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ con $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$ tales que

$$\mathfrak{b} = \sum_{i=0}^n \alpha_i \mathfrak{b}_i,$$

en este caso los números α_i se llaman las *coordenadas baricéntricas* de \mathfrak{b} respecto a B . Un caso especial a considerar es cuando ocurre que $\alpha_i \geq 0$ para $i = 0, 1, \dots, n$, en tal caso el punto \mathfrak{b} pertenece a la *cápsula convexa* (convex hull) generada por B la cual se define como

$$\text{hull}(B) = \left\{ \sum_{i=0}^n \alpha_i \mathfrak{b}_i : \sum_{i=0}^n \alpha_i = 1 \text{ y } \alpha_i \geq 0 \text{ para } i = 0, 1, \dots, n \right\}.$$

En un espacio vectorial las propiedades de mayor interés son aquellas que son invariantes por aplicaciones lineales; en un espacio afín se estudian las propiedades que son invariantes afines, es decir las propiedades que son invariantes bajo aplicaciones afines.

Definición 1.1.5. Una *aplicación afín* es una función $f : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$ que envía combinaciones afines en combinaciones afines, es decir, para cualquier par de puntos \mathfrak{x} e \mathfrak{y} en \mathbb{A}^n y todo α en \mathbb{R} se da que

$$f((1 - \alpha)\mathfrak{x} + \alpha\mathfrak{y}) = (1 - \alpha)f(\mathfrak{x}) + \alpha f(\mathfrak{y}).$$

De la definición anterior se sigue lo siguiente: Si $f : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$ es una aplicación afín; $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_k$ puntos en \mathbb{A}^n y si los escalares $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ cumplen que $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 1$ entonces

$$f\left(\sum_{i=0}^k \alpha_i \mathfrak{b}_i\right) = \sum_{i=0}^k \alpha_i f(\mathfrak{b}_i).$$

Una caracterización muy útil que tienen las aplicaciones afines, es la siguiente: Si $f : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$ es una aplicación afín, entonces, una vez fijados sistemas afines para \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m existe una matriz A de tamaño $m \times n$ y un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v}.$$

Lo anterior muestra que una aplicación afín está compuesta por una aplicación lineal y una traslación.

1.2. Nociones básicas sobre curvas

Para el objetivo del diseño con curvas y superficies es conveniente tratar éstas de una manera ligeramente distinta a como se manejan con las herramientas clásicas de la geometría diferencial.

Definición 1.2.1. Sea $\mathbb{p} : [a, b] \rightarrow \mathbb{A}^n$ una función. Decimos que \mathbb{p} es *diferenciable* en un punto t de (a, b) si existe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{p}(t+h) - \mathbb{p}(t)}{h}.$$

Cuando t es un extremo del intervalo se toma el límite lateral. Definimos la *derivada* de \mathbb{p} en t como el vector $\mathbb{p}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{p}(t+h) - \mathbb{p}(t)}{h}$. Decimos que la función \mathbb{p} es de *clase C^r* en $[a, b]$ si existe la r -ésima derivada $\mathbb{p}^{(r)}(t)$, para todo $t \in [a, b]$.

Notemos que en la definición anterior las derivadas (de cualquier orden) son funciones vectoriales definidas en $[a, b]$ sobre el espacio vectorial \mathbb{R}^n .

Definición 1.2.2. Sea $\mathbb{p} : [a, b] \rightarrow \mathbb{A}^n$ de clase C^r en $[a, b]$. Definimos una *curva parametrizada* de clase C^r como el conjunto de puntos $\{\mathbb{p}(t) / t \in [a, b]\}$. La función $\mathbb{p} : [a, b] \rightarrow \mathbb{A}^n$ se llama una *parametrización* de la curva. Por simplicidad denotaremos a la curva simplemente por \mathbb{p} .

Si un punto sobre la curva \mathbb{p} en t tiene coordenadas $\mathbb{p}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ entonces su derivada en dicho punto viene dada por el vector

$$\mathbb{p}'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \dots, x_n'(t)).$$

Veamos ahora algunos elementos básicos sobre curvas en \mathbb{A}^3 . Sea \mathbb{p} una curva parametrizada contenida en \mathbb{A}^3 definida sobre un intervalo $[a, b]$.

El vector *tangente unitario* a la curva \mathbb{p} en el punto $\mathbb{p}(t)$ se define como

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbb{p}'(t)}{\|\mathbb{p}'(t)\|}.$$

Otro vector importante asociado a la curva es el *vector normal principal* $\mathbf{N}(t)$, el cual es ortogonal a $\mathbf{T}(t)$. $\mathbf{N}(t)$ apunta en la dirección en la cual está cambiando la curva, éste se puede calcular con la fórmula

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}.$$

Un tercer vector importante asociado a la curva en el punto $\mathbb{p}(t)$ es el *vector binormal* $\mathbf{B}(t)$, el cual es ortogonal a $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$ y se calcula mediante el producto vectorial.

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t).$$

El conjunto de estos tres vectores, $\{\mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t), \mathbf{B}(t)\}$ es conocido como el *triedro de Frenet*. Este conjunto forma una base ortonormal para cada punto $\mathbb{p}(t)$ (donde $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$ existan y sean no paralelos).

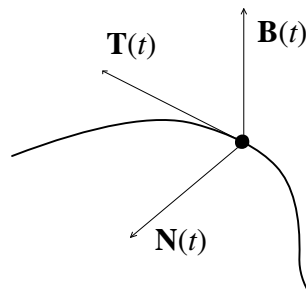


Figura 1.1: Triedro de Frenet.

El plano que pasa por $\mathbb{p}(t)$ y es generado por los vectores $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$ se conoce como *plano osculador* en $\mathbb{p}(t)$, así, un punto \mathfrak{q} sobre este plano se escribe como $\mathfrak{q} = \mathbb{p}(t) + \alpha\mathbf{T}(t) + \beta\mathbf{N}(t)$, donde α y β son escalares reales. El plano osculador en $\mathbb{p}(t)$ se expresa implícitamente como el conjunto formado por los puntos \mathfrak{x} en \mathbb{A}^3 que satisfacen la ecuación

$$(\mathfrak{x} - \mathbb{p}(t)) \cdot \mathbf{B}(t) = 0.$$

El plano que pasa por $\mathbb{p}(t)$ y es ortogonal al vector normal principal $\mathbf{N}(t)$ se conoce como *plano rectificante*, así éste queda definido como el conjunto de puntos \mathfrak{x} de \mathbb{A}^3 que satisfacen la ecuación

$$(\mathfrak{x} - \mathbb{p}(t)) \cdot \mathbf{N}(t) = 0.$$

Ya que el plano rectificante es normal a $\mathbf{N}(t)$ entonces este se puede generar con $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$, de lo cual se desprende que los puntos \mathfrak{x} del plano rectificante se pueden escribir como $\mathfrak{x} = \mathbb{p}(t) + \alpha\mathbf{T}(t) + \beta\mathbf{B}(t)$, donde α y β son escalares reales.

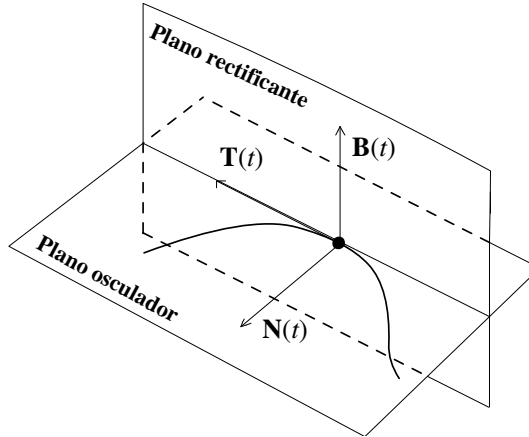


Figura 1.2: Planos osculador y rectificante en $\mathbb{P}(t)$.

En la teoría básica de curvas se tienen además dos cantidades escalares que determinan (salvo traslación y rotación) de manera local a la curva en cada punto $\mathbb{P}(t)$, estas son la *curvatura* $\kappa(t)$ y la *torsión* $\tau(t)$

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbb{P}'(t) \times \mathbb{P}''(t)\|}{\|\mathbb{P}'(t)\|^3} \quad (1.2)$$

$$\tau(t) = -\frac{(\mathbb{P}'(t) \times \mathbb{P}''(t)) \cdot \mathbb{P}'''(t)}{\|\mathbb{P}'(t) \times \mathbb{P}''(t)\|^2}. \quad (1.3)$$

La curvatura puede interpretarse como la medida de que tan lejos está la curva de ser una línea recta. Sobre el plano osculador se puede construir un círculo que toca a la curva de tal forma que la primera y segunda derivada del círculo y la curva en el punto $\mathbb{P}(t)$ coinciden. Este círculo llamado *círculo osculador*, tiene la propiedad de que su radio $\rho(t)$ es $\rho(t) = 1/\kappa(t)$ y tiene su centro ubicado sobre la recta del plano osculador que tiene dirección $\mathbf{N}(t)$. Así, podríamos pensar, que la curvatura se hace mas grande a medida que el círculo osculador se hace mas pequeño y de esta forma la curva tendería a verse mas "cerrada".

Por otra parte, la torsión se puede ver como la medida de que tan lejos está la curva de ser una curva plana (es decir, que ésta esté contenida en un plano). En otras palabras, la torsión mide la variación del plano osculador a lo largo de la curva. Se tiene entonces, que una curva con torsión nula, $\tau(t) \equiv 0$, tiene plano osculador constante a lo largo de ésta.

1.3. Curvas de Bézier y curvas b-spline

El algoritmo de de Casteljau es una herramienta básica empleada en el diseño geométrico, en el cual, dados un conjunto de $m + 1$ puntos en \mathbb{A}^n se obtienen los

puntos de una curva polinómica interpolante de grado menor o igual que m .

Algoritmo de de Casteljau. Sean b_0, b_1, \dots, b_m puntos en \mathbb{A}^n el algoritmo está dado por la siguiente recursión:

$$\begin{aligned} b_i^0(t) &= b_i \\ b_i^j(t) &= (1-t)b_i^{j-1}(t) + tb_{i+1}^{j-1}(t), \quad \text{con } j = 0, \dots, m; \quad i = 0, \dots, m-j. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Para fijar ideas se ilustra el caso $m = 3$, para el cual el algoritmo se representa con el siguiente diagrama:

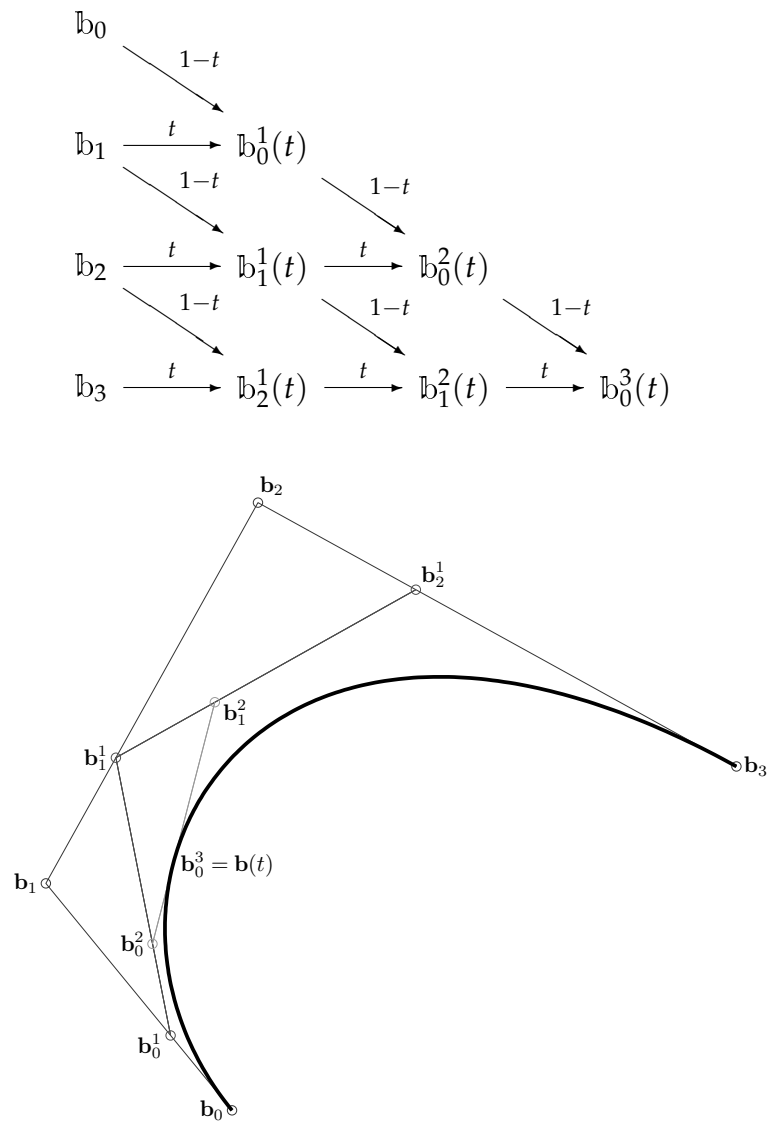


Figura 1.3: Curva obtenida con el algoritmo de de Casteljau.

Tomando el polígono de cuatro lados con vértices $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ y \mathfrak{b}_3 (Figura 1.3), se toman sobre éste los puntos $\mathfrak{b}_0^1, \mathfrak{b}_1^1$ y \mathfrak{b}_2^1 dados por el algoritmo, luego sobre el polígono determinado por estos tres puntos nuevos, se toman \mathfrak{b}_0^2 y \mathfrak{b}_1^2 como aparece en el diagrama, finalmente en el segmento determinado por estos dos puntos se toma \mathfrak{b}_0^3 como el punto sobre la curva para el valor $t \in [0, 1]$. Se define entonces $\mathfrak{b}(t)$ como $\mathfrak{b}(t) = \mathfrak{b}_0^3(t)$ y la fórmula explícita para $\mathfrak{b}(t)$ es

$$\mathfrak{b}(t) = (1-t)^3 \mathfrak{b}_0 + 3t(1-t)^2 \mathfrak{b}_1 + 3t^2(1-t) \mathfrak{b}_2 + t^3 \mathfrak{b}_3.$$

Notemos que $\mathfrak{b}(t)$ es una combinación afín de los puntos $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ y \mathfrak{b}_3 , ya que $(1-t)^3 + 3t(1-t)^2 + 3t^2(1-t) + t^3 \equiv 1$.

En general, al aplicar el algoritmo de de Casteljau a los $m+1$ puntos, $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_m$ se obtiene una curva polinomial de grado m en \mathbb{A}^n , parametrizada por

$$\mathfrak{b}(t) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} t^i (1-t)^{m-i} \mathfrak{b}_i$$

con $t \in [0, 1]$. Las curvas obtenidas por medio del algoritmo de de Casteljau se conocen como *curvas de Bézier*. Usualmente se denotan por

$$\mathfrak{b}(t) = \sum_{i=0}^m B_i^m(t) \mathfrak{b}_i \tag{1.5}$$

con

$$B_i^m(t) = \binom{m}{i} t^i (1-t)^{m-i},$$

para $i = 0, 1, \dots, m$. Los puntos $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_m$ son llamados *puntos de control* o *puntos de Bézier* y los polinomios $B_i^m(t)$ se conocen como los *polinomios de Bernstein* de grado m .

Antes de iniciar el estudio básico sobre curvas de Bézier es necesario mencionar algunas de las propiedades más importantes del conjunto de polinomios $\{B_i^m(t)\}_{i=0}^m$.

1. $\{B_i^m(t)\}_{i=0}^m$ es un conjunto linealmente independiente en el espacio vectorial real de polinomios de grado menor o igual que m en la variable t , denotado por $\mathbb{P}_m[t]$.

$$\mathbb{P}_m[t] = \{a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \dots + a_1 t + a_0 : a_0, a_1, \dots, a_m \text{ en } \mathbb{R}\}.$$

Lo cual implica que $\{B_i^m(t)\}_{i=0}^m$ forma una base para $\mathbb{P}_m[t]$.

2. Notando que

$$\begin{aligned} 1 &= (t + (1 - t))^m \\ &= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} t^i (1 - t)^{m-i} \\ &= \sum_{i=0}^m B_i^m(t), \end{aligned}$$

se concluye que $\{B_i^m\}_{i=0}^m$ forma una partición de la unidad en $[0, 1]$.

3. Calculemos la derivada a $B_i^m(t)$

$$\begin{aligned} \frac{dB_i^m(t)}{dt} &= \binom{m}{i} \frac{d(t^i(1-t)^{m-i})}{dt} \\ &= \binom{m}{i} (it^{i-1}(1-t)^{m-i} - (m-i)t^i(1-t)^{m-i-1}) \\ &= m \left(\binom{m}{i} t^{i-1}(1-t)^{m-1-i} - \binom{m}{i} t^i(1-t)^{m-1-i} \right) \\ &= m \left(B_{i-1}^{m-1}(t) - B_i^{m-1}(t) \right). \end{aligned}$$

Se tiene entonces la fórmula recursiva para la derivada del polinomio $B_i^m(t)$, para $i = 0, 1, \dots, m$

$$\frac{dB_i^m(t)}{dt} = m \left(B_{i-1}^{m-1}(t) - B_i^{m-1}(t) \right)$$

donde se toma $B_{-1}^m(t) = B_{m+1}^m(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $m \in \mathbb{N}$

Veamos ahora algunas de las propiedades de las curvas de Bézier, las cuales serán usadas en este trabajo. Consideremos la curva de Bézier $\mathfrak{b}(t) = \sum_{i=0}^m B_i^m(t) \mathfrak{b}_i$ en \mathbb{A}^n .

1. Es claro que $\mathfrak{b}(0) = \mathfrak{b}_0$ y que $\mathfrak{b}(1) = \mathfrak{b}_m$, lo cual exhibe la propiedad interpolante que tiene una curva de Bézier sobre sus puntos de control, en los extremos.

2. Calculemos la derivada de $\mathbb{b}(t)$.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{b}'(t) &= \frac{d\mathbb{b}(t)}{dt} \\
 &= \sum_{i=0}^m \frac{dB_i^m(t)}{dt} \mathbb{b}_i \\
 &= \sum_{i=0}^m m \left(B_{i-1}^{m-1}(t) - B_i^{m-1}(t) \right) \mathbb{b}_i \\
 &= \sum_{i=0}^m m B_i^{m-1}(t) (\mathbb{b}_{i+1} - \mathbb{b}_i) \\
 &= m \sum_{i=0}^{m-1} B_i^{m-1}(t) (\mathbb{b}_{i+1} - \mathbb{b}_i)
 \end{aligned}$$

adoptando la notación $\Delta \mathbb{b}_i = \mathbb{b}_{i+1} - \mathbb{b}_i$, se tiene la fórmula

$$\mathbb{b}'(t) = m \sum_{i=0}^{m-1} B_i^{m-1}(t) \Delta \mathbb{b}_i. \quad (1.6)$$

Las diferencias $\Delta \mathbb{b}_i$ son vectores de \mathbb{R}^n , se tiene que $\frac{\mathbb{b}'(t)}{m}$ es una curva de Bézier de grado $m - 1$ y sus "puntos" de control son $\Delta \mathbb{b}_i$.

3. Los vectores tangentes a la curva en $t = 0$ y en $t = 1$ vienen dados por $\mathbb{b}'(0) = m\Delta \mathbb{b}_0$ y $\mathbb{b}'(1) = m\Delta \mathbb{b}_{m-1}$.

1.3.1. Forma polar

Dada una curva de Bézier \mathbb{b} de grado m en \mathbb{A}^n , es posible asociar a ésta una función polinomial $\mathbb{P} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{A}^n$ de grado m , la cual es multiafín y simétrica. Ser multiafín significa que es una aplicación afín en cada componente, es decir, para $i = 1, 2, \dots, m$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(t_1, \dots, \underbrace{\alpha s + (1 - \alpha)t}_{i\text{-ésima posición}}, \dots, t_m) = \alpha \mathbb{P}(t_1, \dots, s, \dots, t_m) + (1 - \alpha) \mathbb{P}(t_1, \dots, t, \dots, t_m)$$

y que la función sea simétrica significa, que para toda permutación σ de $\{1, 2, \dots, m\}$ se da que

$$\mathbb{P}(t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(m)}) = \mathbb{P}(t_1, t_2, \dots, t_m).$$

Este polinomio $\mathbb{P}(t_1, t_2, \dots, t_m)$ es comúnmente conocido como la *forma polar* o *blossom* asociado a la curva \mathbb{b} . La principal característica la forma polar es que sobre la diagonal, es decir, cuando $t_1 = t_2 = \dots = t_m = t$ se tiene que

$$\mathbb{P}(t, t, \dots, t) = \mathbb{b}(t).$$

Es más, si los puntos de control de la curva \mathbb{b} son $\mathbb{b}_0, \mathbb{b}_1, \dots, \mathbb{b}_m$ entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{p}(0, 0, \dots, 0, 0) &= \mathbb{b}_0 \\ \mathbb{p}(0, 0, \dots, 0, 1) &= \mathbb{b}_1 \\ \mathbb{p}(0, 0, \dots, 1, 1) &= \mathbb{b}_2 \\ &\vdots \\ \mathbb{p}(1, 1, \dots, 1, 1) &= \mathbb{b}_m. \end{aligned}$$

Dados los puntos de Bézier $\mathbb{b}_0, \mathbb{b}_1, \dots, \mathbb{b}_m$ existe un algoritmo que permite calcular la forma polar asociada a la curva de Bézier determinada por los puntos dados. Este algoritmo se conoce como el *Algoritmo de de Casteljau Generalizado*.

