

**Fase:** Con la fase portadora se mide la diferencia en tiempo entre la fase de la señal que genera el satélite al momento de la transmisión y la fase de la señal que genera el receptor al momento de la recepción. Para relacionar la fase con la distancia se debe incluir un número entero de longitudes de onda conocido como ambigüedad de la fase que se debe calcular.

Las expresiones generales para el pseudorango y la fase serían:

$$P_i = \rho + c \cdot (dT - dt) + \delta\rho_i^{ion} + \delta\rho^{trop} + b_i^{P,r} + b_i^{P,s} + m_i^P + \varepsilon \quad (3.1)$$

y

$$\Phi_i = \lambda_i \cdot \phi_i = \rho + c \cdot (dT - dt) - \delta\rho_i^{ion} + \lambda_i N_i + \delta\rho^{trop} + b_i^{\Phi,r} + b_i^{\Phi,s} + m_i^\Phi + \varepsilon \quad (3.2)$$

Donde  $i$  corresponde a las frecuencias L1 y L2,  $P$  la medida de pseudorango,  $\Phi$  la fase de arrastre,  $\rho$  la distancia geométrica entre satélite y receptor,  $c$  la velocidad de la luz en el vacío,  $dT$  y  $dt$  variaciones en los relojes de receptor y satélite respectivamente,  $\delta\rho^{ion}$  el error ionosférico,  $\delta\rho^{trop}$  el error troposférico,  $N$  la ambigüedad,  $\lambda$  la longitud de onda,  $b^r$  el error del receptor,  $b^s$  el error del satélite,  $m$  las multi-trayectorias de la señal y  $\varepsilon$  el ruido.

### 3.4. El Tiempo

Existen tres grupos muy importantes para el tiempo en Geodesia Satelital.

El tiempo que depende de la orientación de la Tierra con respecto al espacio inercial es requerido para observaciones basadas en la Tierra con un sistema de referencia ubicado en el espacio. Esta escala de tiempo está conectada con la rotación diaria de la Tierra y es llamado *Tiempo Sideral* o *Tiempo Universal* (UT).

Para la descripción del movimiento de los satélites es necesario una medida uniforme de tiempo. Esta escala de tiempo puede ser obtenida del movimiento orbital de los cuerpos celestes alrededor del Sol. Esta es llamada *Tiempo de Efemérides*.

Para medidas precisas en tiempos de propagación de las señales, se requiere una escala de tiempo uniforme y fácilmente accesible con alta resolución. Esta escala es conocida como *Tiempo Atómico*.

El instante de ocurrencia de un fenómeno o una observación puede ser descrito con una lectura en una escala de tiempo, esto nos da un registro del evento. En astronomía este evento es llamado *época* de la observación.

En Geodesia Satelital es necesario tener una información precisa de tiempo y frecuencia del reloj. Para cualquier reloj, la frecuencia de oscilación no es estrictamente constante. Los relojes de los satélites no están exentos a esta variación, así que debemos incluir una variación sobre el tiempo del vehículo satelital  $t_{sv}$ .

$$t = t_{sv} - \Delta t_{sv} \quad (3.3)$$

Donde esta variación la podemos escribir como:

$$\Delta t_{sv} = a_0 + a_1(t - toc) + a_2(t - toc)^2 \quad (3.4)$$

Con  $a_0$  el bias del oscilador,  $a_1$  el arrastre en la frecuencia con respecto al tiempo,  $a_2$  la rata de cambio del arrastre de la frecuencia y  $toc$  es el tiempo de referencia para  $a_0$ ,  $a_1$  y  $a_2$  [33].

El tiempo GPS se encuentra generalizado por semanas, variando desde 0 s al principio de la semana hasta 604800 s al final. El tiempo  $t_k$  transcurrido desde la época de referencia  $toe$  es:

$$t_k = t - toe \quad (3.5)$$

### 3.5. Archivos Rinex

Cada fabricante de receptores GPS tiene su propio formato binario de datos. En consecuencia, la variedad de archivos es grande. Para solucionar este problema, se tuvo que definir un formato único para el tratamiento de datos GPS. La primer propuesta para el archivo RINEX (Receiver Independent Exchange Format) fue desarrollado por el Instituto Astronómico de la Universidad de Berna para el fácil intercambio de datos GPS. Este formato fue presentado por Gurtner et al. (1989) en el 5° simposio Geodésico Internacional de Posicionamiento por Satélites en Las Cruces (Nuevo Mexico). En el mismo año, se recomendó por la Asociación Internacional de Geodesia (IAG) como formato estándar de intercambio de archivos GPS.

