

*Una propuesta metodológica para extraer factores comunes
dinámicos estacionales y no estacionarios*

MARÍA CAMILA OROZCO SÁNCHEZ



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
BOGOTÁ, D.C.
JUNIO DE 2013

*Una propuesta metodológica para extraer factores comunes
dinámicos estacionales y no estacionarios*

MARÍA CAMILA OROZCO SÁNCHEZ

TRABAJO DE TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO DE
MAGISTER EN CIENCIAS - ESTADÍSTICA

DIRECTOR
FABIO HUMBERTO NIETO SÁNCHEZ
DOCTOR EN CIENCIAS - ESTADÍSTICA

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN
SERIES DE TIEMPO



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
BOGOTÁ, D.C.
JUNIO DE 2013

Título en español

Una propuesta metodológica para extraer factores comunes dinámicos estacionales y no estacionarios

Title in English

A methodology to extract dynamic seasonal and non-stationary common factors

Resumen: Este trabajo presenta una metodología empírica que permite extraer factores comunes dinámicos estacionales y no estacionarios, basados en el análisis factorial dinámico estacional de Nieto *et al.* (2013), en el análisis factorial dinámico de Peña y Poncela (2006) y en el modelo de estacionalidad común en diferentes frecuencias planteado por Buseti (2006). La metodología propuesta es aplicada a nueve series de la macroeconomía Colombiana.

Abstract: This work presents an empirical methodology that allows to extract dynamic seasonal and non-stationary common factors based on the dynamic seasonal factor analysis proposed by Nieto *et al.* (2013), nonstationary dynamic factor analysis of Poncela and Peña (2006), and seasonal common model in different frequencies posed by Buseti (2006). The proposed methodology is applied to nine Colombian macroeconomic series.

Palabras clave: Factores comunes dinámicos, series de tiempo multivariadas, estacionalidad común.

Keywords: Dynamic common factors, multivariate time series, common seasonality.

Nota de aceptación

Trabajo de tesis

Aprobada

“Mención Meritoria”

Jurado

Gustavo Adolfo Junca Rodríguez

Jurado

Hector Manuel Zarate Solano

Director

Fabio Humberto Nieto Sánchez

Bogotá, D.C., Junio de 2013

Dedicado a

A Dios por darme la fuerza,
a mi mamá, Marina, por su apoyo incondicional
y a mis amigos y compañeros por su colaboración.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por permitirme cumplir con esta importante meta, a mi mamá por su incondicional apoyo, a mis compañeros y amigos por sus sabios aportes, consejos y por compartir cada instante de la maestría, ya que ellos han contribuido para poder alcanzar este logro.

Agradezco a los profesores José Alberto Vargas, Munir Jalil, Luis Guillermo Díaz y Liliana Blanco, por compartir sus valiosos conocimientos, que me sirvieron para el desarrollo de este trabajo. Al profesor Armando Palencia por su apoyo y a la profesora Nancy Milena Hoyos por su motivación para ingresar a tan excelente maestría.

Por último, un gran agradecimiento al director de este trabajo, el profesor Fabio Nieto, por su paciencia, tiempo, colaboración, sus importantes conocimientos y constante apoyo que permitió la elaboración y culminación de este trabajo.

Índice general

Índice general	I
Índice de tablas	II
Índice de figuras	III
Introducción	V
1. Marco teórico	1
1.1. Modelos estructurales	1
1.2. Análisis de factores comunes estacionarios y no estacionarios	3
1.3. Análisis de factores comunes estacionales	5
1.3.1. Método de componentes no observables	5
1.3.2. Método de factores comunes dinámicos	7
2. Metodología y principales resultados	10
2.1. Descripción de la metodología propuesta	10
2.2. Detección de factores comunes estacionales usando el método de Buseti (2006) . .	11
2.3. Detección de factores comunes no estacionales usando el método de Peña y Poncela (2006)	29
3. Aplicación a datos reales	40
Conclusiones	45
Trabajo futuro	46
Bibliografía	47