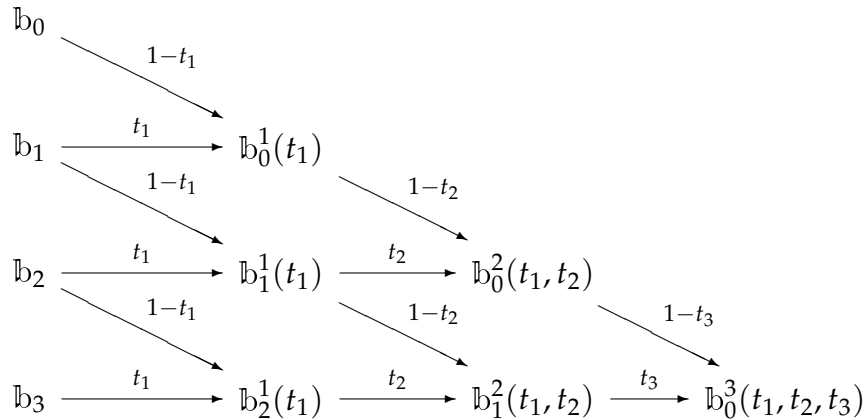
Algoritmo de de Casteljau Generalizado. Sean $\mathbb{b}_0, \mathbb{b}_1, \dots, \mathbb{b}_m$ puntos en \mathbb{A}^n el algoritmo está dado por la siguiente recursión:

$$\begin{aligned} \mathbb{b}_i^1(t_1) &= (1 - t_1)\mathbb{b}_i + t_1\mathbb{b}_{i+1} \\ \mathbb{b}_i^j(t_1, \dots, t_j) &= (1 - t_j)\mathbb{b}_i^{j-1}(t_1, \dots, t_{j-1}) + t_j\mathbb{b}_{i+1}^{j-1}(t_1, \dots, t_{j-1}), \\ &\text{con } j = 1, \dots, m; i = 0, \dots, m - j. \end{aligned}$$

La forma polar \mathbb{p} asociada a la curva de Bézier \mathbb{b} resulta ser

$$\mathbb{p}(t_1, t_2, \dots, t_m) = \mathbb{b}_0^m(t_1, t_2, \dots, t_m).$$

Para $m = 3$ el algoritmo se puede representar con el siguiente diagrama



explícitamente la forma polar obtenida es

$$\begin{aligned} \mathbb{p}(t_1, t_2, t_3) &= (1 - t_1)(1 - t_2)(1 - t_3)\mathbb{b}_0 \\ &+ [t_1(1 - t_2)(1 - t_3) + (1 - t_1)t_2(1 - t_3) + (1 - t_1)(1 - t_2)t_3] \mathbb{b}_1 \\ &+ [t_1t_2(1 - t_3) + t_1(1 - t_2)t_3 + (1 - t_1)t_2t_3] \mathbb{b}_2 \\ &+ t_1t_2t_3\mathbb{b}_3. \end{aligned}$$

1.3.2. Curvas B-spline de grado 3

Una curva B-spline de grado 3 es una curva polinomial por trozos y cada trozo es una curva de Bézier de grado 3. La curva B-spline es de clase C^2 , o sea, las derivadas por la izquierda y por la derecha en el punto común de trozos adyacentes coinciden. (Figura 1.4).

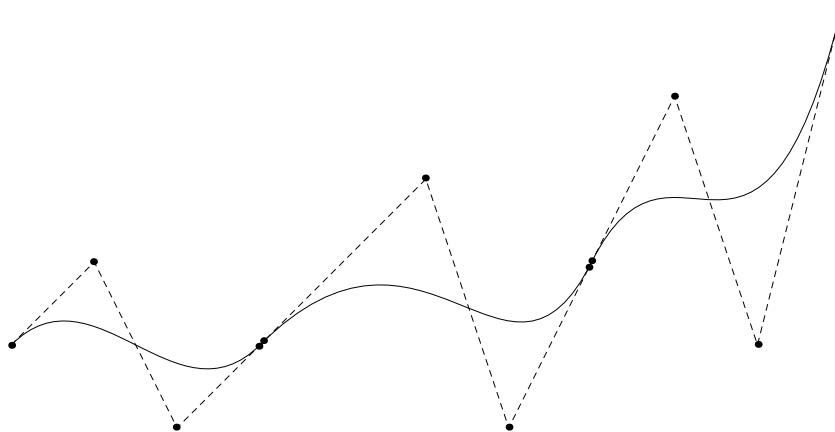


Figura 1.4: B-spline cúbico formado por tres curvas de Bézier.

Para definir una curva B-Spline de grado 3 y k pedazos se necesita:

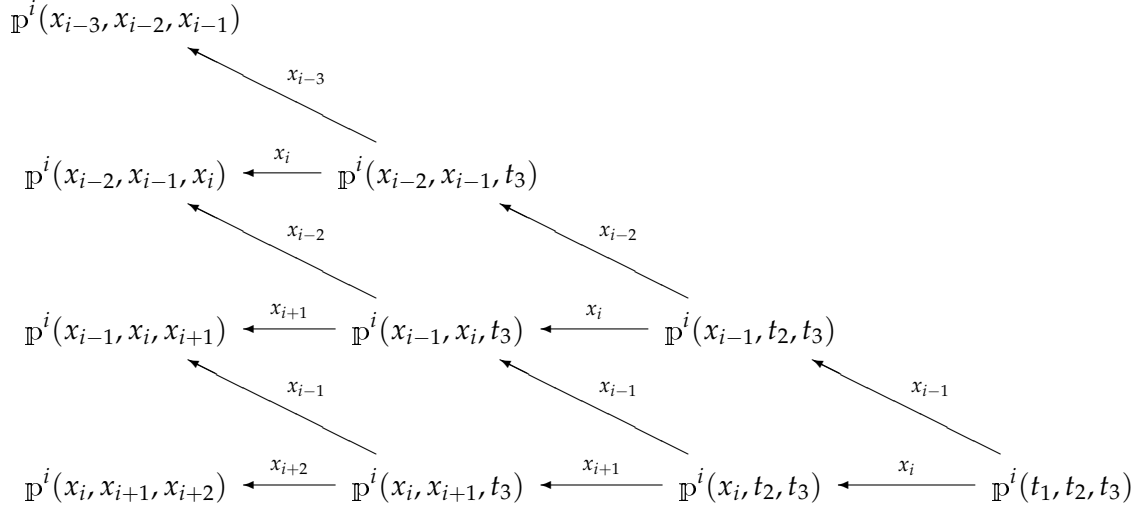
1. $k + 5$ números reales $x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}$, llamados *nodos*.
2. $k + 3$ puntos $\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_{k+2}$ en \mathbb{A}^n . Estos puntos son llamados *puntos de de Boor*.

Iniciamos la construcción definiendo k formas polares de grado 3, \mathbb{P}^i con $i = 1, 2, \dots, k$, tal que cada \mathbb{P}^i está definida por los puntos $\mathbb{P}_{i-1}, \mathbb{P}_i, \mathbb{P}_{i+1}$ y \mathbb{P}_{i+2} . Cada forma polar \mathbb{P}^i debe cumplir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^i(x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}) &= \mathbb{P}_{i-1} \\ \mathbb{P}^i(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i) &= \mathbb{P}_i \\ \mathbb{P}^i(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) &= \mathbb{P}_{i+1} \\ \mathbb{P}^i(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) &= \mathbb{P}_{i+2}.\end{aligned}$$

Con esta asignación de puntos que se da para cada forma polar \mathbb{P}^i es suficiente para obtener las expresiones generales $\mathbb{P}^i(t_1, t_2, t_3)$ como una combinación afín de los puntos $\mathbb{P}_{i-1}, \mathbb{P}_i, \mathbb{P}_{i+1}$ y \mathbb{P}_{i+2} , este hecho se desprende de la multiafinidad y la simetría

de cada forma polar. Para obtener dicha expresión nos basamos en el siguiente diagrama:



Para fijar ideas mostramos sólo el primer paso (mirando el diagrama de derecha a izquierda). Se escribe a t_1 como una combinación afín de x_{i-1} y x_i , con lo cual se tiene

$$t_1 = \frac{x_i - t_1}{x_i - x_{i-1}} x_{i-1} + \frac{t_1 - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} x_i,$$

luego, de la multiafinidad de la forma polar se sigue

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}^i(t_1, t_2, t_3) &= \mathbb{P}^i\left(\frac{x_i - t_1}{x_i - x_{i-1}} x_{i-1} + \frac{t_1 - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} x_i, t_2, t_3\right) \\
 &= \frac{x_i - t_1}{x_i - x_{i-1}} \mathbb{P}^i(x_{i-1}, t_2, t_3) + \frac{t_1 - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \mathbb{P}^i(x_i, t_2, t_3).
 \end{aligned}$$

Así, siguiendo el diagrama usando la idea mostrada en el primer paso, se obtiene que la fórmula explícita para \mathbb{P}_i es

$$\mathbb{P}^i(t_1, t_2, t_3) = q_0^i(t_1, t_2, t_3) \mathbb{P}_{i-1} + q_1^i(t_1, t_2, t_3) \mathbb{P}_i + q_2^i(t_1, t_2, t_3) \mathbb{P}_{i+1} + q_3^i(t_1, t_2, t_3) \mathbb{P}_{i+2}$$

donde

$$\begin{aligned}
 q_0^i(t_1, t_2, t_3) &= \frac{(x_i - t_3)(x_i - t_2)(x_i - t_1)}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-2})(x_i - x_{i-3})} \\
 q_1^i(t_1, t_2, t_3) &= \frac{(x_i - t_3)(x_i - t_2)(t_1 - x_{i-3})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-2})(x_i - x_{i-3})} + \frac{(x_i - t_3)(t_2 - x_{i-2})(x_{i+1} - t_1)}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-2})(x_{i+1} - x_{i-2})} \\
 &\quad + \frac{(t_3 - x_{i-1})(x_{i+1} - t_2)(x_{i+1} - t_1)}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-2})}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_2^i(t_1, t_2, t_3) &= \frac{(x_i - t_3)(t_2 - x_{i-2})(t_1 - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-2})(x_{i+1} - x_{i-2})} + \frac{(t_3 - x_{i-1})(x_{i+1} - t_2)(t_1 - x_{i-2})}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-2})} \\
&\quad + \frac{(t_3 - x_{i-1})(t_2 - x_{i-1})(x_{i+2} - t_1)}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+2} - x_{i-1})} \\
q_3^i(t_1, t_2, t_3) &= \frac{(t_3 - x_{i-1})(t_2 - x_{i-1})(t_1 - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+2} - x_{i-1})}
\end{aligned}$$

Es importante notar que para $i = 1, \dots, k-1$, las formas polares \mathbb{P}^i y \mathbb{P}^{i+1} toman los mismos valores \mathbb{P}_i , \mathbb{P}_{i+1} y \mathbb{P}_{i+2} , lo cual ocurre cuando se evalúan en las ternas de nodos (x_{i-2}, x_{i-1}, x_i) , (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) y (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) . Al tomar en la forma polar \mathbb{P}^i , para $i = 1, \dots, k$, los puntos

$$\begin{aligned}
\mathbb{b}_{i0} &= \mathbb{P}^i(x_{i-1}, x_{i-1}, x_{i-1}) \\
\mathbb{b}_{i1} &= \mathbb{P}^i(x_{i-1}, x_{i-1}, x_i) \\
\mathbb{b}_{i2} &= \mathbb{P}^i(x_{i-1}, x_i, x_i) \\
\mathbb{b}_{i3} &= \mathbb{P}^i(x_i, x_i, x_i)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

son los puntos de control de la curva de Bézier $\mathbb{b}_i(u(t)) = \mathbb{P}^i(u(t), u(t), u(t))$, donde $u : [0, 1] \rightarrow [x_{i-1}, x_i]$, con $u(t) = (1-t)x_{i-1} + tx_i$, \mathbb{b}_i es una curva de Bézier parametrizada sobre el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. La variable u introducida es una variable sobre el intervalo $[x_0, x_k]$, esta se conoce como *parámetro global* del B-spline \mathbb{P} , el cual se define como $\mathbb{P}(u) = \mathbb{b}_i(u)$ cuando $u \in [x_{i-1}, x_i]$. El siguiente teorema garantiza la continuidad y la diferenciabilidad de orden 2 del B-spline sobre los nodos.

Teorema 1.3.1. *Para $i = 1, \dots, k$ las curvas de Bézier $\mathbb{b}_i(u)$ parametrizadas sobre $[x_{i-1}, x_i]$ satisfacen que*

1. $\mathbb{b}_i(x_i) = \mathbb{b}_{i+1}(x_i)$.
2. $\frac{d\mathbb{b}_i}{du}|_{u=x_i} = \frac{d\mathbb{b}_{i+1}}{du}|_{u=x_i}$.
3. $\frac{d^2\mathbb{b}_i}{du^2}|_{u=x_i} = \frac{d^2\mathbb{b}_{i+1}}{du^2}|_{u=x_i}$.

Demostración. Usando la forma polar \mathbb{P}_i se calculan los puntos de control de \mathbb{b}_i como en (1.7) y se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{b}_{i0} &= \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{(x_i - x_{i-2})(x_i - x_{i-3})} \mathbb{P}_{i-1} + \left(\frac{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i-1} - x_{i-2})}{(x_i - x_{i-2})(x_{i+1} - x_{i-2})} + \frac{(x_i - x_{i-1})(x_{i-1} - x_{i-3})}{(x_i - x_{i-2})(x_i - x_{i-3})} \right) \mathbb{P}_i \\
&\quad + \frac{(x_{i-1} - x_{i-2})^2}{(x_i - x_{i-2})(x_{i+1} - x_{i-2})} \mathbb{P}_{i+1} \\
\mathbb{b}_{i1} &= \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-2}} \mathbb{P}_i + \frac{x_{i-1} - x_{i-2}}{x_{i+1} - x_{i-2}} \mathbb{P}_{i+1} \\
\mathbb{b}_{i2} &= \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} - x_{i-2}} \mathbb{P}_i + \frac{x_i - x_{i-2}}{x_{i+1} - x_{i-2}} \mathbb{P}_{i+1} \\
\mathbb{b}_{i3} &= \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-2})} \mathbb{P}_i + \left(\frac{(x_{i+2} - x_i)(x_i - x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+2} - x_{i-1})} + \frac{(x_{i+1} - x_i)(x_i - x_{i-2})}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-2})} \right) \mathbb{P}_{i+1} \\
&\quad + \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+2} - x_{i-1})} \mathbb{P}_{i+2}.
\end{aligned}$$

Note que $\mathbb{b}_{i3} = \mathbb{b}_{i+1 0}$, lo cual significa que $\mathbb{b}_i(x_i) = \mathbb{b}_{i+1}(x_i)$.

Ahora, usando la regla de la cadena se obtiene la derivada de las curvas de Bézier $\mathbb{b}_i(u)$ y $\mathbb{b}_{i+1}(u)$ en $u = x_i$.

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbb{b}_i}{du} \Big|_{u=x_i} &= \frac{d\mathbb{b}_i}{dt} \frac{dt}{du} \Big|_{u=x_i} \\
&= \frac{3}{x_i - x_{i-1}} (\mathbb{b}_{i3} - \mathbb{b}_{i2})
\end{aligned} \tag{1.8}$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbb{b}_{i+1}}{du} \Big|_{u=x_i} &= \frac{d\mathbb{b}_{i+1}}{dt} \frac{dt}{du} \Big|_{u=x_i} \\
&= \frac{3}{x_{i+1} - x_i} (\mathbb{b}_{i+1 1} - \mathbb{b}_{i+1 0}).
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Simplificando adecuadamente las expresiones (1.8) y (1.9) se obtiene que éstas coinciden, lo cual implica el resultado deseado. Para ver que las segundas derivadas coinciden en $u = x_i$, es suficiente simplificar las expresiones

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\mathbb{b}_i}{du^2} \Big|_{u=x_i} &= \frac{d^2\mathbb{b}_i}{dt^2} \left(\frac{dt}{du} \right)^2 \Big|_{u=x_i} \\
&= \frac{6}{(x_i - x_{i-1})^2} [(\mathbb{b}_{i3} - \mathbb{b}_{i2}) - (\mathbb{b}_{i2} - \mathbb{b}_{i1})]
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\mathbb{b}_{i+1}}{du^2} \Big|_{u=x_i} &= \frac{d^2\mathbb{b}_{i+1}}{dt^2} \left(\frac{dt}{du} \right)^2 \Big|_{u=x_i} \\
&= \frac{6}{(x_{i+1} - x_i)^2} [(\mathbb{b}_{i+1 2} - \mathbb{b}_{i+1 1}) - (\mathbb{b}_{i+1 1} - \mathbb{b}_{i+1 0})]
\end{aligned}$$

verificando que éstas coinciden. □

1.4. El espacio proyectivo

Actualmente la geometría proyectiva ocupa un papel importante en el diseño de curvas y superficies, ya que éstas se pueden ver como envolventes de familias de lugares geométricos (por ejemplo familias, de rectas, de planos, de círculos, etc.) en \mathbb{R}^3 y estas familias pueden ser vistas como conjuntos de puntos en algún espacio proyectivo.

Por conveniencia, consideramos la definición de espacio proyectivo con cierto nivel de generalidad

Definición 1.4.1. Dado un espacio vectorial real V de dimensión $n + 1$, se define la relación de equivalencia \sim sobre V dada por:

$$\mathbf{u} \sim \mathbf{v} \text{ si y sólo si, existe } \lambda \neq 0 \text{ tal que } \mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$$

El *espacio proyectivo* de dimensión n basado en V se define como el cociente $\mathbb{P}^n(V) = (V - \{\mathbf{0}\}) / \sim$.

En particular, denotamos el espacio proyectivo basado en el espacio vectorial \mathbb{R}^{n+1} simplemente por \mathbb{P}^n .

Para una interpretación del espacio proyectivo \mathbb{P}^n , tomemos un punto \mathbf{B} en \mathbb{P}^n , \mathbf{B} resulta ser una clase de equivalencia, es decir, $\mathbf{B} = [\mathbf{b}]$ para algún $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$, si escogemos a \mathbf{b} como representante de \mathbf{B} , entonces cualquier otro representante \mathbf{v} de \mathbf{B} sería $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{b}$, es decir, \mathbf{v} es un vector sobre la recta generada por \mathbf{b} que pasa por el origen, de lo cual se sigue que todos los representantes de \mathbf{B} están sobre dicha recta, de esta forma es natural identificar o pensar en los elementos de \mathbb{P}^n como las rectas de \mathbb{R}^{n+1} que pasan por el origen.

1.4.1. Coordenadas homogéneas y afines

Definición 1.4.2. Si \mathbf{B} es un punto en \mathbb{P}^n , entonces $\mathbf{B} = [\mathbf{b}]$, con $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ un vector de \mathbb{R}^{n+1} , el vector \mathbf{b} se conoce como vector de *coordenadas homogéneas* de \mathbf{B} .

Es claro que el vector de coordenadas homogéneas de \mathbf{B} no es único, ya que para cualquier $\lambda \neq 0$ se tiene que $\mathbf{B} = [\lambda \mathbf{b}]$, así $\lambda \mathbf{b}$ es también un vector de coordenadas homogéneas para \mathbf{B} .

La siguiente definición exhibe la relación entre \mathbb{P}^n y \mathbb{R}^n .

Definición 1.4.3. Si $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ son las coordenadas homogéneas de un punto \mathbf{B} en \mathbb{P}^n , decimos que \mathbf{B} es un *punto en el infinito* o *dirección* si $b_0 = 0$, en caso contrario decimos que \mathbf{B} es un *punto finito*, de lo cual se sigue que el vector $\left(1, \frac{b_1}{b_0}, \dots, \frac{b_n}{b_0}\right)$

es también un vector de coordenadas homogéneas para \mathbf{B} el cual se conoce como vector de *coordenadas afines* de \mathbf{B} .