Los archivos RINEX definen tres observables: Tiempo, Rango y Fase. El formato básico RINEX consiste en cuatro tipos de archivos ASCII [14]:

1. *Archivo de Observación*
2. *Archivo de Navegación*

### 3. Archivo de datos Meteorológicos

### 4. Archivo de Navegación del sistema GLONASS

Cada uno de los archivos está compuesto por una cabecera y un segmento de datos. Para este trabajo se usarán los archivos de Observación y los archivos de Navegación, así que se profundizará en ellos.

En la figura 3.4 se puede apreciar la cabecera y la sección de datos del archivo de Observación. La cabecera contiene información acerca de: el programa en el cual fue compilado, la posición de la antena, el intervalo de observación, el tipo de observables, los tiempos de observación, y el número de observaciones por satélite.

```

      2
L2R2      Observation Data
bogo/      Leica Inc.      Mon 31 Aug 2009
RINEX VERSION / TYPE
PGM / RUN BY / DATE
MARKER NAME
OBSERVER / AGENCY
REC # / TYPE / VERS
ANT # / TYPE
APPROX POSITION XYZ
ANTENNA: DELTA H/E/N
WAVELENGTH FACT L1/2
# / TYPES OF OBSERV
INTERVAL
TIME OF FIRST OBS
TIME OF LAST OBS
# OF SATELLITES
PRN / # OF OBS
PRN / # OF OBS
END OF HEADER

1744257.4248 -6116115.3577 512481.9504
0.0000 0.0000 0.0000
1 1
4 L1 C1 L2 P2
10
2007 3 14 23 59 0.000000
2007 3 15 23 58 50.000000
30
1 2127 2127 2122 2122
2 3147 3147 3146 3146
.
.
.
30 3419 3419 3417 3417
31 3165 3165 3163 3163
.
.
.
07 3 14 23 59 0.000000 0 10 5 7 12 14 18 21 22 24 30 31
116817708.11308 22229666.966 91026767.17808 22229659.677
124434962.95707 23679184.651 96962296.52207 23679182.807
121895954.38408 23196023.983 94983837.92208 23196016.081
123369252.20307 23476379.668 96131872.77307 23476371.735
110063659.53709 20944415.612 85763864.62209 20944406.692
112398761.50708 21388776.392 87583414.41508 21388768.738
114391727.09609 21768014.715 89136381.62908 21768004.754
127163892.11306 24198494.627 99088714.35706 24198493.695
111862090.38009 21286642.269 87165253.67509 21286634.992
113415791.04908 21582288.308 88375963.85809 21582281.233
.
.
.
07 3 15 23 58 50.000000 0 9 5 7 12 14 18 21 22 30 31
117090670.21608 22281596.226 91239487.01708 22281588.528
124465787.30307 23685052.838 96986331.35707 23685049.001
122261192.41708 23265514.612 95268506.03408 23265506.292
123369805.11307 23476467.257 96132359.23707 23476458.772
109856379.83309 20904953.875 85602389.65709 20904944.818
113055732.72108 21513779.062 88095364.65908 21513770.390
113839691.41709 21662965.545 88706226.48208 21662955.252
111788301.74109 21272591.671 87107781.80808 21272583.993
113159416.44308 21533499.927 88176194.35909 21533491.421

```

Figura 3.4: Ejemplo de un archivo RINEX de Observación

Adicionalmente, la sección de datos contiene información sobre la época de observación, el número de satélites observados, el PRN para cada satélite, y los observables, L1, C1, L2 y P2.

Para los archivos de Navegación (figura 3.5), la cabecera contiene información acerca del programa usado para la compilación. Esto puede variar dependiendo del