Índice de tablas

2.1. Determinación del número de factores comunes estacionales para el Ejemplo 1. . .	12
2.2. Determinación del número de factores comunes estacionales para el Ejemplo 2. . .	13
2.3. Determinación del número de factores comunes estacionales para el Ejemplo 3. . .	14
2.4. Determinación del número de factores comunes estacionales para el Ejemplo 4. . .	16
2.5. Determinación del número de factores comunes estacionales para el Ejemplo 5. . .	19
2.6. Determinación del número de factores comunes estacionales para el Ejemplo 6. . .	20
2.7. Determinación del número de factores comunes estacionales para el Ejemplo 7. . .	21
2.8. Determinación del número de factores comunes estacionales para el Ejemplo 8. . .	24
2.9. Determinación del número de factores comunes estacionales para el Ejemplo 9. . .	25
2.10. Determinación del número de factores comunes estacionales para el Ejemplo 10. . .	27
2.11. Determinación del número de factores comunes no estacionales para el Ejemplo 11. . .	30
2.12. Determinación del número de factores comunes no estacionales para el Ejemplo 12. . .	33
2.13. Determinación del número de factores comunes no estacionales para el Ejemplo 13. . .	35
2.14. Determinación del número de factores comunes no estacionales para el Ejemplo 14. . .	38
3.1. Determinación del número de factores comunes estacionales para los datos reales. . .	42
3.2. Determinación del número de factores comunes no estacionales para los datos reales. . .	44

Índice de figuras

2.1. Factor común estacional simulado en el Ejemplo 1.	11
2.2. Series simuladas en el Ejemplo 1.	12
2.3. Factor común no estacionario simulado en el Ejemplo 2.	13
2.4. Series simuladas en el Ejemplo 2.	14
2.5. Factores comunes simulados en el Ejemplo 3.	15
2.6. Series simuladas en el Ejemplo 3.	15
2.7. Factor común estacional simulado en el Ejemplo 4.	16
2.8. Series simuladas en el Ejemplo 4.	17
2.9. Factor común no estacionario simulado en el Ejemplo 5.	18
2.10. Series simuladas en el Ejemplo 5.	18
2.11. Factores comunes estacionales simulados en el Ejemplo 6.	20
2.12. Series simuladas en el Ejemplo 6.	20
2.13. Factores comunes no estacionarios simulados en el Ejemplo 7.	22
2.14. Series simuladas en el Ejemplo 7.	22
2.15. Factores comunes simulados en el Ejemplo 8.	23
2.16. Series simuladas en el Ejemplo 8.	24
2.17. Factores comunes simulados en el Ejemplo 9.	26
2.18. Series simuladas en el Ejemplo 9.	26
2.19. Factores comunes simulados en el Ejemplo 10.	28
2.20. Series simuladas en el Ejemplo 10.	28
2.21. Componente de tendencia estocástica común simulado en el Ejemplo 11.	30
2.22. Componente estacional simulado en el Ejemplo 11.	31
2.23. Series simuladas en el Ejemplo 11.	31
2.24. Componente de tendencia estocástica común simulado en el Ejemplo 12.	33
2.25. Componente estacional común simulado en el Ejemplo 12.	33

2.26. Series simuladas en el Ejemplo 12.	34
2.27. Componentes de tendencia estocástica comunes simulados en el Ejemplo 13.	35
2.28. Componente estacional común simulado en el Ejemplo 13.	36
2.29. Series simuladas en el Ejemplo 13.	36
2.30. Componente de tendencia estocástica común simulado en el Ejemplo 14.	38
2.31. Componentes estacionales comunes simulados en el Ejemplo 14.	38
2.32. Series simuladas en el Ejemplo 14.	39
3.1. Series de tiempo de la macroeconomía Colombiana.	41
3.2. Series de tiempo transformadas de la macroeconomía Colombiana.	42