Es fácil ver que las coordenadas afines de un punto finito \mathbf{B} no dependen de las coordenadas homogéneas tomadas, de esto se desprende que las coordenadas afines de un punto finito son únicas. Ahora, los puntos de \mathbb{R}^n están unívocamente asociados con los puntos finitos de \mathbb{P}^n , basta considerar el siguiente diagrama.

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{i} \mathbb{R}_{x_0=1}^{n+1} \xrightarrow{p} \mathbb{P}^n$$

donde $\mathbb{R}_{x_0=1}^{n+1} = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) : x_0 = 1\}$, $i(x_1, x_2, \dots, x_n) = (1, x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $p(1, x_1, x_2, \dots, x_n) = [(1, x_1, x_2, \dots, x_n)]$.

1.4.2. Rectas y planos en espacios proyectivos

Las rectas en un espacio proyectivo pueden definirse paramétricamente por medio de dos puntos distintos. Dados dos puntos distintos \mathbf{A} y \mathbf{B} en el espacio proyectivo \mathbb{P}^n con $n > 1$, se define una recta proyectiva por medio del siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R}^{n+1} \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_n \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\bar{\phi}} & \mathbb{P}^n \end{array}$$

donde $\phi(s, t) = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$, con \mathbf{a} y \mathbf{b} coordenadas homogéneas para \mathbf{A} y \mathbf{B} respectivamente, $p_1(s, t) = [(s, t)]$, $p_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = [(x_0, x_1, \dots, x_n)]$, ya que ϕ es una aplicación homogénea, queda bien definida $\bar{\phi}$, la cual se define como

$$\bar{\phi}[(s, t)] = p_n(\phi(s, t)).$$

Se define entonces la recta proyectiva que pasa por los puntos \mathbf{A} y \mathbf{B} como $\bar{\phi}(\mathbb{P}^1)$.

Similar a la construcción paramétrica de rectas proyectivas presentada anteriormente, se puede definir un 2-plano proyectivo en \mathbb{P}^n con $n > 2$, a partir de tres puntos no colineales (esto es, que no estén sobre una misma recta proyectiva) de \mathbb{P}^n . Sean \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} puntos de \mathbb{P}^n no colineales y sean \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} coordenadas homogéneas para estos puntos, respectivamente. Se define la función $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, definida por $\phi(s, t, u) = s\mathbf{a} + t\mathbf{b} + u\mathbf{c}$, la cual es homogénea, luego esta se puede extender a $\bar{\phi} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^n$ dada por $\bar{\phi}[(s, t, u)] = [\phi(s, t, u)]$. Así, $\Pi = \bar{\phi}(\mathbb{P}^2)$ es el 2-plano proyectivo que pasa por los puntos \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} . Al conjunto de coordenadas homogéneas

$\mathcal{B} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ lo llamaremos *sistema de coordenadas homogéneas* para el plano proyectivo Π . Note que cualquier terna de puntos no colineales en un plano proyectivo define un sistema de coordenadas homogéneas.

Hiperplanos en \mathbb{P}^n

Un vector $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ en \mathbb{R}^{n+1} , define un *hiperplano* en \mathbb{R}^{n+1} como el espacio vectorial n -dimensional

$$\pi = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) : a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}.$$

Éste define, de forma natural, un *hiperplano* en \mathbb{P}^n , el cual también se conoce como $(n-1)$ -plano proyectivo en \mathbb{P}^n , éste se describe por medio de

$$\Pi = \{[(x_0, x_1, \dots, x_n)] : a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}.$$

En particular, con $n = 3$ se tiene que un 2-plano en \mathbb{P}^3 tiene ecuación $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$. Con $n = 2$ la ecuación $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$, define en \mathbb{P}^2 un 1-plano, mejor conocido como una recta proyectiva. La intersección de dos planos proyectivos en \mathbb{P}^3 (lo cual siempre ocurre) determina una recta proyectiva de manera implícita. Note que una recta proyectiva tiene dos definiciones: la paramétrica y la implícita. Así, una recta proyectiva L en \mathbb{P}^3 se representa como

$$L = \Pi_1 \cap \Pi_2 = \left\{ [(x_0, x_1, x_2, x_3)] : \begin{array}{l} a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \end{array} \right\} \quad (1.10)$$

donde

$$\Pi_1 = \{[(x_0, x_1, x_2, x_3)] : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0\}$$

$$\Pi_2 = \{[(x_0, x_1, x_2, x_3)] : b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0\}$$

con (a_0, a_1, a_2, a_3) y (b_0, b_1, b_2, b_3) vectores no paralelos.

Coordenadas en \mathbb{R}^3 para rectas de \mathbb{P}^3

Si L es una recta de \mathbb{P}^3 definida como en (1.10) esta recta puede ser representada como

$$L = \{[s\mathbf{a} + t\mathbf{b}] : (s, t) \in \mathbb{R}^2\},$$

donde $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ es una base para el conjunto solución de las ecuaciones en (1.10). Ahora, sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ un sistema de coordenadas homogéneas para Π_1 . Sea \mathbf{X} un punto en L , con coordenadas homogéneas $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$ y sean $(\mathbf{x})_{\mathcal{B}} = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$, $(\mathbf{a})_{\mathcal{B}} = (\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2)$ y $(\mathbf{b})_{\mathcal{B}} = (\bar{b}_0, \bar{b}_1, \bar{b}_2)$ los vectores de coordenadas de \mathbf{x} ,

\mathbf{a} y \mathbf{b} respecto a la base \mathcal{B} , respectivamente. Como $\mathbf{X} \in L$, entonces existen s y t en \mathbb{R} tales que $\mathbf{x} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$, luego

$$\begin{aligned} (\mathbf{x})_{\mathcal{B}} &= s(\mathbf{a})_{\mathcal{B}} + t(\mathbf{b})_{\mathcal{B}} \\ \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} &= s \begin{pmatrix} \bar{a}_0 \\ \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \bar{b}_0 \\ \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Al eliminar las variables s y t en (1.11), se obtiene una ecuación $a\bar{x}_0 + b\bar{x}_1 + c\bar{x}_2 = 0$, con la cual

$$L = \{[\mathbf{x}] : (a, b, c) \cdot (\mathbf{x})_{\mathcal{B}} = 0\}.$$

El vector (a, b, c) se conoce como *vector de coordenadas homogéneas respecto a \mathcal{B}* para la recta L . Notemos que para cualquier $\lambda \neq 0$, $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ también es un vector de coordenadas homogéneas para L .

1.4.3. Dualidad en espacios proyectivos

El espacio dual de \mathbb{R}^{n+1} se define como

$$\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)^* = \left\{ f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es una transformación lineal} \right\}.$$

$\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)^*$ tiene una estructura de espacio vectorial heredada de \mathbb{R}^{n+1} . Consideremos además la relación de equivalencia \sim definida sobre $\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)^*$ por:

$$f \sim g \text{ si y solo si existe } \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ tal que } f = \lambda g.$$

Con esto, se define el *espacio proyectivo dual* como

$$\left(\mathbb{P}^n\right)^* = \left(\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)^* - \{\mathbf{0}\} \right) / \sim.$$

Para dar una interpretación de los elementos del espacio proyectivo dual consideremos lo siguiente:

Si $\Pi \in \left(\mathbb{P}^n\right)^*$ entonces $\Pi = [f]$ con $f \in \mathbb{R}^{n+1*}$, es natural identificar a Π con $\ker(f)$, esta identificación no depende del representante f , ya que si g es otro representante de Π , entonces existe $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $f = \lambda g$, así $\ker(f) = \ker(\lambda g) = \ker(g)$. En términos geométricos, $\ker(f)$ es un n -plano en \mathbb{R}^{n+1} que pasa por el origen y en \mathbb{P}^n se ve como un $(n-1)$ -plano proyectivo.

Para nuestros intereses veamos algunas relaciones entre los objetos de \mathbb{P}^3 y $\left(\mathbb{P}^3\right)^*$.

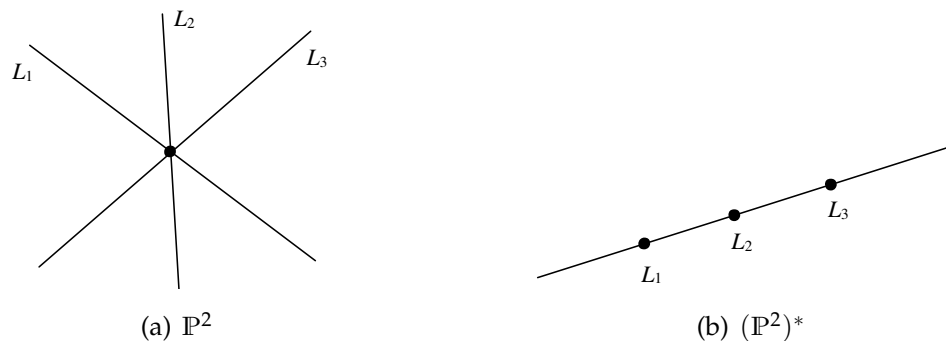


Figura 1.5: Rectas incidentes en \mathbb{P}^2 son puntos colineales en $(\mathbb{P}^2)^*$

1. Si \mathbf{b} es un vector en \mathbb{R}^4 , es decir si $\mathbf{b} = (d, a, b, c)$, este puede ser un vector de coordenadas homogéneas para el punto proyectivo $\mathbf{B} = [\mathbf{b}] \in \mathbb{P}^3$ o bien para el plano proyectivo $\mathbf{B}^* = \{[(w, x, y, z)] : ax + by + cz + wd = 0\} \subset \mathbb{P}^3$, el cual es un punto en $(\mathbb{P}^3)^*$.
2. Sea Π un 2-plano proyectivo contenido en \mathbb{P}^3 y sean L_1 y L_2 rectas contenidas en Π . Si \mathcal{B} es un sistema de coordenadas homogéneas para Π y si L_1 y L_2 tienen vectores de coordenadas homogéneas \mathbf{b}_1 y \mathbf{b}_2 (en \mathbb{R}^3) respecto a \mathcal{B} , entonces el punto de intersección entre L_1 y L_2 tiene coordenadas homogéneas $\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2$, dual a esto, en $(\mathbb{P}^2)^*$, se tiene que L_1 y L_2 son puntos y que $\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2$ define coordenadas homogéneas para la recta en $(\mathbb{P}^3)^*$ que pasa por los puntos L_1 y L_2 . Figura 1.5.

Capítulo 2

Familias paramétricas de rectas

2.1. Superficies regladas

Consideremos una curva $\mathbf{a} : [a, b] \rightarrow \mathbb{A}^3$ y una función vectorial $\mathbf{b} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Para $t \in [a, b]$ consideremos la recta L_t que pasa por el punto $\mathbf{a}(t)$ y es paralela al vector $\mathbf{b}(t)$. Sea $S = \{L_t : t \in I\}$, decimos que S es la *superficie reglada* generada por \mathbf{a} y \mathbf{b} . S es parametrizada por $\mathbf{x} : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow S$, donde

$$\mathbf{x}(t, v) = \mathbf{a}(t) + v\mathbf{b}(t).$$

- Las rectas L_t se denominan *generadores* ó *reglas* de S .
- la función vectorial \mathbf{b} se llama *generatriz*.
- La curva \mathbf{a} se denomina *curva base* o *directriz* de S .

Las derivadas parciales para \mathbf{x} en (t, v) están dadas por

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_t &= \mathbf{a}'(t) + v\mathbf{b}'(t) \\ \mathbf{x}_v &= \mathbf{b}(t).\end{aligned}$$

Decimos que $\mathbf{x}(t, v)$ es una *singularidad* de la superficie reglada si los vectores \mathbf{x}_t y \mathbf{x}_v son paralelos, en el caso contrario decimos que el punto es un *punto regular* de la superficie. Si los vectores \mathbf{x}_t y \mathbf{x}_v no son paralelos, entonces el vector $\mathbf{N}(t, v) = \mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_v$ es no nulo y éste se define como el *vector normal* a la superficie en el punto $\mathbf{x}(t, v)$.

Cuando $\mathbf{N}(t, v)$ es no nulo, se puede construir el plano

$$T_{t,v}(S) = \{y \in \mathbb{A}^3 : (\mathbf{x}(t, v) - y) \cdot \mathbf{N}(t, v) = 0\},$$

para cualquier punto y que esté sobre este plano existen números reales α y β tales que

$$y = \mathbf{x}(t, v) + \alpha \mathbf{x}_t + \beta \mathbf{x}_v.$$

El plano $T_{t,v}(S)$ se define como el *plano tangente* a la superficie en el punto $\mathbf{x}(t, v)$.

Ejemplo 2.1.1. Sea S el paraboloides hiperbólico definido por la ecuación $z = kxy$, $k \neq 0$. Notemos que las rectas L_t parametrizadas por $y = z/tk$ y $x = t$, pertenecen a S , la intersección de cada L_t con el plano $z = 0$ se da en el punto $(t, 0, 0)$ y L_t es paralela al vector $(0, 1/k, t)$. Tomando como curva directriz $\mathbf{a}(t) = (t, 0, 0)$ y como vectores directores para las rectas, $\mathbf{b}(t) = (0, 1, kt)$; obtenemos que S es una superficie reglada parametrizada por (ver Figura 2.1(a))

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t, v) &= \mathbf{a}(t) + v\mathbf{b}(t) \\ &= (t, v, kv t). \end{aligned}$$

Ejemplo 2.1.2. Sea S el hiperboloide de revolución con ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, tomando $\mathbf{a}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ para $t \in (0, 2\pi)$ y $\mathbf{b}(t) = \mathbf{a}'(t) + \mathbf{e}_3$ con $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$. Se tiene que la función ¹

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t, v) &= \mathbf{a}(t) + v\mathbf{b}(t) \\ &= (\cos t - v \sin t, \sin t + v \cos t, v) \end{aligned}$$

parametriza a S , de manera que S es una superficie reglada. (ver Figura 2.1(b)).

Ejemplo 2.1.3. Sea \mathbf{a} una curva parametrizada, y \mathbf{b}_0 un vector. Una superficie reglada que pueda ser parametrizada por

$$\mathbf{x}(t, v) = \mathbf{a}(t) + v\mathbf{b}_0$$

tiene la propiedad que todos sus generadores tienen dirección constante. Las superficies regladas de este tipo se conocen como *superficies cilíndricas*.

Ejemplo 2.1.4. Sea \mathbf{a}_0 un punto y $\mathbf{b} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función C^2 , la superficie reglada obtenida por la parametrización

$$\mathbf{x}(t, v) = \mathbf{a}_0 + v\mathbf{b}(t)$$

tiene la propiedad de que todos sus generadores se intersecan en el punto \mathbf{a}_0 .

¹Con $-\mathbf{e}_3$ en lugar de \mathbf{e}_3 se obtiene una parametrización donde los generadores son distintos a los obtenidos con \mathbf{e}_3 .

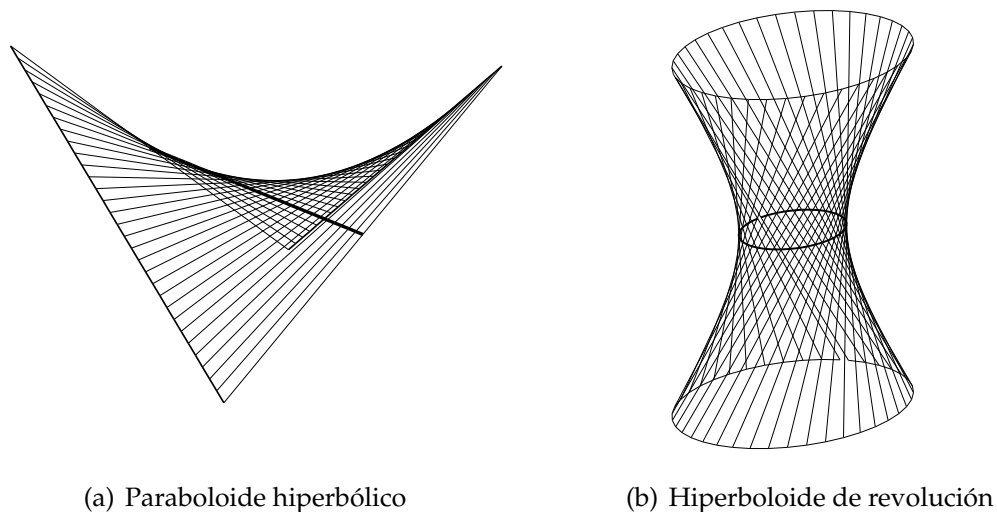


Figura 2.1: Superficies regladas.

Ejemplo 2.1.5. Un tipo de superficies de gran interés en este trabajo, son las *superficies tangentes* a una curva \mathbf{a} , estas pueden ser parametrizadas por

$$\mathbf{x}(t, v) = \mathbf{a}(t) + v\mathbf{a}'(t).$$

Una propiedad importante de estas superficies, que veremos mas adelante, es que el plano osculador de la curva \mathbf{a} en un punto $\mathbf{a}(t)$ coincide con el plano tangente a la superficie en cualquier punto del generador L_t . la curva \mathbf{a} a la cual son tangentes todos los generadores de la superficie se llama *línea de regresión*.

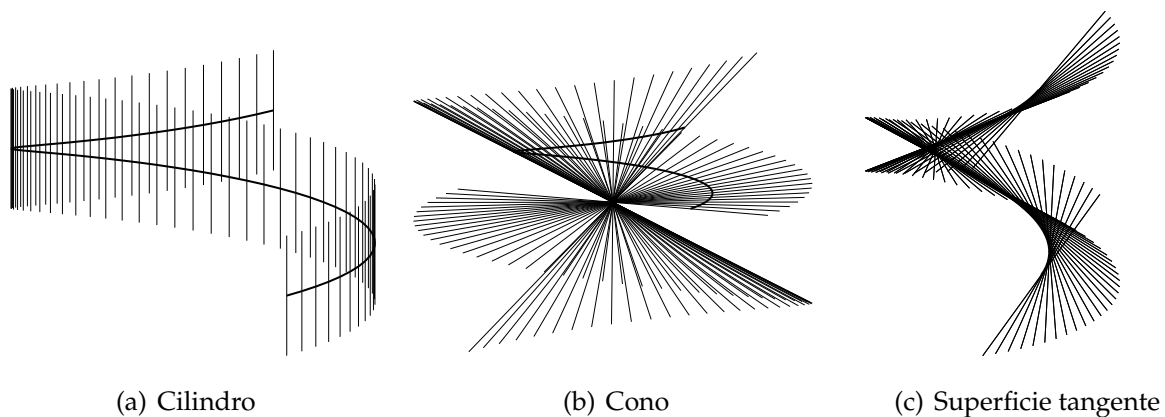


Figura 2.2: Superficies regladas con igual directriz.

2.1.1. Línea de estricción

Consideremos una superficie reglada S parametrizada por $\mathbf{x}(t, v) = \mathbf{a}(t) + v\mathbf{b}(t)$, con $(t, v) \in [a, b] \times \mathbb{R}$, con $\mathbf{b}'(t) \neq 0$ para $t \in [a, b]$.

Estudiemos el comportamiento del vector normal a la superficie sobre un generador fijo L_t cuando $|v| \rightarrow \infty$. Para esto definamos

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{N}} &= \frac{1}{\sqrt{v^2 + 1}} \mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_v \\ &= \frac{1}{\sqrt{v^2 + 1}} \mathbf{a}'(t) \times \mathbf{b}(t) + \frac{v}{\sqrt{v^2 + 1}} \mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t).\end{aligned}$$

Ahora, cuando

$$v \rightarrow -\infty, \quad \hat{\mathbf{N}} \rightarrow -\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t) \quad (2.1)$$

$$v \rightarrow +\infty, \quad \hat{\mathbf{N}} \rightarrow \mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t) \quad (2.2)$$

lo cual dice que el plano tangente, entre las posiciones límite (con t fijo) gira un ángulo π a lo largo del generador L_t .

El plano normal al vector $\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)$ se conoce como *plano asintótico* de S sobre el generador L_t y se denota por Π_t^∞ ,

$$\Pi_t^\infty = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{A}^3 : (\mathbf{y} - \mathbf{a}(t)) \cdot (\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)) = 0 \right\}.$$

El plano tangente a S sobre el generador L_t que es perpendicular a Π_t^∞ se conoce como *plano central* y se denota por Π_t^C y

$$\Pi_t^C = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{A}^3 : (\mathbf{y} - \mathbf{a}(t)) \cdot (\mathbf{b}(t) \times (\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t))) = 0 \right\}.$$

Un punto sobre L_t se llama *punto central* o *punto de estricción* si el plano tangente a la superficie S en dicho punto coincide con el plano central Π_t^C .

Definición 2.1.1. El conjunto de puntos centrales de una superficie reglada S se denomina *línea de estricción* de S .

