

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE MANIZALES

MAESTRÍA EN AUTOMATIZACIÓN INDUSTRIAL
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y
COMPUTACIÓN

Análisis de la Energía de la Señal de Control y
el Error a Sistemas Linealizados
Implementando GPC y DMC

Juan Pablo González Tamayo

Requisito parcial para optar
al título de
Magister en Automatización Industrial
Diciembre del 2005

Director: MSc Nicolás Toro García

Contenido

| | |
|---|-----------|
| Contenido | 1 |
| Lista de Figuras | 3 |
| Lista de Tablas | 5 |
| Resumen | 7 |
| 1 CONTROL PREDICTIVO BASADO EN MODELOS | 1 |
| 1.1 Introducción | 1 |
| 1.1.1 Estrategia del MPC | 5 |
| 1.2 Control Predictivo Generalizado GPC | 7 |
| 1.2.1 Formulación del GPC | 8 |
| 1.2.2 Predicción óptima | 9 |
| 1.3 Control de Matriz Dinámica DMC | 13 |
| 1.3.1 Predicción multipaso | 14 |
| 1.3.2 Función objetivo | 19 |
| 1.4 Restricciones en control predictivo | 21 |
| 1.4.1 Tratamiento convencional de restricciones | 22 |
| 1.4.2 Restricciones en el MPC | 23 |
| 1.4.3 Resolución del problema | 25 |
| 1.5 Solución por programación cuadrática del problema de control | 26 |
| 1.6 Energía de la señal de control y energía del error (error cuadrático medio) | 27 |
| 2 TANQUES ACOPLADOS | 29 |
| 2.1 Modelo de dos tanques acoplados | 29 |
| 2.2 Función de transferencia | 32 |
| 2.3 Discretización | 32 |
| 2.4 Restricciones | 33 |
| 2.5 Implementación del GPC | 34 |
| 2.6 Implementación del DMC | 38 |
| 2.7 Comparación con el controlador PID | 40 |
| 2.8 Conclusiones | 41 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3 | MOTOR DE CORRIENTE CONTÍNUA | 44 |
| 3.1 | Principio de Funcionamiento | 45 |
| 3.2 | Parámetros del sistema | 45 |
| 3.3 | Ecuaciones del Sistema | 46 |
| 3.4 | Función de Transferencia | 46 |
| 3.5 | Discretización | 48 |
| 3.6 | Restricciones | 49 |
| 3.7 | Implementación del GPC | 50 |
| 3.8 | Implementación del DMC | 53 |
| 3.9 | Comparación con el controlador PID | 59 |
| 3.10 | Conclusiones | 59 |
| 4 | PÉNDULO INVERTIDO | 62 |
| 4.1 | Condiciones del problema | 63 |
| 4.2 | Análisis de las fuerzas y sistema de ecuaciones | 64 |
| 4.3 | Función de transferencia | 65 |
| 4.4 | Discretización | 66 |
| 4.5 | Restricciones | 68 |
| 4.6 | Implementación del GPC | 69 |
| 4.7 | Implementación del DMC | 73 |
| 4.8 | Comparación con el controlador PID | 74 |
| 4.9 | Conclusiones | 75 |
| 5 | Conclusiones | 76 |
| A | Programa gpc.m | 79 |
| B | Programa dmc.m | 83 |
| C | Modelos de convolución | 86 |
| C.1 | Respuesta impulsional | 86 |
| C.2 | Respuesta ante escalón | 87 |
| | Bibliografía | 88 |

Lista de Figuras

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Estrategia del control predictivo | 5 |
| 1.2 | Estructura básica del MPC | 6 |
| 1.3 | Esquema del modelo básico | 14 |
| 1.4 | Restricciones y punto de operación óptimo | 22 |
| 2.1 | Sistema de tanques acoplados | 30 |
| 2.2 | Respuesta de los tanques acoplados en lazo abierto | 33 |
| 2.3 | Respuesta del sistema discretizado de tanques acoplados | 34 |
| 2.4 | Variación del factor de peso de la señal de control del GPC. $\lambda=0.2$, línea sólida; $\lambda=0.8$, línea de guiones; $\lambda=1.5$, línea punteada; $\lambda=5$, línea guión-punto | 35 |
| 2.5 | Variación del factor de peso de la señal de control del GPC. $\lambda=0.2$, línea sólida; $\lambda=1.5$, línea de guiones; $\lambda=5$, línea punteada; $\lambda=10$, línea guión-punto | 36 |
| 2.6 | Variación del factor de peso del error del GPC. $\delta=0.5$, línea sólida; $\delta=2$, línea de guiones; $\delta=5$, línea punteada | 37 |
| 2.7 | Variación del factor de peso de la señal de control del DMC. $\lambda=0.2$, línea sólida; $\lambda=0.8$, línea de guiones; $\lambda=1.5$, línea punteada; $\lambda=5$, línea guión-punto | 39 |
| 2.8 | Variación del factor de peso de la señal de control del DMC. $\lambda=0.2$, línea sólida; $\lambda=1.5$, línea de guiones; $\lambda=5$, línea punteada; $\lambda=10$, línea guión-punto | 40 |
| 2.9 | Variación del factor de peso del error del DMC. $\delta=0.5$, línea sólida; $\delta=2$, línea de guiones; $\delta=5$, línea punteada | 42 |
| 2.10 | Implementación del GPC y DMC a los tanques acoplados. GPC, línea sólida; DMC, línea de guiones | 43 |
| 2.11 | Implementación del PID en los tanques acoplados | 43 |
| 3.1 | El motor de c.c. y su circuito equivalente | 44 |
| 3.2 | Respuesta del motor c.c en lazo abierto | 48 |
| 3.3 | Respuesta del motor c.c discretizado | 49 |
| 3.4 | Variación del factor de peso de la señal de control del GPC. $\lambda=0.2$, línea sólida; $\lambda=0.8$, línea de guiones; $\lambda=1.5$, línea punteada; $\lambda=5$, línea guión-punto | 50 |

| | | |
|------|--|----|
| 3.5 | Variación del factor de peso de la señal de control del GPC. $\lambda=0.8$, línea sólida; $\lambda=5$, línea de guiones | 52 |
| 3.6 | Variación del factor de peso de la señal de control del GPC. $\lambda=0.8$, línea sólida; $\lambda=5$, línea de guiones | 53 |
| 3.7 | Variación del factor de peso del error del GPC. $\delta=0.5$, línea sólida; $\delta=2$, línea de guiones; $\delta=5$, línea punteada | 54 |
| 3.8 | Variación del factor de peso de la señal de control del DMC. $\lambda=0.2$, línea sólida; $\lambda=0.8$, línea de guiones; $\lambda=1.5$, línea punteada; $\lambda=5$, línea guión-punto | 55 |
| 3.9 | Variación del factor de peso de la señal de control del DMC. $\lambda=0.8$, línea sólida; $\lambda=5$, línea de guiones | 56 |
| 3.10 | Variación del factor de peso de la señal de control del DMC. $\lambda=0.8$, línea sólida; $\lambda=5$, línea de guiones | 57 |
| 3.11 | Variación del factor de peso del error del DMC. $\delta=0.5$, línea sólida; $\delta=2$, línea de guiones; $\delta=5$, línea punteada | 58 |
| 3.12 | Implementación del GPC y DMC al motor c.c. GPC, línea sólida; DMC, línea de guiones | 59 |
| 3.13 | Implementación del PID al motor c.c. | 60 |
| 4.1 | Péndulo invertido | 63 |
| 4.2 | Sistema de fuerzas en el péndulo invertido | 64 |
| 4.3 | Respuesta del péndulo invertido en lazo abierto | 67 |
| 4.4 | Respuesta del péndulo invertido discretizado | 68 |
| 4.5 | Variación del factor de peso de la señal de control del GPC. $\lambda=0.2$, línea sólida; $\lambda=0.8$, línea de guiones; $\lambda=1.5$, línea punteada; $\lambda=5$, línea guión-punto | 70 |
| 4.6 | Variación del factor de peso de la señal de control del GPC. $\lambda=0.8$, línea sólida; $\lambda=5$, línea de guiones | 71 |
| 4.7 | Variación del factor de peso de la señal de control del GPC. $\lambda=0.8$, línea sólida; $\lambda=5$, línea de guiones | 72 |
| 4.8 | Variación del factor de peso del error del GPC. $\delta=0.5$, línea sólida; $\delta=2$, línea de guiones; $\delta=5$, línea punteada | 73 |
| 4.9 | Implementación del DMC al péndulo invertido | 74 |
| 5.1 | Energía de la señal de control vs λ para $N=30$ y $Nu=5$ | 76 |
| 5.2 | Energía del error vs λ para $N=30$ y $Nu=5$ | 77 |
| 5.3 | Energía de la señal de control vs λ para $N=30$ y $Nu=5$ | 77 |
| 5.4 | Energía del error vs λ para $N=30$ y $Nu=5$ | 78 |
| C.1 | Respuesta impulsional y ante escalón | 87 |

Lista de Tablas

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | Cálculo de energías para $N=30$ y $Nu=5$ en los tanques acoplados, implementando GPC | 35 |
| 2.2 | Cálculo de energías para $N=30$ y $Nu=1$ en los tanques acoplados, implementando GPC | 37 |
| 2.3 | Cálculo de energías para $N=30$ y $Nu=5$ en los tanques acoplados, implementando GPC | 38 |
| 2.4 | Cálculo de energías para $N=30$ y $Nu=5$ en los tanques acoplados, implementando DMC | 38 |
| 2.5 | Cálculo de energías para $N=30$ y $Nu=1$ en los tanques acoplados, implementando DMC | 41 |
| 2.6 | Cálculo de energías para $N=30$ y $Nu=5$ en los tanques acoplados, implementando DMC | 41 |
| 3.1 | Cálculo de energías para $N=30$ y $Nu=5$ en el motor c.c, implementando GPC | 51 |
| 3.2 | Cálculo de energías para $N=30$ y $Nu=3$ en el motor c.c, implementando GPC | 51 |
| 3.3 | Cálculo de energías para $N=10$ y $Nu=5$ en el motor c.c, implementando GPC | 52 |
| 3.4 | Cálculo de energías para $N=30$ y $Nu=5$ en el motor c.c, implementando GPC | 53 |
| 3.5 | Cálculo de energías para $N=30$ y $Nu=5$ en el motor c.c, implementando DMC | 54 |
| 3.6 | Cálculo de energías para $N=30$ y $Nu=3$ en el motor c.c, implementando DMC | 56 |
| 3.7 | Cálculo de energías para $N=10$ y $Nu=5$ en el motor c.c, implementando DMC | 57 |
| 3.8 | Cálculo de energías para $N=30$ y $Nu=5$ en el motor c.c, implementando DMC | 58 |
| 4.1 | Cálculo de energías para $N=30$ y $Nu=5$ en el péndulo invertido, implementando GPC | 69 |
| 4.2 | Cálculo de energías para $N=20$ y $Nu=5$ en el péndulo invertido, implementando GPC | 71 |

| | | |
|-----|---|----|
| 4.3 | Cálculo de energías para $N=30$ y $Nu=3$ en el péndulo invertido, implementando GPC | 72 |
| 4.4 | Cálculo de energías para $N=30$ y $Nu=5$ en el péndulo invertido implementando GPC | 73 |

Resumen

El control predictivo basado en modelos (Model Predictive Control, MPC) es una de las metodologías del control automático que se ha desarrollado considerablemente en las últimas décadas tanto en la industria como en la comunidad de investigación.

La idea de este trabajo es analizar las ventajas de implementar un control predictivo, bien sea el GPC o el DMC, desde el punto de vista de ahorro en el esfuerzo de control o un mínimo error cuadrático medio. Para ello se calcularán las energías de control y del error, variando los parámetros de sintonía de cada controlador.

Para obtener conclusiones y resultados a un amplio rango de sistemas, se utilizarán 3 tipos de plantas: estable (tanques acoplados), integrante (motor de corriente continua) e inestable (péndulo invertido). Cada uno de estas será controlada con el GPC y el DMC y se obtendrán resultados en cuanto al comportamiento de las energías.

Al final serán comparados los dos controladores implementados a cada uno de los sistemas, bajo los mismos parámetros de sintonía.

Capítulo 1

CONTROL PREDICTIVO BASADO EN MODELOS

1.1 Introducción

El Control Predictivo (Model Predictive Control, MPC) se desarrolló a finales de los setenta y ha tenido un desarrollo considerable desde entonces [1], [2], [4].

Uno de los éxitos del control predictivo basado en modelos es tener la forma más general de formular el problema de control en el dominio del tiempo. El control predictivo integra control óptimo, control de procesos con tiempos muertos, procesos multivariantes y utiliza las referencias futuras cuando están disponibles. Al utilizar una estrategia con horizonte de control finito permite la consideración de restricciones y procesos no lineales.

El término Control Predictivo no designa a una estrategia de control particular sino a un conjunto de métodos de control que hacen uso explícito de un modelo del proceso para obtener la señal de control minimizando una función objetivo. Estos métodos de control llevan a controladores que tienen básicamente la misma estructura y los mismos elementos:

- uso explícito de un modelo para predecir la evolución del proceso en instantes futuros,
- minimización de una función objetivo y
- utilización de un horizonte de control finito y deslizante que implica el cálculo de la secuencia de control para todo el horizonte pero con la aplicación de la primera señal de la secuencia y la repetición de todo el proceso en el siguiente instante de muestreo.

Los distintos algoritmos de control predictivo difieren en el tipo de modelo utilizado para representar el proceso, las perturbaciones y la función objetivo considerada.

Aunque las diferencias puedan parecer pequeñas a priori, pueden provocar distintos comportamientos en bucle cerrado, siendo críticas para el éxito de un determinado algoritmo en una determinada aplicación.

Los algoritmos de control predictivo más comunes indicando sus principales características son [8]:

Control de Matriz Dinámica (DMC): Este método usa la respuesta al escalón para modelar el proceso, considerando sólo los N primeros términos, asumiendo por tanto que el proceso es estable. En cuanto a las perturbaciones, se considera que su valor permanece constante e igual al existente en el instante actual durante todo el horizonte. La función objetivo puede considerar sólo errores futuros o incluir también el esfuerzo de control, en cuyo caso toma la forma genérica.

Una de las características de este método que lo ha hecho muy popular en la industria es la inclusión de restricciones, que se traduce en inecuaciones de la forma genérica. En este caso la optimización debe ser numérica y se lleva a cabo en cada periodo de muestreo, enviándose la señal de control y recalculando todo en el nuevo periodo de muestreo, como en todos los métodos MPC. Los principales inconvenientes de este método son el tamaño del modelo empleado y la imposibilidad de tratar procesos inestables.

Control de Modelo Algorítmico (MAC): Este método se conoce también como Modelo de Control Predictivo Heurístico. Es muy similar al DMC con la diferencia principal de usar un modelo FIR de respuesta. Introduce el concepto de trayectoria de referencia como un sistema de primer orden que evoluciona desde la salida actual al punto de ajuste según una determinada constante de tiempo. La varianza del error entre esta trayectoria y la salida es lo que marca la minimización de la función objetivo. Las perturbaciones se pueden tratar como en el método anterior. El método también considera restricciones en los actuadores, en las variables internas o en salidas secundarias.

Control Predictivo Funcional (PFC): Este controlador fue desarrollado por Richalet para procesos rápidos. Emplea un modelo en el espacio de estados, por lo que permite el manejo de procesos inestables, y también la extensión al caso no lineal. Este esquema de control tiene dos características que lo distinguen del resto de controladores de la familia: el uso de *puntos de coincidencia* y de *funciones base*.

El concepto de puntos de coincidencia se emplea para simplificar los cálculos considerando sólo un subconjunto de puntos en el horizonte de predicción. La salida

deseada y la predicha deben coincidir en dichos puntos, no en todo el horizonte de predicción.

La otra idea innovadora de este método es la parametrización de la señal de control como una combinación lineal de ciertas funciones base, que se eligen según la naturaleza del proceso y la referencia, estas funciones son de tipo polinómico: escalones, rampas o parábolas, ya que la mayoría de referencias se pueden especificar como combinación de estas funciones. Con esta estrategia, un perfil de entrada complejo se puede especificar usando un pequeño número de parámetros desconocidos que son las incógnitas del problema de minimización.

El algoritmo PFC también puede manejar restricciones de máximo y mínimo en la aceleración, que son prácticas en aplicaciones de servocontrol.

Extended Prediction Self Adaptive Control (EPSAC): El algoritmo EPSAC usa un modelo de función de transferencia tipo CARIMA (Controlled Auto-Regressive Integrated Moving Average). (ARIMAX). Este modelo puede ampliarse para tratar perturbaciones medibles añadiendo un término para incluir efecto feedforward. La estructura de la ley de control es muy simple, ya que se considera que la señal de control permanecerá constante a partir del instante t (es decir, horizonte de control igual a 1).

Extended Horizon Adaptive Control (EHAC): Esta formulación también emplea un modelo de función de transferencia y pretende minimizar la diferencia entre la salida calculada y la referencia en el instante $t + N$. La solución a este problema no es única a menos que N sea mayor o igual al tiempo muerto; una posible estrategia es considerar horizonte de control igual a 1 o minimizar el esfuerzo de control.

La ley de control depende sólo de los parámetros del proceso y puede hacerse fácilmente adaptativa si se emplea un identificador en línea. El único coeficiente de ajuste es el horizonte de predicción N , lo cual simplifica el uso pero proporciona poca libertad para el diseño. No puede usarse trayectoria de referencia porque el error se considera sólo en un instante $(t + N)$, ni tampoco el esfuerzo de control.

Control Predictivo Generalizado (GPC): Este método propuesto por Clarke y emplea un modelo CARIMA para la predicción de la salida y la perturbación viene dada por un ruido blanco coloreado. Como en la práctica es difícil encontrar el verdadero valor del ruido, se puede emplear como parámetro de diseño para rechazo de perturbaciones o mejora de la robustez. La predicción óptima se lleva a cabo resolviendo una ecuación diofántica, lo cual puede hacerse eficazmente de forma recursiva.

Este algoritmo, al igual que otros que usan el modelo de función de transferencia, se puede implementar fácilmente en forma adaptativa usando un algoritmo de identificación en línea como los mínimos cuadrados recursivos.

El GPC usa una función objetivo cuadrática teniendo en cuenta el error y el esfuerzo de control, además de factores de ponderación para ambos términos que pueden ser constantes o variables con el tiempo.

Existen aplicaciones de control predictivo a diversos procesos que van desde procesos tan diversos como robots (Gómez Ortega y Camacho, 1996) a la anestesia clínica (Linkers y Mahfonf, 1994). Aplicaciones en la industria de cemento, brazos robóticos se pueden encontrar descritas en (Clarke, 1988), mientras que desarrollos para columnas de destilación, plantas de pvc, generadores de vapor y servos se presentan en (Richalet, 1993) y (Richalet et al., 1978). El control predictivo presenta una serie de ventajas sobre otros métodos, entre las que se pueden citar las siguientes:

- es una técnica particularmente atractiva para los operadores que requiere pocos conocimientos de control porque los conceptos son muy intuitivos y la sintonización relativamente simple,
- se puede utilizar para controlar una gran variedad de procesos, desde procesos muy simples hasta procesos con dinámicas complejas como procesos con grandes tiempos muertos, procesos de fase no mínima, procesos inestables o procesos multivariados,
- su carácter predictivo lo hace compensar intrínsecamente los tiempos muertos,
- introduce un control anticipativo (*feed forward*) y de forma natural se compensan las perturbaciones medibles,
- la ley de control resultante es fácilmente implementable,
- es muy útil cuando se conocen las referencias futuras, como ocurre en el caso de robótica o procesos por lotes y
- permite tratar las restricciones de una forma sistemática y conceptualmente muy simple durante la fase de diseño.

Como es lógico, tiene también sus inconvenientes. La principal es que, aunque su implementación no es compleja, resulta más difícil que la de los clásicos controladores PID. Si la dinámica del proceso no cambia y no existen restricciones, la mayor parte de los cálculos se puede realizar fuera de línea y el controlador resultante es simple,

pudiéndose aplicar a procesos de dinámicas rápidas; en caso contrario, los requisitos de cálculo son mucho mayores. Aunque hay que decir que debido a la potencia de los computadores actuales esto no es realmente una dificultad insalvable. La mayor dificultad que presenta para su aplicación es la necesidad de un modelo apropiado del proceso cuya obtención requiere unos conocimientos mínimos de control. El control predictivo ha demostrado ser en la práctica una estrategia razonable de control y ha sido aplicado con éxito a numerosos procesos industriales.

1.1.1 Estrategia del MPC

La metodología de todos los controladores pertenecientes a la familia MPC se caracteriza por la siguiente estrategia, representada en la figura 1.1:

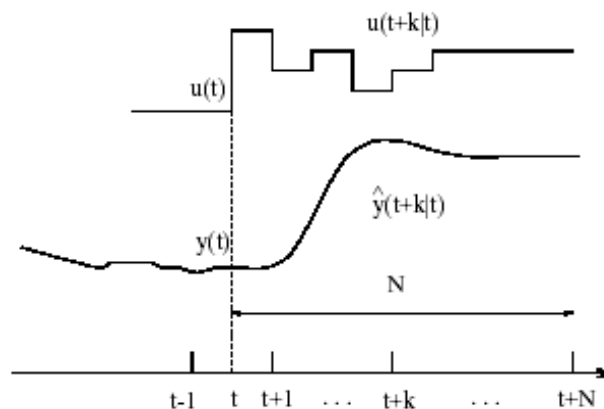


Figura 1.1: Estrategia del control predictivo

1. Las salidas futuras para un horizonte determinado N , llamado horizonte de predicción, se predicen cada instante t utilizando el modelo del proceso. Estas predicciones de la salida $y(t+k|t)$ para $k=1\dots N$ (esta notación indica el valor predicho de la variable en el instante $t+k$ calculada en el instante t) dependen de los valores conocidos hasta el instante t (entradas y salidas conocidas) y de las señales de control $u(t+k|t)$, $k=0\dots N-1$, que han de ser calculadas y enviadas al sistema.
2. La secuencia de señales de control futuras se calcula minimizando un criterio para mantener al proceso lo más cerca posible de la trayectoria de referencia $w(t+k)$. Este criterio toma normalmente la forma de una función cuadrática del error entre la salida predicha y la trayectoria de referencias futuras. En la mayor

parte de los casos se incluye también el esfuerzo de control dentro de la función objetivo. La solución explícita se puede obtener cuando el criterio es cuadrático y el modelo lineal; en caso contrario se ha de utilizar un método numérico para buscar la solución.

3. La señal de control $u(t / t)$ se envía al proceso mientras que el resto de las señales calculadas no se consideran, ya que en el instante siguiente de muestreo $y(t + 1)$ es ya conocida y los pasos anteriores se repiten con este nuevo valor. Por lo que $u(t + 1 / t + 1)$ se calcula con información diferente y en principio será también diferente de $u(t + 1 / t)$.

La figura 1.2 muestra la estructura básica necesaria para implementar el control predictivo. Se usa un modelo para predecir la evolución de la salida o estado del proceso a partir de las señales de entrada y salidas conocidas. Las acciones de control futuras se calculan con el optimizador, que considera la función de coste y las posibles restricciones.

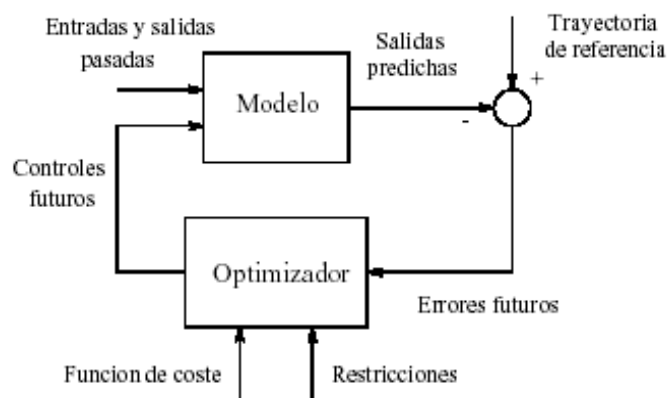


Figura 1.2: Estructura básica del MPC

El modelo del proceso juega, en consecuencia, un papel decisivo en el controlador. El modelo elegido debe ser capaz de capturar la dinámica del proceso para predecir de forma precisa la evolución del sistema. Al mismo tiempo, debe ser suficientemente simple de implementar y entender. Las distintas metodologías del control predictivo difieren fundamentalmente en el tipo de modelo utilizado.

El optimizador es otra parte fundamental de la estructura ya que permite obtener las acciones de control a aplicar. Si la función de coste es cuadrática, el modelo lineal

y no existen restricciones, se puede obtener una solución explícita. Si este no es el caso se ha de acudir a un algoritmo numérico de optimización que requiere mayor capacidad de cálculo. El tamaño del problema resultante depende del número de variables, de los horizontes de control y predicción y del número de restricciones, aunque se puede decir que en general problemas de optimización resultantes en este contexto son problemas más bien modestos.

Dos de los algoritmos con mayor impacto en el mundo industrial y en el académico son el GPC y el DMC [4] y se describen a continuación.