Introducción

Las series económicas se caracterizan por comportamientos tendenciales, estacionales y cíclicos, los cuales podrían ser comunes, sino a todos, a algunos de ellos. Los modelos de factores comunes dinámicos son usados para comprender el comportamiento común macroeconómico. La extracción de factores comunes dinámicos la realizó Peña y Poncela (2006), quienes plantean un modelo que asume que la estructura dinámica del vector de series de tiempo es explicada por un conjunto de factores comunes estacionarios y no estacionarios. Aplicaciones de esta metodología se pueden encontrar en Palencia (2006) y Martínez (2010). En los últimos años se han desarrollado diversos estudios sobre este tema, donde se destaca entre muchos otros, Box y Tiao (1977), Geweke y Singleton (1981), Brillinger (1981), Velu *et al.* (1986). Peña y Box (1987), Stock y Watson (1988), Tiao y Tsay (1989), Reinsel (1993), Ahn (1997), y Forni *et al.* (2003).

En los trabajos anteriores no se ha considerado el análisis de factores comunes estacionales. Una metodología para extraer componentes comunes no estacionarios en la frecuencia estacional es propuesta por Buseti (2006), donde se plantea un modelo de componentes no observables que permite probar la presencia de factores comunes en las frecuencias estacionales. Pero Buseti (2006) solo estudia factores comunes estacionales sin incluir factores comunes estacionarios y no estacionarios. Una extensión del análisis dinámico factorial al caso estacional común la realizan Alonso *et al.* (2011), García-Martos *et al.* (2011) y Nieto *et al.* (2013).

Sin embargo, no existen modelos que permitan extraer simultáneamente los factores comunes dinámicos estacionales y no estacionales (los cuales pueden ser estacionarios y no estacionarios), ya que las metodologías propuestas anteriormente permiten la extracción de factores comunes dinámicos estacionarios y no estacionarios dejando de lado el componente estacional o viceversa.

Por tal motivo, se busca construir una metodología empírica que permita la extracción de factores comunes dinámicos estacionales y no estacionarios, combinando los procedimientos de Buseti (2006) y, Peña y Poncela (2006).

Este trabajo está organizado como sigue: en el Capítulo 1 se presenta un breve marco teórico de las principales metodologías usadas en este trabajo. En el Capítulo 2 se presenta una descripción de la metodología utilizada para extraer factores comunes dinámicos estacionales y no estacionarios y los principales resultados empíricos basados en simulaciones. En el Capítulo 3 se realiza una aplicación práctica de la metodología propuesta a nueve series de la macroeconomía Colombiana, con el fin de determinar el número de factores comunes estacionales y no estacionales (los cuales pueden ser estacionarios y no estacionarios). Finalmente se presentan las conclusiones del trabajo realizado y una propuesta de trabajo futuro.

Marco teórico

En este capítulo se presenta una breve descripción del análisis dinámico factorial estacionario y no estacionario, los modelos de componentes no observables para detectar estacionalidad común y el análisis dinámico factorial estacional, que serán empleados en el desarrollo de esta tesis. Los modelos planteados en este capítulo siguen principalmente la teoría expuesta en los trabajos de Harvey (1989), Durbin y Koopman (2001), Peña y Poncela (2006), Buseti (2006) y Nieto *et al.*(2013).

1.1. Modelos estructurales

En esta sección se presenta una breve descripción del modelo estructural básico propuesto por Harvey (1989), el cual está dado por

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + \epsilon_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (1.1)$$

donde μ_t es el componente de tendencia estocástica dado por

$$\begin{aligned} \mu_t &= \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t, \\ \beta_t &= \beta_{t-1} + \zeta_t, \quad t = 1, \dots, T, \end{aligned}$$

donde β_t es la pendiente, $\{\eta_t\}$ y $\{\zeta_t\}$ son procesos ruido blanco Gaussiano con media cero y varianzas σ_η^2 y σ_ζ^2 respectivamente, γ_t es el componente estacional que puede estar dado por una variable dummy estacional