programa usado añadiendo información adicional como parámetros ionosféricos o parámetros de tiempo que se aplican a todo el archivo.

```

      2
L2R2      Navigation Data      RINEX VERSION // TYPE
          Leica Inc.           Mon 31 Aug 2009  PGM / RUN BY / DATE
                                     END OF HEADER
18 07 3 15 01 59 44.0-2.530063502491D-04 3.410605131648D-13 0.000000000000D+00
9.400000000000D+01 4.737500000000D+01 4.593048608115D-09 1.108109272170D-01
2.568587660789D-06 7.880718447268D-03 1.011230051517D-05 5.153757797241D+03
3.527840000000D+05 4.656612873077D-08 2.538491794418D+00 1.210719347000D-07
9.542167022015D-01 1.836250000000D+02-2.596273200834D+00-8.093551606692D-09
-1.660783455204D-10 1.000000000000D+00 3.940000000000D+02 0.000000000000D+00
0.000000000000D+00 0.000000000000D+00-1.071020960808D-08 0.000000000000D+00
3.477400000000D+05
1 07 3 15 02 00 0.0 1.137815415859D-04 2.501110429876D-12 0.000000000000D+00
5.290000000000D+02 7.481250000000D+01 4.013381627033D-09-3.056653535009D+00
3.896653652191D-06 6.600870168768D-03 4.280358552933D-06 5.153731317520D+03
3.528000000000D+05 1.993030309677D-07-2.692762097150D+00-3.539025783539D-08
9.900833939075D-01 3.108750000000D+02-1.759210066641D+00-7.896399978335D-09
2.292952633320D-10 1.000000000000D+00 3.940000000000D+02 0.000000000000D+00
2.000000000000D+00 0.000000000000D+00-3.725290298462D-09 0.000000000000D+00
3.509200000000D+05
      :
      :
      :
31 07 3 16 00 00 0.0 1.560384407640D-05 2.160049916711D-12 0.000000000000D+00
4.090000000000D+02-6.353125000000D+01 4.833772937474D-09 1.221658600630D+00
-3.587454557419D-06 6.376288365573D-03 2.412125468254D-06 5.153669679642D+03
4.320000000000D+05-5.029141902924D-08-1.697279264254D+00-1.620501279831D-07
9.610754400097D-01 3.335625000000D+02-1.366133275586D+00-8.518211913611D-09
-2.703683943395D-10 1.000000000000D+00 3.940000000000D+02 0.000000000000D+00
1.000000000000D+00 0.000000000000D+00-1.303851604462D-08 0.000000000000D+00
4.261000000000D+05

```

Figura 3.5: Ejemplo de un archivo RINEX de Navegación

La sección de datos contiene información sobre el tiempo, parámetros Keplerianos, parámetros de perturbación de la órbita y del tiempo e información sobre la salud del satélite.

El cuadro 3.4 muestra los datos necesarios para el cálculo del tiempo y las coordenadas de un satélite. El primer grupo de datos es usado para corregir el tiempo del satélite (ecuación 3.4). El segundo grupo de datos incluye los parámetros Keplerianos que determinan la elipse para un tiempo de referencia. El tercer grupo de datos determina los parámetros de perturbación.  $\Delta n$  hace referencia al arrastre secular en  $d\omega/dt$  debido al segundo armónico zonal, también absorbe efectos de gravitación Solar y Lunar y presión de radiación.  $\dot{\Omega}$  determina el arrastre secular en la ascensión recta del nodo debida al segundo armónico zonal.  $\dot{i}$  es la rata de cambio de la inclinación.  $C_{us}$ ,  $C_{uc}$ ,  $C_{is}$ ,  $C_{ic}$ ,  $C_{rs}$ ,  $C_{rc}$  absorben efectos de armónicos de orden superior y efectos de gravitación lunar para períodos en los cuales hay una aproximación del vehículo espacial con la Luna [33].

	Parámetros de tiempo
toe	tiempo de referencia, parámetros de las efemérides [s]
toc	tiempo de referencia, parámetros de reloj [s]
$a_0, a_1, a_2$	Coefficientes polinomiales para corrección de reloj (bias [s], drift[s/s], drift rate [s/s <sup>2</sup> ])
	Parámetros Keplerianos
$\sqrt{A}$	Raíz cuadrada del semi eje mayor [ $m^{\frac{1}{2}}$ ]
$e$	Excentricidad [ <i>adimensional</i> ]
$i_0$	ángulo de inclinación para el tiempo de referencia [ <i>semiciclos</i> ]
$\Omega_0$	Longitud del nodo ascendente para el tiempo de referencia [ <i>semiciclos</i> ]
$\omega$	Argumento del perigeo [ <i>semiciclos</i> ]
$M_0$	Anomalía media para el tiempo de referencia [ <i>semiciclos</i> ]
	parámetros de perturbación
$\Delta n$	Corrección al movimiento angular
$\dot{\Omega}$	Rata de cambio de la ascensión recta [ <i>semiciclos/s</i> ]
$\dot{i}$	Rata de cambio de la inclinación [ <i>semiciclos/s</i> ]
$C_{us}$	Amplitud del término de corrección armónica del seno para el argumento de la latitud [ <i>rad</i> ]
$C_{uc}$	Amplitud del término de corrección armónica del coseno para el argumento de la latitud [ <i>rad</i> ]
$C_{is}$	Amplitud del término de corrección armónica del seno para el ángulo de inclinación [ <i>rad</i> ]
$C_{ic}$	Amplitud del término de corrección armónica del coseno para el ángulo de inclinación [ <i>rad</i> ]
$C_{rs}$	Amplitud del término de corrección armónica del seno para el radio orbital [ <i>m</i> ]
$C_{rc}$	Amplitud del término de corrección armónica del coseno para el radio orbital [ <i>m</i> ]