1.2 Control Predictivo Generalizado GPC

La formulación más conocida que usa el modelo de función de transferencia es sin duda el Control Predictivo Generalizado (Generalized Predictive Control, GPC) (Clarke et al., 1987), aunque existen otras formulaciones que también usan modelos de función de transferencia (EPSAC y EHAC, por ejemplo). El GPC se ha convertido en uno de los métodos más populares tanto en el mundo industrial como en el académico y ha funcionado con éxito en muchas aplicaciones industriales (Clarke, 1988), mostrando buenas prestaciones a la vez que un cierto grado de robustez respecto a sobreparametrización o retardos mal conocidos.

Puede resolver muchos problemas de control diferentes para un amplio campo de procesos con un número razonable de variables de diseño, que son especificadas por el operario dependiendo del conocimiento previo del proceso y de los objetivos de control.

La idea básica del GPC [1] es calcular una secuencia de futuras acciones de control de tal forma que minimice una función de coste multipaso. El índice a minimizar es una función cuadrática que mide por un lado la distancia entre la salida predicha del sistema y una cierta trayectoria de referencia hasta el horizonte de predicción, y por otro el esfuerzo de control necesario para obtener dicha salida.

El Control Predictivo Generalizado tiene muchas ideas en común con otros controladores predictivos previamente mencionados ya que está basado en las mismas ideas pero posee a su vez algunas diferencias. Es capaz de proporcionar una solución explícita (en ausencia de restricciones), puede tratar plantas inestables y de fase no mínima a la vez que incorpora la idea de horizonte de control y la consideración de pesos en los incrementos de la señal de control. Las diversas posibilidades disponibles para el GPC conducen a una gran variedad de objetivos de control comparado con

otras realizaciones, algunas de las cuales pueden ser consideradas como subconjuntos o casos límites del GPC.

1.2.1 Formulación del GPC

La mayoría de los procesos de una sola entrada y una sola salida (single-input single-output, SISO), al ser considerados en torno a un determinado punto de trabajo y tras ser linealizados, pueden ser descritos de la siguiente forma:

$$A(z^{-1})y(t) = z^{-d}B(z^{-1})u(t-1) + C(z^{-1})e(t) \quad (1.1)$$

Donde $u(t)$ y $y(t)$ son las variables de entrada y salida respectivamente y $e(t)$ es un ruido blanco de media cero. A, B y C son los siguientes polinomios en el operador retardo z^{-1} y d es el tiempo muerto del sistema:

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_naz^{-na} \\ B(z^{-1}) &= b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_nbz^{-nb} \\ C(z^{-1}) &= 1 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + \dots + c_ncz^{-nc} \end{aligned}$$

Este modelo es conocido como Autorregresivo de Media Móvil (Controller Auto-Regressive Moving-Average CARMA).

En el GPC el modelo de la planta viene dado por una función de transferencia discreta en la forma de un modelo CARIMA (Controller Auto-Regressive Integrated Moving-Average):

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})z^{-d}u(t-1) + C(z^{-1})\frac{e(t)}{\Delta} \quad (1.2)$$

$$\text{Con } \Delta = 1 - z^{-1}$$

Este modelo es muy apropiado para muchas aplicaciones industriales en las que las perturbaciones no son estacionarias, según se justifica en (Clarke et al., 1987). A partir de ahora el polinomio C se toma igual a 1. Nótese que si se puede truncar entonces puede ser incluido en A y B. En (Camacho y Bordons, 2004) se trata el caso general de ruido coloreado. En general es difícil determinar el valor real de este polinomio, por lo que se puede usar para rechazo óptimo de perturbaciones, aunque es más adecuado su papel en la mejora de la robustez.

El algoritmo GPC consiste en aplicar la secuencia de control que minimiza una función de coste de la forma:

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j) [\hat{y}(t+j/t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\Delta u(t+j-1)]^2 \quad (1.3)$$

Donde $\hat{y}(t+j/t)$ es la predicción óptima de la salida j pasos hacia delante calculada con datos conocidos en el instante t , N_1 y N_2 son los horizontes mínimo y máximo de predicción y N_u es el horizonte de control, $\delta(j)$ y $\lambda(j)$ son secuencias de ponderación (normalmente constantes) y $w(t+j)$ es la futura trayectoria de referencia. En muchas situaciones se considera $\delta(j)$ igual a 1 y $\lambda(j)$ constante.

Uno de los parámetros de sintonía del GPC es el factor de ponderación de la señal de control λ . En [19] se sugiere que este factor sea lo más pequeño y cercano a cero posible. En [21] se plantea un método de sintonización para este parámetro pero para modelos entrada-salida de primer orden más tiempo muerto.

El objetivo es pues el cálculo de la futura secuencia de control $u(t)$, $u(t+1)$,... de tal manera que la salida futura del proceso $y(t+j)$ permanezca próxima a $w(t+j)$. Esto se logra minimizando J .

1.2.2 Predicción óptima

Con objeto de minimizar la función de coste [1], hay que calcular la predicción óptima $y(t+j)$ para $j \geq N_1$ y $j \leq N_2$. Esto se lleva a cabo resolviendo una ecuación diofántica cuya solución se puede obtener mediante un algoritmo recursivo.

Considérese la siguiente ecuación diofántica:

$$1 = E_j(z^{-1})\Delta A + z^{-j}F_j(z^{-1})$$

$$1 = E_j(z^{-1})\tilde{A} + z^{-j}F_j(z^{-1}) \quad (1.4)$$

Los polinomios E_j y F_j se derivan de la ecuación diofántica y vienen unívocamente definidos con grados $j-1$ y na (grado del polinomio A) respectivamente. Se pueden obtener dividiendo 1 entre $\tilde{A}(z^{-1})$ hasta que el resto se pueda factorizar como $z^{-j}F_j(z^{-1})$. El cociente de la división es el polinomio $E_j(z^{-1})$.

Si se multiplica la ecuación 1.2 por $E_j(z^{-1})z^j\Delta$

$$\tilde{A}(z^{-1})E_j(z^{-1})y(t+j) = E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t+j-d-1) + E_j(z^{-1})e(t+j) \quad (1.5)$$

Teniendo en cuenta 1.4, la ecuación queda:

$$(1 - z^{-j}F_j(z^{-1}))y(t+j) = E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t+j-d-1) + E_j(z^{-1})e(t+j) \quad (1.6)$$

Se pueden escribir los valores futuros de la salida como:

$$y(t+j) = F_j(z^{-1})y(t) + E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t+j-d-1) + E_j(z^{-1})e(t+j) \quad (1.7)$$

Como el grado del polinomio $E_j(z^{-1})$ es igual a $j-1$, los términos de ruido de la ecuación 1.7 se encuentran en el futuro y por tanto la mejor predicción viene dada por:

$$\hat{y}(t+j/t) = G_j(z^{-1})\Delta u(t+j-d-1) + F_j(z^{-1})y(t) \quad (1.8)$$

donde $G_j(z^{-1}) = E_j(z^{-1})B(z^{-1})$.

Resulta simple demostrar que los polinomios E_j y F_j se pueden obtener recursivamente, de forma que los nuevos valores en el paso $j+1$ (E_{j+1} y F_{j+1}) sean función de los del paso j . A continuación se muestra una demostración simple de la recursividad de la ecuación diofántica. Existen otras formulaciones del GPC que no están basadas en la recursividad de esta ecuación.

Considérense que los polinomios E_j y F_j se han obtenido dividiendo 1 entre $\tilde{A}(z^{-1})$ hasta que el resto haya sido factorizado como $z^{-j}F_j(z^{-1})$.

Con:

$$\begin{aligned} F_j(z^{-1}) &= f_{j,0} + f_{j,1}z^{-1} + \dots + f_{j,na}z^{-na} \\ E_j(z^{-1}) &= e_{j,0} + e_{j,1}z^{-1} + \dots + e_{j,j-1}z^{-(j-1)} \end{aligned}$$

Supóngase que se utiliza el mismo procedimiento para obtener E_{j+1} y F_{j+1} , es decir, dividir 1 entre $\tilde{A}(z^{-1})$ hasta que el resto se pueda factorizar como $z^{-(j+1)}F_{j+1}(z^{-1})$ con

$$F_{j+1}(z^{-1}) = f_{j+1,0} + f_{j+1,1}z^{-1} + \dots + f_{j+1,na}z^{-na}$$

Está claro que solamente es necesario dar un paso más en la división para obtener los polinomios E_{j+1} y F_{j+1} . Al ser E_{j+1} el nuevo cociente de la división, será igual al cociente que había hasta el momento (E_j) más un nuevo término, que será el $f_{j,0}$ pues el divisor (\tilde{A}) es mónico. Por tanto:

$$E_{j+1}(z^{-1}) = E_j(z^{-1}) + e_{j+1,j}z^{-j}$$

con $e_{j+1,j} = f_{j,0}$

Teniendo en cuenta que el nuevo resto será el resto anterior menos el producto del cociente por el divisor, los coeficientes del polinomio F_{j+1} se pueden expresar como:

$$f_{j+1,i} = f_{j,i+1} - f_{j,0}\tilde{a}_{i+1} \quad i = 0 \dots na$$

En resumen, la forma de obtener los polinomios E_j y F_j es la siguiente:

1. Comenzar con $E_1 = 1$, $F_1 = z(1 - \tilde{A})$
2. Ir añadiendo nuevos términos a E_j con $e_{j+1,j} = f_{j,0}$
3. Calcular $f_{j+1,i} = f_{j,i+1} - f_{j,0}\tilde{a}_{i+1} \quad i = 0 \dots na$, (siendo $f_{j,na+1} = 0$)

El polinomio G_{j+1} puede ser obtenido recursivamente como sigue:

$$G_{j+1} = E_{j+1}B = (E_j + f_{j,0}z^{-j})B = G_j + f_{j,0}z^{-j}B$$

Es decir, los primeros j coeficientes de G_{j+1} serán idénticos a los de G_j mientras que el resto viene dado por:

$$g_{j+1,j+i} = g_{j,j+i} + f_{j,0}b_i \quad \text{para } i = 0 \dots nb$$

Para resolver el problema del GPC, es necesario obtener la secuencia de señales de control $u(t), u(t+1), \dots, u(t+N)$ que optimice la expresión 1.3. Como el proceso tiene un tiempo muerto de d períodos de muestreo, la salida sólo se verá influenciada por la señal de control $u(t)$ tras $d+1$ períodos. Los horizontes se pueden definir por tanto como $N_1 = d+1$, $N_2 = d+N$ y $N_u = N$. Obsérvese que no tiene sentido hacer $N_1 < d+1$ ya que los términos que se añadirían a 1.3 sólo dependerían de acciones de control pasadas. Por otro lado, si $N_1 > d+1$ los primeros puntos de la predicción, que son los mejor estimados, no se tendrán en cuenta.

Considérese ahora el siguiente conjunto de predicciones de j pasos:

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+d+1/t) &= G_{d+1}\Delta u(t) + F_{d+1}y(t) \\ \hat{y}(t+d+2/t) &= G_{d+2}\Delta u(t+1) + F_{d+2}y(t) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\widehat{y}(t + d + N / t) = G_{d+N}\Delta u(t + N - 1) + F_{d+N}y(t)$$

que puede escribirse en forma matricial como:

$$y = Gu + F(z^{-1})y(t) + G'(z^{-1})\Delta u(t - 1) \quad (1.9)$$

Con:

$$y = [\widehat{y}(t + d + 1 / t) \dots \widehat{y}(t + d + N / t)]^T$$

$$u = [\Delta u(t) \ \Delta u(t + 1) \dots \Delta u(t + N - 1)]^T$$

$$G = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \dots & 0 \\ g_1 & g_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{N-1} & g_{N-2} & \dots & g_0 \end{bmatrix}$$

$$G'(z^{-1}) = \begin{bmatrix} (G_{d+1}(z^{-1}) - g_0)z \\ (G_{d+2}(z^{-1}) - g_0 - g_1z^{-1})z^2 \\ \vdots \\ (G_{d+N}(z^{-1}) - \dots - g_{N-1}z^{-(N-1)})z^N \end{bmatrix}$$

$$F(z^{-1}) = \begin{bmatrix} F_{d+1}(z^{-1}) \\ F_{d+2}(z^{-1}) \\ \vdots \\ F_{d+N}(z^{-1}) \end{bmatrix}$$

Nótese que los dos últimos términos en la ecuación 1.9 dependen sólo del pasado y se pueden agrupar por tanto dentro del vector f (respuesta libre) dando lugar a:

$$y = Gu + f \quad (1.10)$$

Si las condiciones iniciales son nulas, la respuesta libre también lo es. Si se aplica un escalón unitario a la entrada en el instante t , es decir,

$$\Delta u(t) = 1, \ \Delta u(t + 1) = 0, \dots, \Delta u(t + N - 1) = 0$$

La secuencia de salida $[\widehat{y}(t+1), \widehat{y}(t+2), \dots, \widehat{y}(t+N)]^T$ es igual a la primera columna de la matriz G . Es decir, la primera columna de la matriz G se puede calcular como la respuesta de la planta cuando se aplica un escalón unitario en la variable manipulable. La respuesta libre se puede calcular de forma recursiva como:

$$f_{j+1} = z(1 - \tilde{A}(z^{-1}))f_j + B(z^{-1})\Delta u(t - d + j)$$

con $f_0 = y(t)$ y $\Delta u(t + j) = 0$ para $j \geq 0$

Por otra parte, la función de coste se puede escribir como:

$$J = (Gu + f - w)^T(Gu + f - w) + \lambda u^T u \quad (1.11)$$

donde

$$w = [w(t + d + 1) \dots w(t + d + N)]^T$$

La ecuación 1.11 se puede poner de forma estándar como:

$$J = \frac{1}{2}u^T H u + c^T u \quad (1.12)$$

Reordenando términos y eliminando aquellos que no dependen de u se obtiene

$$J = u^T \{G^T \delta G + \lambda\}u + 2(f - w)^T \delta G u \quad (1.13)$$

De esta forma de tiene el Hessiano H y el gradiente c [23], [24].

$$H = G^T \delta G + \lambda \quad (1.14)$$

$$c = G^T \delta(f - w) \quad (1.15)$$

Debido al uso de la estrategia deslizante, sólo se aplica realmente el primer elemento del vector u , repitiendo de nuevo el mismo procedimiento al siguiente instante de muestreo.

En (Clarke et al., 1987) se introduce el concepto de horizonte de control para reducir la carga de cálculo, considerando que las señales de control futuras se mantendrán constantes tras $N_u < N$ (en particular, si $N_u = 1$ se reduce a un escalar, aunque se restringe la optimalidad del GPC).

1.3 Control de Matriz Dinámica DMC

El método DMC (Dynamic Matrix control) se desarrolló a finales de los setenta por Cutler and Ramaker de Shell Oil Co. y ha sido aceptado ampliamente en el mundo industrial, principalmente por las industrias petroquímicas (Qin y Badgwell, 1997), por ser muy intuitivo, permitir un procedimiento de identificación relativamente sencillo y por su aplicación a sistemas multivariables de gran dimensión con la consideración de

restricciones. Actualmente DMC [4] es algo más que un algoritmo y parte de su éxito se debe al hecho de que el producto comercial resuelve otros temas como identificación u optimización global de la planta. El DMC fué una de las primeras implementaciones comerciables del control predictivo.

1.3.1 Predicción multipaso

Se considera la figura 1.3 donde se tienen tres tipos diferentes de entradas externas [3], [8]: la variable manipulada u (MV), cuyo efecto sobre la salida, normalmente una variable controlada (CV), se describe por P_u ; la variable de perturbación medida d (DV), cuyo efecto sobre la salida se describe por P_d y finalmente las perturbaciones no medidas y no modeladas w_y que agregan una desviación (bias) a la salida del sistema.

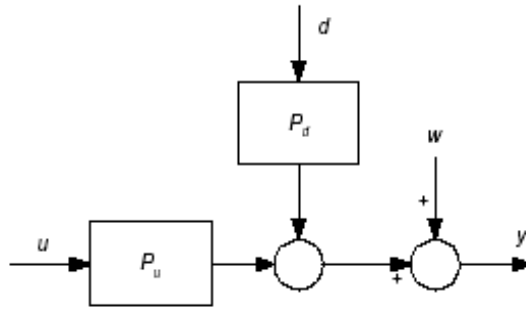


Figura 1.3: Esquema del modelo básico

El sistema global puede describirse por:

$$y(k) = \begin{bmatrix} p^u & p^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \\ d(k) \end{bmatrix} + w_y(k) \quad (1.16)$$

Se supone que los modelos de respuesta al escalón S^u , S^d están disponibles para la dinámica sistema p^u y p^d , respectivamente. Se define el modelo global multivariable de respuesta al escalón:

$$S = \begin{bmatrix} S^u & S^d \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

que están dirigidos por la entrada global:

$$\Delta v(k) = \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta d(k) \end{bmatrix}$$

Sea el estado del sistema:

$$\tilde{Y}(k) = [\tilde{y}_0(k), \tilde{y}_1(k), \dots, \tilde{y}_{n-1}(k)]^T \quad (1.18)$$

Por definición, el estado consiste en las salidas del sistema en el futuro:

$$\tilde{Y}(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ \vdots \\ y(k+n-1) \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

obtenidas bajo la suposición de que las entradas del sistema no cambian los valores anteriores, es decir:

$$\begin{aligned} \Delta u(k) &= \Delta u(k+1) = \dots = 0 \\ \Delta d(k) &= \Delta d(k+1) = \dots = 0 \end{aligned}$$

El estado no incluye la información de perturbación no medida y se supone la definición:

$$w_y(k) = w_y(k+1) = \dots = 0$$

El estado se actualiza con:

$$\tilde{Y}(k) = M\tilde{Y}(k-1) + S\Delta v(k-1) \quad (1.20)$$

La ecuación refleja el efecto del cambio de la entrada $\Delta v(k-1)$ sobre la evolución futura del sistema suponiendo que no hay ningún cambio adicional en la entrada. La influencia de los cambios en la entrada se manifiestan a través de la matriz de respuesta al escalón S .

El efecto de cualquier cambio en una entrada futura también se puede describir apropiadamente por la matriz de respuesta al escalón. Considerese la salida predicha, para las siguientes p etapas de tiempo:

$$\begin{bmatrix} y(k+1/k) \\ y(k+2/k) \\ y(k+3/k) \\ \vdots \\ y(k+p/k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1(k) \\ \tilde{y}_2(k) \\ \tilde{y}_3(k) \\ \vdots \\ \tilde{y}_p(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} S_1^u \\ S_2^u \\ S_3^u \\ \vdots \\ S_p^u \end{bmatrix} \Delta u(k / k) + \begin{bmatrix} 0 \\ S_1^u \\ S_2^u \\ \vdots \\ S_{p-1}^u \end{bmatrix} \Delta u(k+1 / k) + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ S_1^u \end{bmatrix} \Delta u(k+p-1 / k) \\
& + \begin{bmatrix} S_1^d \\ S_2^d \\ S_3^d \\ \vdots \\ S_p^d \end{bmatrix} \Delta d(k / k) + \begin{bmatrix} 0 \\ S_1^d \\ S_2^d \\ \vdots \\ S_{p-1}^d \end{bmatrix} \Delta d(k+1 / k) + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ S_1^d \end{bmatrix} \Delta d(k+p-1 / k) \\
& + \begin{bmatrix} w_y(k+1 / k) \\ w_y(k+2 / k) \\ w_y(k+3 / k) \\ \vdots \\ w_y(k+p / k) \end{bmatrix} \tag{1.21}
\end{aligned}$$

En 1.21 el primer término de la derecha son los primeros p elementos de estado que describen la evolución futura del sistema cuando todas las entradas futuras cambian desde cero. Los términos restantes describen el efecto de los cambios presentes y futuros de las entradas manipuladas $\Delta u(k+i / k)$, las perturbaciones medidas $\Delta d(k+i / k)$ y las perturbaciones no medidas y no modeladas $w_y(k+i / k)$. La notación $y(k+i / k)$ representa la predicción de $y(k+i)$ basada en el hecho de que la información está disponible en el tiempo k . La misma anotación se aplica a Δd y Δw_y .

Los valores de la mayoría de estas variables no están disponibles en el tiempo k y tienen que ser predichas de una manera racional. La medida en el tiempo k , $d(k)$ es conocida y por consiguiente $\Delta d(k) = d(k) - d(k-1)$. A menos que alguna información de proceso adicional esté disponible para concluir sobre la conducta de las perturbaciones futuras, suponemos que las perturbaciones no cambian en el futuro para la derivación algoritmo:

$$\Delta d(k+1 / k) = \Delta d(k+2 / k) = \dots = \Delta d(k+p-1 / k) = 0 \tag{1.22}$$

Esta suposición es razonable cuando las perturbaciones están variando con poca frecuencia. Similarmente, se supone que las perturbaciones futuras no modeladas $w_y(k+i / k)$ no cambian.

$$w_y(k / k) = w_y(k + 1 / k) = w_y(k + 2 / k) = \dots = w_y(k + p / k) \quad (1.23)$$

Se obtiene una estimación de la perturbación no modelada presente de la ecuación 1.16:

$$w_y(k / k) \approx y_m(k) - \tilde{y}_0(k) \quad (1.24)$$

donde $y_m(k)$ representa el valor de la salida como el realmente medido en la planta. Aquí $\tilde{y}_0(k)$, el primer componente de estado $\tilde{Y}(k)$, es la predicción modelada de la salida en el tiempo k (suponiendo $w_y(k) = 0$) basado en la información en este tiempo. La diferencia entre esta salida predicha y la medida de la salida proporciona una buena estimación de la perturbación no modelada.

Para la generalidad considerar el caso donde las entradas manipuladas no varían por encima del horizonte p pero solamente en las próximas m etapas.

$$(\Delta u(k / k), \Delta u(k + 1 / k), \dots, \Delta u(k + m - 1 / k))$$

y que después los cambios en la entrada se vuelven cero.

$$\Delta u(k + m / k) = \Delta u(k + m + 1 / k) = \dots = \Delta u(k + p - 1 / k) = 0 \quad (1.25)$$

Con estas suposiciones 1.21 se obtiene:

$$Y(k + 1 / k) =$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \tilde{y}_1(k) \\ \tilde{y}_2(k) \\ \tilde{y}_3(k) \\ \vdots \\ \tilde{y}_p(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_1^d \\ S_2^d \\ S_3^d \\ \vdots \\ S_p^d \end{bmatrix} \Delta d(k) + \begin{bmatrix} y_m(k) - \tilde{y}_0(k) \\ y_m(k) - \tilde{y}_0(k) \\ y_m(k) - \tilde{y}_0(k) \\ \vdots \\ y_m(k) - \tilde{y}_0(k) \end{bmatrix} \\
& \text{M}\tilde{Y}(k) \text{ de la memoria} \quad S^d \Delta d(k) \text{ termino prealimentado} \quad I_p(y_m(k) - \tilde{y}_0(k)) \text{ termino realimentado} \\
& + \begin{bmatrix} S_1^u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_2^u & S_1^u & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ S_m^u & S_{m-1}^u & S_{m-2}^u & \dots & S_1^u \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ S_p^u & S_{p-1}^u & S_{p-2}^u & \dots & S_{p-m+1}^u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k / k) \\ \Delta u(k + 1 / k) \\ \Delta u(k + 2 / k) \\ \vdots \\ \Delta u(k + m - 1 / k) \end{bmatrix} \quad (1.26) \\
& \quad \quad \quad S^u \text{ matriz dinamica} \quad \Delta U(k) \text{ movimiento de entrada futuro}
\end{aligned}$$

Los nuevos símbolos son:

$$Y(k+1/k) = \begin{bmatrix} y(k+1/k) \\ y(k+2/k) \\ \vdots \\ y(k+p/k) \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

$$S^u = \begin{bmatrix} S_1^u & 0 & \cdots & 0 \\ S_2^u & S_1^u & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_m^u & S_{m-1}^u & \cdots & S_1^u \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_p^u & S_{p-1}^u & \cdots & S_{p-m+1}^u \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

$$S^d = \begin{bmatrix} S_1^d \\ S_2^d \\ \vdots \\ S_p^d \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

$$I_p = \begin{bmatrix} I \\ I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix}_{p \times 1} \quad (1.30)$$

$$\Delta U(k) = \begin{bmatrix} \Delta u(k/k) \\ \Delta u(k+1/k) \\ \Delta u(k+2/k) \\ \vdots \\ \Delta u(k+m-1/k) \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & I & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{para } p < n \quad (1.32)$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & I \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & I \end{bmatrix} \quad \text{para } p \geq n \quad (1.33)$$

Con esta nueva anotación la predicción p pasos adelante se convierte en:

$$Y(k+1/k) = M\tilde{Y}(k) + S^d \Delta d(k) + I_p (y_m(k) - \tilde{y}_0(k)) + S^u \Delta U(k) \quad (1.34)$$

donde los primeros tres términos son completamente definidos por las acciones de control del pasado ($\tilde{Y}(k)$, $\tilde{y}_0(k)$) y las medidas presentes ($y_m(k)$, $\Delta d(k)$) y el último término describe el efecto de los movimientos de las variables manipuladas en el futuro $\Delta U(k)$.