Para encontrar una fórmula que permita calcular los puntos sobre la línea de estricción consideremos un punto central $\mathbf{x}(t, v) = \mathbf{a}(t) + v\mathbf{b}(t)$. El vector normal $\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_v$ en el punto $\mathbf{x}(t, v)$ también es ortogonal al plano central, luego $\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_v$ es ortogonal a el vector normal al plano asintótico, es decir

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_v) \cdot (\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)) &= 0 \\ (\mathbf{a}'(t) \times \mathbf{b}(t) + v\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)) \cdot (\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)) &= 0 \\ (\mathbf{a}'(t) \times \mathbf{b}(t)) \cdot (\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)) + v\|\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)\|^2 &= 0\end{aligned}$$

así se tiene que

$$v = -\frac{(\mathbf{a}'(t) \times \mathbf{b}(t)) \cdot (\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t))}{\|\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)\|^2}. \quad (2.3)$$

Lo cual implica que los puntos centrales de S dependen solo de t y están sobre la curva $\mathfrak{e} : [a, b] \rightarrow S$ dada por

$$\mathfrak{e}(t) = \mathbf{a}(t) - \frac{(\mathbf{a}'(t) \times \mathbf{b}(t)) \cdot (\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t))}{\|\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)\|^2} \mathbf{b}(t). \quad (2.4)$$

Observación 2.1.1. Es claro que una superficie reglada S con generatriz \mathbf{b} también se puede parametrizar con

$$\mathfrak{x}(t, u) = \mathfrak{e}(t) + u\mathbf{b}(t).$$

Veamos ahora que los puntos $\mathfrak{e}(t)$ de la superficie son precisamente los puntos de estricción. Consideremos la parametrización $\mathfrak{x}(t, u) = \mathfrak{e}(t) + u\mathbf{b}(t)$ donde $\mathfrak{e}(t) = \mathbf{a}(t) + v(t)\mathbf{b}(t)$ con v como en (2.3). El vector normal en $\mathfrak{x}(t, u)$ está dado por

$$\mathfrak{x}_t \times \mathfrak{x}_u = \mathbf{a}'(t) \times \mathbf{b}(t) + (v(t) + u)\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)$$

y el vector normal en $\mathfrak{e}(t) = \mathfrak{x}(t, 0)$ es $\mathbf{a}'(t) \times \mathbf{b}(t) + v(t)\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)$. Luego

$$(\mathbf{a}'(t) \times \mathbf{b}(t) + v(t)\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)) \cdot (\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)) = 0,$$

lo cual significa que el plano tangente en $\mathfrak{e}(t)$ es perpendicular al plano asintótico del generador L_t , es decir el punto $\mathfrak{e}(t)$ es un punto central.

De lo anterior se puede definir la línea de estricción como los puntos de la superficie que están sobre la curva $\mathfrak{e}(t)$.

Ejemplo 2.1.6. La línea de estricción de las superficies en los ejemplos 2.1.1 y 2.1.2 resultan ser la curvas directrices con las que se parametrizaron, respectivamente.

2.1.2. Parámetro de distribución

En esta sección se da un resultado que permite identificar las singularidades que puede tener una superficie reglada, a partir de la línea de estricción.

Lema 2.1.1. *Sea S una superficie reglada con generatriz $\mathbf{b}(t)$ y línea de estricción $\mathfrak{e}(t)$. La línea de estricción \mathfrak{e} satisface que*

$$(\mathfrak{e}'(t) \times \mathbf{b}(t)) \cdot (\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)) = 0$$

para todo $t \in [a, b]$.

Demostración. Sea $v(t)$ como en (2.3), luego, un punto sobre la línea de estricción se escribe como $\mathbf{e}(t) = \mathbf{a}(t) + v(t)\mathbf{b}(t)$, de lo cual se desprende que

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'(t) &= \mathbf{a}'(t) + v'(t)\mathbf{b}(t) + v(t)\mathbf{b}'(t) \\ \mathbf{e}'(t) \times \mathbf{b}(t) &= \mathbf{a}'(t) \times \mathbf{b}(t) + v(t)\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t) \\ (\mathbf{e}'(t) \times \mathbf{b}(t)) \cdot (\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)) &= (\mathbf{a}'(t) \times \mathbf{b}(t)) \cdot (\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)) + v(t)\|\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)\|^2 \end{aligned}$$

finalmente, con $v(t)$ como en (2.3) se tiene que $(\mathbf{e}'(t) \times \mathbf{b}(t)) \cdot (\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)) = 0$. \square

Proposición 2.1.2. *Sea S una superficie reglada no cilíndrica parametrizada por $\mathbf{x}(t, v) = \mathbf{e}(t) + v\mathbf{b}(t)$, donde \mathbf{e} es su línea de estricción. Un punto $\mathbb{p} = \mathbf{x}(t, v)$ es una singularidad de la superficie si y sólo si \mathbb{p} está sobre la línea de estricción y*

$$(\mathbf{e}'(t) \times \mathbf{b}(t)) \cdot \mathbf{b}'(t) = 0.$$

Demostración. Del lema 2.1.1 se sigue $(\mathbf{e}'(t) \times \mathbf{b}(t)) \cdot (\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)) = 0$ y ya que $(\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)) \cdot \mathbf{b}(t) = 0$, se tiene que $\mathbf{b}(t) \times (\mathbf{e}'(t) \times \mathbf{b}(t))$ es paralelo a $\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)$, así, existe un número real $\lambda(t)$ tal que

$$\mathbf{b}(t) \times (\mathbf{e}'(t) \times \mathbf{b}(t)) = \lambda(t)(\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)). \quad (2.5)$$

Por otra parte, de la expresión para el vector normal a la superficie en $\mathbf{x}(t, v)$ dada por $\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_v = \mathbf{e}'(t) \times \mathbf{b}(t) + v\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)$ y junto con (2.5) se tiene que

$$\mathbf{b}(t) \times (\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_v) = \mathbf{b}(t) \times (\mathbf{e}'(t) \times \mathbf{b}(t)) + v\mathbf{b}(t) \times (\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)) \quad (2.6)$$

$$= \lambda(t) (\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)) + v\mathbf{b}(t) \times (\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)) \quad (2.7)$$

Tomando norma al cuadrado en (2.7) se desprende la expresión

$$\|\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_v\|^2 = \left(\lambda^2(t) + v^2\|\mathbf{b}(t)\|^2 \right) \frac{\|\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)\|^2}{\|\mathbf{b}(t)\|^2}. \quad (2.8)$$

De (2.5) se obtiene la expresión para $\lambda(t)$ dada por

$$\lambda(t) = \frac{\|\mathbf{b}(t)\|^2}{\|\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)\|^2} (\mathbf{e}'(t) \cdot (\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t))). \quad (2.9)$$

Ahora, de (2.8) podemos ver que el punto \mathbb{p} es una singularidad si y sólo si $v = 0$ y $\lambda^2(t) = 0$, es decir, si el punto $\mathbb{p} = \mathbf{x}(t, v)$ es un punto de estricción y $\mathbf{e}'(t) \cdot (\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)) = 0$. \square

El escalar $\lambda(t)$ obtenido en (2.5) se conoce como *parámetro de distribución* de la superficie en el generador L_t .

Observación 2.1.2. Con la proposición anterior se tiene una herramienta de gran utilidad en el diseño de superficies a partir de superficies regladas, puesto que por medio de la línea de estricción es posible identificar las singularidades de este tipo de superficies.

Los puntos de un generador son puntos regulares de la superficie, con la posible excepción del punto de intersección con la línea de estricción, el cual es el punto central del generador.

Para una interpretación geométrica del parámetro de distribución λ consideremos lo siguiente. Sea S una superficie reglada no cilíndrica parametrizada por $\mathbf{x}(t, v) = \mathbf{e}(t) + v\mathbf{b}(t)$. De (2.7) se obtiene la siguiente expresión para el vector normal

$$\mathbf{N}(t, v) = \frac{1}{\|\mathbf{b}(t)\|^2} \lambda(t) (\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)) \times \mathbf{b}(t) + v \|\mathbf{b}(t)\|^2 (\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)) \quad (2.10)$$

notemos que si $v = 0$ se tiene el vector

$$\mathbf{N}(t, 0) = \frac{1}{\|\mathbf{b}(t)\|^2} \lambda(t) (\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)) \times \mathbf{b}(t) \quad (2.11)$$

el cual es el vector normal a la superficie en el punto de estricción $\mathbf{x}(t, 0) = \mathbf{e}(t)$. Ahora, si θ es el ángulo formado por el plano central del generador L_t y el plano tangente en el punto $\mathbf{x}(t, v)$, entonces

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\mathbf{N}(t, 0) \cdot \mathbf{N}(t, v)}{\|\mathbf{N}(t, 0)\| \|\mathbf{N}(t, v)\|} \\ &= \frac{\lambda(t)}{\sqrt{\lambda^2(t) + v^2 \|\mathbf{b}(t)\|^2}}. \end{aligned}$$

De esta última expresión se sigue que

$$\lambda(t) = \frac{|v| \|\mathbf{b}(t)\|}{\tan \theta}. \quad (2.12)$$

De la ecuación (2.12) se puede ver que el parámetro de distribución resulta ser la razón entre, la distancia del punto $\mathbf{x}(t, v)$ al punto central $\mathbf{x}(t, 0)$ y el ángulo comprendido por los planos tangentes a estos puntos, respectivamente.

2.2. Superficies desarrollables

En la familia de superficies regladas se encuentran las que satisfacen que el plano tangente a la superficie sobre un generador es el mismo a lo largo de éste, es decir, la dirección del vector normal a lo largo de un generador es constante.

Definición 2.2.1. Sea S una superficie reglada parametrizada por $\mathbf{x}(t, v) = \mathbf{a}(t) + v\mathbf{b}(t)$. Decimos que S es una *superficie desarrollable* si el vector normal $\mathbf{N}(t, v)$, con t fijo, tiene dirección constante para todo valor del parámetro v .

En los ejemplos 2.1.3, 2.1.4 y 2.1.5, se exhiben las superficies desarrollables más simples. En esta sección daremos la prueba de que cualquier superficie desarrollable está formada por trozos de éstas. Verificamos primero que las superficies definidas en estos ejemplos son superficies desarrollables.

1. Consideremos una superficie reglada cilíndrica con parametrización $\mathbf{x}(t, v) = \mathbf{a}(t) + v\mathbf{b}_0$, con \mathbf{b}_0 un vector fijo. Con un simple cálculo vemos que el vector normal a la superficie en el punto $\mathbf{x}(t, v)$, viene dado por

$$\mathbf{N}(t, v) = \mathbf{a}'(t) \times \mathbf{b}_0,$$

el cual no depende del parámetro v , así, sobre el generador L_t , $\mathbf{N}(t, v)$ es constante.

2. Ahora, consideremos una superficie reglada con parametrización $\mathbf{x}(t, v) = \mathbf{a}_0 + v\mathbf{b}(t)$ con \mathbf{a}_0 un punto fijo. En este caso el vector normal a la superficie viene dado por

$$\mathbf{N}(t, v) = v(\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)).$$

Aunque $\mathbf{N}(t, v)$ depende de t y de v , vemos que su dirección, que es lo importante, no depende de v sobre el generador L_t . Además, cabe resaltar que con $v = 0$ el vector normal es nulo, lo cual significa que el vértice del cono es una singularidad y se puede definir la línea de estricción para el cono como la curva constante $\mathbf{e}(t) = \mathbf{a}_0$.

3. Finalmente, consideremos la superficie tangente a una curva $\mathbf{a}(t)$. Se tiene entonces la parametrización $\mathbf{x}(t, v) = \mathbf{a}(t) + v\mathbf{a}'(t)$, el vector normal a esta superficie reglada está dado por

$$\mathbf{N}(t, v) = v(\mathbf{a}''(t) \times \mathbf{a}'(t))$$

cuya dirección sobre el generador L_t no depende del parámetro v . Notemos además que el vector normal (con $v \neq 0$) a la superficie tangente tiene la misma dirección que el vector binormal a la curva, de lo cual se desprende que el plano osculador a la curva directriz en el punto $\mathbf{a}(t)$ coincide con el plano tangente a la superficie en el generador L_t . Cuando $v = 0$ el vector normal es nulo, lo cual significa que los puntos sobre la línea de regresión (ver ejemplo

2.1.5) resultan ser las singularidades de la superficie, este hecho permite afirmar que la línea de estricción de una superficie tangente y su línea de regresión coinciden. Además, la fórmula (2.4) valida este hecho.

Lema 2.2.1. (Condición de desarrollabilidad) Sea S un superficie reglada parametrizada por $\mathbf{x}(t, v) = \mathbf{a}(t) + v\mathbf{b}(t)$ para $t \in [a, b]$. La superficie reglada S es una superficie desarrollable si y sólo si para todo $t \in [a, b]$ se cumple

$$(\mathbf{a}'(t) \times \mathbf{b}(t)) \cdot \mathbf{b}'(t) = 0. \quad (2.13)$$

Demostración. Si S es una superficie desarrollable, entonces los vectores normales en cualquier par de puntos $\mathbf{x}(t, v_1)$ y $\mathbf{x}(t, v_2)$ del generador L_t son paralelos, luego

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{N}(t, v_1) \times \mathbf{N}(t, v_2) \\ &= (\mathbf{a}'(t) \times \mathbf{b}(t) + v_1 \mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)) \times (\mathbf{a}'(t) \times \mathbf{b}(t) + v_2 \mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)) \\ &= (v_2 - v_1)(\mathbf{a}'(t) \times \mathbf{b}(t)) \times (\mathbf{b}'(t) \times \mathbf{b}(t)) \\ &= (v_1 - v_2) ((\mathbf{a}'(t) \times \mathbf{b}(t)) \cdot \mathbf{b}'(t)) \mathbf{b}(t). \end{aligned}$$

Lo anterior implica, que con $v_1 \neq v_2$ y $\mathbf{b}(t) \neq \mathbf{0}$ se obtiene (2.13). \square

Teorema 2.2.2. (Clasificación de las superficies desarrollables) Cualquier superficie desarrollable puede ser dividida en trozos de tal forma que éstos son, pedazos de planos, cilindros, conos o superficies tangentes.

Demostración. Sea S una superficie desarrollable con parametrización

$$\mathbf{x}(t, v) = \mathbf{a}(t) + v\mathbf{b}(t) \quad (2.14)$$

con \mathbf{a} y \mathbf{b} de clase C^2 para t en un intervalo $[a, b]$. Ya que para cada $t \in [a, b]$ se tiene $(\mathbf{a}'(t) \times \mathbf{b}(t)) \cdot \mathbf{b}'(t) = 0$, existen funciones escalares $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ definidas en $[a, b]$, no todas simultáneamente cero tales que

$$f\mathbf{a}' + g\mathbf{b} + h\mathbf{b}' = \mathbf{0}. \quad (2.15)$$

Supongamos que las funciones f , g y h son de la misma clase que \mathbf{a}' y \mathbf{b}' . Consideremos ahora los siguientes casos

C. 1 Si $f(t) = 0$ para todo t en algún intervalo abierto I contenido en $[a, b]$. De (2.15) se tiene que

$$g\mathbf{b} + h\mathbf{b}' = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

y para todo t en I al menos una de las funciones g y h es distinta de cero. Calculando la derivada del vector unitario $\hat{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}$ se tiene

$$\hat{\mathbf{b}}' = \frac{\mathbf{b}'}{\|\mathbf{b}\|} - \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}'}{\|\mathbf{b}\|^2} \hat{\mathbf{b}}. \quad (2.17)$$

De (2.16) se obtiene $g = -h \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}'}{\|\mathbf{b}\|^2}$ y con (2.17) se sigue que

$$\begin{aligned} h\hat{\mathbf{b}}' &= h \frac{\mathbf{b}'}{\|\mathbf{b}\|} - h \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}'}{\|\mathbf{b}\|^2} \hat{\mathbf{b}} \\ &= h \frac{\mathbf{b}'}{\|\mathbf{b}\|} + g\hat{\mathbf{b}} \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{b}\|} (h\mathbf{b}' + g\mathbf{b}) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

de lo cual se desprende, que con $h \neq 0$ en I entonces $\hat{\mathbf{b}}$ es constante, es decir, la dirección de \mathbf{b} es constante en I . Por tanto, para t en el intervalo I el trozo de superficie es un trozo de un cilindro o de un plano.

C. 2 Si $f(t) \neq 0$ para todo t en un intervalo abierto I contenido en $[a, b]$. De (2.15) se sigue que

$$\mathbf{a}' = -\frac{g}{f}\mathbf{b} - \frac{h}{f}\mathbf{b}'. \quad (2.18)$$

Sea

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \frac{h}{f}\mathbf{b} \quad (2.19)$$

luego

$$\hat{\mathbf{a}}' = \mathbf{a}' + \frac{h}{f}\mathbf{b}' + \left(\frac{h}{f}\right)' \mathbf{b} \quad (2.20)$$

con (2.18) en (2.20) se tiene

$$\hat{\mathbf{a}}' = \left(\left(\frac{h}{f}\right)' - \frac{g}{f} \right) \mathbf{b}. \quad (2.21)$$

C.2a Si $(h/f)' = g/f^2$ en un intervalo abierto I' contenido en I ,³ entonces $\hat{\mathbf{a}}' = \mathbf{0}$ y de (2.19) se tiene que $\hat{\mathbf{a}}(t) = \hat{\mathbf{a}}_0$ es constante en I' y así (2.14)

²Debido a los intereses de este trabajo, suponemos que los puntos donde se anulan las funciones involucradas en esta prueba son ceros aislados, ya que sólo trataremos con funciones polinomiales y racionales.

³En el caso que $(h/f)' = g/f$ en un punto aislado $t = t_0$, entonces para algún $\epsilon > 0$ se cumple que sobre los intervalos $(t_0 - \epsilon, t_0)$ y $(t_0, t_0 + \epsilon)$ los trozos de superficies correspondientes son superficies tangentes. Ver caso C.2b.

queda como

$$\mathbf{x}(t, v) = \hat{\mathbf{a}}_0 + \left(v - \frac{h(t)}{f(t)} \right) \mathbf{b}(t) \quad (2.22)$$

la cual corresponde a la parametrización de un trozo de cono o de plano

C.2b Si $(h/f)' \neq g/f$ en algún intervalo abierto I'' contenido en I entonces de (2.21) se sigue que

$$\mathbf{b} = \left(\left(\frac{h}{f} \right)' - \frac{g}{f} \right)^{-1} \hat{\mathbf{a}}'$$

que junto con (2.19) en (2.14) produce

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t, v) &= \hat{\mathbf{a}}(t) - \frac{h(t)}{f(t)} \mathbf{b}(t) + v \mathbf{b}(t) \\ &= \hat{\mathbf{a}}(t) + \left(v - \frac{h(t)}{f(t)} \right) \left(\left(\frac{h(t)}{f(t)} \right)' - \frac{g(t)}{f(t)} \right)^{-1} \hat{\mathbf{a}}'(t) \end{aligned}$$

y haciendo $u = \left(v - \frac{h(t)}{f(t)} \right) \left(\left(\frac{h(t)}{f(t)} \right)' - \frac{g(t)}{f(t)} \right)^{-1}$, se tiene que la superficie en el intervalo I'' tiene parametrización

$$\mathbf{x}(t, u) = \hat{\mathbf{a}}(t) + u \hat{\mathbf{a}}'(t)$$

la cual es un trozo de superficie tangente con línea de regresión $\hat{\mathbf{a}}(t)$.

□

Capítulo 3

Diseño de superficies desarrollables

3.1. Algoritmo de Aumann

El algoritmo de Aumann se publicó en [1], este algoritmo permite diseñar superficies desarrollables sobre curvas de Bézier de manera simple. Enunciamos a continuación el algoritmo.

Algoritmo de Aumann. Sean a_0, a_1, \dots, a_m y b_0 puntos en \mathbb{A}^3 y sean λ y μ números reales. El algoritmo está dado por la siguiente fórmula recursiva.

$$b_{i+1} = a_i + \lambda(a_{i+1} - a_i) + \mu(b_i - a_i), \text{ con } i = 0, 1, \dots, m - 1. \quad (3.1)$$

El siguiente teorema establece el método para producir superficies desarrollables a partir del algoritmo de Aumann.

Teorema 3.1.1. Sean a_0, a_1, \dots, a_m y b_0 en \mathbb{A}^3 donde los vectores $b_0 - a_0$ y $a_1 - a_0$ son no paralelos. Tomando los puntos b_i como en (3.1) con λ y μ arbitrarios, se tiene que la superficie reglada S parametrizada por

$$\mathbb{x}(t, v) = \sum_{i=0}^m B_i^m(t) a_i + v \sum_{i=0}^m B_i^m(t) (b_i - a_i) \quad (3.2)$$

con $(t, v) \in [0, 1]$ es una superficie desarrollable. Además:

1. S es un cilindro si y sólo si $\lambda = 1$.
2. S es un cono si y sólo si $\lambda \neq 1$ y $\mu = 1$.
3. S es una superficie tangente¹ si y sólo si $\lambda \neq 1$ y $\mu \neq 1$.