Cuadro 3.4: Valores para el cálculo de las órbitas para satélites GPS

## 3.6. Representación Orbital

Posiciones satelitales precisas son necesarias para cálculos tanto geodésicos como ionosféricos. Para un cálculo apropiado de las órbitas satelitales se comienza con el movimiento Kepleriano dependiente de una fuerza central añadiéndole parámetros de perturbación.

La ecuación de movimiento para un satélite que órbita alrededor de la Tierra es:

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^3}\hat{r} + k_s \quad (3.6)$$

Con  $r$  la posición del satélite,  $G$  la constante de gravitación Universal,  $M$  la masa de la Tierra, y  $k_s$  las fuerzas de perturbación. Estas fuerzas son responsables de la aceleración debida a: la no esfericidad y la distribución de masa inhomogénea de la Tierra; otros cuerpos celestes (Sol y Luna principalmente); movimientos terrestres y oceánicos; arrastre atmosférico y presión de radiación Solar.

La ecuación 3.6 es la forma vectorial diferencial de segundo orden de movimiento de un objeto celeste, con seis constantes de integración. Análogamente, El movimiento de un satélite alrededor de la Tierra gobernado por una fuerza gravitacional usualmente se expresa por los parámetros orbitales Keplerianos cuyos términos son:

- El semieje mayor  $A$ .
- La excentricidad numérica  $e$ .
- La inclinación orbital  $i$
- La ascensión recta del nodo ascendente  $\Omega$ .
- El argumento del Perigeo  $\omega$ .
- La anomalía verdadera  $\nu$ .

Basados en el conocimiento de los elementos Keplerianos se puede determinar la posición y la velocidad del satélite para determinado tiempo:

$$(a, e, i, \Omega, \omega, \nu) \rightarrow r, v \quad (3.7)$$

Para calcular las coordenadas geocéntricas para un satélite GPS resolveremos el problema particular tomando la Tierra como una esfera donde la fuerza central es la única que contribuye en el problema. Incluiremos los parámetros de perturbación donde sea necesario.

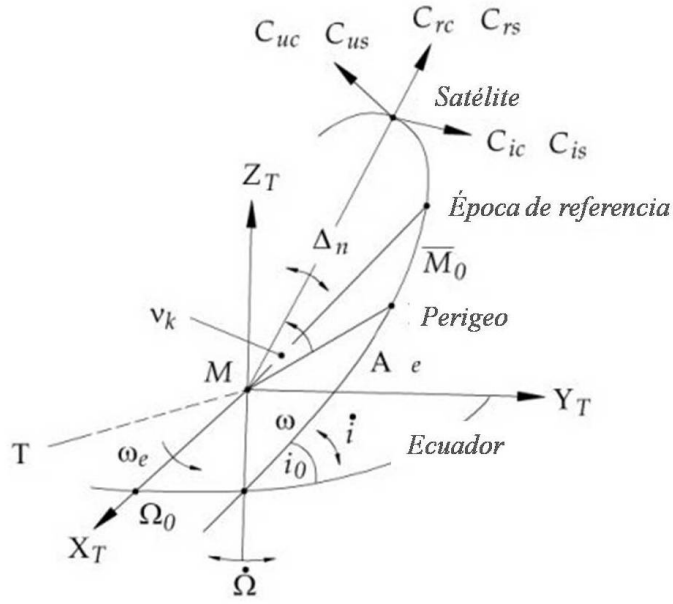


Figura 3.6: Parámetros Keplerianos y de perturbación para una órbita GPS [33].