Esta ecuación de predicción puede ser fácilmente ajustada si son hechas diferentes suposiciones sobre la conducta futura de las perturbaciones medidas y no medidas. Por ejemplo, si se espera que las perturbaciones evolucionen con una forma de rampa se pondría hacer lo siguiente:

$$\Delta d(k) = \Delta d(k+1/k) = \dots = \Delta d(k+p-1/k) \quad (1.35)$$

y

$$w_y(k+l/k) = w_y(k/k) + l(w_y(k/k) - w_y(k-1/k-1)) \quad (1.36)$$

1.3.2 Función objetivo

Los requisitos de funcionamiento de la planta determinan los criterios de desempeño del sistema de control. Estos criterios deben expresarse en términos matemáticos para que la ley de control pueda obtenerse en forma algorítmica. En DMC una función objetivo cuadrática es usada tal que pueda declararse en su forma más simple:

$$\min_{\Delta u(k/k) \dots \Delta u(k+m-1/k)} \sum_{l=1}^p \|y(k+l) - r(k+l)\|^2 \quad (1.37)$$

Este criterio minimiza la suma de las desviaciones al cuadrado de los valores predichos CV en la trayectoria de referencia variante en el tiempo o punto de ajuste $r(k+l)$ hasta p etapas en tiempo futuro. El criterio cuadrático castiga proporcionalmente más las grandes desviaciones que las menores sobre el promedio de los residuos, acercando la salida a su trayectoria de referencia y evitando grandes desplazamientos.

Se supone que la variable manipulada es constante después de m intervalos de tiempo en el futuro, lo que equivale a:

$$\Delta u(k+m/k) = \Delta u(k+m+1/k) = \dots = \Delta u(k+p-1/k) = 0 \quad (1.38)$$

donde $m \leq p$ siempre. Esto significa que el DMC sólo determina los próximos m movimientos. La selección de m y p afecta la conducta de ciclo cerrado. Es más, m , el número de grados de libertad, tiene una influencia dominante en el esfuerzo de cálculo computacional. Tampoco, tiene sentido hacer el horizonte más largo que $m+n$ ($p \leq m+n$), porque para un sistema FIR de orden n el sistema alcanza un estado estable después de $m+n$ etapas. Aumentando el horizonte más allá de $m+n$ simplemente agregaría condiciones constantes idénticas a la función objetivo.

Por las interacciones inherentes del proceso, generalmente no es posible mantener simultáneamente todas las salidas cercanas a sus trayectorias de referencia correspondientes. Por consiguiente, en la práctica sólo un subconjunto de las salidas es bien controlado a expensas de desplazamientos más grandes en otras. Esto puede ser transparentemente influenciado incluyendo pesos en la función objetivo así:

$$\min_{\Delta u(k/k) \dots \Delta u(k+m-1/k)} \sum_{l=1}^p \delta \|y(k+l) - r(k+l)\|^2 \quad (1.39)$$

Finalmente, los movimientos de las variables manipuladas hacen que la salida siga una trayectoria dada que podría ser demasiado severa para ser aceptable en la práctica. Esto puede corregirse agregando un término de penalización a la función objetivo para los movimientos de las variables manipuladas como sigue:

$$\min_{\Delta u(k)} \sum_{l=1}^p \delta \|y(k+l) - r(k+l)\|^2 + \sum_{l=1}^m \lambda \|\Delta u(k+l-1)\|^2 \quad (1.40)$$

Obsérvese que los elementos más grandes de la matriz λ resultan en menores movimientos y por consiguiente las trayectorias de salida no se seguirán. Así, las magnitudes relativas de δ y λ determinarán el intercambio entre seguir la trayectoria estrechamente y reducir la acción de las variables manipuladas.

Sustituyendo la ecuación de predicción en la función objetivo se obtiene:

$$\Delta U(k)^T H^u \Delta U(k) - G(k+1/k)^T \Delta U(k) \quad (1.41)$$

donde la hessiana es:

$$H^u = S^{uT} \delta^T \delta S^u + \lambda^T \lambda \quad (1.42)$$

y el vector gradiente es:

$$G(k+1/k) = 2S^{uT} \delta^T \delta E_p(k+1/k) \quad (1.43)$$

donde

$$E_p(k+1/k) \triangleq R(k+1) - [M\tilde{Y}(k) + S^d \Delta d(k) + I_p(y_m(k) - \tilde{y}_0(k))] \quad (1.44)$$

$R(k+1)$ es el vector de la trayectoria de referencia.

Conviene recordar que, como ocurre en todas las estrategias de control predictivo, sólo el primer elemento del vector $\Delta U(k)$ se envía realmente a la planta [1]. No es aconsejable implementar la secuencia de control calculada completa (m valores), ya que es imposible estimar perfectamente las perturbaciones en el horizonte y por tanto es imposible anticiparse de forma precisa a las inevitables perturbaciones que hacen que la salida real difiera de las predicciones que se han usado en el cálculo. Además, la referencia podría cambiar en dicho intervalo.

1.4 Restricciones en control predictivo

En la práctica todos los procesos están sujetos a restricciones. Los actuadores tienen un campo limitado de acción impuesto por límites físicos [1] (por ejemplo una válvula no puede abrir más de un 100 % o un calentador no puede aportar más de su potencia máxima. También existen límites de seguridad (por ejemplo presiones o temperaturas máximas), requerimientos tecnológicos (por ejemplo mantener ciertas temperaturas en un rango dado), limitaciones de calidad del producto (no salirse de cierta zona) o normativa medioambiental.

1.4.1 Tratamiento convencional de restricciones

El tratamiento convencional de restricciones en control de procesos se basa en que las restricciones en la variable manipulada (entrada) se cumplen saturando la salida del controlador. Sin embargo, las restricciones en la variable controlada (salida) no pueden abordarse; se intenta evitar su violación trabajando alejados de los límites (en zona segura), operando lejos de la restricción. Por seguridad se trabaja con una consigna inferior, más lejos del punto de operación óptimo, lo que normalmente equivale a una disminución de la calidad y/o cantidad en la producción, ya que normalmente el punto óptimo se encuentra en la intersección de las restricciones obligando a acercarse lo más posible a éstas pero sin superarlas.

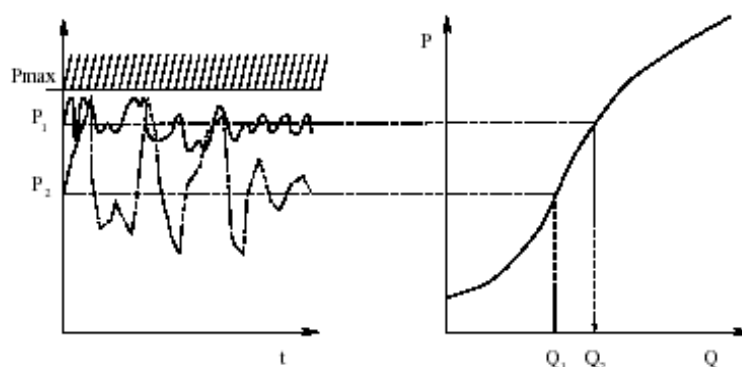


Figura 1.4: Restricciones y punto de operación óptimo

Si el controlador fuera capaz de tener en cuenta las restricciones y evitar su violación, el proceso podría operar más cerca de éstas y por tanto de forma más eficiente. La figura 1.4 muestra un ejemplo donde existe una limitación de presión máxima y se observa cómo al alejar el punto de operación del límite la producción Q disminuye.

En cuanto a la forma de operar de un controlador predictivo determinado que no considera restricciones el procedimiento es similar: si la señal de control calculada viola la restricción, se satura. Las señales futuras ni siquiera se tienen en cuenta, ya que normalmente no se calculan.

Esta forma de proceder no garantiza el carácter óptimo de la solución y en ningún caso garantiza el cumplimiento de las restricciones en la salida. La violación de los límites de las variables controladas puede ser más costoso y peligroso, produciendo daños en equipos y pérdidas en la producción.

1.4.2 Restricciones en el MPC

En la actualidad el MPC es la única metodología capaz de incorporar las restricciones de forma sistemática en la fase de diseño del controlador, siendo esta característica una de las razones de su gran éxito en la industria. Parece lógico que al disponer de un modelo dinámico del proceso se pueda conocer la evolución futura de su salida y por tanto se pueda saber si ésta va a violar o no las restricciones y actuar en consecuencia.

Para formular el algoritmo MPC con restricciones hay que expresar éstas en función de la variable sobre la que se puede actuar, es decir, en función de u . Las restricciones en la entrada están ya expresadas en función de u y para las restricciones en la salida se hace uso de las ecuaciones de predicción que expresan el valor futuro de las salidas en función de las señales de control futuras y valores conocidos en el instante t .

Cualquier controlador predictivo calcula la predicción como:

$$y = Gu + f$$

Por lo que tanto entradas como salidas se pueden expresar en función del vector de incrementos de la señal de control.

Las restricciones que aparecen serán básicamente amplitud y velocidad de cambio en la señal de control y amplitud en la salida y se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} \underline{U} &\leq u(t) \leq \overline{U} \quad \forall t \\ \underline{u} &\leq u(t) - u(t-1) \leq \overline{u} \quad \forall t \\ \underline{y} &\leq y(t) \leq \overline{y} \quad \forall t \end{aligned}$$

Siendo

\underline{U} : señal de control mínima

\overline{U} : señal de control máxima

\underline{u} : velocidad de cambio de la señal de control mínima

\overline{u} : velocidad de cambio de la señal de control máxima

\underline{y} : salida mínima

\overline{y} : salida máxima

Para un proceso de m entradas y n salidas y restricciones en el horizonte N , las restricciones se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} l\underline{U} &\leq Tu + u(t-1)l \leq l\overline{U} \\ l\underline{u} &\leq u \leq l\overline{u} \\ l\underline{y} &\leq Gu + f \leq l\overline{y} \end{aligned}$$

Donde l es una matriz de dimensión $(N \times n) \times m$ formada por N $m \times m$ matrices identidad y T es una matriz triangular inferior por bloques cuyos elementos no nulos son matrices identidad de dimensión $m \times m$. En forma condensada se pueden expresar como:

$$Ru \leq C \quad (1.45)$$

Siendo

$$R = \begin{bmatrix} I_{N \times N} \\ -I_{N \times N} \\ T \\ -T \\ G \\ -G \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \underline{l}u \\ -\underline{l}u \\ \overline{l}U - \underline{l}u(t-1) \\ -\underline{l}U + \underline{l}u(t-1) \\ \underline{l}\bar{y} - f \\ -\underline{l}\bar{y} + f \end{bmatrix}$$

A parte de las restricciones en amplitud, a la salida se le pueden aplicar otro tipo de restricciones para forzar un determinado comportamiento temporal (movimiento dentro de una banda, comportamiento monótono, evitar respuesta inicial inversa, etc.) como se muestra en [1], pudiendo expresarlas también de la forma genérica.

Además de la clasificación en restricciones en la entrada y en la salida según a qué tipo de variable se apliquen, se puede hacer otra clasificación atendiendo a la forma de tratarlas. Así, se puede hablar de:

- Restricciones **duras** como aquéllas que no se pueden violar bajo ningún concepto. En este grupo se incluyen las restricciones relacionadas con la operación segura del proceso.
- Restricciones **blandas**, que son aquéllas que pueden ser violadas en un momento dado por no ser cruciales, pero la violación se penaliza en la función objetivo como un término más. Es una forma de relajar la restricción.

1.4.3 Resolución del problema

Con la adición de restricciones el problema general de control predictivo cambia y se puede formular como

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } J(u) \\ & \text{sujeito a } Ru \leq C \end{aligned}$$

Es decir, el problema consiste en la minimización de una función cuadrática con restricciones lineales, lo que se conoce como Programación Cuadrática, QP. En este caso no se puede encontrar una solución analítica como en el caso sin restricciones, sino que hay que recurrir a métodos iterativos.

Resulta evidente que la carga de cálculo será considerable, ya que hay que encontrar la solución resolviendo el algoritmo iterativo en cada periodo de muestreo. Normalmente el esfuerzo está justificado por el beneficio económico obtenido al trabajar más cerca del punto de operación óptimo.

Para resolver el problema QP existen diversos algoritmos suficientemente probados. Una revisión de estos métodos se puede encontrar en [1] y [9].

Un problema asociado a la implementación del control con restricciones es el análisis de la estabilidad del bucle cerrado. Como es necesario utilizar métodos numéricos para resolver el problema de la optimización, la ley de control resultante no se puede describir de forma explícita, haciendo el problema muy difícil de atacar mediante la teoría clásica de control.

En los últimos años se ha trabajado e investigado mucho sobre la estabilidad en estas circunstancias, proponiéndose soluciones basadas en la teoría de Lyapunov. La idea básica consiste en que la función de coste cuando el horizonte es infinito es monótona decreciente (si existe solución factible) y se puede interpretar como función de Lyapunov que garantiza por tanto la estabilidad. Sin embargo, como la solución tiene que ser numérica, el número de variables de decisión tiene que ser finito, por lo que se han propuesto dos ideas. En la primera, se descompone la función objetivo en dos partes: una con horizonte finito y restricciones y otra con horizonte infinito y sin restricciones. La segunda idea es en esencia equivalente y consiste en imponer restricciones terminales al estado y usar un horizonte infinito.

En cualquier caso es un tema muy abierto, sobre todo si se quieren considerar las incertidumbres en el modelo y los temas asociados con la factibilidad.

En [4] se encuentra información sobre gestión de restricciones.

1.5 Solución por programación cuadrática del problema de control

Ahora se presentan algunos conceptos básicos de programación no lineal [3]. En particular, es considerada la siguiente formulación de Programación Cuadrática (QP):

$$\min_x x^T H x - g^T x \quad (1.46)$$

s.a $Cx \geq c$

donde

H es una matriz simétrica llamada la matriz Hessiana;

g es el vector gradiente;

C es la ecuación matricial de restricciones de desigualdad; y

c es la ecuación vectorial de restricciones de desigualdad.

Este problema minimiza un objetivo cuadrático en las variables de decisión x sujetas a un conjunto de desigualdades lineales. En ausencia de restricciones la solución de este problema de optimización puede encontrarse analíticamente por computo de las condiciones necesarias para optimalidad como sigue:

$$\frac{\partial(x^T H x - g^T x)}{\partial x} = 2Hx - g = 0 \quad (1.47)$$

La derivada de segundo orden es

$$\frac{\partial^2(x^T H x - g^T x)}{\partial^2 x} = 2H \quad (1.48)$$

que significa que para un mínimo no restringido existe la Hessiana que debe ser semi-definida positiva.

El problema de minimizar la suma de cuadrados de los residuos de un conjunto de ecuaciones lineales:

$$\rho = Ax - b \quad (1.49)$$

puede ponerse de la forma simple QP si:

$$\min_x \rho^T \rho = \min_x (Ax - b)^T (Ax - b) \quad (1.50)$$

$$\min_x \rho^T \rho = \min_x x^T A^T A x - 2b^T A x + b^T b \quad (1.51)$$

Así QP es:

$$\min_x x^T A^T A x - 2b^T A x \quad (1.52)$$

obteniéndose:

$$H = A^T A \quad (1.53)$$

$$g = 2A^T b \quad (1.54)$$

Para obtener la solución única no restringida:

$$x = \frac{1}{2} H^{-1} g \quad (1.55)$$

H debe ser definida positiva.

Cuando se agregan restricciones de desigualdad, H no se requiere que sea estrictamente definida positiva. Por ejemplo, para $H = 0$ el problema de optimización se vuelve:

$$\begin{aligned} \min_x & -g^T x \\ \text{s.a.} & Cx \geq c \end{aligned} \quad (1.56)$$

que es un problema de Programación Lineal (LP).

1.6 Energía de la señal de control y energía del error (error cuadrático medio)

En controladores predictivos como el GPC y el DMC, se minimiza una función objetivo que penaliza la distancia entre la salida y la referencia y el esfuerzo en la señal de control [1]; lo cual se puede apreciar matemáticamente en 1.3 y 1.40.

De hecho minimizar el error y el esfuerzo de control son dos de las consignas más importantes en la implementación de un sistema de control a una planta determinada.

Al tener un error mínimo en un proceso industrial se está logrando que la variable a controlar esté en el punto deseado y se obtenga en muchos casos buena calidad en el producto final. Al tener un mínimo esfuerzo de control se tiene ahorro en los costos de producción.

Idealmente en cualquier proceso se debe tener un error nulo y un mínimo esfuerzo de control, pero no siempre es posible obtener el mínimo resultado en los 2 casos en un solo algoritmo.

Por ejemplo en algunos procesos industriales es más importante ahorrar energía de control para minimizar gastos de operación que tener un error nulo porque no es necesario que el producto final tenga una durabilidad de muchos años. En otros procesos puede ser indispensable que la salida del sistema se encuentre en la referencia deseada, a cuenta del esfuerzo de control requerido.

Hallando la energía de control y el error cuadrático medio, es posible comparar los 2 controladores predictivos estudiados hasta el momento (GPC y DMC) y analizar en cuál de estos controladores se tiene más ahorro de energías.

Por ello se cuantificarán las energías del error y de la señal de control a través del concepto de la energía de una señal discreta, ya que los controladores predictivos son digitales.

La energía de una señal discreta $x(n)$ está dada por:

$$E = \sum_{-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (1.57)$$

y por lo tanto la energía de la señal de control E_c y del error E_e están dadas por:

$$E_c = \sum_0^{Nm} |u(n)|^2 \quad (1.58)$$

$$E_e = \sum_0^{Nm} |w(n) - y(n)|^2 \quad (1.59)$$

Donde Nm es el número de muestras, u es la señal de control, y es la salida del sistema y w la referencia.

Con estos resultados en cada controlador se obtienen conclusiones y argumentos a la hora de implementar un control predictivo a un sistema determinado, ya que en algunos casos puede ser más necesario obtener ahorro en el esfuerzo de control y en otros menor error cuadrático medio.

A continuación se describirán las 3 plantas a ser controladas por el GPC y el DMC: nivel de tanques acoplados (sistema estable), posición de un motor de corriente continua (sistema integrante) y ángulo de un péndulo invertido (sistema inestable), mostrando respectivamente el modelado matemático, la función de transferencia, la discretización, las simulaciones de los controladores predictivos con los respectivos resultados de las energías y finalmente las conclusiones.

Capítulo 2

TANQUES ACOPLADOS

El control de nivel de líquido en tanques y el control de flujo entre tanques es un problema básico en los procesos industriales [15].

Por ejemplo en una gran cantidad de plantas se requiere bombear un líquido, almacenarlo en un tanque y luego bombearlo a otro tanque. Muchas veces los líquidos son procesados por mezclas o tratamientos químicos en los tanques, pero siempre el nivel del fluido en los tanques debe ser controlado y el flujo entre tanques debe ser regulado.

Con frecuencia los tanques son acoplados de tal forma que se presenta interacción entre los niveles de estos, los cuales tienen que ser controlados.

Industrias importantes donde son esenciales el control de nivel de líquido y flujo:

- Industrias petroquímicas.
- Industrias de papel.
- Industrias de tratamiento de agua.

En [14] se puede encontrar la implementación de control predictivo a un sistema de tanques.

2.1 Modelo de dos tanques acoplados

Es importante entender las matemáticas de cómo se comporta el sistema de tanques acoplados, éste es el modelado del sistema y es una parte muy importante en el análisis de los sistemas de control.

Cuando 2 tanques se unen de la siguiente manera, se forma el sistema de tanques acoplados, ver figura 2.1.

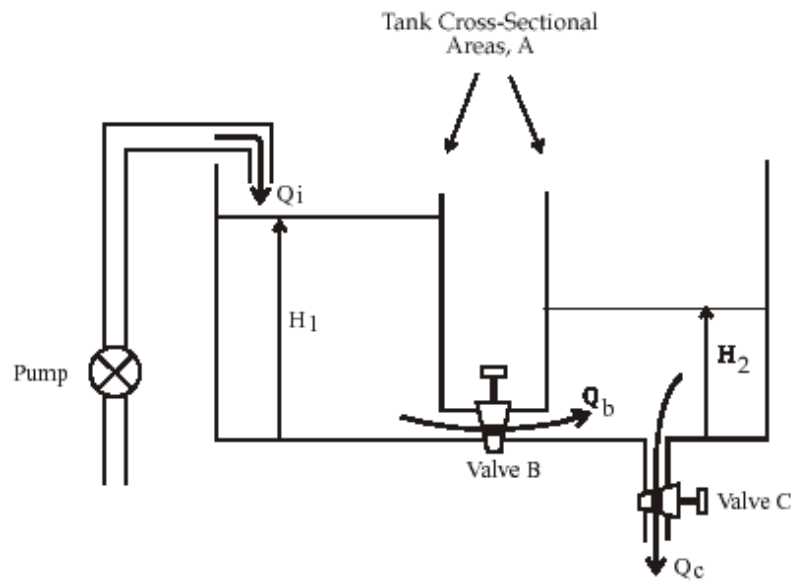


Figura 2.1: Sistema de tanques acoplados

En los tanques acoplados el sistema de estados está formado por el nivel H_1 en el tanque 1 y el nivel H_2 en el tanque 2. Si la entrada de control es el flujo de la bomba Q_i , entonces la variable a ser controlada será normalmente el segundo estado, que es el nivel H_2 , con perturbaciones causadas por variaciones en el promedio del flujo de salida del sistema por la válvula B o por cambios en la válvula C . Es necesario realizar un modelo para cada uno de los niveles de los tanques.

Para el tanque 1 la ecuación de balance de flujo es:

$$Q_i - Q_b = A \frac{\partial H_1}{\partial t} \quad (2.1)$$

Donde A es el área de la sección transversal del tanque y H es la altura del líquido en el tanque. Otra variable es la rata del flujo Q_b del fluido, desde el tanque 1 al tanque 2 por medio de la válvula B .

Para el tanque 2 la ecuación de balance de flujo es:

$$Q_b - Q_c = A \frac{\partial H_2}{\partial t} \quad (2.2)$$

La nueva variable es la rata del flujo Q_c del fluido de salida en el tanque 2, a través de la válvula C .

El modelo del sistema se obtiene de 2 balances de flujo y de las ecuaciones no

lineales de los flujos a través de las válvulas. Si las válvulas son orificios ideales, la no linealidad del sistema es una ley de raíz cuadrada.

Los dos balances de flujo para válvulas ideales son:

$$Q_i - C_{db}a_b\sqrt{2g(H_1 - H_2)} = A\frac{\partial H_1}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$C_{db}a_b\sqrt{2g(H_1 - H_2)} - C_{dc}a_c\sqrt{2gH_2} = A\frac{\partial H_2}{\partial t} \quad (2.4)$$

En estas ecuaciones, a es el área de la sección transversal del orificio (en la práctica esta área es dada por las dimensiones de la válvula y el conducto del flujo en el cual está montada). C_d es el coeficiente de descarga de la válvula, que tiene en cuenta todas las características del fluido, además de pérdidas e irregularidades en el sistema como en los dos lados de la ecuación de balance.

Finalmente g que es la constante gravitacional igual a $980 \frac{cm}{s^2}$.

Las 2 anteriores ecuaciones describen la dinámica del sistema de tanques acoplados en su forma no lineal, con ecuaciones ideales para las válvulas. En aplicaciones generales, la ley de raíz cuadrada es sólo una aproximación.

En el problema del nivel del tanque la no linealidad es suave y puede ser linealizada en un nivel H de operación particular, usando la pendiente de la no linealidad en H . Esto tiene el resultado importante de que el modelo del sistema linealizado tiene parámetros que dependen de las condiciones de operación, es decir, la dinámica del sistema cambia si el nivel de operación normal cambia.

Para diseñar los sistemas de control a los tanques acoplados, las ecuaciones son linealizadas considerando las pequeñas variaciones q_i en Q_i , h_1 en H_1 y h_2 en H_2 . Las variaciones son medidas con respecto a los niveles de operación normal, H_1^o y H_2^o .

Con la linealización de las ecuaciones 2.3 y 2.4, se obtienen las ecuaciones de estado para los tanques acoplados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} q_i \quad (2.5)$$

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Los coeficientes de la matriz de estado, $k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}$ son todos funciones de los niveles de operación en los tanques y por lo tanto los parámetros del modelo del estado van a variar si el nivel de operación es modificado.

2.2 Función de transferencia

Con el fin de utilizar un modelo lineal más simple del sistema de tanques acoplados, se utilizará la siguiente función de transferencia, en la que se define la salida del sistema como el nivel en el tanque 2 y la entrada como el flujo en la bomba:

$$\frac{h_2(s)}{q_i(s)} = \frac{G}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \quad (2.7)$$

Donde G es la ganancia del sistema y las constantes de tiempo T_1 y T_2 están relacionadas a los niveles de operación en los tanques y son funciones de los parámetros del sistema; la diferencia de niveles en los tanques es directamente proporcional al área de la sección transversal de los tanques.

Teniendo en cuenta los parámetros que corresponden a esta función de transferencia, se puede realizar una identificación más sencilla y práctica del sistema a través de la respuesta al escalón. Los parámetros hallados en [18] son los siguientes:

$$G = 0.5361$$

$$T_1 = 2.03 \text{ seg}$$

$$T_2 = 126.41 \text{ seg}$$

Entonces la aproximación lineal de segundo orden del sistema se expresaría:

$$\frac{h_2(s)}{q_i(s)} = \frac{0.5361}{257.75s^2 + 160.6s + 1} = \frac{0.00208}{s^2 + 0.623s + 0.00388} \quad (2.8)$$

Ahora se observará el comportamiento del sistema en lazo abierto (el nivel de líquido del segundo tanque) ante un flujo de entrada en el primer tanque de $1 \frac{\text{cm}^3}{\text{seg}}$.

De acuerdo a la figura 2.2 se puede apreciar que el sistema tiene un comportamiento estable, ya que al aplicar un flujo de entrada constante en el tanque 1, se alcanza un nivel determinado de líquido en el tanque 2.