¹La línea de regresión de la superficie tangente puede ser calculada por medio de la fórmula para la línea de estricción dada en (2.4).

En el teorema anterior tomando

$$\mathbf{a}(t) = \sum_{i=0}^m B_i^m(t)\mathbf{a}_i \quad \text{y} \quad \mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^m B_i^m(t)\mathbf{b}_i$$

la expresión (3.2) puede escribirse como la combinación afín

$$\mathbf{x}(t, v) = (1 - v)\mathbf{a}(t) + v\mathbf{b}(t).$$

Cuando se toma (t, v) en el rectángulo $[0, 1] \times [0, 1]$ se obtiene un *parche de Bézier desarrollable* el cual tiene como borde a las curvas de Bézier $\mathbf{a}(t)$ y $\mathbf{b}(t)$, y a los segmentos $(1 - v)\mathbf{a}(0) + v\mathbf{b}(0)$ y $(1 - v)\mathbf{a}(1) + v\mathbf{b}(1)$.

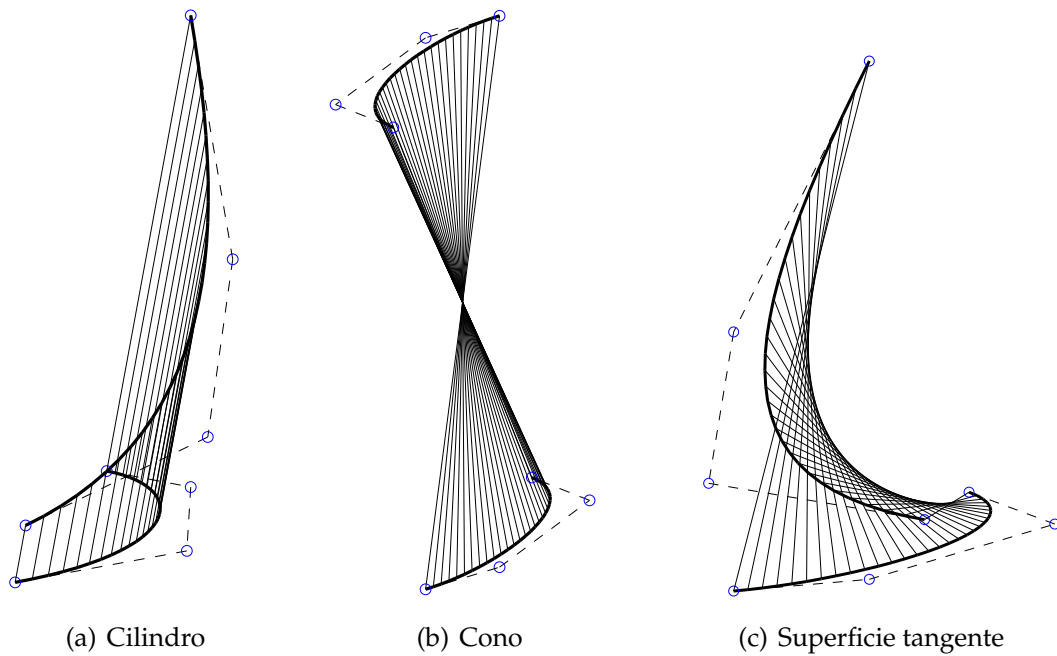


Figura 3.1: Parches desarrollables obtenidos con el algoritmo de Aumann.

3.2. Construcción de superficies desarrollables sobre cúbicas de Bézier

Consideremos la superficie reglada $\mathbf{x}(t, v) = \mathbf{a}(t) + v\mathbf{b}(t)$ con $\mathbf{a}(t)$ en \mathbb{A}^3 y $\mathbf{b}(t)$ en \mathbb{R}^3 , curvas de Bézier cúbica y cuadrática respectivamente, es decir,

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_0(1 - t)^3 + 3\mathbf{a}_1t(1 - t)^2 + 3\mathbf{a}_2t^2(1 - t) + \mathbf{a}_3t^3 \tag{3.3}$$

y

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{b}_0(1 - t)^2 + 2\mathbf{b}_1t(1 - t) + \mathbf{b}_2t^2 \tag{3.4}$$

para $t \in [0, 1]$ y los puntos de control $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ en \mathbb{A}^3 y $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$ y \mathbf{b}_2 en \mathbb{R}^3 . Ahora consideremos el siguiente problema:

¿Dada la curva $\mathbf{a}(t)$, i.e. dados sus puntos de control $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ y \mathbf{a}_3 , que condiciones deben imponerse sobre los vectores $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$ y \mathbf{b}_2 que controlan a la generatriz $\mathbf{b}(t)$ para que la superficie $\mathbf{x}(t, v)$ sea una superficie desarrollable?

Comencemos considerando la condición de desarrollabilidad para $\mathbf{x}(t, v)$, esto es, se debe dar que para todo $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} (\mathbf{b}(t) \times \mathbf{a}'(t)) \cdot \mathbf{b}'(t) &= c_0(1-t)^5 + c_1t(1-t)^4 + c_2t^2(1-t)^3 + c_3t^3(1-t)^2 \\ &\quad + c_4t^4(1-t) + c_5t^5 \\ &= 0. \end{aligned}$$

La condición de desarrollabilidad para $\mathbf{x}(t, v)$ queda expresada como la anulación de un polinomio de grado 5 en términos de la base de polinomios de Bernstein, donde sus coeficientes reales están dados por

$$\begin{aligned} c_0 &= (\mathbf{b}_0 \times \Delta \mathbf{a}_0) \cdot \mathbf{b}_1 \\ c_1 &= (\Delta \mathbf{a}_0 \times \mathbf{b}_2 + (\Delta \mathbf{a}_0 + 2\Delta \mathbf{a}_1) \times \mathbf{b}_1) \cdot \mathbf{b}_0 \\ c_2 &= ((2\Delta \mathbf{a}_1 + \Delta \mathbf{a}_0) \times \mathbf{b}_2 + (2\Delta \mathbf{a}_1 + \Delta \mathbf{a}_2) \times \mathbf{b}_1) \cdot \mathbf{b}_0 + (\Delta \mathbf{a}_0 \times \mathbf{b}_2) \cdot \mathbf{b}_1 \\ c_3 &= (\mathbf{b}_0 \times (2\Delta \mathbf{a}_1 + \Delta \mathbf{a}_2) + \mathbf{b}_1 \times (2\Delta \mathbf{a}_1 + \Delta \mathbf{a}_0)) \cdot \mathbf{b}_2 + (\mathbf{b}_0 \times \Delta \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{b}_1 \quad (3.5) \\ c_4 &= (\mathbf{b}_0 \times \Delta \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_1 \times (\Delta \mathbf{a}_2 + 2\Delta \mathbf{a}_1)) \cdot \mathbf{b}_2 \\ c_5 &= (\mathbf{b}_1 \times \Delta \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{b}_2. \end{aligned}$$

De esta manera, la condición de desarrollabilidad se da si y sólo si $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0$.

Por simplicidad, iniciamos considerando las ecuaciones $c_0 = 0$ y $c_5 = 0$, las cuales implican restricciones sobre los puntos $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$ y \mathbf{b}_2 . Estas restricciones las agrupamos en los siguientes cuatro casos:

- **Caso 1.** $\mathbf{b}_0 \times \Delta \mathbf{a}_0 = 0$ y $\mathbf{b}_1 \times \Delta \mathbf{a}_2 = 0$.
- **Caso 2.** $\mathbf{b}_0 \times \Delta \mathbf{a}_0 = 0$ y $\mathbf{b}_1 \times \Delta \mathbf{a}_2 \neq 0$ con \mathbf{b}_2 ortogonal a $\mathbf{b}_1 \times \Delta \mathbf{a}_2$.
- **Caso 3.** $\mathbf{b}_0 \times \Delta \mathbf{a}_0 \neq 0$, con \mathbf{b}_1 ortogonal a $\mathbf{b}_0 \times \Delta \mathbf{a}_0$ y $\mathbf{b}_1 \times \Delta \mathbf{a}_2 = 0$.
- **Caso 4.** $\mathbf{b}_0 \times \Delta \mathbf{a}_0 \neq 0$, con \mathbf{b}_1 ortogonal a $\mathbf{b}_0 \times \Delta \mathbf{a}_0$ y $\mathbf{b}_1 \times \Delta \mathbf{a}_2 \neq 0$, con \mathbf{b}_2 ortogonal a $\mathbf{b}_1 \times \Delta \mathbf{a}_2$.

Revisemos los cuatro casos mencionados, bajo el supuesto que $\{\Delta_{\mathbf{a}_0}, \Delta_{\mathbf{a}_1}, \Delta_{\mathbf{a}_2}\}$ sea un conjunto linealmente independiente en \mathbb{R}^3 . Exigir esta condición es equivalente a considerar la curva $\mathbf{a}(t)$ como una curva no plana, es decir, es considerar a la curva $\mathbf{a}(t)$ con torsión no nula.

Caso 1. Para esta situación, deben existir números reales k_1 y k_2 tales que

$$\mathbf{b}_0 = k_1 \Delta_{\mathbf{a}_0} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{b}_1 = k_2 \Delta_{\mathbf{a}_2}. \quad (3.7)$$

Caso 1.1. Si se tiene $k_1 = k_2 = 0$ entonces resulta que $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_1 = 0$ y así la superficie $\mathbf{x}(t, v)$ corresponde a un cilindro parametrizado por

$$\mathbf{x}(t, v) = \mathbf{a}(t) + vt^2 \mathbf{b}_2.$$

Supongamos que $k_1 \neq 0$ o $k_2 \neq 0$. Al sustituir (3.6) y (3.7) en (3.5), haciendo $c_4 = 0$, se tiene que

$$((k_1 \Delta_{\mathbf{a}_0} - 2k_2 \Delta_{\mathbf{a}_1}) \times \Delta_{\mathbf{a}_2}) \cdot \mathbf{b}_2 = 0.$$

Ya que $\{\Delta_{\mathbf{a}_0}, \Delta_{\mathbf{a}_1}, \Delta_{\mathbf{a}_2}\}$ es un conjunto linealmente independiente, se sigue que existen números reales k_3 y k_4 tales que

$$\mathbf{b}_2 = k_1 k_3 \Delta_{\mathbf{a}_0} - 2k_2 k_3 \Delta_{\mathbf{a}_1} + k_4 \Delta_{\mathbf{a}_2}. \quad (3.8)$$

Ahora, reemplazando esta última expresión en c_1, c_2 y c_3 de (3.5), se llega a que

$$c_1 = 2(k_1 k_2)(\Delta_{\mathbf{a}_0} \times \Delta_{\mathbf{a}_1}) \cdot \Delta_{\mathbf{a}_2}$$

$$c_2 = 2(k_1 k_2 - k_2^2 k_3 + k_1 k_4)(\Delta_{\mathbf{a}_0} \times \Delta_{\mathbf{a}_1}) \cdot \Delta_{\mathbf{a}_2}$$

$$c_3 = 2(-k_2^2 k_3 + k_1 k_4)(\Delta_{\mathbf{a}_0} \times \Delta_{\mathbf{a}_1}) \cdot \Delta_{\mathbf{a}_2}.$$

Claramente, para que se anule c_1 se debe dar que $k_1 = 0$ o $k_2 = 0$, así estos no pueden ser distintos de cero simultáneamente.

Caso 1.2. Suponiendo $k_1 \neq 0$, entonces para que se satisfaga $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ se debe dar que $k_2 = k_4 = 0$. Así

$$\mathbf{b}_0 = k_1 \Delta_{\mathbf{a}_0}$$

$$\mathbf{b}_1 = 0$$

$$\mathbf{b}_2 = k_1 k_3 \Delta_{\mathbf{a}_0}.$$

Para cualquier valor de k_3 y $k_1 \neq 0$ se tiene la desarrollabilidad de $\mathbf{x}(t, v)$.

Caso 1.3. Suponiendo $k_2 \neq 0$, se tiene que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ sólo es posible con $k_1 = k_3 = 0$, así

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_0 &= 0 \\ \mathbf{b}_1 &= k_2 \Delta \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{b}_2 &= k_4 \Delta \mathbf{a}_2.\end{aligned}$$

Para cualquier valor de k_4 se tiene la desarrollabilidad de $\mathbb{x}(t, v)$.

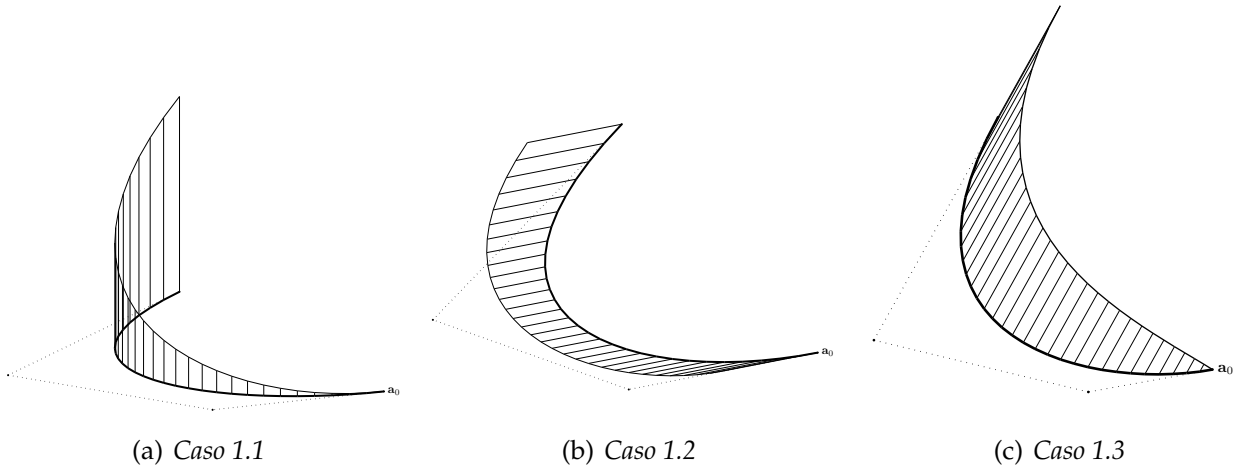


Figura 3.2: Superficies desarrollables en el caso 1.

Caso 2. De este caso se tiene que existen números reales k_1, k_2 y k_3 tales que

$$\mathbf{b}_0 = k_1 \Delta \mathbf{a}_0 \tag{3.9}$$

$$\mathbf{b}_2 = k_2 \Delta \mathbf{a}_2 + k_3 \mathbf{b}_1 \tag{3.10}$$

con estas expresiones en (3.5) haciendo $c_1 = 0$ se sigue

$$2k_1(\Delta \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1) \cdot \Delta \mathbf{a}_0 = 0.$$

Veamos los casos $k_1 = 0$ y $k_1 \neq 0$.

Caso 2.1. Si $k_1 = 0$, entonces de (3.9) se tiene $\mathbf{b}_0 = 0$, reemplazando esto, junto con (3.10) en (3.5) y haciendo $c_2 = 0$ se tiene el primer término

$$k_2(\Delta \mathbf{a}_0 \times \Delta \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{b}_1 = 0.$$

De lo cual se tienen los siguientes subcasos:

Caso 2.1.1. Si $k_2 = 0$, entonces de (3.10) se sigue $\mathbf{b}_2 = k_3 \mathbf{b}_1$. Sin importar como sea \mathbf{b}_1 , con $\mathbf{b}_0 = 0$, $\mathbf{b}_2 = k_3 \mathbf{b}_1$ se da la desarrollabilidad de $\mathbb{x}(t, v)$, para cualquier valor de k_3 .

Caso 2.1.2. Si $k_2 \neq 0$, de la independencia lineal de Δ_{a_0} y Δ_{a_2} se tiene que existen números reales k_4 y k_5 tales que $\mathbf{b}_1 = k_4\Delta_{a_0} + k_5\Delta_{a_2}$ y así de (3.10), $\mathbf{b}_2 = k_3k_4\Delta_{a_0} + (k_2 + k_5)\Delta_{a_2}$. Sustituyendo estas últimas expresiones, junto con $\mathbf{b}_0 = 0$ en (3.5), se tiene que $c_0 = c_1 = c_2 = c_5 = 0$ y $c_3 = c_4 = 2k_2k_4(\Delta_{a_0} \times \Delta_{a_1}) \cdot \Delta_{a_2}$, así para anular estos coeficientes se debe hacer $k_4 = 0$, luego $\mathbf{b}_0 = 0$, $\mathbf{b}_1 = k_5\Delta_{a_2}$ y $\mathbf{b}_2 = (k_2 + k_5)\Delta_{a_2}$ satisfacen la condición de desarrollabilidad.

Caso 2.2. Si $k_1 \neq 0$, de la independencia lineal de Δ_{a_0} y Δ_{a_1} , se desprende que, existen números reales k_4 y k_5 tales que

$$\mathbf{b}_1 = k_4\Delta_{a_0} + k_5\Delta_{a_1} \quad (3.11)$$

con esto, a partir de (3.10) se obtiene la siguiente expresión para \mathbf{b}_2 en términos de los Δ_{a_i} 's

$$\mathbf{b}_2 = k_3k_4\Delta_{a_0} + k_3k_5\Delta_{a_1} + k_2\Delta_{a_2}. \quad (3.12)$$

Reemplazando (3.9), (3.11) y (3.12) en (3.5) se tiene que

$$c_2 = (2k_1k_2 - k_1k_5 - k_2k_5)(\Delta_{a_0} \times \Delta_{a_1}) \cdot \Delta_{a_2} \quad (3.13)$$

$$c_3 = (2k_1k_2 - k_1k_5 - k_2k_5 + 2k_2k_4 - k_1k_3k_5)(\Delta_{a_0} \times \Delta_{a_1}) \cdot \Delta_{a_2} \quad (3.14)$$

$$c_4 = (2k_2k_4 - k_1k_3k_5)(\Delta_{a_0} \times \Delta_{a_1}) \cdot \Delta_{a_2} \quad (3.15)$$

ya que $c_3 = c_2 + c_4$, es suficiente considerar $c_2 = c_3 = 0$. La solución de estas ecuaciones para k_2 y k_3 en términos de k_1 , k_4 y k_5 es

$$k_2 = \frac{k_1k_5}{2k_1 - k_5}$$

$$k_3 = \frac{2k_4}{2k_1 - k_5}.$$

Con lo anterior se obtienen las siguientes expresiones para los puntos de control de $\mathbf{b}(t)$; válidas para $k_5 \neq 2k_1$.²

$$\mathbf{b}_0 = k_1\Delta_{a_0}$$

$$\mathbf{b}_1 = k_4\Delta_{a_0} + k_5\Delta_{a_1}$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{2k_4^2}{2k_1 - k_5}\Delta_{a_0} + \frac{k_1k_5}{2k_1 - k_5}\Delta_{a_1} + \frac{k_4k_5}{2k_1 - k_5}\Delta_{a_2}$$

las cuales satisfacen $c_i = 0$, con $i = 0, 1, \dots, 5$. Una vez fijado $\mathbf{b}_0 = b_0\Delta_{a_0}$ se obtienen

²Al suponer $k_1 \neq 0$, se desprende que $k_5 = 2k_1$ no hace parte de la solución, puesto que, para tener $c_2 = 0$ en (3.13), es necesario tomar $k_5 = k_1 = 0$ lo cual no es posible bajo nuestro supuesto; $k_1 \neq 0$.

\mathbf{b}_1 y \mathbf{b}_2 en términos de dos parámetros, a saber k_4 y k_5 con $k_5 \neq 2b_0$, lo cual arroja

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_0 &= b_0 \Delta_{\mathbf{a}_0} \\ \mathbf{b}_1 &= k_4 \Delta_{\mathbf{a}_0} + k_5 \Delta_{\mathbf{a}_1} \\ \mathbf{b}_2 &= \frac{2k_4^2}{2b_0 - k_5} \Delta_{\mathbf{a}_0} + \frac{b_0 k_5}{2b_0 - k_5} \Delta_{\mathbf{a}_1} + \frac{k_4 k_5}{2b_0 - k_5} \Delta_{\mathbf{a}_2}.\end{aligned}$$

Cabe notar, que con $k_5 = 0$ se da que \mathbf{b}_1 y \mathbf{b}_2 es paralelo a $\Delta_{\mathbf{a}_0}$, si además, se toma $k_4 = b_0$ ocurre que $\mathbf{b}(t) = b_0 \Delta_{\mathbf{a}_0}$ es constante, paralelo al vector tangente en $\mathbf{a}(0)$.