Se usará el parámetro  $t_k$  (ecuación 3.5) para calcular la posición del satélite y todas las variables serán referenciadas a este tiempo.

Ya que el archivo de Navegación entrega la raíz cuadrada del semieje mayor, lo primero que haremos será calcular el valor de  $A$ :

$$A = (\sqrt{A})^2 \quad (3.8)$$

De la tercera ley de Kepler se obtiene:

$$n_0 = \sqrt{\frac{GM}{A^3}} \quad (3.9)$$

Con  $n_0$  el movimiento angular para el tiempo de referencia y  $GM$  el valor de la constante gravitacional geocéntrica WGS84 (cuadro 3.2).

$$n = n_0 + \Delta n \quad (3.10)$$

Donde se ha incluido un parámetro de perturbación  $\Delta n$ . De la figura 3.7 podemos calcular el radio de la elipse como:

$$r_k = A(1 - e \cos E_k) \quad (3.11)$$

La anomalía media es una abstracción matemática que depende de la frecuencia angular media:

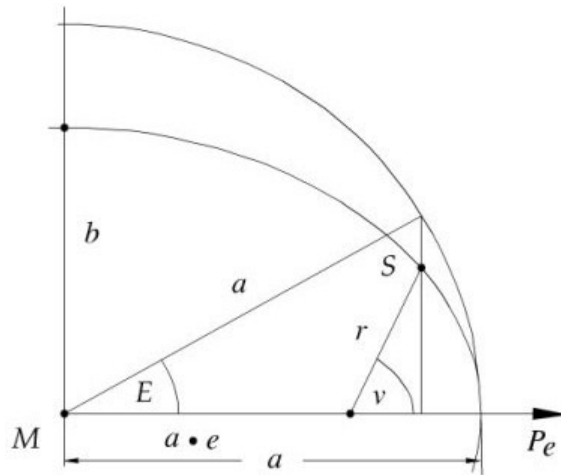


Figura 3.7: Relación entre la anomalía verdadera y la anomalía excéntrica [22].

$$M_k = n(t_k - t_0) \quad M_k = M_0 + nt_k \quad (3.12)$$

En geodesia satelital la Anomalía Media  $M$  se usa, generalmente, como un parámetro Kepleriano reemplazando la Anomalía verdadera  $\nu$  ya que puede ser interpolada linealmente con respecto al tiempo. La anomalía excéntrica  $E$  se relaciona con la anomalía media  $M$ :

$$M = E - e \sin E \quad (3.13)$$

Para despejar  $E$  de la ecuación 3.13 se tiene que realizar una transformación usando una expansión elíptica en series. En el caso en que se tiene excentricidades pequeñas, se puede simplificar la iteración obteniendo:

$$E_k = M_k + e \sin E_k \quad (3.14)$$

$$E_0 = M_0, \quad E_i = M + e \sin E_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.15)$$

Luego se determina la anomalía verdadera  $\nu$  partiendo de la anomalía excéntrica  $E$  para un tiempo  $k$  (figura 3.7):

$$\tan \nu = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E_k}{\cos E_k - e} \quad (3.16)$$

Las tres anomalías  $E$ ,  $M$ ,  $\nu$  serán cero cuando el satélite pase por el perigeo. De la figura 3.6 podemos describir el argumento de la latitud como:



$$\Phi_k = \nu_k + \omega \quad (3.17)$$

Tanto el radio como la inclinación y el argumento de la latitud tendrán variaciones debido a las perturbaciones:

$$\delta r_k = C_{rc} \cos 2\Phi_k + C_{rs} \sin 2\Phi_k \quad (3.18)$$

$$\delta i_k = C_{ic} \cos 2\Phi_k + C_{is} \sin 2\Phi_k \quad (3.19)$$

$$\delta u_k = C_{uc} \cos 2\Phi_k + C_{us} \sin 2\Phi_k \quad (3.20)$$

La expresión corregida para estos parámetros sería:

$$r_k = A(1 - e \cos E_k) + \delta r_k \quad (3.21)$$

$$i_k = i_0 + \dot{i}t_k + \delta i_k \quad (3.22)$$

$$u_k = \Phi_k + \delta u_k \quad (3.23)$$

Donde  $U_k$  es el argumento de la latitud corregida. Con el argumento de la latitud calculamos las coordenadas cartesianas del satélite  $X'$ ,  $Y'$  sobre el plano orbital:

$$X'_k = r_k \cos u_k \quad (3.24)$$

$$Y'_k = r_k \sin u_k \quad (3.25)$$

La longitud del nodo ascendente incluyendo los parámetros de perturbación y la rotación de la Tierra:

$$\Omega_k = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \omega_e)t_k - \omega_e t_{oe} \quad (3.26)$$