2.3 Discretización

Ahora conociendo el comportamiento del sistema, se procederá a discretizar la función de transferencia, para ello hay que hallar el periodo de muestreo T_s del sistema.

Se tomará el periodo de muestreo de [22] como:

$$T_s = \frac{1}{10 \times BW} \quad (2.9)$$

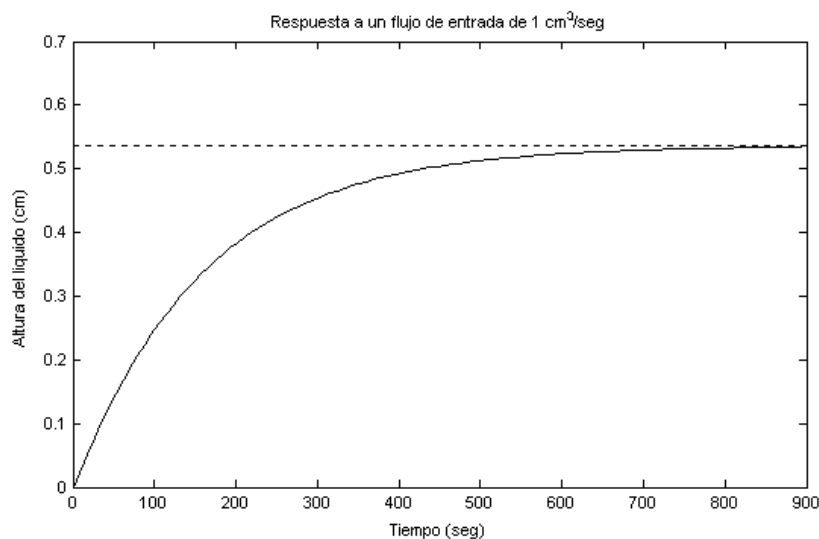


Figura 2.2: Respuesta de los tanques acoplados en lazo abierto

A través de la función `bandwidth` de Matlab se halla el ancho de banda del sistema BW , obteniendo el valor de 0.0063 rad/seg y aproximadamente $1.0026 \times 10^{-3} \text{ Hz}$.

$$\text{Entonces } T_s = \frac{1}{10 \times 1.0026 \times 10^{-3}} = 99.74 \text{ seg.}$$

Conociendo el tiempo de muestreo y con un retenedor de orden cero (`zoh`), se procede a discretizar el sistema a través de la función `c2d`:

$$G(z^{-1}) = \frac{0.2469z^{-1} + 0.00295z^{-2}}{1 - 0.5339z^{-1}} \quad (2.10)$$

En la figura 2.3 se aprecia el comportamiento del sistema de tanques acoplados transformado.

2.4 Restricciones

Para la implementación de los controladores predictivos DMC y GPC, es necesario definir las restricciones en la señal de control, restricciones en la velocidad de la señal de control y restricciones en la salida; elementos que son tenidos en cuenta en la optimización de cada algoritmo (programación cuadrática) y que marcan la diferencia con el resto de técnicas de control automático.

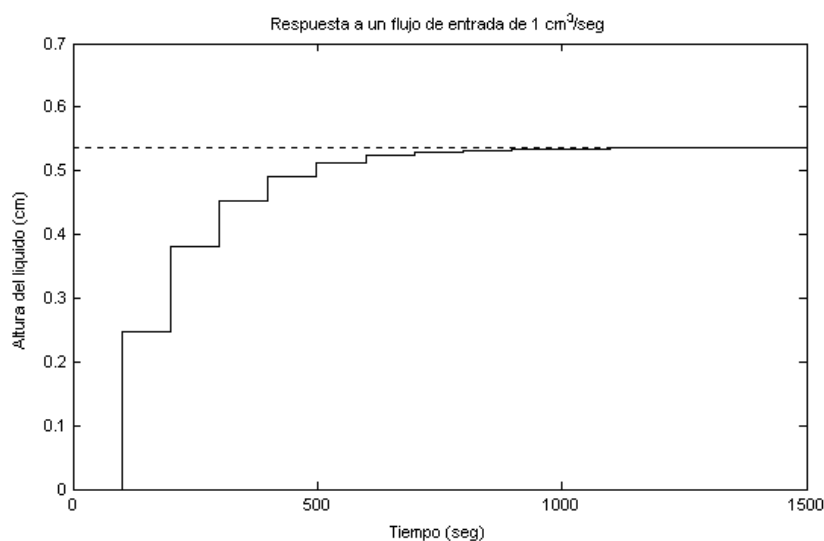


Figura 2.3: Respuesta del sistema discretizado de tanques acoplados

Las restricciones en la señal de control que corresponde al flujo de entrada del tanque 1, son las siguientes:

$$U_{\max} = 180 \frac{\text{cm}^3}{\text{seg}}$$

$$U_{\min} = 0 \frac{\text{cm}^3}{\text{seg}}$$

$$\Delta U_{\max} = 80 \frac{\text{cm}^3}{\text{seg}}/s$$

$$\Delta U_{\min} = -80 \frac{\text{cm}^3}{\text{seg}}/s$$

Las restricciones en la salida que corresponde al nivel de líquido del tanque 2 son:

$$Y_{\max} = 100 \text{ cm}$$

$$Y_{\min} = 0 \text{ cm}$$

2.5 Implementación del GPC

Como primer paso en la implementación de los controladores predictivos, se sintonizarán los horizontes de predicción y los factores de ponderación.

El factor de ponderación de la salida δ se considerará igual a 1 (sugerido por [20]) y se tomarán diferentes valores del factor de ponderación de la señal de control para analizar diferentes comportamientos.

Implementando el controlador GPC en el sistema ante una referencia de 80 cm de nivel, con el horizonte de predicción $N = 30$ y horizonte de control $N_u = 5$; Se

observan en la figura 2.4 las respuestas para $\lambda = 0.2, 0.8, 1.5$ y 5 .

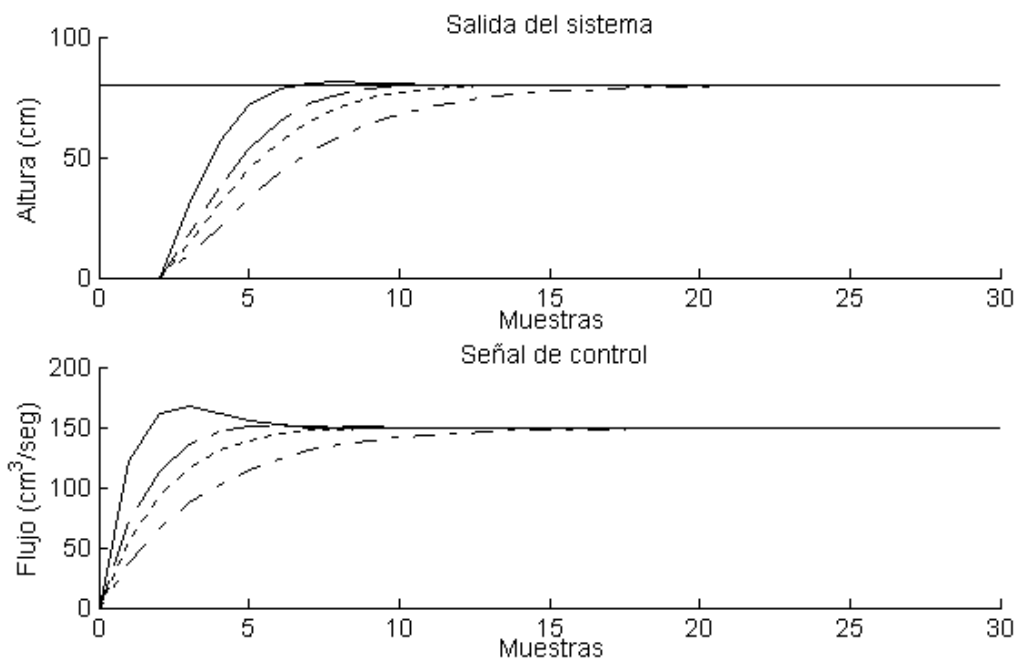


Figura 2.4: Variación del factor de peso de la señal de control del GPC. $\lambda=0.2$, línea sólida; $\lambda=0.8$, línea de guiones; $\lambda=1.5$, línea punteada; $\lambda=5$, línea guión-punto

Hallando la energía de la señal de control E_c y la energía del error E_e (o error cuadrático medio) para cada λ , se obtiene la tabla 2.1.

| λ | $E_c \left(\frac{cm^6}{seg^2} \right)$ | $E_e \left(cm^2 \right)$ |
|-----------|---|---------------------------|
| 0.2 | 6.6521×10^5 | 3.0496×10^4 |
| 0.8 | 6.3917×10^5 | 3.2292×10^4 |
| 1.5 | 6.1641×10^5 | 3.4548×10^4 |
| 5 | 5.6659×10^5 | 3.9496×10^4 |

Tabla 2.1: Cálculo de energías para $N=30$ y $Nu=5$ en los tanques acoplados, implementando GPC

De acuerdo a lo observado en la figura 2.4, se concluye que para $\lambda = 0.2$ el tanque alcanza el nivel de referencia de 80 cm más rápido que los demás, pero con un mayor

esfuerzo de control, lo cual se corrobora observando en la tabla 2.1 que para este valor de λ la energía de control es la mayor y la energía del error es la menor en este conjunto de simulaciones.

A medida que se aumenta el λ , el sistema tarda más en alcanzar la referencia y el esfuerzo en la señal de control disminuye, de hecho en la tabla 2.1 se aprecia que la energía de control disminuye y la energía del error aumenta.

Continuando con el análisis de la energía de la señal de control y el error en el sistema, se tomará el horizonte de control $N_u = 1$ y el horizonte de predicción $N = 30$. El comportamiento del sistema se observa en la figura 2.5, con $\lambda = 0.2, 1.5, 5, \text{ y } 10$.

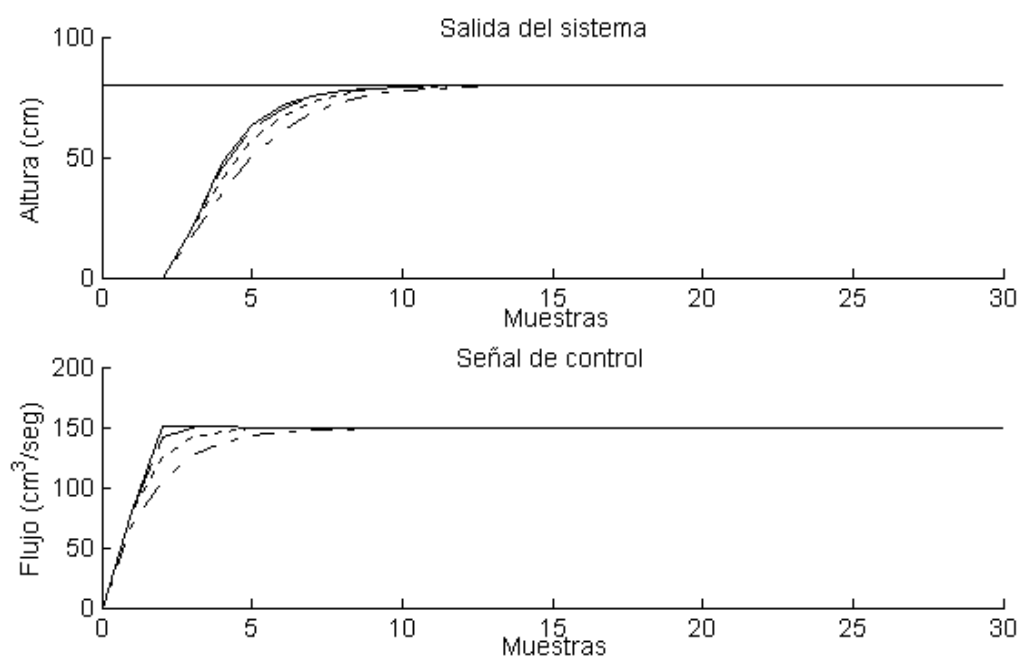


Figura 2.5: Variación del factor de peso de la señal de control del GPC. $\lambda=0.2$, línea sólida; $\lambda=1.5$, línea de guiones; $\lambda=5$, línea punteada; $\lambda=10$, línea guión-punto

En la tabla 2.2 se ilustran la energía de la señal de control y del error para cada uno de los λ .

En la figura 2.5 se observa que el controlador responde sin mucha diferencia al tomar diferentes λ . Entre más pequeño es λ , más rápido el sistema sigue la

| λ | $E_c \left(\frac{cm^6}{seg^2}\right)$ | $E_e (cm^2)$ |
|-----------|---------------------------------------|----------------------|
| 0.2 | 6.5393×10^5 | 3.0624×10^4 |
| 1.5 | 6.5070×10^5 | 3.0865×10^4 |
| 5 | 6.4249×10^5 | 3.1444×10^4 |
| 10 | 6.2598×10^5 | 3.3027×10^4 |

Tabla 2.2: Cálculo de energías para $N=30$ y $Nu=1$ en los tanques acoplados, implementando GPC

referencia pero con mayor esfuerzo de control. Esto se corrobora en la tabla 2.2, ya que la energía de la señal de control disminuye y la energía del error aumenta a medida que lambda aumenta.

Ahora se simulará el sistema variando el factor de ponderación del error δ , con $N = 30$, $N_u = 5$ y $\lambda = 0.8$. El comportamiento del sistema se aprecia en la figura 2.6 para $\delta = 0.5$, 2 y 5.

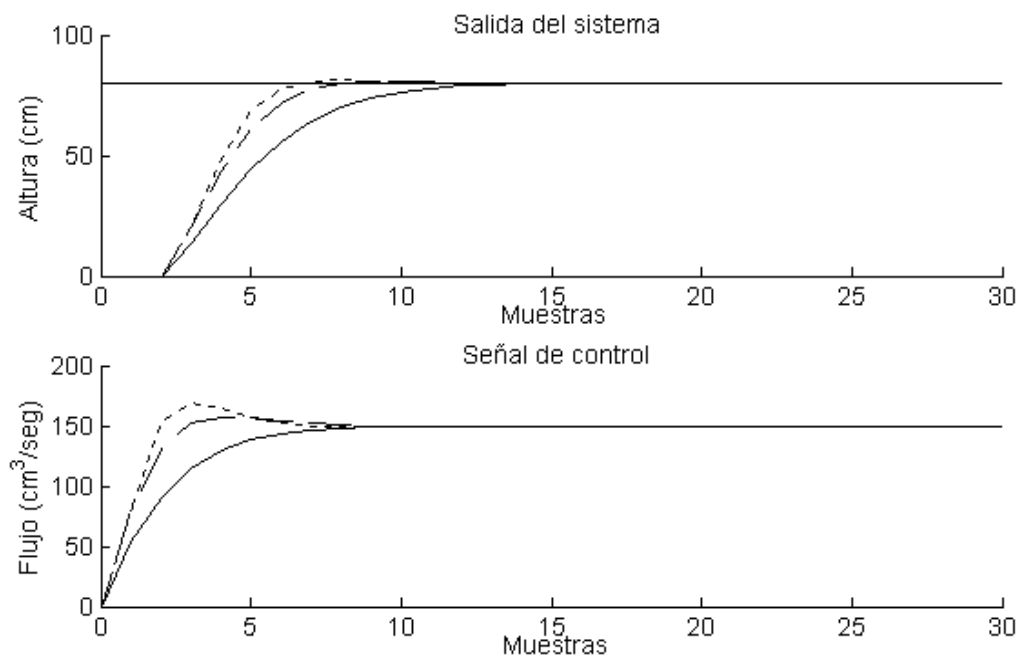


Figura 2.6: Variación del factor de peso del error del GPC. delta=0.5, línea solida; delta=2, línea de guiones; delta=5, línea punteada

En la tabla 2.3 se aprecian los resultados de las energías, para varios valores de

delta.

| δ | $E_c \left(\frac{cm^6}{seg^2}\right)$ | $E_e (cm^2)$ |
|----------|---------------------------------------|----------------------|
| 0.5 | 6.1390×10^5 | 3.4797×10^4 |
| 2 | 6.5525×10^5 | 3.1026×10^4 |
| 5 | 6.6804×10^5 | 3.0349×10^4 |

Tabla 2.3: Cálculo de energías para $N=30$ y $Nu=5$ en los tanques acoplados, implementando GPC

En la figura 2.6 se aprecia que al aumentar delta el sistema alcanza más rapido la referencia, aumentando el esfuerzo de control. Esto se corrobora en la tabla 2.3.

2.6 Implementación del DMC

Como en el caso del GPC se sintonizarán los parámetros del controlador, comenzando con los factores de ponderación. El factor de ponderación de la salida δ se tomará igual a 1 y el factor de ponderación de control λ tendrá diferentes valores.

El controlador DMC se simulará con un horizonte de predicción $N = 30$ y el horizonte de control $Nu = 5$, la referencia es de 80 cm y los valores de λ serán de 0.2, 0.8, 1.5 y 5. El comportamiento se observa en la figura 2.7.

La tabla 2.4 muestra las energías de la señal de control E_c y la energía del error E_e para cada valor de λ .

| λ | $E_c \left(\frac{cm^6}{seg^2}\right)$ | $E_e (cm^2)$ |
|-----------|---------------------------------------|----------------------|
| 0.2 | 7.0976×10^5 | 2.4096×10^4 |
| 0.8 | 6.8372×10^5 | 2.5892×10^4 |
| 1.5 | 6.6095×10^5 | 2.8149×10^4 |
| 5 | 6.1089×10^5 | 3.3121×10^4 |

Tabla 2.4: Cálculo de energías para $N=30$ y $Nu=5$ en los tanques acoplados, implementando DMC

Con lo observado en la figura 2.7, se concluye como en el caso del GPC que con $\lambda = 0.2$ el tanque alcanza el nivel deseado más rapido que en los otros casos, teniendo el mayor esfuerzo de control. Con la tabla 2.4 se comprueba que al aumentar λ , se

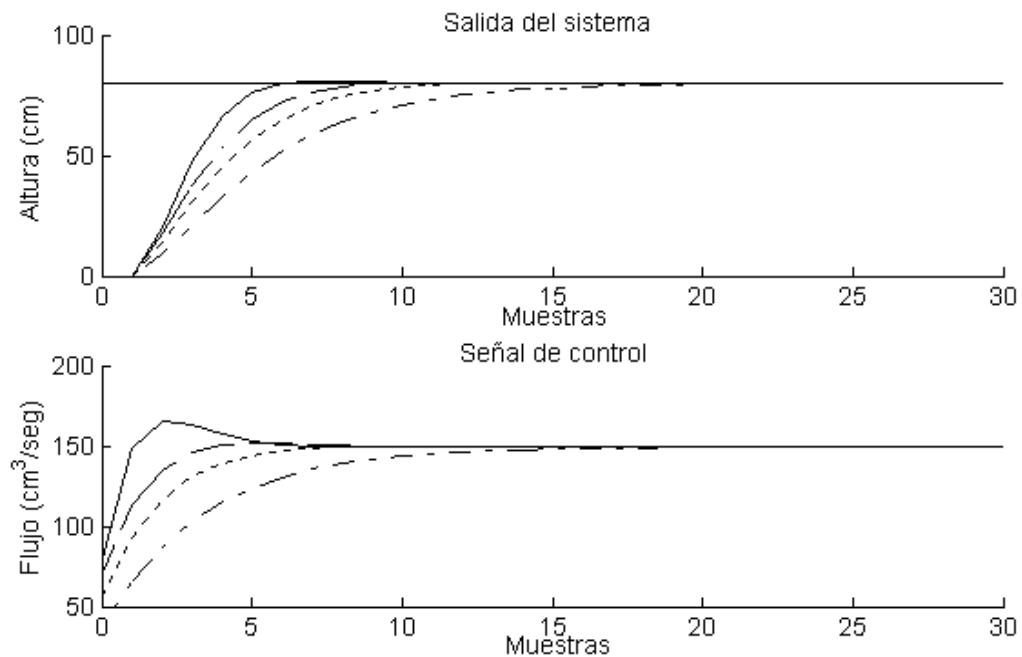


Figura 2.7: Variación del factor de peso de la señal de control del DMC. $\lambda=0.2$, línea sólida; $\lambda=0.8$, línea de guiones; $\lambda=1.5$, línea punteada; $\lambda=5$, línea guión-punto

va disminuyendo el esfuerzo de control (energía de control) y aumenta la energía del error, es decir, el sistema se demora más en alcanzar la referencia.

Tanto el GPC como el DMC controlaron muy bien el sistema y nunca permitieron sobrepaso en las restricciones, específicamente en el límite superior de la señal de control ($180 \text{ cm}^3/\text{seg}$).

Ahora implementando el algoritmo DMC con un horizonte de predicción $N = 30$ y un horizonte de control $N_u = 1$, se muestra en la figura 2.8 el comportamiento del sistema para $\lambda = 0.2, 1.5, 5, \text{ y } 10$.

Los resultados de las energías de control y del error se muestran en la tabla 2.5.

Se observa en la figura 2.8 que entre más pequeño es λ , el sistema alcanza la referencia más rápido con mayor esfuerzo en la señal de control, lo cual coincide con los resultados de la tabla 2.5, en la que la energía de control disminuye y la energía del error aumenta a medida que λ es más grande.

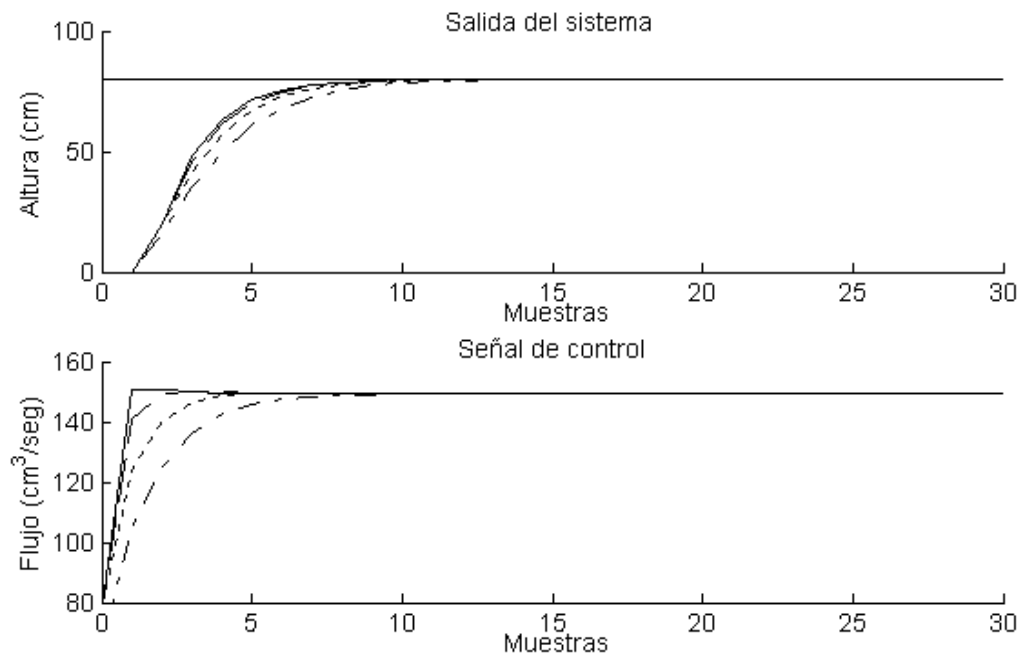


Figura 2.8: Variación del factor de peso de la señal de control del DMC. $\lambda=0.2$, línea sólida; $\lambda=1.5$, línea de guiones; $\lambda=5$, línea punteada; $\lambda=10$, línea guión-punto

Ahora implementando el DMC con $N = 30$, $N_u = 5$, $\lambda = 0.8$ se muestra en la figura 2.9 la respuesta del sistema para $\delta = 0.5$, 2 y 5.

En la tabla 2.6 se muestran los resultados de las energías para diferentes delta.

Se observa en la figura 2.9 que al aumentar delta, la salida del sistema alcanza más rápido la referencia pero con un mayor esfuerzo de control. En la tabla 2.6 se corrobora que la energía de control aumenta y la energía del error disminuye.

2.7 Comparación con el controlador PID

La implementación de los controladores GPC y DMC al sistema con los parámetros $N = 30$, $N_u = 5$, $\lambda = 0.8$ y $\delta = 1$ se muestra en la figura 2.10.

| λ | $E_c \left(\frac{cm^6}{seg^2}\right)$ | $E_e (cm^2)$ |
|-----------|---------------------------------------|----------------------|
| 0.2 | 6.9828×10^5 | 2.4240×10^4 |
| 1.5 | 6.9500×10^5 | 2.4486×10^4 |
| 5 | 6.8660×10^5 | 2.5074×10^4 |
| 10 | 6.6919×10^5 | 2.6777×10^4 |

Tabla 2.5: Cálculo de energías para $N=30$ y $Nu=1$ en los tanques acoplados, implementando DMC

| δ | $E_c \left(\frac{cm^6}{seg^2}\right)$ | $E_e (cm^2)$ |
|----------|---------------------------------------|----------------------|
| 0.5 | 6.5844×10^5 | 2.8398×10^4 |
| 2 | 6.9980×10^5 | 2.4626×10^4 |
| 5 | 7.1259×10^5 | 2.3949×10^4 |

Tabla 2.6: Cálculo de energías para $N=30$ y $Nu=5$ en los tanques acoplados, implementando DMC

Ahora se implementa un controlador PID [22] al sistema de tanques acoplados para compararlo con la implementación del GPC y DMC realizadas. Utilizando la técnica de Ziegler-Nichols, se sintonizan las constantes K_p , K_i y K_d del PID, obteniendo $K_p=70$, $K_i=0.5$ y $K_d=1.25$. En la figura 2.11 se muestra el comportamiento del sistema.