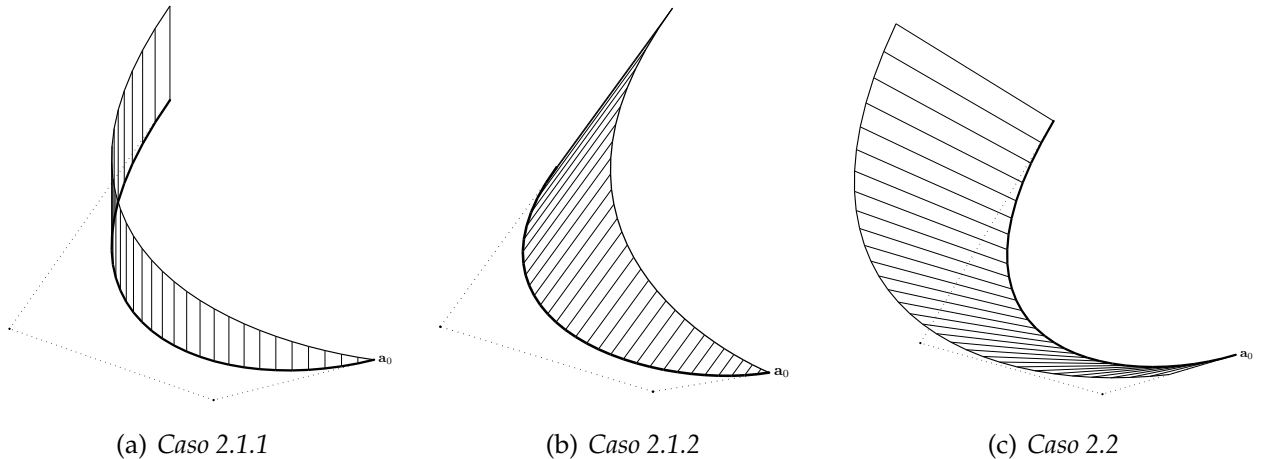


Figura 3.3: Superficies desarrollables en el caso 2.

Caso 3. Para este caso, tenemos que $\Delta_{\mathbf{a}_0}$ y \mathbf{b}_0 son linealmente independientes, luego existen números reales k_1, k_2 y k_3 tales que

$$\mathbf{b}_1 = k_1 \Delta_{\mathbf{a}_0} + k_2 \mathbf{b}_0 \quad (3.16)$$

y

$$\mathbf{b}_1 = k_3 \Delta_{\mathbf{a}_2} \quad (3.17)$$

luego $k_1 \Delta_{\mathbf{a}_0} + k_2 \mathbf{b}_0 = k_3 \Delta_{\mathbf{a}_2}$. Consideremos los casos $k_2 = 0$ y $k_2 \neq 0$.

Caso 3.1. Si $k_2 = 0$ se tiene que $k_1 \Delta_{\mathbf{a}_0} = k_3 \Delta_{\mathbf{a}_2}$, la independencia lineal de $\Delta_{\mathbf{a}_0}$ y $\Delta_{\mathbf{a}_2}$ implica que $k_1 = k_3 = 0$, luego $\mathbf{b}_1 = 0$, reemplazando esto en (3.5) y simplificando los coeficientes c_1, c_2, c_3 y c_4 se tiene que

$$\begin{aligned}c_1 &= (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_0) \cdot \Delta_{\mathbf{a}_0} \\ c_2 &= 2(\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_0) \cdot \Delta_{\mathbf{a}_1} + (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_0) \cdot \Delta_{\mathbf{a}_0} \\ c_3 &= 2(\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_0) \cdot \Delta_{\mathbf{a}_1} + (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_0) \cdot \Delta_{\mathbf{a}_2} \\ c_4 &= (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_0) \cdot \Delta_{\mathbf{a}_2}.\end{aligned}$$

Fácilmente se ve, que $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ sólo es posible cuando \mathbf{b}_2 y \mathbf{b}_0 sean paralelos, siendo esto así, existe un número real k_4 tal que $\mathbf{b}_2 = k_4\mathbf{b}_0$. Con esto quedan determinados los puntos de control $\mathbf{b}_1 = 0$, $\mathbf{b}_2 = k_4\mathbf{b}_0$ y \mathbf{b}_0 es de elección libre.

Caso 3.2. Si $k_2 \neq 0$. De (3.16) y (3.17) que se sigue que

$$\mathbf{b}_0 = -\frac{k_1}{k_2}\Delta_{a0} + \frac{k_3}{k_2}\Delta_{a2}. \quad (3.18)$$

De (3.18) y (3.17) en (3.5), haciendo $c_4 = 0$ se tiene que

$$\left(\Delta_{a2} \times \left(\frac{k_1}{k_2}\Delta_{a0} + 2k_3\Delta_{a1} \right) \right) \cdot \mathbf{b}_2 = 0.$$

Como $\{\Delta_{a0}, \Delta_{a1}, \Delta_{a2}\}$ es linealmente independiente (suponiendo que k_1 y k_3 no son cero simultáneamente)³, deben existir números reales k_4 y k_5 tales que

$$\mathbf{b}_2 = \frac{k_1k_4}{k_2}\Delta_{a0} + 2k_3k_4\Delta_{a1} + k_5\Delta_{a2}. \quad (3.19)$$

Sustituyendo (3.17), (3.18) y (3.19) en (3.5), se tienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1 &= \left(-\frac{2k_1k_3}{k_2} + \frac{2k_3^2k_4}{k_2} \right) (\Delta_{a0} \times \Delta_{a1}) \cdot \Delta_{a2} \\ c_2 &= \left(-\frac{2k_1k_3}{k_2} - \frac{2k_1k_3k_4}{k_2^2} + 2k_3^2k_4 + \frac{2k_3^2k_4}{k_2} - \frac{2k_1k_5}{k_2} \right) (\Delta_{a0} \times \Delta_{a1}) \cdot \Delta_{a2} \\ c_3 &= \left(-\frac{2k_1k_3k_4}{k_2^2} + 2k_3^2k_4 - \frac{2k_1k_5}{k_2} \right) (\Delta_{a0} \times \Delta_{a1}) \cdot \Delta_{a2}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Consideremos los siguientes subcasos para k_3 y k_1 .

Caso 3.2.1. Si $k_3 = 0$ y $k_1 \neq 0$, los coeficientes c_1 , c_2 y c_3 se reducen a

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 &= -\frac{2k_1k_5}{k_2}(\Delta_{a0} \times \Delta_{a1}) \cdot \Delta_{a2} \\ c_3 &= -\frac{2k_1k_5}{k_2}(\Delta_{a0} \times \Delta_{a1}) \cdot \Delta_{a2}. \end{aligned}$$

Para que c_2 y c_3 sean nulos se debe tomar $k_5 = 0$, así, la desarrollabilidad se da cuando

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0 &= -\frac{k_1}{k_2}\Delta_{a0} \\ \mathbf{b}_1 &= 0 \\ \mathbf{b}_2 &= \frac{k_1k_4}{k_2}\Delta_{a0}. \end{aligned}$$

³ $k_1 = k_3 = 0$ implica el caso $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_1 = 0$ y \mathbf{b}_2 de elección libre

Caso 3.2.2. Supongamos $k_3 \neq 0$ y $k_1 = 0$. En este caso, de la la única forma que se pueden anular los coeficientes en (3.20) es con $k_4 = 0$, así lo puntos de control resultan ser

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_0 &= \frac{k_3}{k_2} \Delta_{a_2} \\ \mathbf{b}_1 &= k_3 \Delta_{a_2} \\ \mathbf{b}_2 &= k_5 \Delta_{a_2}.\end{aligned}$$

Caso 3.2.3. Supongamos $k_3 \neq 0$ y $k_1 \neq 0$. Para resolver las ecuaciones $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, notamos que estos coeficientes cumplen que $c_1 + c_3 = c_2$, luego es suficiente con resolver $c_1 = c_3 = 0$; cuya su solución en términos de k_1, k_2 y k_3 viene dada por

$$\begin{aligned}k_4 &= \frac{k_1}{k_3} \\ k_5 &= -\frac{k_1 - k_2^2 k_3}{k_2}.\end{aligned}$$

Luego, con estas expresiones de k_4 y k_5 en (3.18), (3.17) y (3.19), se tiene que los puntos de control de $\mathbf{b}(t)$ vienen dados por

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_0 &= -\frac{k_1}{k_2} \Delta_{a_0} + \frac{k_3}{k_2} \Delta_{a_2} \\ \mathbf{b}_1 &= k_3 \Delta_{a_2} \\ \mathbf{b}_2 &= \frac{k_1^2}{k_2 k_3} \Delta_{a_0} + 2k_1 \Delta_{a_1} + \frac{k_2^2 k_3 - k_1}{k_2} \Delta_{a_2}.\end{aligned}\tag{3.21}$$

Si \mathbf{b}_0 está dado por $\mathbf{b}_0 = b_0 \Delta_{a_0} + b_2 \Delta_{a_2}$ donde b_0 y b_2 son números reales, al igualar esto con (3.21) se tiene que

$$\begin{aligned}k_1 &= -b_0 k_2 \\ k_3 &= b_2 k_2.\end{aligned}$$

Lo cual significa, que una vez fijado \mathbf{b}_0 , la solución en este caso depende de un parámetro, a saber $k_2 \neq 0$.

Caso 4. En este caso estamos considerando Δ_{a_0} y \mathbf{b}_0 linealmente independientes, junto con Δ_{a_2} y \mathbf{b}_1 linealmente independientes, luego se tiene que para ciertos números reales k_1, k_2, k_3 y k_4 se cumple que

$$\mathbf{b}_1 = k_1 \Delta_{a_0} + k_2 \mathbf{b}_0 \tag{3.22}$$

$$\mathbf{b}_2 = k_3 \Delta_{a_2} + k_4 \mathbf{b}_1. \tag{3.23}$$

Reemplazando (3.22) y (3.23) en c_1 se sigue que

$$c_1 = (\Delta_{a_0} \times (k_3 \Delta_{a_2} - 2k_1 \Delta_{a_1})) \cdot \mathbf{b}_0$$

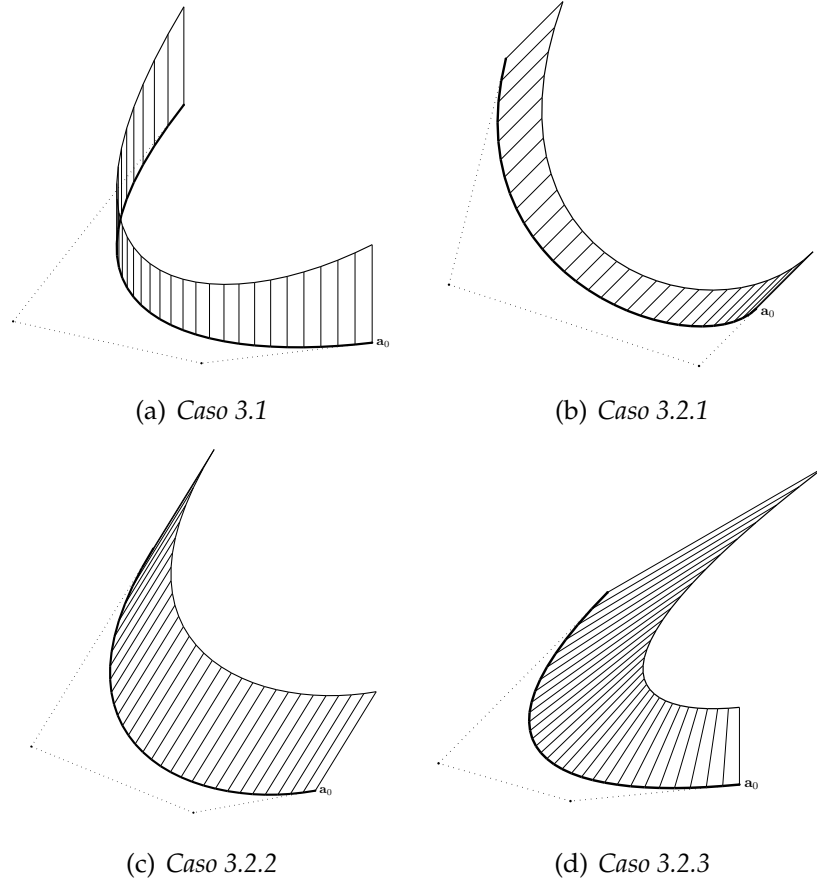


Figura 3.4: Superficies desarrollables en el caso 3.

ya que $\{\Delta_{a_0}, \Delta_{a_1}, \Delta_{a_2}\}$ es un conjunto linealmente independiente, al hacer $c_1 = 0$ (suponiendo $k_1 \neq 0$ o $k_3 \neq 0$)⁴ se da que para ciertos números reales k_5 y k_6

$$\mathbf{b}_0 = k_6 \Delta_{a_0} - 2k_1 k_5 \Delta_{a_1} + k_3 k_5 \Delta_{a_2}. \quad (3.24)$$

Con esta última expresión en (3.22) y (3.23) se obtienen también expresiones para \mathbf{b}_1 y \mathbf{b}_2 en términos de Δ_{a_0} , Δ_{a_1} y Δ_{a_2}

$$\mathbf{b}_1 = (k_1 + k_2 k_6) \Delta_{a_0} - 2k_1 k_2 k_5 \Delta_{a_1} + k_2 k_3 k_5 \Delta_{a_2} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{b}_2 = k_4 (k_1 + k_2 k_6) \Delta_{a_0} - 2k_1 k_2 k_4 k_5 \Delta_{a_1} + k_3 (1 + k_2 k_4 k_5) \Delta_{a_2}. \quad (3.26)$$

Hasta ahora, las expresiones encontradas para \mathbf{b}_0 , \mathbf{b}_1 y \mathbf{b}_2 satisfacen $c_0 = c_1 =$

⁴Cuando $k_1 = k_3 = 0$, se tiene $\mathbf{b}_1 = k_2 \mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_2 = k_2 k_4 \mathbf{b}_0$ y con \mathbf{b}_0 de libre elección se da la desarrollabilidad de $\mathbf{x}(t, v)$.

$c_5 = 0$. Reemplazando (3.24)-(3.26) en (3.5) y simplificando adecuadamente se tiene

$$\begin{aligned}
 c_2 &= 2(k_3k_6 - k_1^2k_5 - k_1k_3k_4k_5 + k_1k_2k_3k_5)(\Delta_{a_0} \times \Delta_{a_1}) \cdot \Delta_{a_2} \\
 c_3 &= 2(k_3k_6 - k_1^2k_5 - k_1k_3k_4k_5 + k_1k_2k_3k_5 \\
 &\quad + k_1k_3 + k_2k_3k_6 - k_1^2k_4k_5)(\Delta_{a_0} \times \Delta_{a_1}) \cdot \Delta_{a_2} \\
 c_4 &= 2(k_1k_3 + k_2k_3k_6 - k_1^2k_4k_5)(\Delta_{a_0} \times \Delta_{a_1}) \cdot \Delta_{a_2}.
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Consideremos los siguientes casos para k_1 y k_3 .

Caso 4.1. Si $k_1 = 0$ y $k_3 \neq 0$, los coeficientes en (3.27) se reducen a

$$\begin{aligned}
 c_2 &= 2k_3k_6(\Delta_{a_0} \times \Delta_{a_1}) \cdot \Delta_{a_2} \\
 c_3 &= 2(k_3k_6 + k_2k_3k_6)(\Delta_{a_0} \times \Delta_{a_1}) \cdot \Delta_{a_2} \\
 c_4 &= 2k_2k_3k_6(\Delta_{a_0} \times \Delta_{a_1}) \cdot \Delta_{a_2}
 \end{aligned}$$

los cuales se anulan si $k_6 = 0$, así, los puntos de control dados en (3.24), (3.25) y (3.26) se reducen a (ver figura 3.5(a))

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_0 &= k_3k_5\Delta_{a_2} \\
 \mathbf{b}_1 &= k_2k_3k_5\Delta_{a_2} \\
 \mathbf{b}_2 &= k_3(1 + k_2k_4k_5)\Delta_{a_2}.
 \end{aligned}$$

Caso 4.2. Si $k_1 \neq 0$ y $k_3 = 0$, los coeficientes en (3.27) se reducen a

$$\begin{aligned}
 c_2 &= -2k_1^2k_5(\Delta_{a_0} \times \Delta_{a_1}) \cdot \Delta_{a_2} \\
 c_3 &= -2(k_1^2k_5 + k_1^2k_4k_5)(\Delta_{a_0} \times \Delta_{a_1}) \cdot \Delta_{a_2} \\
 c_4 &= -2k_1^2k_4k_5(\Delta_{a_0} \times \Delta_{a_1}) \cdot \Delta_{a_2}
 \end{aligned}$$

los cuales sólo se anulan si $k_5 = 0$, así, se tiene que los puntos de control dados en (3.24), (3.25) y (3.26) se reducen a $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 = 0$.

Caso 4.3. Si $k_1 \neq 0$ y $k_3 \neq 0$. Notemos que $c_3 = c_2 + c_4$, para ver bajo que condiciones se anulan los coeficientes en (3.27) basta con ver cuando $c_2 = c_4 = 0$. Para esto se resuelven las ecuaciones

$$k_3k_6 - k_1^2k_5 - k_1k_3k_4k_5 + k_1k_2k_3k_5 = 0 \tag{3.28}$$

$$k_1k_3 + k_2k_3k_6 - k_1^2k_4k_5 = 0. \tag{3.29}$$

Consideremos los subcasos $k_5 = 0$ y $k_5 \neq 0$.

Caso 4.3.1 Si $k_5 = 0$, las ecuaciones (3.28) y (3.29) se reducen a $k_3k_6 = 0$ y $k_1k_3 + k_2k_3k_6 = 0$, las cuales bajo las condiciones de este subcaso ($k_1 \neq 0$ y $k_3 \neq 0$) no tienen solución.

Caso 4.3.2 Si $k_5 \neq 0$, se resuelven entonces las ecuaciones (3.28) y (3.29) para k_2 y k_3 en términos de k_1, k_3, k_5 y k_6 y se tiene

$$\begin{aligned} k_2 &= k_1 \left(\frac{1}{k_3} + \frac{k_3}{k_1^2 k_5 - k_3 k_6} \right) \\ k_4 &= \frac{k_6}{k_1 k_5} + \frac{k_1 k_3}{k_1^2 k_5 - k_3 k_6}. \end{aligned}$$

Para el caso, cuando $k_1^2 k_5 = k_3 k_6$, al reemplazar k_6 en (3.28) y (3.29), se tiene que las soluciones para k_2 y k_4 están dadas por

$$k_2 = k_4 = -\frac{k_3}{k_1(k_3 - k_5)}.$$

Como $\{\Delta_{a0}, \Delta_{a1}, \Delta_{a2}\}$ es una base para \mathbb{R}^3 , si se fija \mathbf{b}_0 se tiene entonces que para ciertos números reales b_0, b_1 y b_2

$$\mathbf{b}_0 = b_0 \Delta_{a0} + b_1 \Delta_{a1} + b_2 \Delta_{a2}$$

luego, de (3.24) se tiene que $k_6 = b_0, k_1 = -\frac{b_1}{2k_5}$ y $k_3 = \frac{b_2}{k_5}$. Se tiene entonces las siguientes expresiones en términos de b_0, b_1, b_2 y k_5 .

- $k_1 = -\frac{b_1}{2k_5}$
- $k_2 = -b_1 \left(\frac{1}{2b_2} + \frac{2b_2}{k_5(b_1^2 - 4b_0 b_2)} \right)$
- $k_3 = \frac{b_2}{k_5}$
- $k_4 = -2 \left(\frac{b_0}{b_1} + \frac{b_1 b_2}{k_5(b_1^2 - 4b_0 b_2)} \right)$
- $k_5 = k_5$
- $k_6 = b_0$.

Notemos que una vez fijados $b_0 \neq 0, b_1 \neq 0$ y b_2 con $b_1^2 - 4b_0 b_2 \neq 0$, es decir, una vez fijado \mathbf{b}_0 , se tiene que $k_5 \neq 0$ es un parámetro de la solución.

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0 &= b_0 \Delta_{a0} + b_1 \Delta_{a1} + b_2 \Delta_{a2} \\ \mathbf{b}_1 &= -\frac{b_1}{2} \left(\frac{b_0}{b_2} + \frac{b_1^2}{Dk_5} \right) \Delta_{a0} - b_1^2 \left(\frac{1}{2b_2} + \frac{2b_2}{Dk_5} \right) \Delta_{a1} - b_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{2b_2^2}{Dk_5} \right) \Delta_{a2} \\ \mathbf{b}_2 &= -2 \left(\frac{b_0}{b_1} + \frac{b_1 b_2}{k_5 D} \right) \mathbf{b}_1 + \frac{b_2}{k_5} \Delta_{a2}. \end{aligned}$$

Donde $D = b_1^2 - 4b_0 b_2$. (Ver figura 3.5(b).)