Con  $\omega_e$  la frecuencia angular de la Tierra. Las coordenadas geocéntricas ajustadas a la rotación de la Tierra son:

$$X_k = X'_k \cos \Omega_k - Y'_k \sin \Omega_k \cos i_k \quad (3.27)$$

$$Y_k = X'_k \sin \Omega_k + Y'_k \cos \Omega_k \cos i_k \quad (3.28)$$

$$Z_k = Y'_k \sin \Omega_k \quad (3.29)$$

La figura 3.8 muestra la órbita para el satélite PRN 3, mientras que la figura 3.9 muestra las órbitas de todos los satélites que fueron observados por una estación GPS ubicada sobre la Universidad Nacional de Colombia en Bogotá. Estas órbitas fueron calculadas con los datos de los archivos de navegación (figura 3.5) para el día

15 de marzo de 2007. En esta figura se observa el radio típico de la órbita de este tipo de satélites (cuadro 3.1).

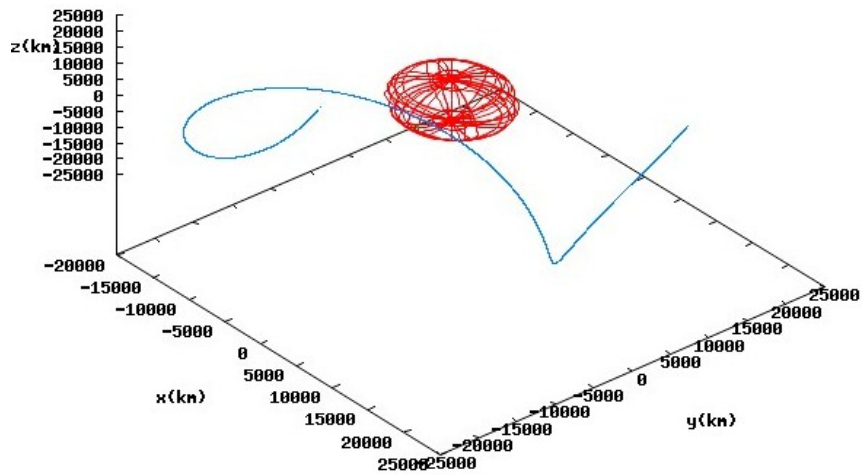


Figura 3.8: representación orbital para el satélite GPS PRN 3 usando archivos de Navegación. fecha: 15 de marzo de 2007

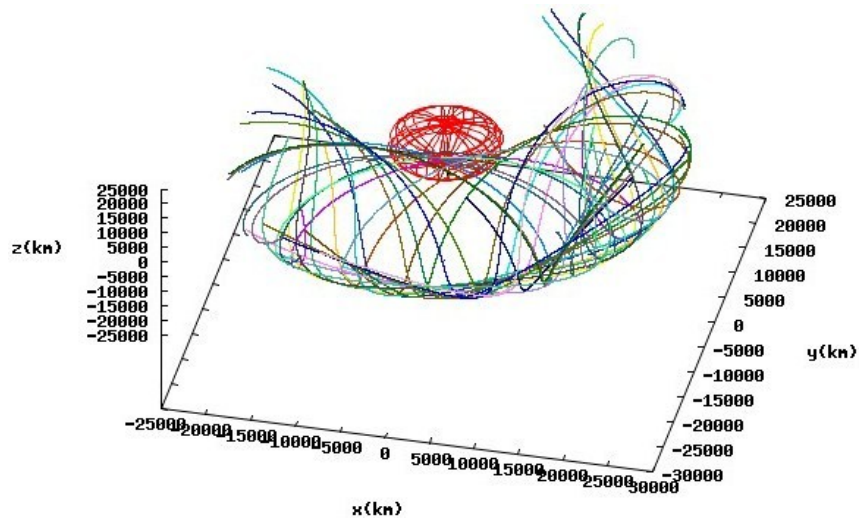


Figura 3.9: representación orbital para satélites GPS usando archivos de Navegación. fecha: 15 de marzo de 2007