Comparando las dos técnicas de control predictivo con la del PID, se observa que para este sistema la salida tiene características muy similares, pero con la gran diferencia de que el PID requiere un esfuerzo en la señal de control mucho mayor que en los controladores predictivos.

2.8 Conclusiones

En la implementación del GPC al sistema de dos tanques acoplados, variando los parámetros de sintonía del controlador se puede concluir que:

- Al aumentar el factor de ponderación de la señal de control λ , la energía de la señal de control E_c disminuye y la energía del error E_e aumenta (ver tablas 2.1 y 2.2).
- Al disminuir el horizonte de control (de 5 a 1), tanto la energía de la señal de control como la energía del error tienen muy poca diferencia al aumentar λ (ver tabla 2.2).

Implementando el DMC al sistema con la variación de los parámetros se concluye que:

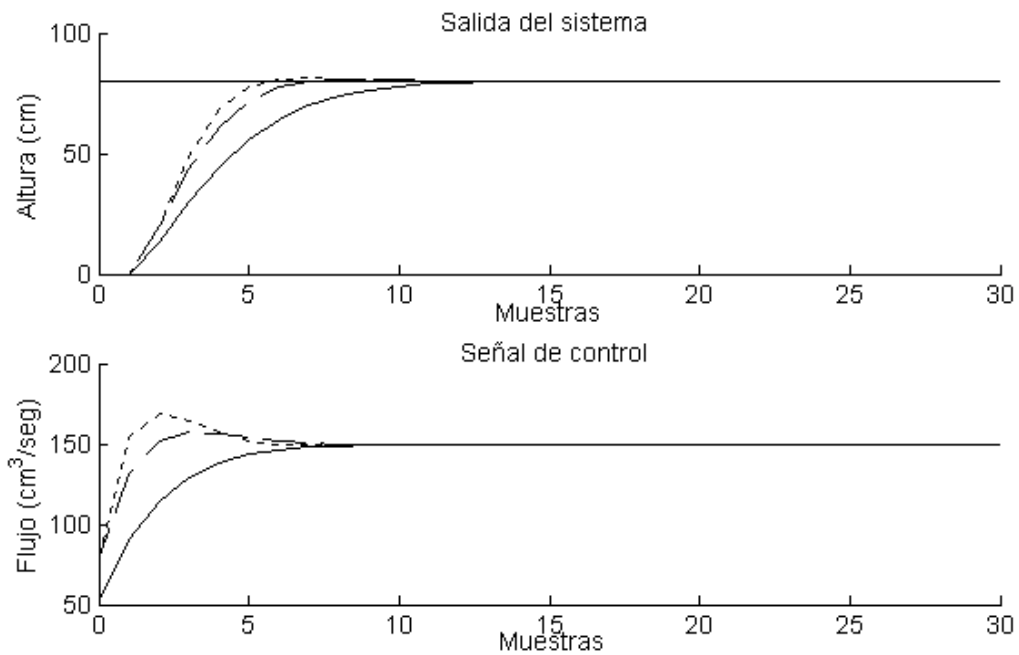


Figura 2.9: Variación del factor de peso del error del DMC. $\delta=0.5$, línea solida; $\delta=2$, línea de guiones; $\delta=5$, línea punteada

- Al igual que en el GPC, al aumentar el factor de peso de la señal de control λ , la energía de la señal de control disminuye y la energía del error aumenta (ver tablas 2.4 y 2.5).
- De la misma forma que en el GPC, disminuyendo el horizonte de control (de 5 a 1), la energía de la señal de control y la energía del error tienen valores muy cercanos al aumentar λ (ver tabla 2.5).

Comparando las energías de control y el error entre el GPC y el DMC sintonizados de la misma forma, se concluye que la energía de control es menor en el GPC y la energía del error es menor en el DMC (ver tablas 2.1 a la 2.5).

En la implementación del GPC y del DMC al sistema de tanques acoplados, se concluye que cuando la energía de la señal de control disminuye, la energía del error aumenta y viceversa (ver tablas 2.1 a la 2.5).

Tanto en la implementación del GPC y del DMC se concluye que al aumentar el factor de ponderación del error, la energía de la señal de control aumenta y la energía del error disminuye.

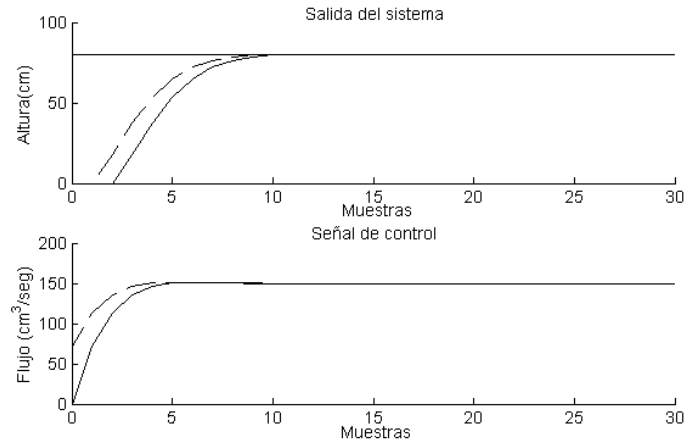


Figura 2.10: Implementación del GPC y DMC a los tanques acoplados. GPC, línea solida; DMC, línea de guiones

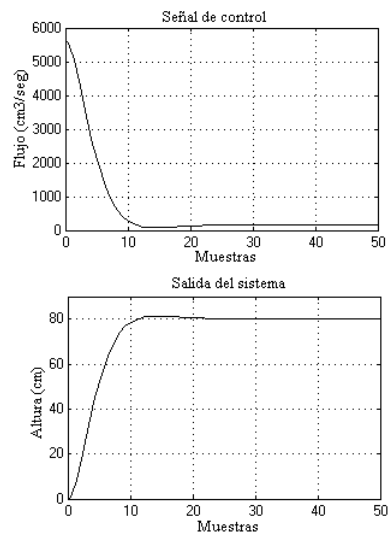


Figura 2.11: Implementación del PID en los tanques acoplados

Capítulo 3

MOTOR DE CORRIENTE CONTÍNUA

El motor de corriente continua es un actuador común en control de sistemas industriales [16]. Provee movimiento rotatorio directamente y acoplado con ruedas dentadas o poleas y cables, puede proveer movimiento transicional. El circuito eléctrico de la armadura y el diagrama de cuerpo libre del rotor se muestran en la figura 3.1:

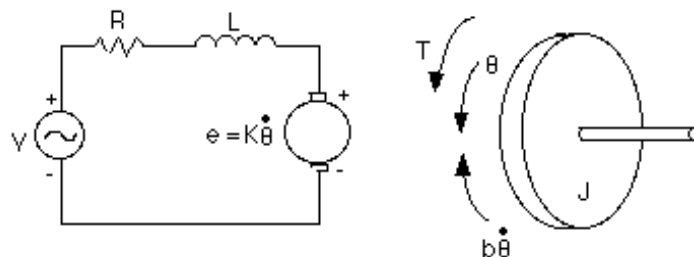


Figura 3.1: El motor de c.c. y su circuito equivalente

Los motores de c.c. convierten energía eléctrica c.c. en energía mecánica rotacional, están compuestos de un estator y un rotor [17]. En muchos motores de c.c., generalmente los más pequeños, el estator está compuesto de imanes para crear un campo magnético. En motores de c.c. más grandes este campo magnético se logra con devanados de excitación de campo.

El rotor es el dispositivo que gira en el centro del motor y está compuesto de arrolla-

dos de cable conductores de corriente continua. La corriente continua es suministrada al rotor por medio de las "escobillas" generalmente fabricadas de carbón.

El devanado es un arrollado compuesto de cables conductores que tiene un propósito específico dentro de un motor.

3.1 Principio de Funcionamiento

Cuando un conductor por el que fluye una corriente continua es colocado bajo la influencia de un campo magnético, se induce sobre él (el conductor) una fuerza que es perpendicular tanto a las líneas de campo magnético como al sentido del flujo de la corriente.

Este conductor se coloca en una posición con respecto al eje de rotación del rotor para que exista movimiento. Pero en el rotor de un motor c.c. no hay solamente un conductor sino muchos y las corrientes que circulan por conductores opuestos deben tener sentidos de circulación opuestos. Si se hace lo anterior el motor girará por la suma de la fuerza ejercida en los conductores.

Para controlar el sentido del flujo de la corriente en los conductores se usa un conmutador que realiza la inversión del sentido de la corriente cuando el conductor pasa por la línea muerta del campo magnético.

La fuerza con la que el motor gira (el par motor) es proporcional a la corriente que hay por los conductores. A mayor tensión, mayor corriente y mayor par motor.

Cuando un motor de corriente continua es alimentado, el voltaje de alimentación se divide entre la caída que hay por la resistencia de los arrollados del motor y una tensión denominada fuerza electromotriz.

La fuerza electromotriz es proporcional a la velocidad del motor y a la intensidad del campo magnético.

3.2 Parámetros del sistema

Para este caso, se toman los siguientes valores para los parámetros físicos. Estos valores se derivaron experimentalmente de un motor real del laboratorio de control para alumnos de grado del Carnegie Mellon.

$$\text{Momento de inercia del rotor } (J) = 0.01 \text{ kg.m}^2/\text{s}^2$$

Coefficiente de amortiguamiento del sistema mecánico (b) = 0.1 Nms

Constante de fuerza electromotriz ($K = K_e = K_t$) = 0.01 Nm/Amp

Resistencia eléctrica (R) = 1 ohm

Inductancia eléctrica (L) = 0.5 H

Entrada (V): Fuente de Tensión

Salida (θ): posición del eje

El rotor y eje se consideran rígidos

3.3 Ecuaciones del Sistema

El torque del motor T se relaciona con la corriente de armadura i , por un factor constante K_t . La fuerza contraelectromotriz (emf) e , se relaciona con la velocidad de rotación mediante las siguientes ecuaciones:

$$T = K_t i \quad (3.1)$$

$$e = K_e \dot{\theta} \quad (3.2)$$

En unidades del sistema internacional SI (las que se usarán), K_t (constante de armadura) es igual a K_e (constante del motor).

De la figura 3.1 se pueden escribir las siguientes ecuaciones basadas en la ley de Newton combinadas con la ley de Kirchhoff:

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = Ki \quad (3.3)$$

$$L\frac{\partial i}{\partial t} + Ri = V - K\dot{\theta} \quad (3.4)$$

3.4 Función de Transferencia

Usando Transformadas de Laplace, las ecuaciones del modelo de arriba pueden expresarse en términos de s .

$$s(Js + b)\theta(s) = KI(s) \quad (3.5)$$

$$(Ls + R)I(s) = V - Ks\theta(s) \quad (3.6)$$

Eliminando $I(s)$ se puede obtener la siguiente función de transferencia, donde la velocidad de rotación es la salida y la tensión es la entrada.

$$\frac{\dot{\theta}}{V} = \frac{K}{(Js + b)(Ls + R) + K^2} \quad (3.7)$$

Sin embargo como en este caso se está mirando a la posición como la salida, se puede obtener la posición integrando Theta Punto; por lo tanto sólo se necesita dividir la función de transferencia por s .

$$\frac{\theta}{V} = \frac{K}{s((Js + b)(Ls + R) + K^2)} \quad (3.8)$$

Estas ecuaciones pueden también representarse en la forma de espacio de estados. Si se elige posición del motor, velocidad del motor, y corriente de armadura como las variables de estado, se pueden escribir las ecuaciones como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-b}{J} & \frac{K}{J} \\ 0 & \frac{-K}{L} & \frac{-R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} V \quad (3.9)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

De acuerdo a los valores de los parámetros del sistema, la función de transferencia del sistema estaría dada por:

$$\frac{\theta}{V} = \frac{0.01}{0.005s^3 + 0.06s^2 + 0.1001s} \quad (3.11)$$

El Comportamiento del sistema en lazo abierto con un 1 Voltio de entrada, se muestra en la figura 3.2.

En la respuesta de lazo abierto se puede apreciar que el comportamiento del sistema se asemeja a una rampa, de ahí que se clasifique el control de posición del motor c.c como un sistema integrante.

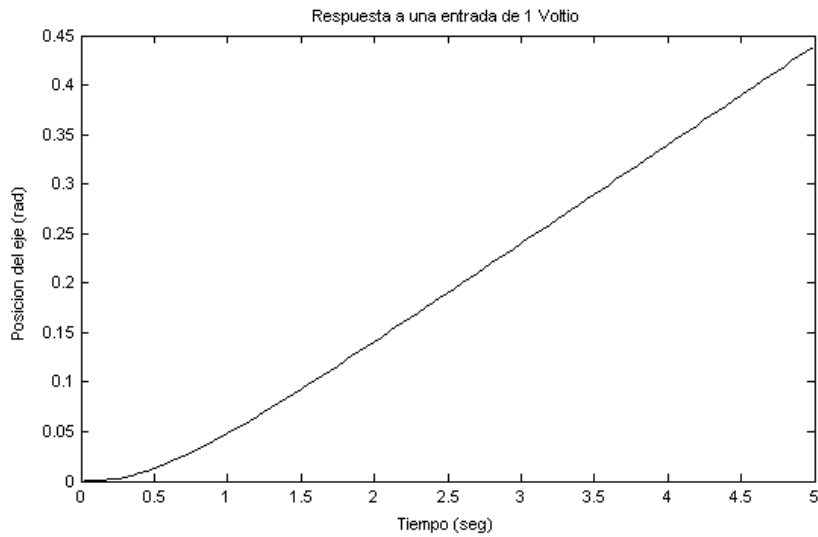


Figura 3.2: Respuesta del motor c.c en lazo abierto

3.5 Discretización

Ahora con el fin de diseñar el controlador para este sistema se procederá a discretizar la función de transferencia.

En primera medida se hallará el tiempo de muestreo T_s para este sistema, siendo definido por:

$$T_s = \frac{T_e}{10} \quad (3.12)$$

Donde T_e es el tiempo de establecimiento del sistema y se define como:

$$T_e = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (3.13)$$

Donde ζ es el coeficiente de amortiguamiento y ω_n es la frecuencia natural. A través de la función `damp` de Matlab se hallan estos 2 parámetros para el polo más cercano al eje imaginario:

$$\zeta = 1$$

$$\omega_n = 2.0025 \text{ rad/seg}$$

Entonces:

$$T_e = \frac{4}{2.0025 \text{ rad/seg}} = 1.997 \text{ seg} \text{ y } T_s = 0.1997 \text{ seg}$$

Con un retenedor de orden cero y el tiempo de muestreo obtenido se tiene:

$$G(z^{-1}) = \frac{0.001551z^{-1} + 0.003658z^{-2} + 0.0004738z^{-3}}{1 - 1.806z^{-1} + 0.8972z^{-2} - 0.09105z^{-3}} \quad (3.14)$$

En la figura 3.3 se aprecia el comportamiento del sistema discretizado:

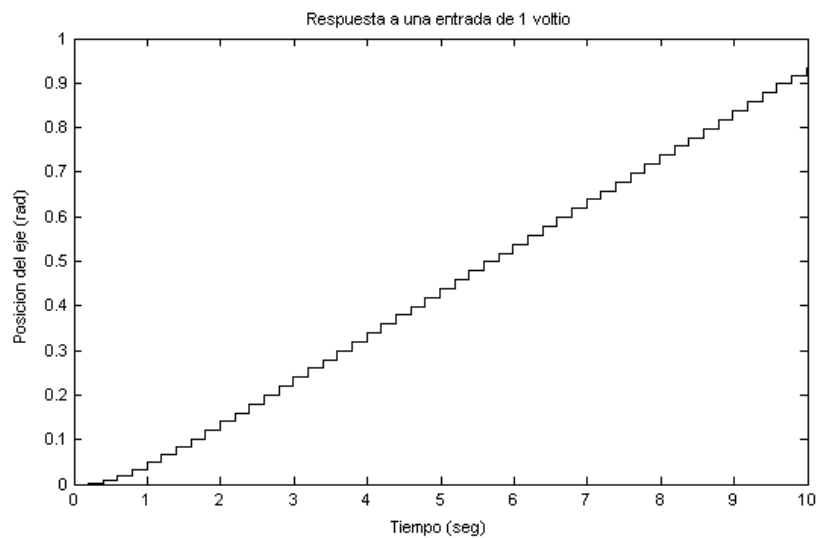


Figura 3.3: Respuesta del motor c.c. discretizado

3.6 Restricciones

Para este sistema las restricciones de la señal de entrada en voltios son las siguientes:

$$U_{\max} = 125 \text{ V}$$

$$U_{\min} = -125 \text{ V}$$

$$\Delta U_{\max} = 100 \text{ V/s}$$

$$\Delta U_{\min} = -100 \text{ V/s}$$

Las restricciones que se tienen en la salida, es decir, en la posición angular del eje son:

$$Y_{\max} = 100 \text{ rad}$$

$$Y_{\min} = -100 \text{ rad}$$

3.7 Implementación del GPC

Ahora para la implementación del controlador predictivo generalizado, es necesario sintonizar parámetros como el factor de peso de control λ y el factor de peso de la salida que será $\delta = 1$. Se fija una referencia de 50 *rad* de posición del eje, un horizonte de predicción $N = 30$ y un horizonte de control $N_u = 5$.

Se tomarán valores $\lambda = 0.2, 0.8, 1.5$ y 5 y los comportamientos se aprecian en la figura 3.4.

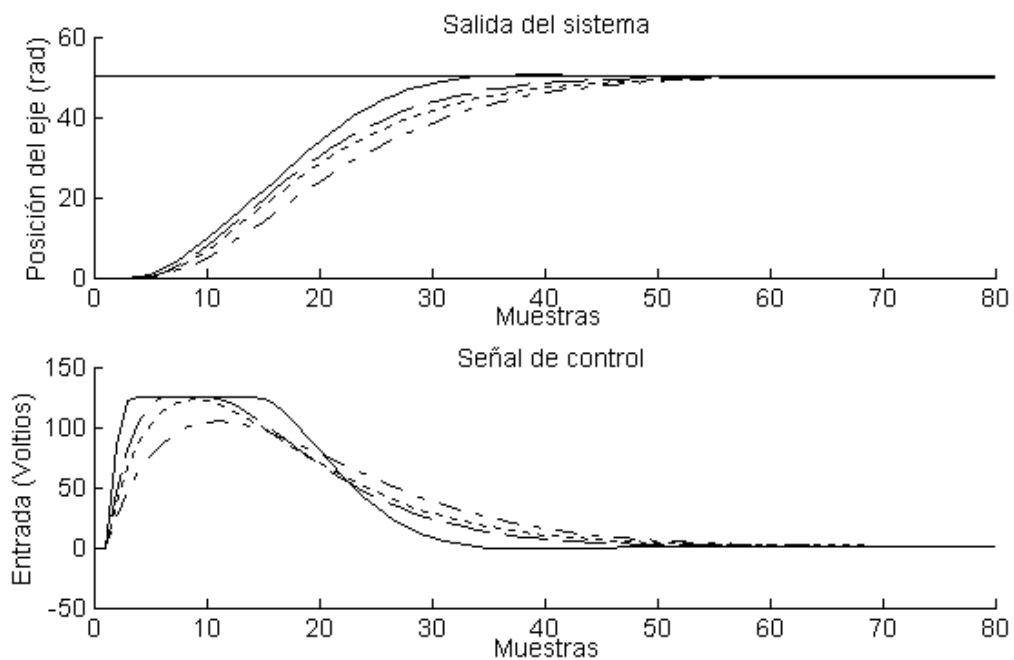


Figura 3.4: Variación del factor de peso de la señal de control del GPC. $\lambda=0.2$, línea sólida; $\lambda=0.8$, línea de guiones; $\lambda=1.5$, línea punteada; $\lambda=5$, línea guión-punto

Calculando la energía de la señal de control E_c y la energía del error E_e para cada uno de los λ , se obtiene la tabla 3.1.

Con lo observado en la figura 3.4, se concluye que entre más pequeño sea λ se alcanzará más rápido la posición deseada del motor, pero con mayor esfuerzo en la

| λ | E_c (Voltios ²) | E_e (rad ²) |
|-----------|-------------------------------|---------------------------|
| 0.2 | 2.7691×10^5 | 3.5807×10^4 |
| 0.8 | 2.3317×10^5 | 3.8611×10^4 |
| 1.5 | 2.1442×10^5 | 4.0646×10^4 |
| 5 | 1.8816×10^5 | 4.4953×10^4 |

Tabla 3.1: Cálculo de energías para $N=30$ y $N_u=5$ en el motor c.c, implementando GPC

señal de control. Esto se evidencia en la tabla de energías 3.1, ya que la energía de control disminuye (el esfuerzo de control es cada vez menor) y la energía del error aumenta (se demora más en alcanzar la referencia).

Como se puede apreciar el controlador funciona perfectamente y nunca permite sobrepasar las restricciones, específicamente los 125 V de la señal de entrada.

Continuando con el análisis de las energías en el sistema, se procederá a modificar el horizonte de control. Con un horizonte de predicción $N = 30$ y un horizonte de control $N_u = 3$, se muestra en la figura 3.5 el comportamiento del motor para $\lambda = 0.8$ y 5.

La energía de la señal de control y la energía del error se muestran en la tabla 3.2.

| λ | E_c (Voltios ²) | E_e (rad ²) |
|-----------|-------------------------------|---------------------------|
| 0.8 | 2.0273×10^5 | 3.9932×10^4 |
| 5 | 1.8111×10^5 | 4.4207×10^4 |

Tabla 3.2: Cálculo de energías para $N=30$ y $N_u=3$ en el motor c.c, implementando GPC

En la figura 3.5 se observa que entre más grande es lambda, más tarda el sistema en reaccionar, esto se refleja en la tabla 3.2 ya que a mayor λ hay mayor energía del error y menor energía de la señal de control.

En todos los casos el sistema sigue la referencia y el controlador no permite sobrepasar la restricción de 125 V en la señal de entrada.

Tomando ahora un horizonte de predicción $N = 10$ y un horizonte de control $N_u = 5$, se tiene en la figura 3.6 la respuesta del sistema para $\lambda = 0.8$ y 5.

En la tabla 3.3 se muestran los resultados de las energías de control y del error.

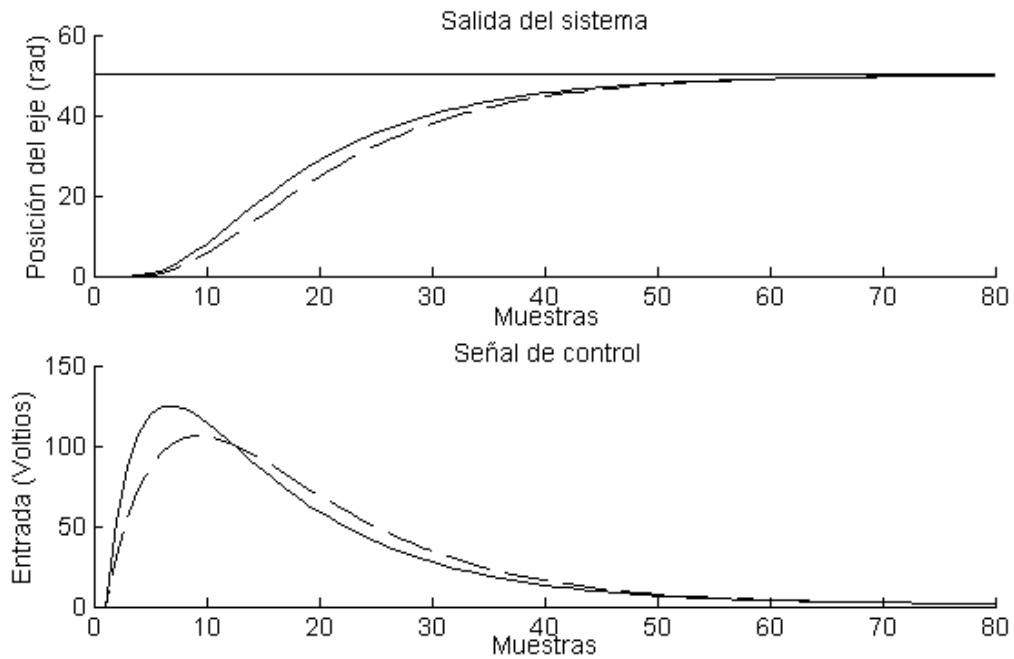


Figura 3.5: Variación del factor de peso de la señal de control del GPC. $\lambda=0.8$, línea sólida; $\lambda=5$, línea de guiones

| λ | E_c (Voltios ²) | E_e (rad ²) |
|-----------|-------------------------------|---------------------------|
| 0.8 | 3.8963×10^5 | 4.1259×10^4 |
| 5 | 6.4378×10^5 | 1.2707×10^5 |

Tabla 3.3: Cálculo de energías para $N=10$ y $N_u=5$ en el motor c.c, implementando GPC

Con lo observado en la figura 3.6 se concluye que con un λ pequeño el sistema oscila menos y alcanza la referencia más rápido con menos esfuerzo de control (esto se comprueba en la tabla 3.3). Mientras que con un λ grande el sistema presenta oscilaciones y se demora más en alcanzar la referencia, presentando mayor esfuerzo de control.