Cuando hacemos $k_5 \rightarrow \infty$, se tiene $k_1, k_3 \rightarrow 0$, $k_2 \rightarrow -b_1/2b_2$ y $k_4 \rightarrow -2b_0/b_1$, así

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_1 &\rightarrow -\frac{b_1}{2b_2}\mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_2 &\rightarrow \frac{b_0}{b_2}\mathbf{b}_0.\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_0(1-t)^2 + 2\mathbf{b}_1t(1-t) + \mathbf{b}_2t^2 &\rightarrow \mathbf{b}_0(1-t)^2 - \frac{b_1}{b_2}\mathbf{b}_0t(1-t) + \frac{b_0}{b_2}\mathbf{b}_0t^2 \\ &= \mathbf{b}_0 \left((1-t)^2 - \frac{b_1}{b_2}t(1-t) + \frac{b_0}{b_2}t^2 \right).\end{aligned}$$

Además, si tomamos $b_0 \approx b_2 \approx -\frac{1}{2}b_1$ con $b_1^2 - 4b_0b_2 \neq 0$, se tiene que $\mathbf{b}_1 \approx \mathbf{b}_2 \approx \mathbf{b}_0$ y así

$$\begin{aligned}\beta(t) &= \mathbf{b}_0(1-t)^2 + 2\mathbf{b}_1t(1-t) + \mathbf{b}_2t^2 \\ &\approx \mathbf{b}_0 \left((1-t)^2 + 2t(1-t) + t^2 \right) \\ &= \mathbf{b}_0\end{aligned}$$

teniendo entonces que

$$\mathbf{x}(t, v) \approx \mathbf{a}(t) + s\mathbf{b}_0.$$

Esto es, la superficie desarrollable obtenida se aproxima a un cilindro.

Como resumen a la solución del problema planteado en esta sección, presentamos las siguientes tablas:

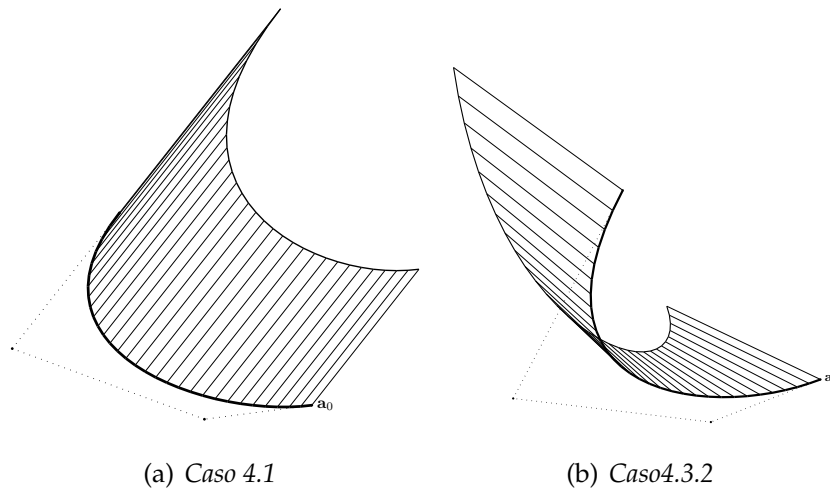
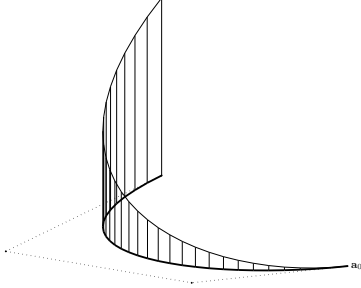
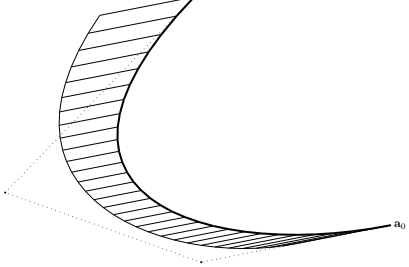
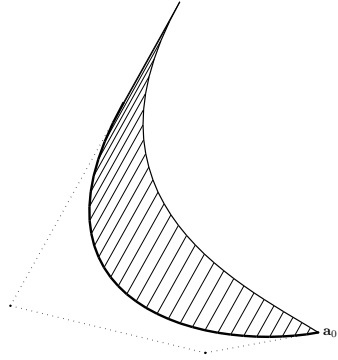
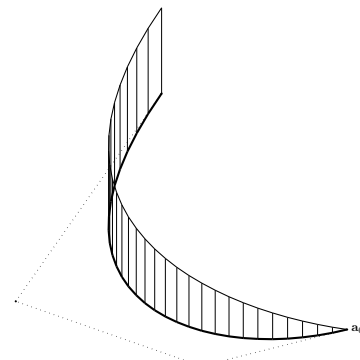
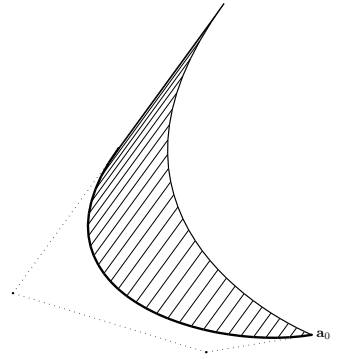
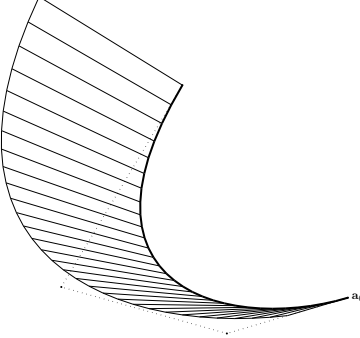
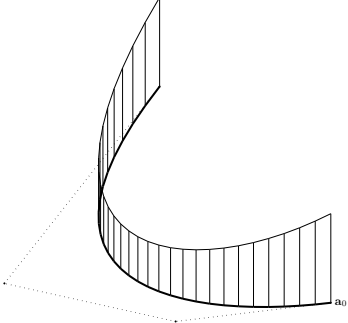
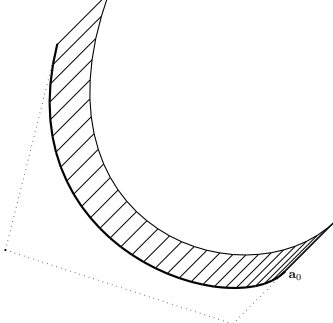
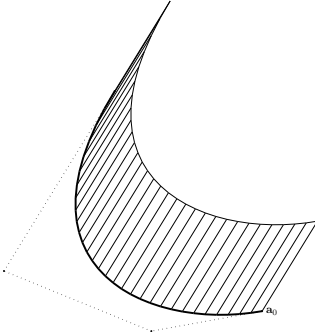
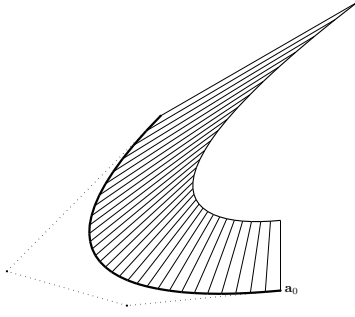
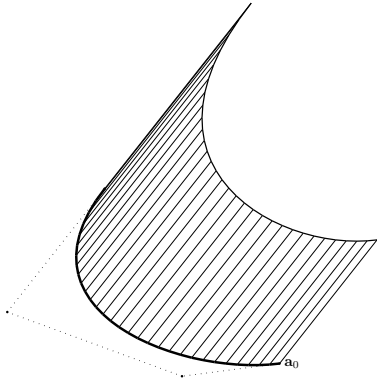
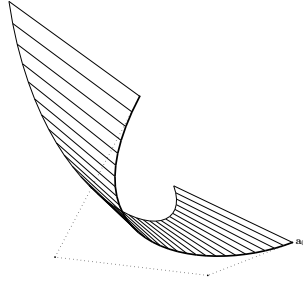
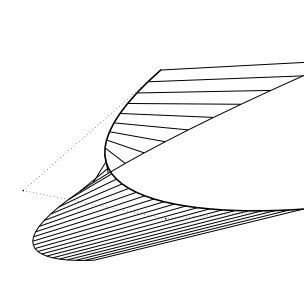
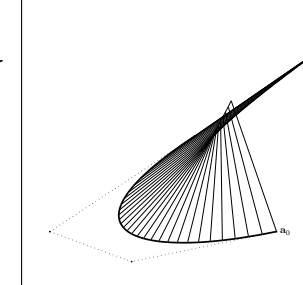


Figura 3.5: Superficies desarrollables en el caso 4.

<p>Caso 1.1.</p> <p>$\mathbf{b}_0 = 0$ $\mathbf{b}_1 = 0$ $\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_2$</p> 	<p>Caso 1.2.</p> <p>$\mathbf{b}_0 = k_1 \Delta \mathbf{a}_0$ $\mathbf{b}_1 = 0$ $\mathbf{b}_2 = k_1 k_3 \Delta \mathbf{a}_0$</p> 
<p>Caso 1.3.</p> <p>$\mathbf{b}_0 = 0$ $\mathbf{b}_1 = k_2 \Delta \mathbf{a}_2$ $\mathbf{b}_2 = k_4 \Delta \mathbf{a}_2$</p> 	<p>Caso 2.1.1.</p> <p>$\mathbf{b}_0 = 0$ $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1$ $\mathbf{b}_2 = k_3 \mathbf{b}_1$</p> 
<p>Caso 2.1.2.</p> <p>$\mathbf{b}_0 = 0$ $\mathbf{b}_1 = k_5 \Delta \mathbf{a}_2$ $\mathbf{b}_2 = (k_2 + k_5) \Delta \mathbf{a}_2$</p> 	<p>Caso 2.2. Con $k_5 \neq 2k_1$</p> <p>$\mathbf{b}_0 = k_1 \Delta \mathbf{a}_0$ $\mathbf{b}_1 = k_4 \Delta \mathbf{a}_0 + k_5 \Delta \mathbf{a}_1$ $\mathbf{b}_2 = \frac{2k_4^2}{2k_1 - k_5} \Delta \mathbf{a}_0 + \frac{k_1 k_5}{2k_1 - k_5} \Delta \mathbf{a}_1 + \frac{k_4 k_5}{2k_1 - k_5} \Delta \mathbf{a}_2$</p> 

<p>Caso 3.1.</p> $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_0$ $\mathbf{b}_1 = 0$ $\mathbf{b}_2 = k_4 \mathbf{b}_0$ 	<p>Caso 3.2.1. Con $k_2 \neq 0$</p> $\mathbf{b}_0 = -\frac{k_1}{k_2} \Delta \mathbf{a}_0$ $\mathbf{b}_1 = 0$ $\mathbf{b}_2 = \frac{k_1 k_4}{k_2} \Delta \mathbf{a}_0$ 
<p>Caso 3.2.2.</p> $\mathbf{b}_0 = \frac{k_3}{k_2} \Delta \mathbf{a}_2$ $\mathbf{b}_1 = k_3 \Delta \mathbf{a}_2$ $\mathbf{b}_2 = k_5 \Delta \mathbf{a}_2$ 	<p>Caso 3.2.3. Con $k_2 \neq 0$ y $k_3 \neq 0$</p> $\mathbf{b}_0 = -\frac{k_1}{k_2} \Delta \mathbf{a}_0 + \frac{k_3}{k_2} \Delta \mathbf{a}_2$ $\mathbf{b}_1 = k_3 \Delta \mathbf{a}_2$ $\mathbf{b}_2 = \frac{k_1^2}{k_2 k_3} \Delta \mathbf{a}_0 + 2k_1 \Delta \mathbf{a}_1 + \frac{k_2^2 k_3 - k_1}{k_2} \Delta \mathbf{a}_2$ 
<p>Caso 4.1.</p> <hr/> $\mathbf{b}_0 = k_3 k_5 \Delta \mathbf{a}_2$ $\mathbf{b}_1 = k_2 k_3 k_5 \Delta \mathbf{a}_2$ $\mathbf{b}_2 = k_3 (1 + k_2 k_4 k_5) \Delta \mathbf{a}_2$ 	

Caso 4.3.2. Con $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$ y $D = b_1^2 - 4b_0b_2 \neq 0$		
$\mathbf{b}_0 = b_0\Delta_{a_0} + b_1\Delta_{a_1} + b_2\Delta_{a_2}$ $\mathbf{b}_1 = -\frac{b_1}{2} \left(\frac{b_0}{b_2} + \frac{b_1^2}{Dk_5} \right) \Delta_{a_0} - b_1^2 \left(\frac{1}{2b_2} + \frac{2b_2}{Dk_5} \right) \Delta_{a_1} - b_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{2b_2}{Dk_5} \right) \Delta_{a_2}$ $\mathbf{b}_2 = -2 \left(\frac{b_0}{b_1} + \frac{b_1b_2}{k_5D} \right) \mathbf{b}_1 + \frac{b_2}{k_5} \Delta_{a_2}$		
En las tres superficies se tiene un vector \mathbf{b}_0 distinto.		
		

3.2.1. Diseño de superficies desarrollables sobre curvas B-spline cúbicas

Consideremos un B-spline cúbico $\mathbb{p}(u)$ con puntos de de Boor $\mathbb{p}_0, \mathbb{p}_1, \dots, \mathbb{p}_{k+2}$ en \mathbb{A}^3 y con nodos $x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}$. En la sección 1.3.2, se obtuvo fórmulas para obtener los puntos de control de las k curvas de Bézier que conforman el B-spline $\mathbb{p}(u)$. Si $\mathbb{p}(u) = a_i(u)$ cuando $u \in [x_{i-1}, x_i]$ donde $u(t) = (1-t)x_{i-1} + tx_i$, entonces para $t \in [0, 1]$

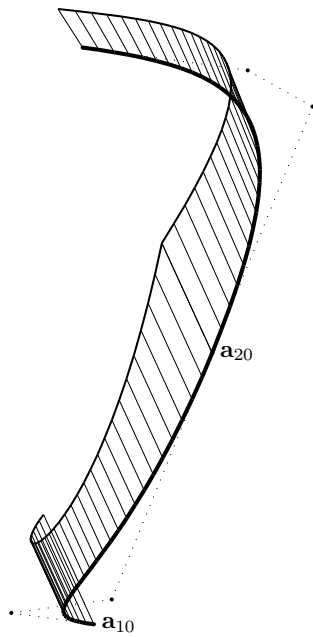
$$a_i(u(t)) = (1-t)^3 a_{i0} + 3t(1-t)^2 a_{i1} + 3t^2(1-t) a_{i2} + t^3 a_{i3}.$$

Si usamos el algoritmo de Aumann para obtener

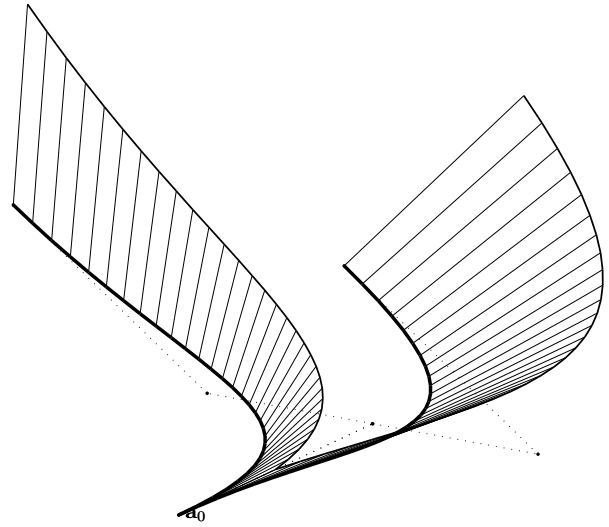
$$c_i(u(t)) = (1-t)^3 c_{i0} + 3t(1-t)^2 c_{i1} + 3t^2(1-t) c_{i2} + t^3 c_{i3}$$

de tal forma que $\mathbb{x}_i(u, v) = a_i(u) + v(c_i(u) - a_i(u))$ sea una superficie desarrollable se puede definir una superficie desarrollable por trozos $x(u, v) = x_i(u, v)$ para $u \in [x_{i-1}, x_i]$. Bajo la condición $c_{i3} - a_{i3} = c_{i+1,0} - a_{i+1,0}$ para $i = 1, 2, \dots, k-1$ se obtiene una superficie desarrollable en la cual los planos tangentes sobre los generadores $\mathbb{x}_i(x_i, v)$ y $\mathbb{x}_{i+1}(x_i, v)$ coinciden.

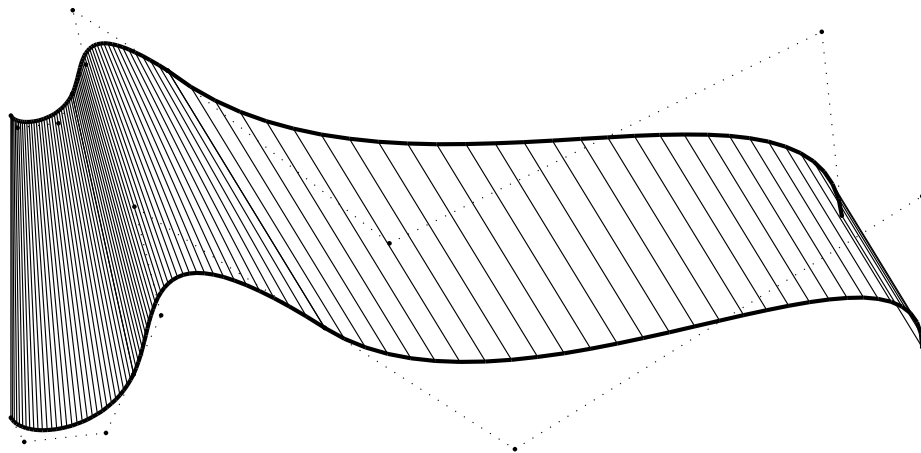
Por otro lado, si se requiere que la generatriz $\mathbf{b}_i(u(t)) = c_i(u(t)) - a_i(u(t))$ sea cuadrática, éstas se seleccionan de las generatrices dadas en la sección 3.2. Ver figura 3.6



(a) Superficie desarrollable con generatriz cuadrática sobre un B-spline de dos pedazos.



(b) Pegado no suave de curvas base.



(c) Superficie desarrollable sobre un B-spline de tres pedazos usando el algoritmo de Aumann.

Figura 3.6: Pegado de superficies desarrollables.

3.3. Superficies desarrollables vía dualidad con curvas en $(\mathbb{P}^3)^*$

En esta sección mostraremos una manera de ver a las superficies desarrollables como conjuntos de puntos en un espacio proyectivo.

3.3.1. Curvas de Bézier en espacios proyectivos

Nuestro objetivo ahora es considerar curvas de Bézier, cuyos puntos de control están en el espacio proyectivo, para esto sean $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m$ puntos en \mathbb{P}^3 , tomando para cada \mathbf{B}_i coordenadas homogéneas $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^4$ y los polinomios de Bernstein $B_i^m(t) = \binom{m}{i}(1-t)^{m-i}t^i$, esto para $i = 0, 1, \dots, m$. Consideramos la curva de Bézier en \mathbb{R}^4

$$\mathbf{c}(t) = \sum_{i=0}^m B_i^m(t) \mathbf{b}_i.$$

En principio no se puede considerar $\mathbf{C}(t) = [\mathbf{c}(t)]$ como una curva de Bézier en \mathbb{P}^3 ,⁵ ya que los puntos de control de la curva dependen de las coordenadas homogéneas escogidas, puesto que cada múltiplo escalar $\lambda \mathbf{b}_i$ de \mathbf{b}_i con $\lambda \neq 0$ representan el mismo punto \mathbf{B}_i . Así, para lograr que una curva $\bar{\mathbf{c}}(t) = \sum_{i=0}^m B_i^m(t) \bar{\mathbf{b}}_i$, obtenida con coordenadas homogéneas $\bar{\mathbf{b}}_i$ de \mathbf{B}_i cumpla que $\bar{\mathbf{c}}(t) = \lambda \mathbf{c}(t)$ para algún $\lambda \neq 0$, se debe dar que $\bar{\mathbf{b}}_i = \lambda \mathbf{b}_i$ para $i = 0, 1, \dots, k$.

Para poder definir una curva de Bézier en \mathbb{P}^3 de grado m es necesario, además de sus puntos de control $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m$, introducir puntos auxiliares, $\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_{m-1}$ llamados *puntos marco (frame points)*, los cuales deben cumplir que cada terna de puntos $\mathbf{B}_i, \mathbf{F}_i, \mathbf{B}_{i+1}$ para $i = 0, 1, \dots, m-1$ sea colineal, dichas ternas reciben el nombre de *marco proyectivo de referencia*. Lo que hacen los marcos proyectivos es indicar como se deben tomar las coordenadas homogéneas $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ de los puntos $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m$, estas se toman por medio de la condición

$$[\mathbf{b}_i + \mathbf{b}_{i+1}] = \mathbf{F}_i.$$

Así, dados los puntos de control $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m$ y los puntos marco $\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_{m-1}$, se define la curva de Bézier \mathbf{C} en \mathbb{P}^3 , para la cual, el punto $\mathbf{C}(t)$ tiene coordenadas homogéneas $\mathbf{c}(t) = \sum_{i=0}^m B_i^m(t) \mathbf{b}_i$ donde las coordenadas homogéneas \mathbf{b}_i de \mathbf{B}_i obedecen la condición $[\mathbf{b}_i + \mathbf{b}_{i+1}] = \mathbf{F}_i$.