En este caso el controlador no funciona bien para valores grandes de λ , ya que presenta más energía en la señal de control y más energía del error.

Ahora se implementa el GPC tomando $N = 30$, $N_u = 5$ y $\lambda = 0.8$. En la figura 3.7 se muestra el comportamiento del sistema para $\delta = 0.5$, 2 y 5.

En la tabla 3.4 se muestran los resultados de las energías obtenidas.

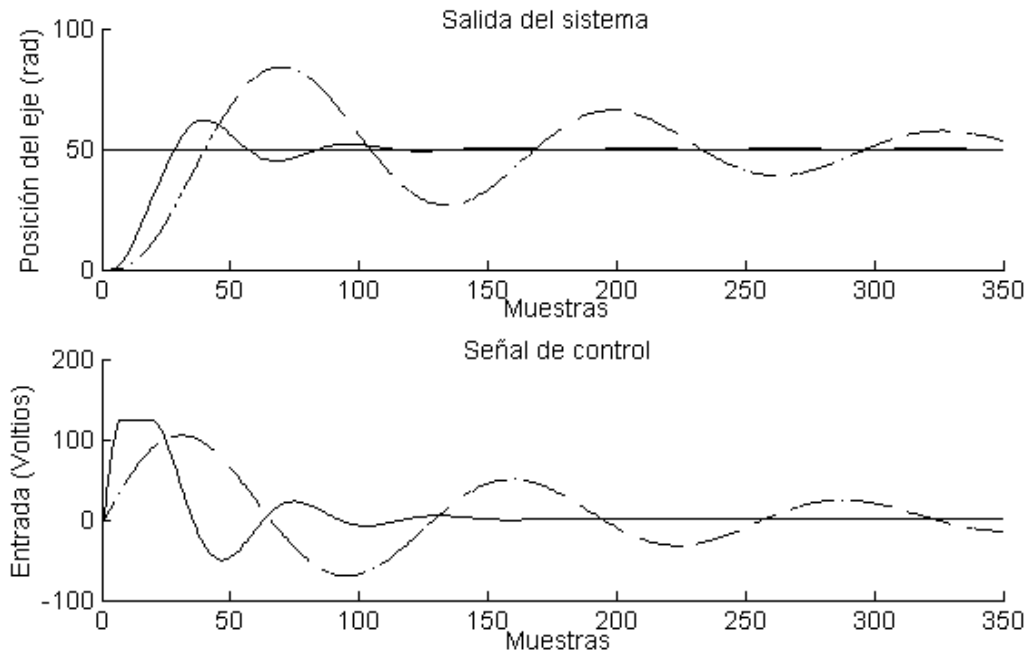


Figura 3.6: Variación del factor de peso de la señal de control del GPC. $\lambda=0.8$, línea sólida; $\lambda=5$, línea de guiones

| δ | E_c (Voltios ²) | E_e (rad ²) |
|----------|-------------------------------|---------------------------|
| 0.5 | 2.1213×10^5 | 4.0904×10^4 |
| 2 | 2.5520×10^5 | 3.6925×10^4 |
| 5 | 2.8268×10^5 | 3.5600×10^4 |

Tabla 3.4: Cálculo de energías para $N=30$ y $N_u=5$ en el motor c.c. implementando GPC

Se observa en la figura 3.7 que al aumentar delta, la salida del sistema alcanza más rápido la referencia y se aumenta el esfuerzo de control (ver tabla 3.4).

3.8 Implementación del DMC

Al igual que en la implementación del GPC se observará el comportamiento del controlador tomando varios valores de λ , con un horizonte de predicción y de control fijos. Como en los casos anteriores el factor de ponderación de la salida será $\delta = 1$.

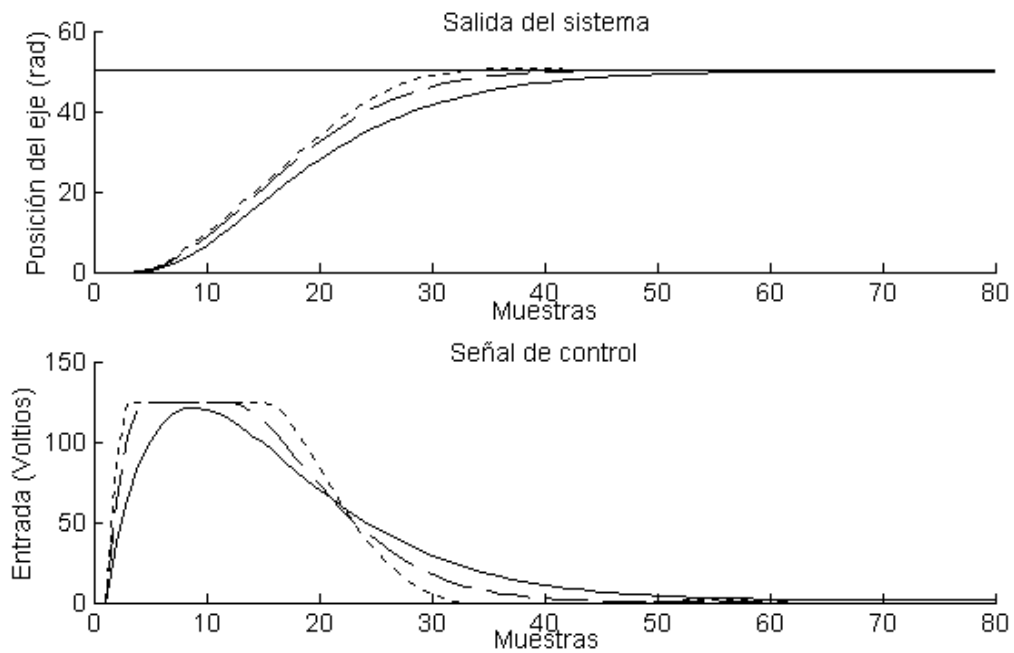


Figura 3.7: Variación del factor de peso del error del GPC. $\delta=0.5$, línea solida; $\delta=2$, línea de guiones; $\delta=5$, línea punteada

El sistema se simula con una referencia de 50 *rad* de posición del eje del motor, el horizonte de predicción $N = 30$ y el horizonte de control $N_u = 5$.

En la figura 3.8 se observan la salida del sistema y la señal de control para $\lambda = 0.2, 0.8, 1.5$ y 5.

En la tabla 3.5 se muestran los resultados de las energías de control E_c y del error E_e para cada uno de los valores de λ simulados.

| λ | E_c (Voltios ²) | E_e (rad ²) |
|-----------|-------------------------------|---------------------------|
| 0.2 | 7.9673×10^5 | 3.0900×10^4 |
| 0.8 | 7.7626×10^5 | 3.3095×10^4 |
| 1.5 | 7.6336×10^5 | 3.4514×10^4 |
| 5 | 7.2632×10^5 | 3.8246×10^4 |

Tabla 3.5: Cálculo de energías para $N=30$ y $N_u=5$ en el motor c.c, implementando DMC

En la gráfica 3.8 se aprecia que los comportamientos en la salida y en la señal de

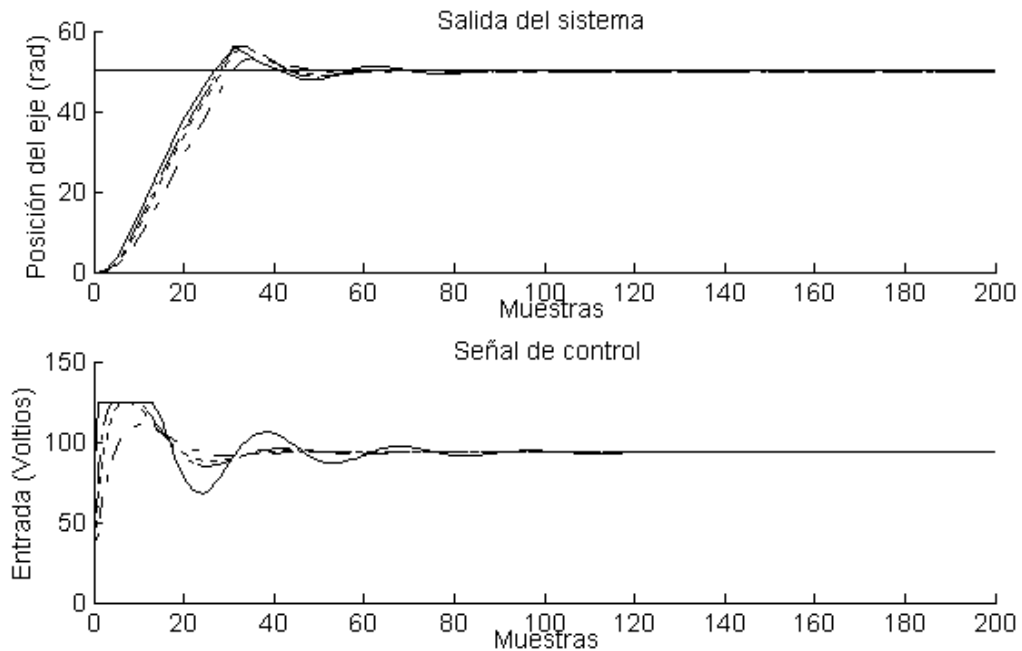


Figura 3.8: Variación del factor de peso de la señal de control del DMC. $\lambda=0.2$, línea sólida; $\lambda=0.8$, línea de guiones; $\lambda=1.5$, línea punteada; $\lambda=5$, línea guión-punto

control son muy similares para los diferentes λ , aún así se alcanza a percibir como en los casos anteriores, que entre más pequeño es λ , más rápido el sistema alcanza la referencia pero presentando oscilaciones; y hay mayor esfuerzo en la señal de control, que se manifiesta también con oscilaciones.

Con los resultados de la tabla 3.5 se confirma que el esfuerzo de control (energía de control) disminuye y la energía del error aumenta sutilmente a medida que aumenta λ .

Aunque el sistema presenta oscilaciones en la señal de control y en la salida, finalmente es controlado y se aplican las restricciones al no sobrepasar la señal de control los 125 V.

En la siguiente implementación del controlador DMC se asignará el horizonte de predicción $N = 30$ y el horizonte de control $N_u = 3$. En la figura 3.9 se observa la respuesta del sistema para valores $\lambda = 0.8$ y 5.

En la tabla 3.6 se muestran los resultados de la energías de control y del error para

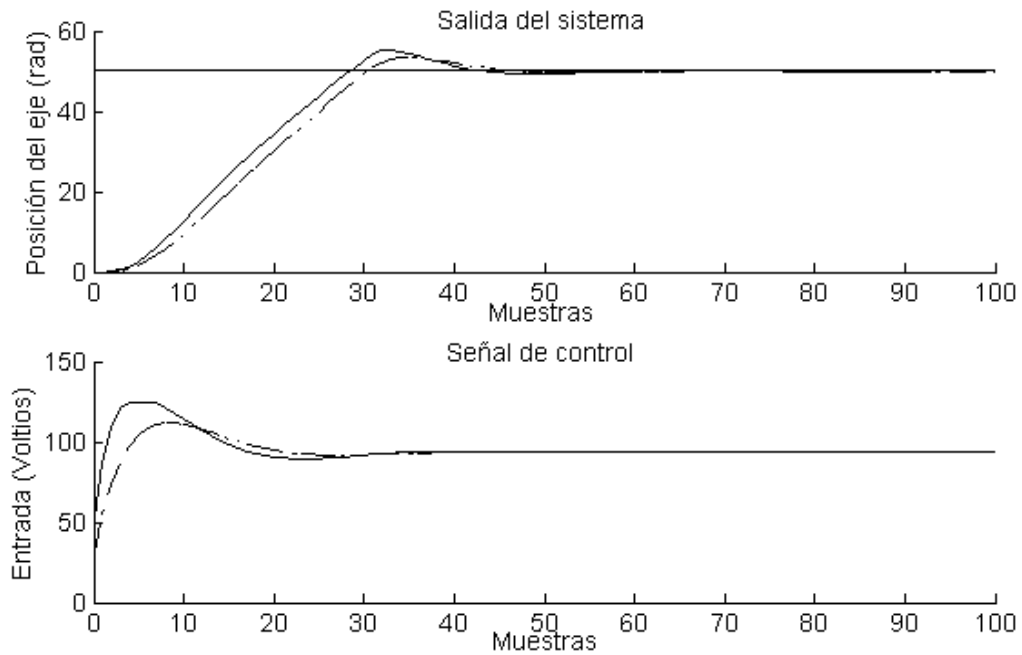


Figura 3.9: Variación del factor de peso de la señal de control del DMC. $\lambda=0.8$, línea sólida; $\lambda=5$, línea de guiones

cada uno de los λ .

| λ | E_c (Voltios ²) | E_e (rad ²) |
|-----------|-------------------------------|---------------------------|
| 0.8 | 7.6526×10^5 | 3.3113×10^4 |
| 5 | 7.3083×10^5 | 3.6968×10^4 |

Tabla 3.6: Cálculo de energías para $N=30$ y $N_u=3$ en el motor c.c, implementando DMC

En la figura 3.9 se observa que entre más pequeño es λ , más rápido reacciona el sistema y presenta más sobreimpulso. En la gráfica y en la tabla 3.6 se aprecia que el esfuerzo de control es mayor y la energía del error es menor.

Cuando λ es grande el sistema tiene menor energía en la señal de control y mayor energía del error.

En ambos casos el motor sigue la referencia y el controlador no deja sobrepasar las restricciones.

Ahora se fijará un horizonte de predicción $N = 10$ y un horizonte de control $N_u = 5$.

En la figura 3.10 se muestra la respuesta del sistema para $\lambda = 0.8$ y 5.

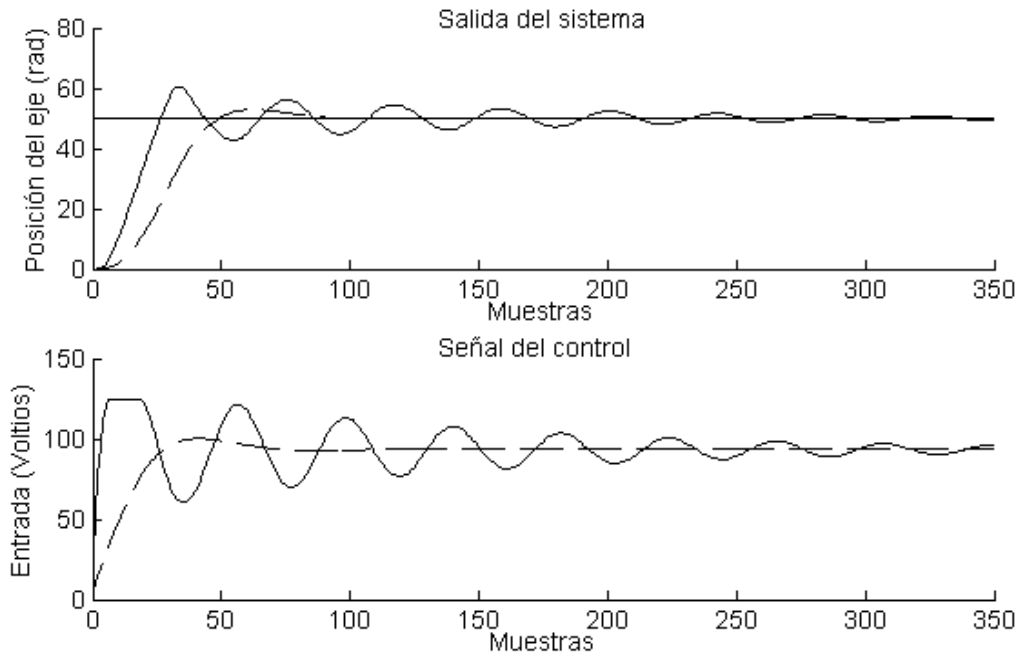


Figura 3.10: Variación del factor de peso de la señal de control del DMC. $\lambda=0.8$, línea sólida; $\lambda=5$, línea de guiones

Los resultados de las energías se muestran en la tabla 3.7

| λ | E_c (Voltios ²) | E_e (rad ²) |
|-----------|-------------------------------|---------------------------|
| 0.8 | 3.1774×10^6 | 3.7637×10^4 |
| 5 | 2.9678×10^6 | 5.9061×10^4 |

Tabla 3.7: Cálculo de energías para $N=10$ y $N_u=5$ en el motor c.c, implementando DMC

Como se observa en la figura 3.10, cuando λ es pequeño el sistema sigue la referencia pero presentando oscilaciones tanto en la salida como en la señal de control. En este caso el motor presenta mayor energía en la señal de control y menor energía del error (ver tabla 3.7).

Cuando λ es grande el sistema oscila menos pero presenta mayor energía del error y menor energía de control.

En ambos casos el sistema alcanza la referencia y las restricciones no son sobrepasadas.

Implementando el DMC al sistema con $N = 30$, $N_u = 5$ y $\lambda = 0.8$, se muestra en la figura 3.11 la respuesta del sistema para $\delta = 0.5$, 2 y 5.

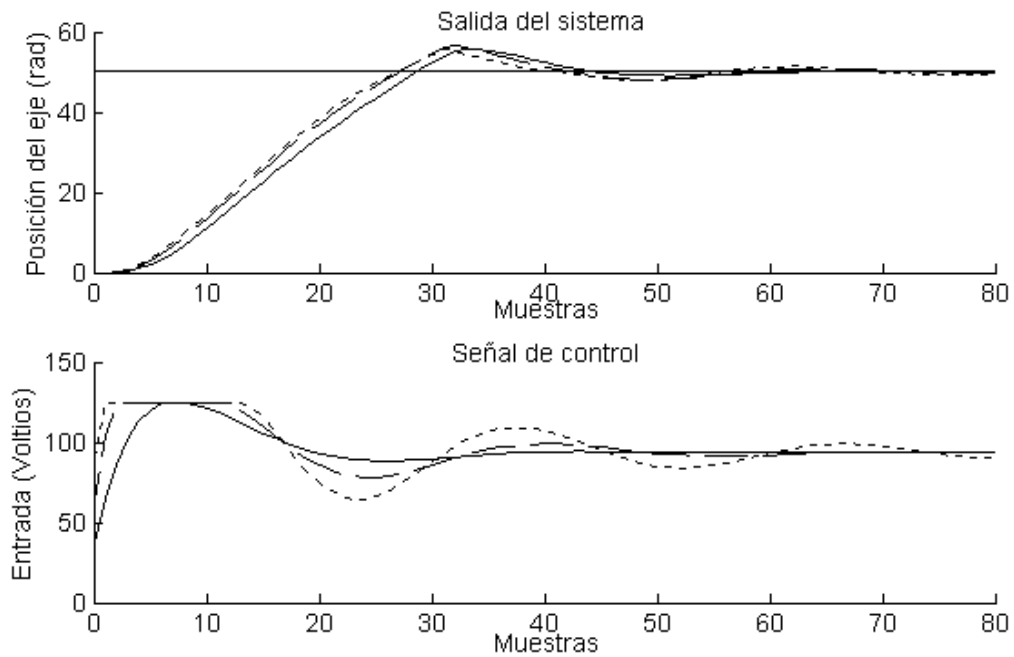


Figura 3.11: Variación del factor de peso del error del DMC. $\delta=0.5$, línea solida; $\delta=2$, línea de guiones; $\delta=5$, línea punteada

En la tabla 3.8 se muestran los valores obtenidos de las energías.

| δ | E_c (Voltios ²) | E_e (rad ²) |
|----------|-------------------------------|---------------------------|
| 0.5 | 7.6182×10^5 | 3.4678×10^4 |
| 2 | 7.8761×10^5 | 3.1831×10^4 |
| 5 | 7.9842×10^5 | 3.0744×10^4 |

Tabla 3.8: Cálculo de energías para $N=30$ y $N_u=5$ en el motor c.c. implementando DMC

Se observa en la figura 3.11 y en la tabla 3.8 que si se aumenta el factor de ponderación del error, la salida del sistema reacciona más rapido y el esfuerzo de control es mayor.

3.9 Comparación con el controlador PID

El controlador GPC y DMC implementados al sistema con los parámetros de sintonía $N = 30$, $N_u = 5$, $\lambda = 0.8$ y $\delta = 1$, se muestran en la figura 3.12.

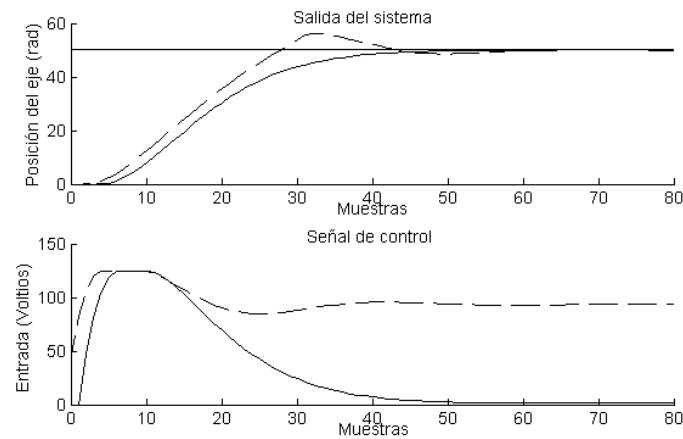


Figura 3.12: Implementación del GPC y DMC al motor c.c. GPC, línea solida; DMC, línea de guiones

Ahora se implementa el clásico controlador PID al motor c.c, sintonizado con el método de Ziegler-Nichols [22]. Las constantes obtenidas son $K_p=8$, $K_i=0.44$ y $K_d=0.562$ y el comportamiento del sistema se muestra en la figura 3.13.

Comparando la implementación de los controladores predictivos con la del PID, se observa que la salida del sistema en el PID alcanza más rapido la referencia pero con un mayor esfuerzo en la señal de control.

3.10 Conclusiones

Variando los parámetros del GPC en el motor de corriente continua, se puede concluir que:

- Al aumentar el factor λ , la energía de la señal de control disminuye y la energía del error aumenta (ver tablas 3.1, 3.2 y 3.3).

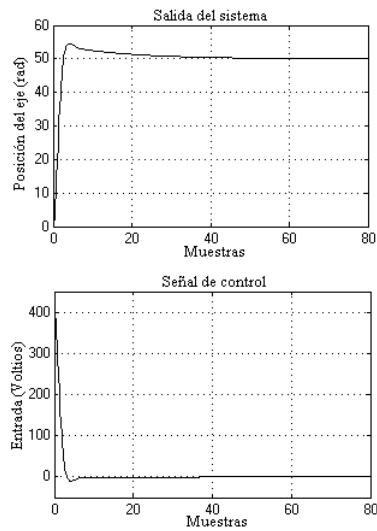


Figura 3.13: Implementación del PID al motor c.c.

- Al tener un horizonte de predicción de 10 y un valor de lambda grande (5), el sistema presenta oscilaciones tanto en la salida como en la señal de control y por lo tanto las energías aumentan (ver tabla 3.3).
- Al disminuir el horizonte de predicción (de 30 a 10), las energías de control y del error aumentan (ver tabla 3.3).
- Al tomar un horizonte de control de 3, la energía de control disminuye y la energía del error mantiene valores similares (ver tabla 3.2).

En la implementación del DMC variando los parámetros del controlador, se concluye:

- Al aumentar el valor de lambda, la energía de control disminuye y la energía del error aumenta (ver tablas 3.5, 3.6 y 3.7).
- Disminuyendo el horizonte de control (de 5 a 3), no es posible afirmar con certeza la tendencia de las energías (ver tabla 3.6).
- Al disminuir el horizonte de predicción (de 30 a 10), la energía de control y del error aumentan (ver tabla 3.7).

Comparando las energías entre el GPC y el DMC implementados con los mismos parámetros al motor de corriente continua, se concluye que en el GPC la energía de la

señal de control siempre es menor y en el DMC la energía del error siempre es menor (ver tablas 3.1 a la 3.7).

En la implementación de los controladores al motor c.c. también se concluye que si la energía de la señal de control disminuye, la energía del error aumenta y viceversa (ver tablas 3.1 a la 3.7).

Se concluye que en la implementación de ambos controladores predictivos al sistema, si se aumenta el factor de ponderación del error, la energía de la señal de control aumenta y la energía del error disminuye.

Capítulo 4

PÉNDULO INVERTIDO

El péndulo invertido consiste en un péndulo o varilla que gira libremente por uno de sus extremos mediante una articulación situada sobre un carro que se mueve sobre una guía rectilínea horizontal bajo la acción de una fuerza F , que es la acción de control con la que se pretende actuar sobre la posición de la varilla. Este sistema es ilustrado en la figura 4.1.

El sistema péndulo invertido es un sistema no lineal e inestable (ya que el péndulo puede volcarse en cualquier momento y en cualquier dirección), lo cual conlleva a problemas en la modelación matemática y fundamentalmente en el control que de este se quiere hacer.

De hecho el péndulo invertido es un problema estándar en el área de los sistemas de control, ya que es muy útil para demostrar conceptos en control lineal como lo es la estabilización de sistemas inestables

En [11] , [12] y [13] se puede encontrar más sobre el péndulo invertido y técnicas de control aplicadas a éste.

Este sistema tiene inherentemente dos puntos de equilibrio: uno estable y otro inestable. El equilibrio estable corresponde al estado en el cual el péndulo está apuntando hacia abajo, en la ausencia de alguna fuerza de control, el sistema retornará naturalmente a ese estado. Este estado de equilibrio no requiere entrada de control para ser alcanzado y de esta forma es indiferente desde una perspectiva de control.

El equilibrio inestable corresponde al estado en el cual el péndulo apunta hacia arriba y así requiere de una fuerza de control que lo mantenga en esa posición.

El problema del control de un péndulo invertido es un problema muy conocido en control, consiste en intentar controlar un péndulo a través de un carro.

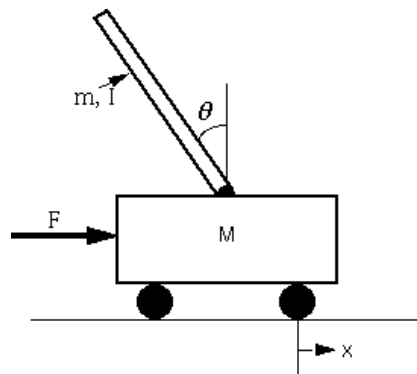


Figura 4.1: Péndulo invertido

4.1 Condiciones del problema

Se determinarán las ecuaciones dinámicas de movimiento del sistema [16], y luego se linealizará cerca del ángulo del péndulo, $\theta = \pi$ (en otras palabras, se asume que el péndulo no se aparta más que unos pocos grados de la vertical, elegida en un ángulo de π).

En este caso se tienen los siguientes datos:

- M masa del carro 0.5 kg
- m masa del péndulo 0.2 kg
- b fricción del carro 0.1 N/m/seg
- l longitud al centro de masa del péndulo 0.3 m
- I inercia del péndulo $0.006 \text{ kg} \times \text{m}^2$
- F fuerza aplicada al carro
- x coordenadas de posición del carro
- θ ángulo del péndulo respecto de la vertical

Para que el péndulo no se caiga, se parte de un ángulo inicial de inclinación del péndulo y se puede modificar la velocidad del carro. En este problema se consideran fijos la masa del vehículo, la masa del péndulo y la longitud del péndulo, y son variables la inclinación del péndulo (grados), su velocidad angular (grados/s), la posición del carro (m) y su velocidad (m/s), y la potencia que mueve el carro. El único parámetro que se puede variar para modificar el resto es la potencia del vehículo (especialmente, el ángulo de inclinación, ya que un valor 0 significa el final del control) si además se considera la gravedad. Este sistema es un sistema dinámico no lineal, resoluble con ecuaciones diferenciales no triviales.

4.2 Análisis de las fuerzas y sistema de ecuaciones

En la figura 4.2 se muestran los 2 diagramas de cuerpo libre del sistema.

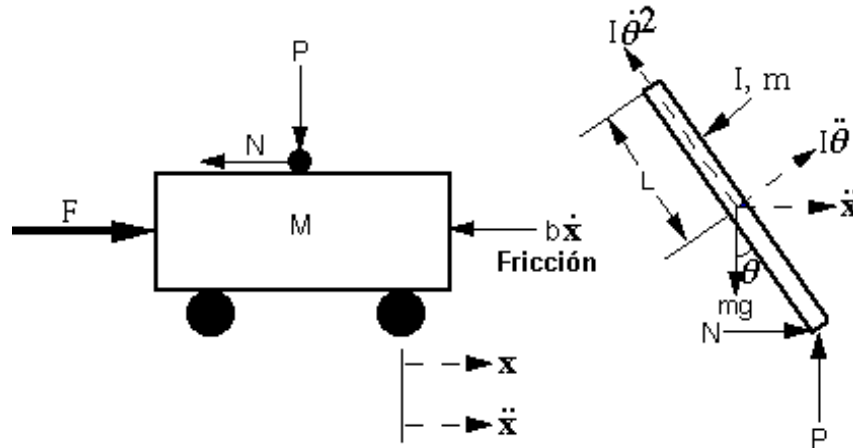


Figura 4.2: Sistema de fuerzas en el péndulo invertido

Sumando las fuerzas en el diagrama de cuerpo libre del carro en la dirección horizontal, se obtiene la siguiente ecuación del movimiento:

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + N = F \quad (4.1)$$

Nótese que también se puede sumar las fuerzas en la dirección vertical, pero no se ganará ninguna información útil.

Sumando las fuerzas en el diagrama de cuerpo libre del péndulo en la dirección horizontal, puede obtener una ecuación para N:

$$N = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (4.2)$$

Si se sustituye esta ecuación en la primera ecuación, se obtiene la primera ecuación del movimiento de este sistema:

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = F \quad (4.3)$$

Ahora para obtener la segunda ecuación de movimiento, se suman las fuerzas perpendiculares al péndulo. Si se resuelve el sistema a lo largo de este eje se ahorrará procedimiento en el cálculo, obteniéndose la siguiente ecuación:

$$P \sin \theta + N \cos \theta - mg \sin \theta = ml\ddot{\theta} + m\ddot{x} \cos \theta \quad (4.4)$$

Para librarse de los términos P y N en la ecuación anterior, se suman los momentos sobre el centroide del péndulo para obtener la siguiente ecuación:

$$-Pl \sin \theta - Nl \cos \theta = I\ddot{\theta} \quad (4.5)$$

Combinando estas dos últimas ecuaciones, se obtiene la segunda ecuación dinámica:

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = -ml\ddot{x} \cos \theta \quad (4.6)$$

Ahora este conjunto de ecuaciones será linealizado alrededor de $\theta = \pi$. Asumiendo que $\theta = \pi + \phi$ (ϕ representa un pequeño ángulo en la dirección vertical). Por lo tanto, $\cos \theta = -1$, $\sin \theta = -\phi$ y $\frac{\partial \theta^2}{\partial t} = 0$. Luego de la linealización las dos ecuaciones de movimiento serán :

$$(I + ml^2)\ddot{\phi} - mgl\phi = ml\ddot{x} \quad (4.7)$$

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} - ml\ddot{\phi} = u \quad (4.8)$$

Donde u representa la entrada.

4.3 Función de transferencia

Para obtener analíticamente la función de transferencia de las ecuaciones del sistema linealizado, se debe tomar primero la transformada de Laplace de las ecuaciones del sistema.

Las transformadas de Laplace son:

$$(I + ml^2)\phi(s)s^2 - mgl\phi(s) = mlX(s)s^2 \quad (4.9)$$

$$(M + m)X(s)s^2 + bX(s)s - ml\phi(s)s^2 = U(s) \quad (4.10)$$

Al hallar la función de transferencia se consideran las condiciones iniciales nulas.

Como se está mirando al ángulo Phi como la salida de interés, se resuelve la primera ecuación para X(s),

$$X(s) = \left[\frac{(I + ml^2)}{ml} - \frac{g}{s^2} \right] \phi(s) \quad (4.11)$$

y entonces sustituyéndola en la segunda ecuación:

$$(M + m) \left[\frac{(I + ml^2)}{ml} + \frac{g}{s} \right] \phi(s)s^2 + b \left[\frac{(I + ml^2)}{ml} + \frac{g}{s} \right] \phi(s)s - ml\phi(s)s^2 = U(s) \quad (4.12)$$

Reordenando, la función de transferencia es:

$$\frac{\phi(s)}{U(s)} = \frac{\frac{ml}{q}s^2}{s^4 + \frac{b(I+ml^2)}{q}s^3 - \frac{(M+m)mgl}{q}s^2 - \frac{bmgl}{q}s} \quad (4.13)$$

donde,

$$q = [(M + m)(I + ml^2) - (ml)^2] \quad (4.14)$$

De la función de transferencia de arriba puede verse que hay un polo y un cero en el origen. Estos pueden ser cancelados y la función de transferencia será:

$$\frac{\phi(s)}{U(s)} = \frac{\frac{ml}{q}s}{s^3 + \frac{b(I+ml^2)}{q}s^2 - \frac{(M+m)mgl}{q}s - \frac{bmgl}{q}} \quad (4.15)$$

Con el valor de los parámetros del sistema a simular, se obtiene la siguiente función de transferencia en el dominio de la frecuencia:

$$\frac{\phi(s)}{U(s)} = \frac{4.5455s}{s^3 + 0.1818s^2 - 31.1818s - 4.4545} \quad (4.16)$$

Ahora se observará el comportamiento en lazo abierto de este sistema ante una fuerza escalón de 1 Newton en la figura 4.3.

Como puede verse en el gráfico, la respuesta es totalmente insatisfactoria, no es estable en lazo abierto ya que al aplicar esta fuerza unitaria el ángulo del péndulo no se estabiliza en ningún punto y varía constantemente.

4.4 Discretización

Para implementar el control predictivo a este sistema, se va a discretizar la función de transferencia del péndulo invertido a través de la función `c2d` de Matlab. En esta función se requiere el tiempo de muestreo T_s y el tipo de retenedor a emplear.

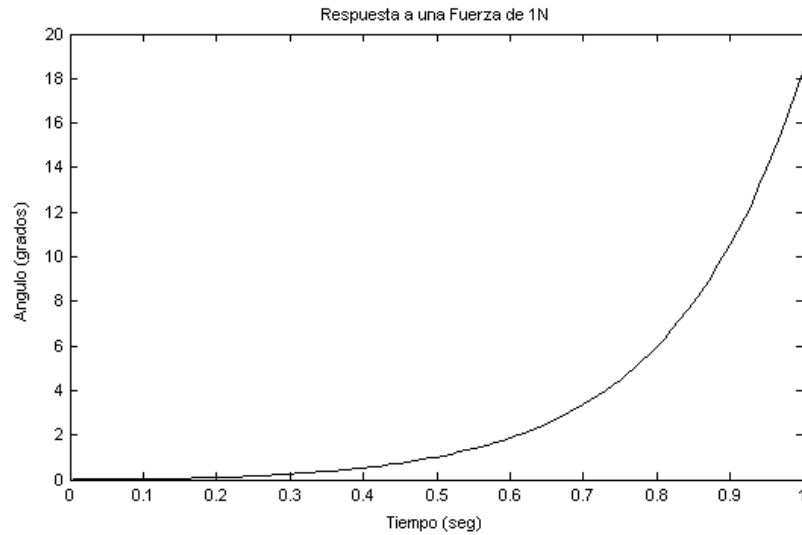


Figura 4.3: Respuesta del péndulo invertido en lazo abierto

El tiempo de muestreo se halla con la décima parte del tiempo de establecimiento del sistema T_e :

$$T_s = \frac{T_e}{10} \quad (4.17)$$

El tiempo de establecimiento se puede hallar a través de la frecuencia natural y el coeficiente de amortiguamiento del sistema de la siguiente manera:

$$T_e = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (4.18)$$

Los cuales se pueden obtener por medio de la función `damp` en el entorno de programación Matlab, escogiendo ζ y ω_n del correspondiente polo más cercano al eje imaginario.

Los resultados obtenidos son:

$$\zeta = 1$$

$$\omega_n = 5.6041 \text{ rad/seg}$$

Hallando el tiempo de establecimiento:

$$T_e = \frac{4}{5.6041 \text{ rad/seg}} = 0.7138 \text{ seg}$$

y

$$T_s = 0.0714 \text{ seg}$$

Discretizando el sistema con un tiempo de muestreo de 0.04485 seg (diferente pero menor al T_s hallado) y un retenedor de orden cero se obtiene:

$$G(z^{-1}) = \frac{0.004583z^{-1} - 1.247 \times 10^{-5}z^{-2} - 0.004571z^{-3}}{1 - 3.055z^{-1} + 3.046z^{-2} - 0.9919z^{-3}} \quad (4.19)$$

La respuesta del sistema en el dominio de z se observa en la figura 4.4:

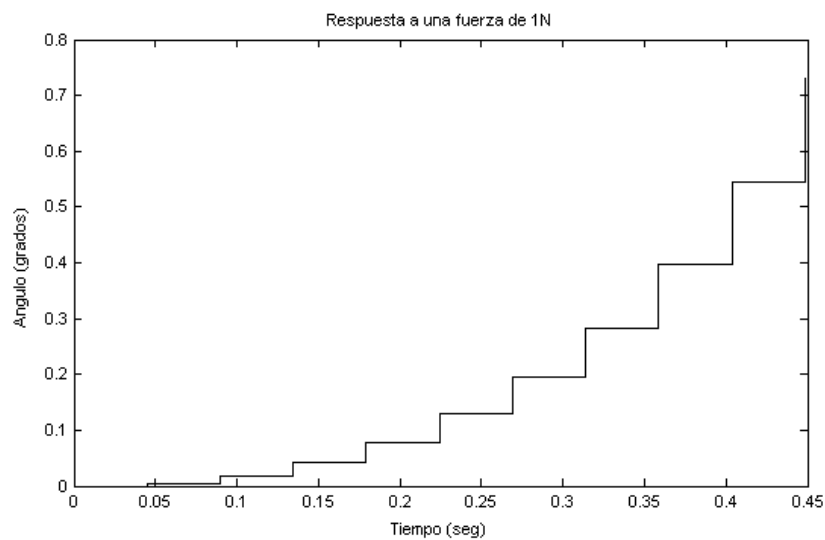


Figura 4.4: Respuesta del péndulo invertido discretizado

4.5 Restricciones

Se establecen los límites de la señal de control, que corresponde a la fuerza aplicada sobre el sistema carro péndulo:

$$U_{\max} = 4000 \text{ N}$$

$$U_{\min} = -4000 \text{ N}$$

$$\Delta U_{\max} = 100 \text{ N/s}$$

$$\Delta U_{\min} = -100 \text{ N/s}$$

Para la salida del sistema que corresponde al ángulo del péndulo con respecto a la vertical se establecieron como límites:

$$Y_{\max} = 225^\circ$$

$$Y_{\min} = 0^\circ$$

4.6 Implementación del GPC

En la implementación del GPC se obtendrán valores de la energía de la señal de control y la energía del error del sistema, se mostrará el comportamiento del péndulo invertido para diferentes valores de λ ante una referencia de 150° . El factor de peso de la salida δ se tomará igual a 1 sugerido por [20].

Para un horizonte de predicción $N = 30$ y un horizonte de control $N_u = 5$, se toman valores de λ (lambda) de 0.2, 0.8, 1.5 y 5. El comportamiento del sistema se observa en la figura 4.5

Calculando la energía de la señal de control E_c y la energía del error E_e para todos los valores de λ se obtiene la tabla 4.1.

| λ | E_c (Newtons ²) | E_e (grados ²) |
|-----------|-------------------------------|------------------------------|
| 0.2 | 6.1637×10^9 | 4.1824×10^6 |
| 0.8 | 5.9838×10^9 | 3.9366×10^6 |
| 1.5 | 5.7400×10^9 | 3.6800×10^6 |
| 5 | 4.4834×10^9 | 2.9763×10^6 |

Tabla 4.1: Cálculo de energías para $N=30$ y $N_u=5$ en el péndulo invertido, implementando GPC

De la figura 4.5 se observa que cuando λ toma valores muy cercanos a 0.8, el sistema sigue exactamente la referencia, hasta que llega un punto en que el controlador no deja sobrepasar la restricción de -4000 N y el péndulo cae a un ángulo pequeño.

Cuando λ es menor que 0.8 el sistema responde más rápido, pero sobrepasa la referencia (se mantiene menos tiempo en la posición alcanzada) teniendo un mayor esfuerzo en la señal de control.

Si λ es mayor que 0.8 el sistema se demora más en responder y no alcanza la referencia (entre más grande λ más lejos se ubica el péndulo de la referencia), pero permanece más tiempo en la posición alcanzada y el esfuerzo de control va disminuyendo.

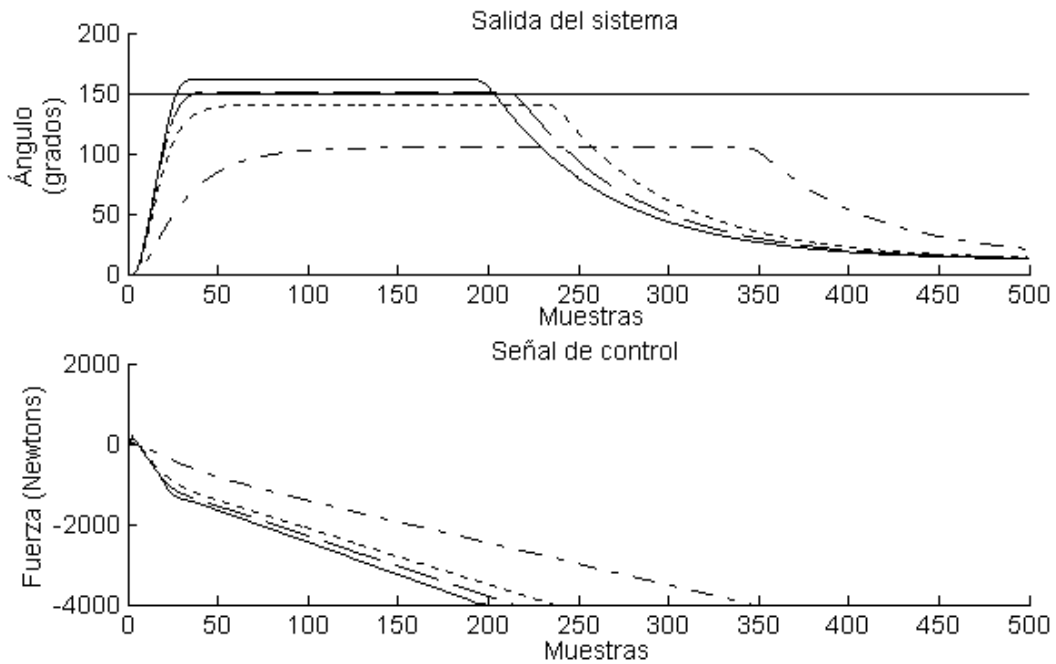


Figura 4.5: Variación del factor de peso de la señal de control del GPC. $\lambda=0.2$, línea sólida; $\lambda=0.8$, línea de guiones; $\lambda=1.5$, línea punteada; $\lambda=5$, línea guión-punto

Estas observaciones se corroboran mirando la tabla 4.1, ya que cuando aumenta el valor de λ , la energía de control disminuye y la energía del error disminuye, esto debido a que entre más alejado está el péndulo de la referencia, más tiempo permanece en esa posición.

Para continuar con el análisis de energías en la implementación del GPC, se fijará el horizonte de predicción $N = 20$ y el horizonte de control $N_u = 5$. En la figura 4.6 se muestran las simulaciones para $\lambda = 0.8$ y 5.

En la tabla 4.2 se muestran los resultados de las energías de control y del error para los dos λ .

En la figura 4.6 se observa que a un λ más pequeño el péndulo se acerca más a la referencia, pero llega un punto en que el controlador no deja sobrepasar la

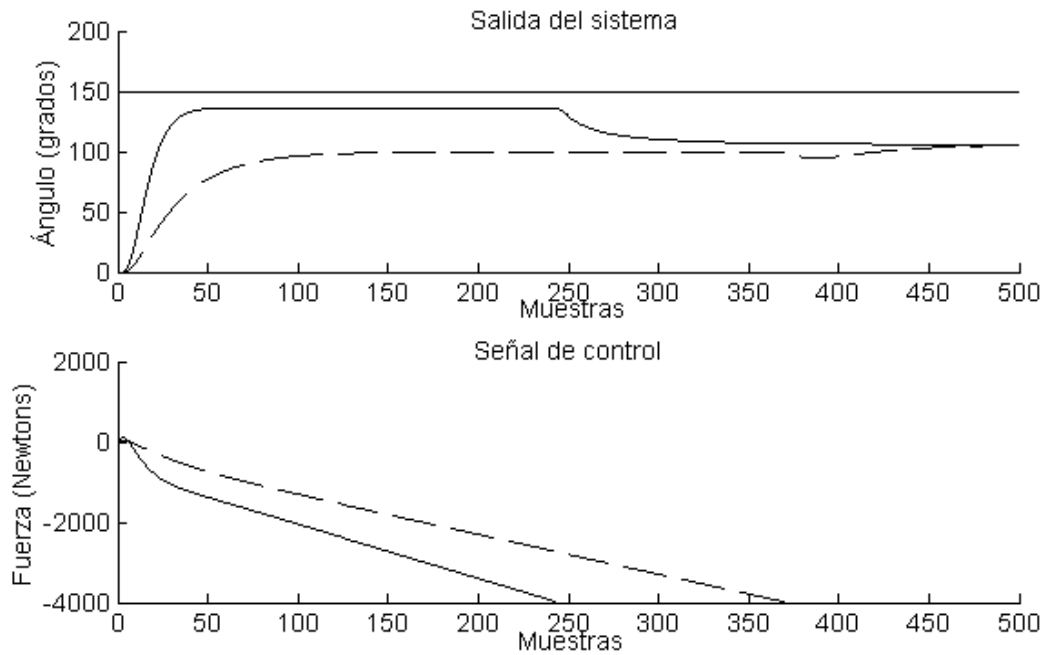


Figura 4.6: Variación del factor de peso de la señal de control del GPC. $\lambda=0.8$, línea sólida; $\lambda=5$, línea de guiones

| λ | E_c (Newtons ²) | E_e (grados ²) |
|-----------|-------------------------------|------------------------------|
| 0.8 | 5.6570×10^9 | 8.3371×10^5 |
| 5 | 4.2122×10^9 | 1.8969×10^6 |

Tabla 4.2: Cálculo de energías para $N=20$ y $N_u=5$ en el péndulo invertido, implementando GPC

restricción de -4000 N de la señal de control y el péndulo cae unos grados; en este caso se tiene el mayor esfuerzo de control y esto se puede comprobar en la tabla 4.2.

Cuando λ es grande el péndulo se aleja más de la referencia, pero se mantiene más tiempo en la posición alcanzada debido a que la señal de control tiene menos esfuerzo y se demora más en llegar a la restricción, en este caso el sistema tiene la mayor energía del error.

Tomando el horizonte de predicción $N = 30$ y el horizonte de control $N_u = 3$, se aprecia en la figura 4.7 el comportamiento del sistema para $\lambda = 0.8$ y 5 .

La energía de la señal de control y del error obtenidas se muestran en la tabla 4.3.

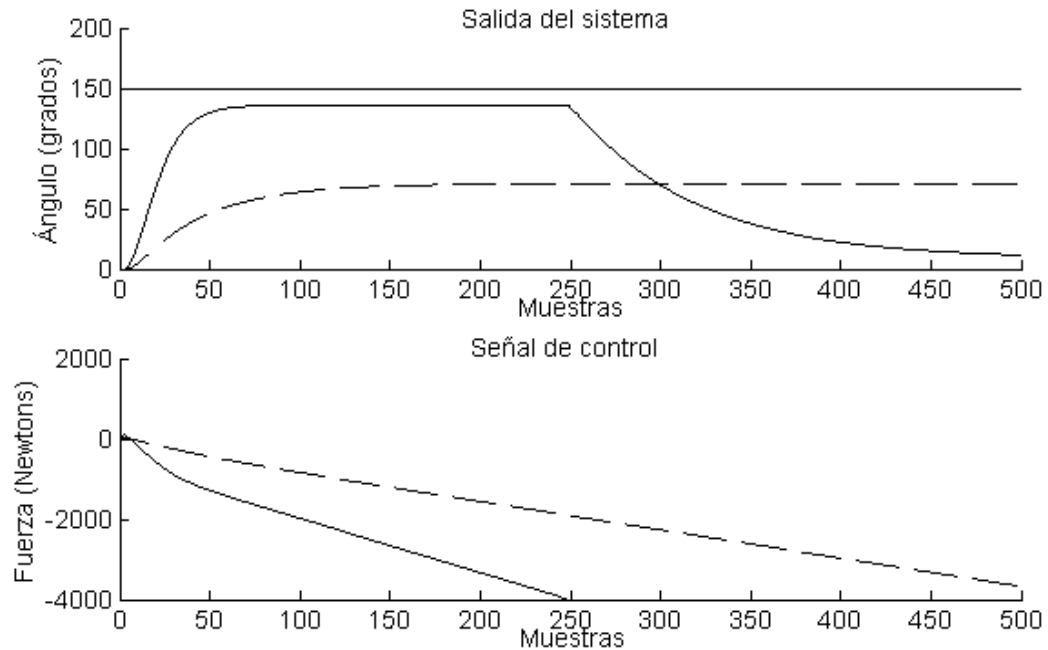


Figura 4.7: Variación del factor de peso de la señal de control del GPC. $\lambda=0.8$, línea sólida; $\lambda=5$, línea de guiones

| λ | E_c (Newtons ²) | E_e (grados ²) |
|-----------|-------------------------------|------------------------------|
| 0.8 | 5.5733×10^9 | 3.6553×10^6 |
| 5 | 2.3476×10^9 | 3.8676×10^6 |

Tabla 4.3: Cálculo de energías para $N=30$ y $N_u=3$ en el péndulo invertido, implementando GPC

Con lo observado en la figura 4.7 se concluye como en el caso anterior que ante un λ pequeño el péndulo se acerca más a la referencia con un mayor esfuerzo de control, pero se mantiene menos tiempo en el ángulo alcanzado. Cuando λ es grande ocurre todo lo contrario, tiene menos esfuerzo en la señal de control y más energía del error (ver tabla 4.3).

Ahora se implementa el GPC con los parámetros $N = 30$, $N_u = 5$ y $\lambda = 0.8$ y se muestra en la figura 4.8 el comportamiento del sistema para $\delta = 0.5, 2$ y 5 .

En la tabla 4.4 se muestran los resultados obtenidos de las energías.