⁵Es decir, una curva cuya estructura de control sea exclusivamente proyectiva.

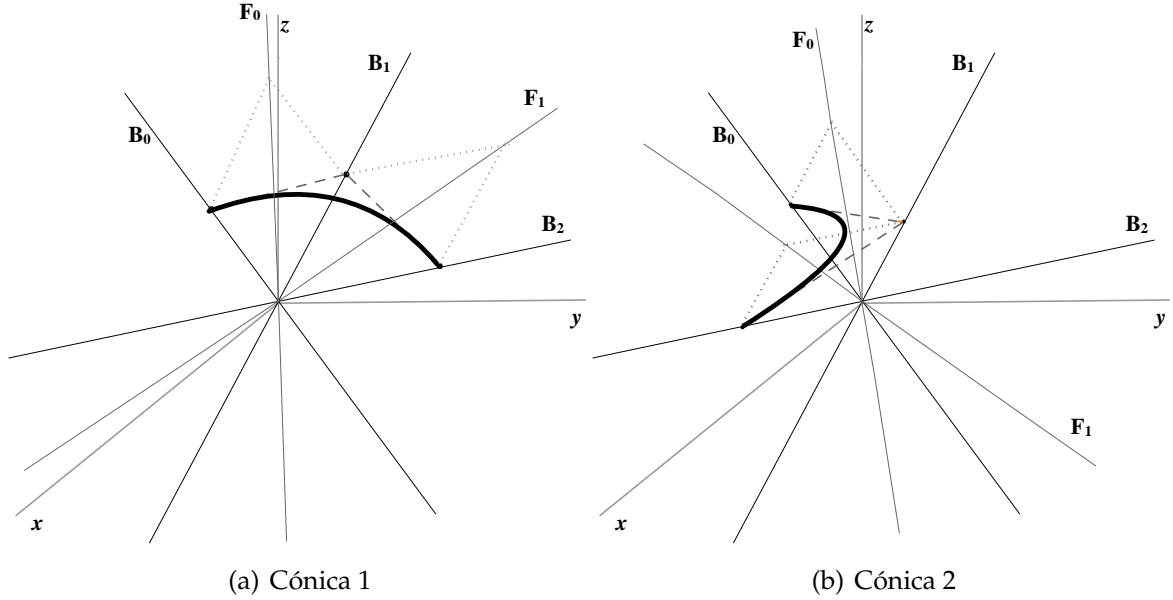


Figura 3.7: Cónicas de Bézier en \mathbb{P}^2 a partir de puntos de control proyectivos iguales y puntos marco distintos.

3.3.2. Algoritmo proyectivo

Consideremos los puntos de control $\mathbf{B}_0^*, \mathbf{B}_1^*, \dots, \mathbf{B}_m^*$ y puntos marco $\mathbf{F}_0^*, \mathbf{F}_1^*, \dots, \mathbf{F}_{m-1}^*$ en $(\mathbb{P}^3)^*$, los cuales se toman respectivamente como planos de control y planos marco en \mathbb{P}^3 . Estos planos dados definen una superficie de Bézier racional desarrollable interpretada como su conjunto de planos tangentes, la cual puede ser expresada como una curva de Bézier $\mathbf{U}(t)$ en $(\mathbb{P}^3)^*$ con puntos de control $\mathbf{B}_0^*, \mathbf{B}_1^*, \dots, \mathbf{B}_m^*$ y puntos marco $\mathbf{F}_0^*, \mathbf{F}_1^*, \dots, \mathbf{F}_{m-1}^*$; las coordenadas homogéneas para $\mathbf{U}(t)$ pueden ser dadas por

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=0}^m B_i^m(t) \mathbf{b}_i$$

donde los vectores de coordenadas homogéneas \mathbf{b}_i (en \mathbb{R}^4) de \mathbf{B}_i^* obedecen la condición $[\mathbf{b}_i + \mathbf{b}_{i+1}]^* = \mathbf{F}_i^*$. La estructura de control de la superficie desarrollable $\mathbf{U}(t)$ se representa en la siguiente figura. La intersección entre los dos primeros planos de control da el primer generador de la superficie y la intersección de los dos últimos da el último generador de la superficie.

El algoritmo se basa en la siguiente propiedad de intersección: *La intersección plana $\mathbf{C}(t)$ de una superficie de Bézier desarrollable $\mathbf{U}(t)$ es una curva de Bézier. Las rectas de control y las rectas marco de la representación dual de $\mathbf{C}(t)$ son intersecciones planas de los correspondientes planos de control y planos marco en la estructura de control dual de $\mathbf{U}(t)$.*

Para el diseño de parches de Bézier racionales desarrollables a partir de la curva

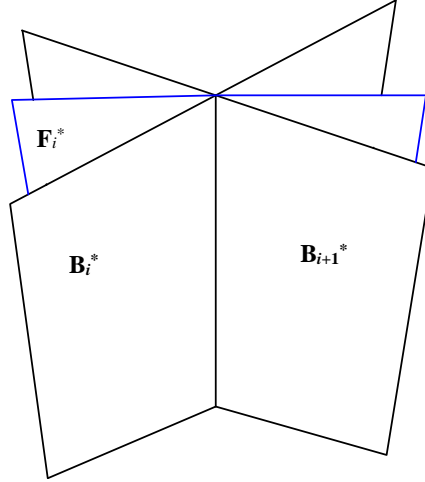


Figura 3.8: Marco proyectivo de planos de control.

$\mathbf{U}(t)$, se toman las intersecciones planas de la estructura de control (dual) con dos planos α y β (escogidos según convenga). Para esto, es conveniente tomar sistemas de coordenadas proyectivas para los planos α y β , esto se hace con el fin de que las rectas proyectivas de intersección

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_i^\alpha &= \mathbf{B}_i^* \cap \alpha \\ \mathbf{F}_i^\alpha &= \mathbf{F}_i^* \cap \alpha\end{aligned}$$

se puedan representar con vectores de coordenadas homogéneas $\mathbf{b}_i^\alpha, \mathbf{f}_i^\alpha \in \mathbb{R}^3$, cumpliéndose que $\mathbf{F}_i^\alpha = [\mathbf{b}_i^\alpha + \mathbf{b}_{i+1}^\alpha]$.

La curva de intersección $\mathbf{U}^\alpha(t) = \mathbf{U}(t) \cap \alpha$ tiene coordenadas homogéneas (en \mathbb{R}^3) respecto al sistema de coordenadas tomado en α

$$\mathbf{u}^\alpha(t) = \sum_{i=0}^m B_i^m(t) \mathbf{b}_i^\alpha. \quad (3.30)$$

La curva \mathbf{U}^α es dual a una familia de rectas proyectivas que tienen como estructura de control a las rectas \mathbf{B}_i^α y \mathbf{F}_i^α . Ahora, para encontrar las coordenadas homogéneas de un punto sobre la curva \mathbf{C}^α determinada por la familia paramétrica de rectas $\mathbf{U}^\alpha(t)$, miramos en el algoritmo de de Casteljaú implementado en (3.30) las coordenadas obtenidas en el penúltimo paso, es decir

$$\mathbf{b}_0^{m-1} = \sum_{i=0}^{m-1} B_i^m(t) \mathbf{b}_i^\alpha$$

y

$$\mathbf{b}_1^{m-1} = \sum_{j=0}^{m-1} B_j^m(t) \mathbf{b}_{j+1}^\alpha.$$

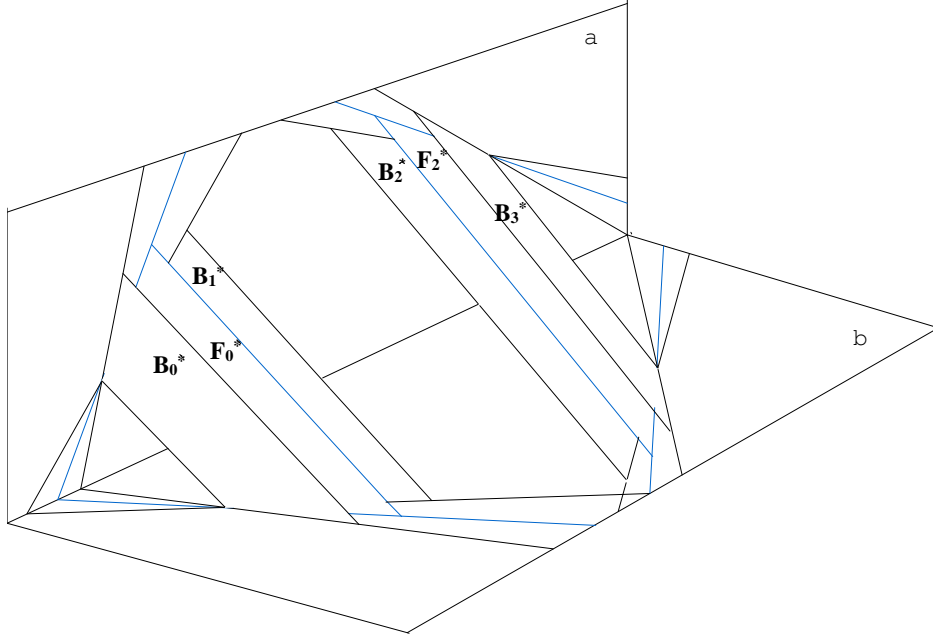


Figura 3.9: Intersección de una estructura de control con planos α^* y β^* .

De acuerdo con el principio de dualidad, la recta en $(\mathbb{P}^2)^*$ que determinan los puntos $[\mathbf{b}_0^{m-1}]$ y $[\mathbf{b}_1^{m-1}]$ es dual al punto $\mathbf{C}^\alpha(t)$ en el cual se intersecan las dos rectas $[\mathbf{b}_0^{m-1}]$ y $[\mathbf{b}_1^{m-1}]$ en \mathbb{P}^2 , así las coordenadas homogéneas $\mathbf{c}^\alpha(t)$ del punto $\mathbf{C}^\alpha(t)$ está dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^\alpha(t) &= \mathbf{b}_0^{m-1} \times \mathbf{b}_1^{m-1} \\ &= \sum_{k=0}^{2m-2} B_i^{2m-2}(t) \mathbf{b}_{k,0} \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{b}_{k,0} = \frac{1}{\binom{2m-2}{k}} \sum_{i+j=k} \binom{m-1}{i} \binom{m-1}{j} \mathbf{b}_i^\alpha \times \mathbf{b}_{j+1}^\alpha. \quad (3.31)$$

Así, se tiene una curva de Bézier $\mathbf{c}^\alpha(t)$ de grado $2m - 2$ (con posible elevación de grado). Similarmente se construye otra curva $\mathbf{c}^\beta(t)$ sobre el plano β , la cual también es de grado $2m - 2$ y tiene puntos de control $\mathbf{b}_{k,1}$ con $k = 0, 1, \dots, 2m - 2$, calculados con su fórmula análoga a (3.31). Ya con esto se tiene un parche de Bézier racional desarrollable de grado $2m - 1$, parametrizado por

$$\begin{aligned} S(t, u) &= (1 - u) \mathbf{c}^\alpha(t) + u \mathbf{c}^\beta(t) \\ &= (1 - u) \sum_{k=0}^{2m-2} B_i^{2m-2}(t) \mathbf{b}_{k,0} + u \sum_{k=0}^{2m-2} B_i^{2m-2}(t) \mathbf{b}_{k,1}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.3.1. Consideremos para este ejemplo, los planos de control \mathbb{P}^3

$$\mathbf{B}_0^* = \{[(w, x, y, z)]/w - y = 0\}$$

$$\mathbf{B}_1^* = \{[(w, x, y, z)]/2w - x - z = 0\}$$

$$\mathbf{B}_2^* = \{[(w, x, y, z)]/4w - y = 0\}$$

y los planos marco en \mathbb{P}^3

$$\mathbf{F}_0^* = \{[(w, x, y, z)]/w - x + y - z = 0\}$$

$$\mathbf{F}_1^* = \{[(w, x, y, z)]/2w + x - y + z = 0\}.$$

Tomemos para los planos proporcionados, las siguientes coordenadas homogéneas

$$\mathbf{b}_0 = (-1, 0, 1, 0)$$

$$\mathbf{b}_1 = (2, -1, 0, -1)$$

$$\mathbf{b}_2 = (-4, 0, 1, 0)$$

$$\mathbf{f}_0 = (1, -1, 1, -1)$$

$$\mathbf{f}_1 = (-2, -1, 1, -1).$$

Con esto, se tiene una cónica $\mathbf{U}(t)$ en $(\mathbb{P}^3)^*$, la cual tiene coordenadas homogéneas

$$\mathbf{u}(t) = (1 - t)^2 \mathbf{b}_0 + 2t(1 - t) \mathbf{b}_1 + t^2 \mathbf{b}_2.$$

Dual a $\mathbf{U}(t)$ en \mathbb{P}^3 , se tiene una superficie desarrollable S interpretada como su conjunto de planos tangentes. Ahora, vamos encontrar los puntos de Bézier del parche desarrollable determinado por \mathbf{U} y los planos

$$\alpha^* = \{[(w, x, y, z)]/x = 0\}$$

$$\beta^* = \{[(w, x, y, z)]/w - x = 0\}.$$

Empezamos tomando las rectas de intersección en el plano α^*

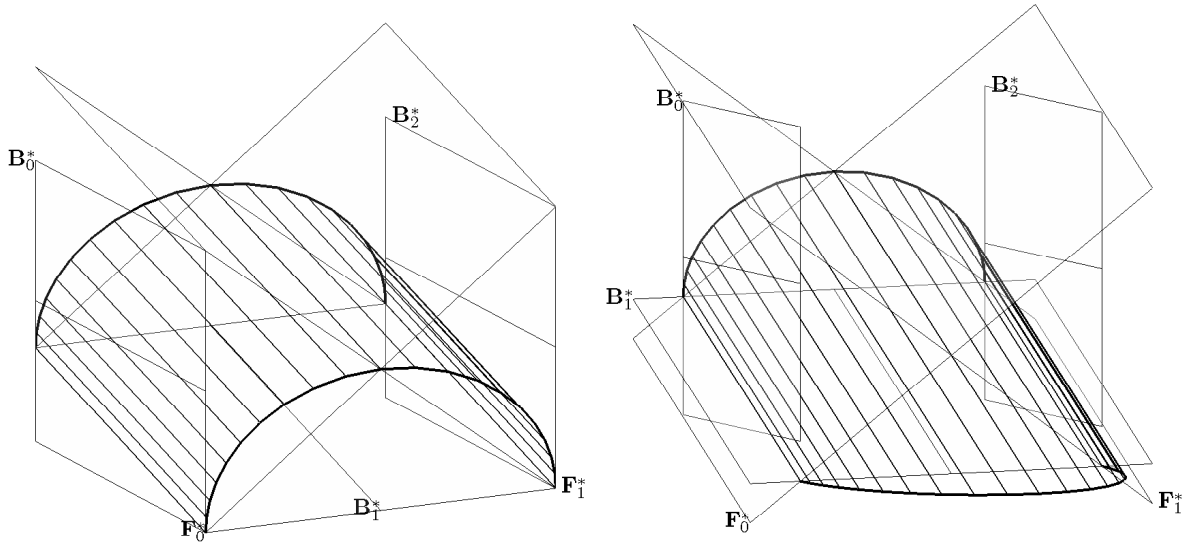
$$\mathbf{B}_0^\alpha = \{[(w, 0, y, z)]/w - y = 0\}$$

$$\mathbf{B}_1^\alpha = \{[(w, 0, y, z)]/2w - z = 0\}$$

$$\mathbf{B}_2^\alpha = \{[(w, 0, y, z)]/4w - y = 0\}$$

$$\mathbf{F}_0^\alpha = \{[(w, 0, y, z)]/w + y - z = 0\}$$

$$\mathbf{F}_1^\alpha = \{[(w, 0, y, z)]/2w - y + z = 0\}.$$



(a) Parche de Bézier obtenido a partir de α^* y β^* (b) Parche de Bézier obtenido a partir de α^* y γ^*

Figura 3.10: Parches desarrollables.

Estas rectas proyectivas en \mathbb{P}^3 pueden ser representadas por los vectores de coordenadas homogéneas en \mathbb{R}^3 ,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0^\alpha &= (-1, 1, 0) \\ \mathbf{b}_1^\alpha &= (2, 0, -1) \\ \mathbf{b}_2^\alpha &= (-4, 1, 0) \\ \mathbf{f}_0^\alpha &= (1, 1, -1) \\ \mathbf{f}_1^\alpha &= (-2, 1, -1). \end{aligned}$$

Ahora, los puntos de la curva $\mathbf{C}^\alpha(t)$ determinada por las rectas de intersección tienen coordenadas homogéneas en \mathbb{R}^3 dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^\alpha(t) &= \mathbf{b}_0^1 \times \mathbf{b}_1^1 \\ &= ((1-t)\mathbf{b}_0^\alpha + t\mathbf{b}_1^\alpha) \times ((1-t)\mathbf{b}_1^\alpha + t\mathbf{b}_2^\alpha) \\ &= (1-t)^2 \mathbf{b}_0^\alpha \times \mathbf{b}_1^\alpha + 2t(1-t) \left(\frac{1}{2} \mathbf{b}_0^\alpha \times \mathbf{b}_2^\alpha \right) + t^2 \mathbf{b}_1^\alpha \times \mathbf{b}_2^\alpha \\ &= (1-t)^2(-1, -1, -2) + 2t(1-t)(0, 0, -3/2) + t^2(-1, -4, -2) \end{aligned}$$

y coordenadas homogéneas en \mathbb{R}^4 dadas por

$$\mathbf{c}^\alpha(t) = (1-t)^2(-1, 0, -1, -2) + 2t(1-t)(0, 0, 0, -3/2) + t^2(-1, 0, -4, -2).$$

Vemos que $\mathbf{c}^\alpha(t)$ es una curva polinomial en \mathbb{R}^4 que corresponde a la curva racional

(plana) de \mathbb{R}^3

$$\mathbf{a}(t) = \frac{(1-t)^2(0, 1, 2) + 2t(1-t)(0, 0, 3/2) + t^2(0, 4, 2)}{(1-t)^2 + t^2}.$$

Haciendo este mismo proceso ya con las intersecciones sobre el plano β^* , obtenemos la curva racional en \mathbb{R}^3

$$\mathbf{b}(t) = \frac{(1-t)^2(1, 1, 1) + 2t(1-t)(0, 0, 3/2) + t^2(1, 4, 1)}{(1-t)^2 + t^2}.$$

Así, se obtiene el parche de Bézier racional desarrollable.

$$S(t, u) = (1-u)\mathbf{a}(t) + u\mathbf{b}(t).$$

En la figura 3.10(a) se muestra el parche obtenido con los planos α^* y β^* , el parche (b) es obtenido a partir de la mismos planos marco y de control, pero intersectando la figura de control con α^* y el plano $\gamma^* = \{[(w, x, y, z)]/z = 0\}$.

Bibliografía

- [1] AUMANN, Günter. *A Simple Algorithm for Designing Developable Bézier Surfaces*. En: Computer Aided Geometric Design 20, 601-619. 2002.
- [2] BIRCHFIELD, Stan. *An Introduction to Projective Geometry*. Tomado de: <http://vision.stanford.edu/birch/projective/projective.pdf>
- [3] DO CARMO, Manfredo P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. New Jersey: Prentice-Hall, 1976. 503p.
- [4] FARIN, Gerald. *Curves and Surfaces for CAGD*. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers. Fifth edition, 2002. 499p.
- [5] GOMES, Jonas, DARSA, Lucia, COSTA, Bruno y VELHO, Luiz. *Warping and Morphing of Graphical Objects*. San Francisco: Morgan Kaufmann. 1999. 490p.
- [6] KREYSZIG, Erwin. *Differential Geometry*. Dover Publications, 1991. 366p.
- [7] PALUSZNY, Marco, PRAUTZSCH, Hartmut y BOEHM, Wolfgang. *Métodos de Bézier y B-Splines*. Universitätsverlag Karlsruhe, 2005. 303p.
- [8] POTTMANN, Helmut y FARIN, Gerald. *Developable Rational Bézier and B-spline Surfaces*. En: Computer Aided Geometric Design 12, 513-531. 1995.