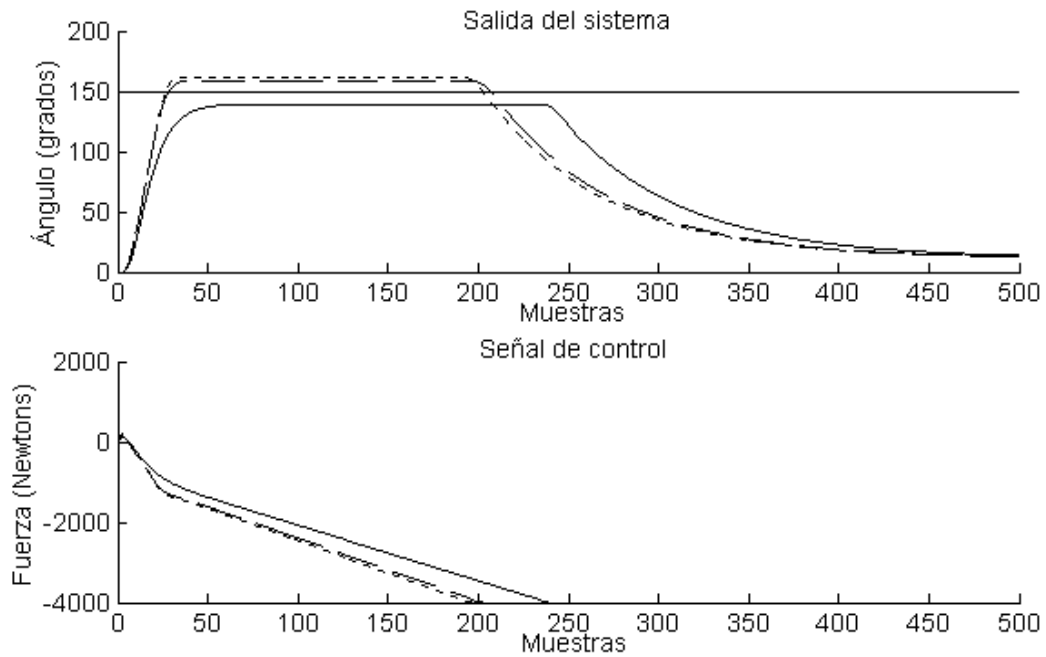


Figura 4.8: Variación del factor de peso del error del GPC. $\delta=0.5$, línea solida; $\delta=2$, línea de guiones; $\delta=5$, línea punteada

Se observa en la figura 4.8 y en la tabla 4.4 que al aumentar el factor de ponderación del error, la energía de la señal de control y del error aumentan.

4.7 Implementación del DMC

Como el péndulo invertido es un sistema inestable, el controlador predictivo DMC no funcionará adecuadamente para este sistema, ya que este controlador realiza la predicción con base en los coeficientes de respuesta al escalón y no es posible modelar el sistema de ésta manera, ya que estos tienden al infinito [1].

| δ | E_c (Newtons ²) | E_e (grados ²) |
|----------|-------------------------------|------------------------------|
| 0.5 | 5.7027×10^9 | 3.6464×10^6 |
| 2 | 6.1079×10^9 | 4.0992×10^6 |
| 5 | 6.1738×10^9 | 4.1988×10^6 |

Tabla 4.4: Cálculo de energías para $N=30$ y $Nu=5$ en el péndulo invertido implementando GPC

Para comprobarlo se simulará el sistema con factores de ponderación $\delta = 1$ y $\lambda = 0.8$ ante una referencia de 150° .

Con el horizonte de predicción $N = 30$ y un horizonte de control $N_u = 5$, se muestra en la figura 4.9 el comportamiento del sistema.

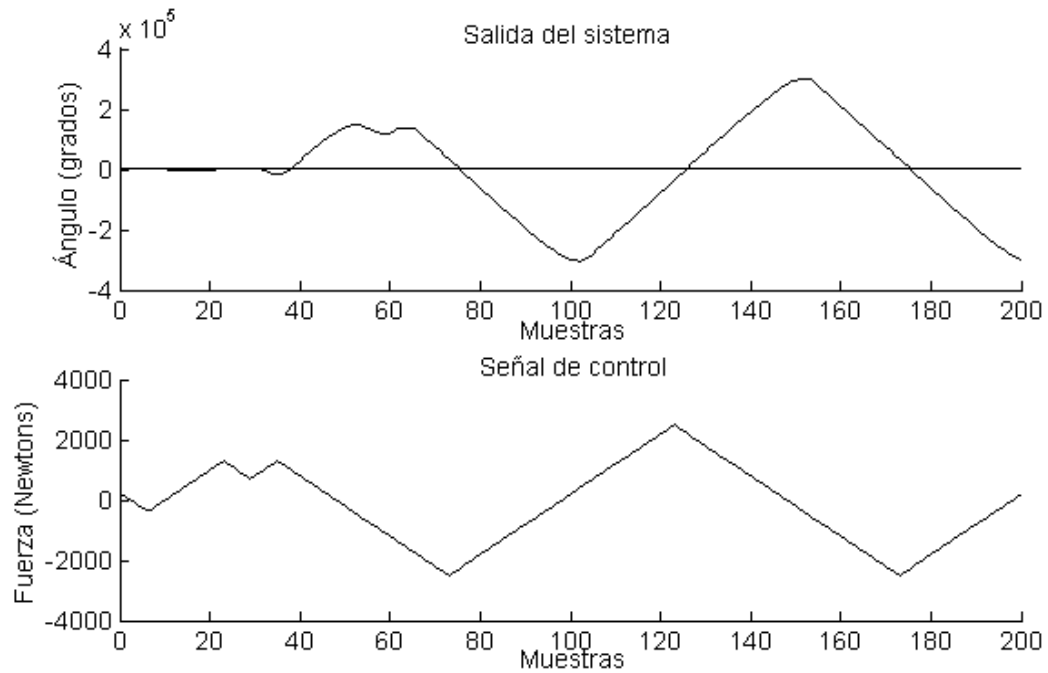


Figura 4.9: Implementación del DMC al péndulo invertido

Como se aprecia en la figura 4.9 no es posible controlar el sistema, ya que la salida toma valores muy grandes sin seguir la referencia y oscila de manera similar a la señal de control.

Así el sistema se simule sin restricciones y variando los demás parámetros del controlador, no es posible controlar el péndulo invertido con el DMC y por lo tanto no hay forma de analizar la energía de la señal de control y la energía del error.

4.8 Comparación con el controlador PID

El péndulo invertido debido a su dinámica inestable no es controlable con el PID clásico, lo cual se demostró en [16]. Por lo tanto el GPC presenta la ventaja de

implementarse en sistemas de este tipo, que con otros controladores no es posible controlar.

4.9 Conclusiones

Implementando el GPC en el péndulo invertido, bajo la variación de los parámetros de sintonía del controlador se concluye:

- Al aumentar el factor de ponderación λ , la energía de la señal de control disminuye, mientras que no hay certeza en la tendencia de la energía del error (ver tablas 4.1, 4.2 y 4.3).
- Al reducir el horizonte de predicción (de 30 a 20) disminuye la energía del error y la energía de control (ver tabla 4.2).
- Al reducir el horizonte de control (de 5 a 3) la energía de control disminuye y no hay certeza en cuanto a la energía del error (ver tabla 4.3).
- Al aumentar el factor de ponderación δ , la energía de la señal de control y del error aumentan.

Al aumentar o disminuir la energía de la señal de control, no es posible afirmar la tendencia en la energía de la señal del error (ver tablas 4.1, 4.2 y 4.3).

El DMC no es posible implementarlo en sistemas inestables [1] y por tanto no se pueden comparar las energías con el GPC.

Capítulo 5

Conclusiones

- Al aumentar el factor de ponderación de la señal de control λ del GPC y del DMC, en el sistema estable (tanques acoplados) y en el sistema integrante (motor c.c.) se disminuye la energía de la señal de control y aumenta la energía del error (ver tablas 2.1 a la 2.5 y 3.1 a la 3.7).

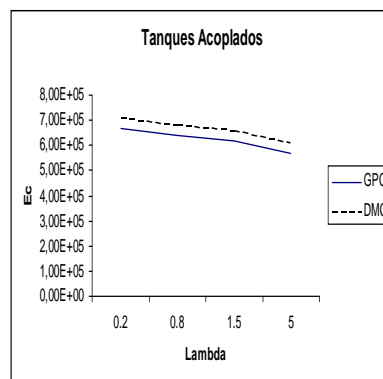


Figura 5.1: Energía de la señal de control vs Lambda para $N=30$ y $Nu=5$

- En el sistema estable y en el sistema integrante se concluye que al implementar el GPC y el DMC bajo los mismos parámetros de sintonía, la energía de la señal de control siempre es menor en el GPC y la energía del error siempre es menor en el DMC (ver tablas 2.1 a la 2.5 y 3.1 a la 3.7), lo que implica que si se desea precisión se debe implementar el DMC o si se desea economía se debe implementar el GPC.
- En cuanto al impacto de la variación de la energía de la señal de control sobre la variación de la energía del error, se concluye que en los sistemas estables e

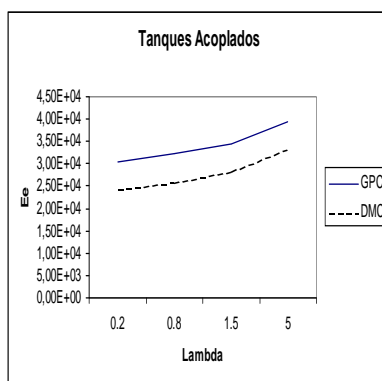


Figura 5.2: Energía del error vs Lambda para $N=30$ y $Nu=5$

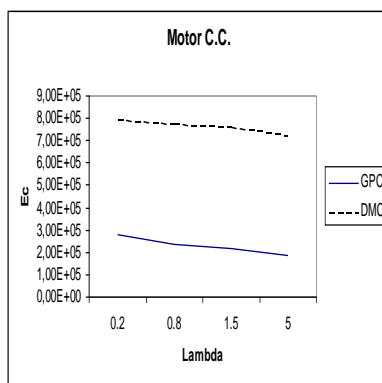


Figura 5.3: Energía de la señal de control vs Lambda para $N=30$ y $Nu=5$

integrantes, sí la energía de control aumenta la energía del error disminuye y viceversa (ver tablas 2.1 a la 2.5 y 3.1 a la 3.7).

- En el sistema integrante al disminuir el horizonte de predicción (de 30 a 10) en cualquiera de los dos controladores predictivos, las energías de la señal de control y del error aumentan (ver tablas 3.3 y 3.7).
- En los sistemas inestables (péndulo invertido) no es posible implementar el DMC [1], [6] y por tanto no se pueden comparar el desempeño de los 2 controladores predictivos en cuanto al análisis de las energías. Tampoco se posibilitó aclarar la influencia del comportamiento de la energía de control en la energía del error en el sistema.
- En el sistema inestable al aumentar el factor de ponderación λ del GPC, disminuye la energía de la señal de control (lo cual también sucede si se reduce el

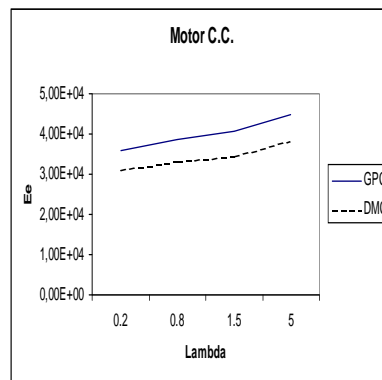


Figura 5.4: Energía del error vs Lambda para $N=30$ y $Nu=5$

horizonte de control a 3) y al reducir el horizonte de predicción a 20 disminuye la energía del error y la energía de control (ver tablas 4.1, 4.2 y 4.3).

- Al comparar las técnicas empleadas de control predictivo con el clásico PID, se comprueba la optimabilidad del GPC y del DMC con respecto al error en la salida y el esfuerzo en la señal de control teniendo en cuenta las restricciones. En el caso del PID se logran buenos resultados en la salida del sistema, pero requiriendo gran esfuerzo en la variable de control y sin tener en cuenta ningún tipo de restricción.
- Al aumentar el factor de ponderación del error δ del GPC y del DMC, en el sistema estable (tanques acoplados) y en el sistema integrante (motor c.c.) se aumenta la energía de la señal de control y disminuye la energía del error (ver tablas 2.3,2.6,3.4 y 3.8).

Apéndice A

Programa gpc.m

```
%Implementacion del GPC usando MATLAB
clear all
close all
clc

%Obteniendo los parametros del sistema
N=10; %horizonte de prediccion
Nu=5; %horizonte de control
j=N;
%numerador y denominador de la F.T discreta
numz=[0.4 0.6];
denz=[1 -0.8];
ref=1; %referencia
w=ref*ones(N,1);
mus=500; %numero de muestras
%Matrices de ponderacion señal de control y error
lamda=0.8*eye(N);
delta=1*eye(N);
%Restricciones
umax=1; %maxima señal de control
umin=0; %minima señal de control
dumax=10; %maximo cambio de la señal de control
dumin=-10; %minimo cambio de la señal de control
ymax=1; %maxima salida
ymin=0; %minima salida

%Obtencion A gorro
del=[1,-1];
agorro=-conv(denz,del);
ago=-agorro;
%Creando matrices E,F y G
[q,na]=size(denz);
[q,nb]=size(numz);
```

```

E=zeros(j,j);
F=zeros(j,na+1);
G=zeros(j,nb-1+j);
%E,F y G iniciales
E(1,1)=1;
for a=1:na,
F(1,a)=agorro(a+1);
end
for k=1:nb,
G(1,k)=numz(k);
end

%Hallando los otros terminos de E,F y G
%F
for b=2:j,
for d=1:na,
F(b,d)=F(b-1,d+1)-F(b-1,1)*ago(d+1);
end
end
F(:,na+1)=[];
%E
cont=1;
for h=2:j,
for c=1:cont
E(h,c)=E(h-1,c);
end
E(h,c+1)=F(h-1,1);
cont=cont+1;
end
%Gi
for o=1:j
Gi(o,:)=conv(numz,E(o,:));
end
g=Gi(j,:);
%Hallango Matriz G
G=zeros(j,j);
a=0;
for c=1:j,
for f=1+a:j,
G(f,c)=g(f-a);
end
a=a+1;
end
%Hallando vector Gprima
Gpri=zeros(j,1);
for r=1:j,

```



```

Gpri(r)=Gi(r,r+nb-1);
end

%Inicializando las matrices de trabajo
y=zeros(mus+1,1);
delu=zeros(N,1);
yant=zeros(na,1);
deluant=0;
u=zeros(mus+1,1);
f=zeros(N,1);

%Parte izquierda de las restricciones
L=ones(N,1);
T=tril(ones(N));
R=[eye(N); -eye(N); T; -T; G; -G];

%Calculo de la señal de control y la salida del sistema
for i=2:mus+1
%Hallando la respuesta libre
f=F*yant + Gpri*deluant;
%Hallando el hessiano y el gradiente
hess=G'*delta*G+lamda;
grad=G'*delta*(f-w);
%Parte derecha de las restricciones
C=[ L*dumax;
-L*dumin;
L*umax-L*u(i-1);
-L*umin+L*u(i-1);
L*yamax-f;
-L*yamin+f ];
%Hallando la optimizacion con el QP
deluu=quadprog(hess,grad,R,C);
u(i)=u(i-1)+deluu(1);
%Prediccion de la salida N pasos al futuro
yt= G*deluu + F*yant + Gpri*deluant;
y(i)=yt(1);
% Actualizando salidas y entradas pasadas
yant=[y(i);yant(1:na-1)];
deluant=deluu(1);
end

%Construccion de graficas
t=0:mus-1;
u=u(2:mus+1,1);
figure(1)
plot(t,u)

```

```
title('Señal de control')
xlabel('Muestras')
grid
t=0:mus;
figure(2)
plot(t,y)
title('Salida del sistema')
xlabel('Muestras')
grid
```

Apéndice B

Programa dmc.m

```
%Implementacion del DMC usando MATLAB
clear all
close all
clc

%Numerador y denominador de la F.T discreta
numz=[0.4 0.6];
denz=[1 -0.8];
Ts=0.2551; %tiempo de muestreo
g=tf(numz,denz,Ts); %funcion de transferencia
set(g,'variable','z^-1')

%Obteniendo coeficientes de respuesta al escalon
N=500; %numero de muestras
delt=Ts; %tiempo del escalon
Su=step(g,[1:N]*delt); %respuesta al cambio del escalon unitario

%Parametros del controlador
M=10; %horizonte de control
P=30; %horizonte de prediccion
%Matrices de ponderacion señal de control y error
gammaU=0.8*eye(M);
gammaY=1*eye(P);
amplitud=10; %referencia
SET=ones(P,1)*(amplitud);
%Restricciones
Umax=1; %maxima señal de control
Umin=0; %minima señal de control
dUmax=10; %maximo cambio de la señal de control
dUmin=-10; %minimo cambio de la señal de control
Yhigh=1; %maxima salida
Ylow=0; %minima salida
```

```

%Hallando la matriz de prediccion dinamica
bigSu=[];
for i=1:M
bigSu=[bigSu,[zeros(i-1,1);
Su(1:P-(i-1))]];
end
%Iniciando matrices de trabajo
Yhat=zeros(N,1); %estado inicial
U=0; delU=0;% %entrada inicial
Y=0; %salida inicial

%Hallando el Hessiano
Hess= bigSu'*gammaY'*gammaY* bigSu + gammaU'*gammaU;
%Parte izquierda de la ecuacion de restricciones
IL=tril(ones(M));
Cu=[-IL; IL; -eye(M); eye(M); -bigSu; bigSu];

%Calculo de la señal de control y la salida del sistema
for i=2:N
%Actualizacion del estado
Yhat=[Yhat(2:N);Yhat(N)]+ Su*delU;
Y(i,:)=Yhat(1)';
%calculo del error
Ep=SET-Yhat(2:(P+1));
%Hallando el gradiente
G=bigSu'*gammaY'*gammaY*Ep;
%Parte derecha de la ecuacion de restricciones
Ilmul=ones(M,1);
Crhs=[Ilmul*[U(i-1,:)'-Umax];
Ilmul*[Umin-U(i-1,:)]';
Ilmul*[-dUmax];
Ilmul*[dUmin];
-Ep+SET-ones(P,1)*[Yhigh];
Ep-SET+ones(P,1)*[Ylow];];
%Optimizacion con QP
optimset('LargeScale','off');
deltaU=quadprog(Hess, -G, -Cu, -Crhs);
delU=deltaU(1);
U(i,:)=U(i-1,:) + delU';
end

%Construccion de graficas
tfinal=delt*(N-1);
t=0:delt:tfinal';
figure(1)
plot(t,U)

```

```
title('Señal de control')
xlabel('Muestras')
grid
figure(2)
plot(t,Y)
title('Salida del sistema')
xlabel('Muestras')
grid
```

Apéndice C

Modelos de convolución

Los modelos de convolución engloban los modelos de respuesta impulsional y respuesta ante escalón [2], de gran éxito en la industria por ser muy intuitivos y permitir un procedimiento de identificación relativamente sencillo.

C.1 Respuesta impulsional

También conocida por secuencia de ponderación o modelo de convolución [1]. La salida viene relacionada con la entrada por la ecuación

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i u(t-i) \quad (\text{C.1})$$

donde h_i son los valores muestreados obtenidos al someter al proceso a un impulso unitario de amplitud igual al período de muestreo (ver figura C.1 a). Esta suma es truncada y sólo se consideran N valores, teniendo

$$y(t) = \sum_{i=1}^N h_i u(t-i) = H(z^{-1})u(t) \quad (\text{C.2})$$

donde $H(z^{-1}) = h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots + h_N z^{-N}$. Un inconveniente de este método es el gran número de parámetros que necesita, ya que N suele ser un valor elevado (del orden de 40-50). La predicción vendría dada por:

$$\hat{y}(t+k/t) = \sum_{i=1}^N h_i u(t+k-i/t) = H(z^{-1})u(t+k/t) \quad (\text{C.3})$$

Este método es ampliamente aceptado en la práctica industrial debido a que es muy intuitivo y no requiere información previa sobre el proceso, con lo que el procedimiento de identificación se simplifica, a la vez que permite describir fácilmente dinámicas complejas como fase no mínima o retardos.

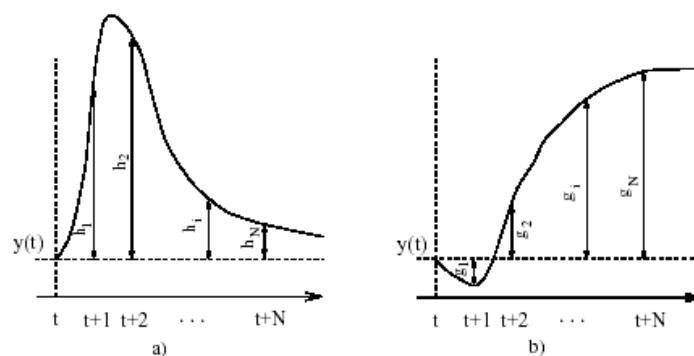


Figura C.1: Respuesta impulsional y ante escalón

C.2 Respuesta ante escalón

Es muy similar al anterior sólo que ahora la señal de entrada es un escalón. Para sistemas estables se tiene la respuesta truncada que será

$$y(t) = y_0 + \sum_{i=1}^N g_i \Delta u(t-i) = y_0 + G(z^{-1})(1-z^{-1})u(t) \quad (\text{C.4})$$

donde g_i son los valores muestreados ante la entrada en escalón y $\Delta u(t) = u(t) - u(t-1)$, según se muestra en la figura C.1 b. El valor de y_0 puede tomarse 0 sin pérdida de generalidad, con lo cual el predictor será:

$$\hat{y}(t+k/t) = \sum_{i=1}^N g_i \Delta u(t+k-i/t) \quad (\text{C.5})$$

Este método presenta las mismas ventajas e inconvenientes que el anterior.

Bibliografía

- [1] Camacho, Eduardo F. and Bordons, Carlos , *Model Predictive Control*, Springer-Verlag London Limited, 2004.
- [2] Camacho, Eduardo F. and Bordons, Carlos , *Control Predictivo: pasado, presente y futuro*, Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla 2004.
- [3] Morari M., Lee, J.H., García, C.E. *Model Predictive Control*. March 15, 2002.
- [4] Bordons A.C., *Control predictivo: metodología, tecnología y nuevas perspectivas*, Departamento de Ingeniería Sistemas y Automática. Universidad de Sevilla. Aguadulce, Almería, 2000.
- [5] Saéz, D. H., Tópicos en control avanzado Apuntes de clase. Universidad de Quilmes. 2002.
- [6] Pike, A.W., Grimble, M.J., Johnson, M.A., Ordys, A.W., and Sharkoor S., *Predictive Control*. Industrial Control Centre, University of Strathclyde, Glacow, Scotland, 1996.
- [7] Sanchis, J., Martínez, M., Blasco, X., Senent, J., *Experimentación en control predictivo basado en modelos. Práctica para la enseñanza de controladores predictivos generalizados en la ETSIL*. Universidad Politécnica de Valencia.
- [8] Rojas G., J.N., *Desarrollo de una Metodología para aplicar la estructura de control mpc unificada*. Universidad Nacional de Colombia sede Manizales. Septiembre 2004.
- [9] Coleman, T., Branch, M.A., Grace, A., *Optimization Toolbox for use with Matlab*. version 2.
- [10] Camacho, Eduardo F. and Bordons, Carlos , *Impact: Tool for the book model predictive control*. 2004.
- [11] Aracil, J., Gordillo, F., *El Péndulo invertido: un desafío para el control no lineal*. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial, vol. 2, num. 2, Abril 2005, pp. 8-19.
- [12] Lam, J., *Control of a Inverted Pendulum*.
- [13] Salcedo, J.V., Martínez, M., Sanchis, J., y Blasco, X., *Control de un péndulo invertido con MGPC lineal*, Universidad Politécnica de Valencia.

-
- [14] Llata, J.R., Oria, J.P., Sarabia, E.G., Arce, J., Robles, A., *Control predictivo de tanques acoplados*. Universidad de Cantabria.
- [15] Laubwald, E., "*Coupled tanks systems 1*", control-systems-principles.co.uk.
- [16] Mellon, C., "*Tutoriales de control con Matlab*", http://ib.cnea.gov.ar/~control2/Links/Tutorial_Matlab_esp.
- [17] Electrónica Unicrom, "*El motor de corriente continua*", http://www.unicrom.com/Tut_MotorCC.asp.
- [18] Donoghue, K.O., *Real-time adaptive PID control of a non-linear process based on genetic optimisation*. Dublin city university. 2002.
- [19] Van den Boom, T.J., "*Model based predictive control*". Delf University. 1996.
- [20] Clarke, D.W., Mohtadi, C., and Tuffs, P.S., *Generalized Predictive Control. Part I. The basic algorithm*. Automatica, 23(2):137-148,1987.
- [21] Dougherty, D., Cooper, D., *A practical multiple model adaptive strategy for multivariable model predictive control*, University of Connecticut, Storrs, USA july 2002.
- [22] Ogata, K., "*Sistemas de control en tiempo discreto*". Prentice-Hall. 1996.
- [23] Sanchis, J., Martinez, M., Blasco, X. y Ramos, C., *GPC con restricciones. Reducción en el tiempo de cálculo basada en el uso de componentes principales*. Universidad politécnica de Valencia. 2002.
- [24] Camacho, E.F., "*Constrained Generalized Predictive Control*". IEEE transactions on automatic control., vol. 38, no. 2, february 1993.