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{s-1} \gamma_{t-j} + \omega_t,$$

o por estacionalidad trigonométrica

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{\lfloor s/2 \rfloor} \gamma_{t,j}^*,$$

donde $\{\omega_t\}$ es un proceso ruido blanco Gaussiano con media cero y varianza σ_ω^2 y $\gamma_{t,j}^*$ es un ciclo no estacionario igual a

$$\begin{bmatrix} \psi_t \\ \psi_t^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \lambda_c & \sen \lambda_c \\ -\sen \lambda_c & \cos \lambda_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{t-1} \\ \psi_{t-1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_t \\ k_t^* \end{bmatrix}, \quad t = 1, \dots, T,$$

con ψ_t que es el ciclo, λ_c es la frecuencia en radianes, $0 \leq \lambda_c \leq \pi$, $\lambda_c = \lambda_j = 2\pi j/s$, $j = 1, 2, \dots, \lfloor s/2 \rfloor$, $\{k_t\}$ y $\{\epsilon_t\}$ son procesos ruido blanco Gaussiano con media cero y varianzas σ_k^2 y σ_ϵ^2 respectivamente.

Todos los modelos lineales univariados estructurales tienen una representación en la forma espacio-estado. Según Harvey (1989), la forma general de un modelo de estados está dado por la ecuación de transición (ecuación de medida) y la ecuación de estados así

$$\begin{aligned} y_t &= Z_t \alpha_t + d_t + \epsilon_t, \\ \alpha_t &= T_t \alpha_{t-1} + c_t + R_t \eta_t, \quad t = 1, \dots, T, \end{aligned}$$

donde $\{y_t\}$ es un proceso estocástico observable n -dimensional, α_t un vector no observable $m \times 1$, conocido como vector de estado, Z_t es una matriz $n \times m$, d_t es un vector $n \times 1$, T_t es una matriz $m \times m$, c_t es un vector $m \times 1$, R_t es una matriz $m \times g$, $\{\epsilon_t\}$ y $\{\eta_t\}$ son procesos estocásticos ruido blanco Gaussiano multivariado con media cero y matriz de covarianza H_t y Q_t respectivamente.

Los supuestos básicos del modelo de estados son:

- El vector inicial de estado α_0 , tiene media a_0 y matriz de varianzas y covarianzas P_0
- Los vectores aleatorios ϵ_t y η_t no están correlacionados entre ellos en todos los periodos de tiempo y no están correlacionados con el estado inicial α_0

Los parámetros fijos del modelo de estados pueden ser estimados por máxima verosimilitud, mientras que las predicciones de los vectores de estado, son obtenidas con el filtro de Kalman.

1.2. Análisis de factores comunes estacionarios y no estacionarios

Peña y Poncela (2006) plantean una metodología para extraer factores comunes dinámicos estacionarios y no estacionarios, asumiendo que la estructura dinámica común de un vector de series de tiempo es explicada por factores comunes, los cuales pueden ser estacionarios y no estacionarios.

Sea $\{y_t\}$ un proceso estocástico observable m -dimensional, el cual es generado por un proceso $\{f_t\}$ de factores comunes no observados r -dimensional con $r \leq m$ dado por

$$y_t = Pf_t + e_t, t \in \mathbb{Z}, \quad (1.2)$$

donde P es una matriz determinística de dimensión $m \times r$ llamada la matriz de pesos de los factores y $\{e_t\}$ es un proceso estocástico ruido blanco Gaussiano multivariado con media cero y matriz de varianzas y covarianzas diagonal de rango completo $\sum e$. Así toda la estructura dinámica común proviene de los factores comunes $\{f_t\}$.

La segunda ecuación supone que el vector de factores comunes sigue un proceso autoregresivo de media móvil VARMA (p, q) dado por

$$\Phi(B)f_t = d + \Theta(B)a_t, \quad (1.3)$$

donde $\Phi(B) = I - \Phi_1 B - \dots - \Phi_p B^p$ y $\Theta(B) = I - \Theta_1 B - \dots - \Theta_q B^q$, son polinomios matriciales de dimensión $r \times r$ y B es el operador de rezago tal que $By_t = y_{t-1}$. Dado que el proceso de factores puede ser no estacionario, las raíces del determinante de la ecuación $|\Phi(B)| = 0$ pueden estar sobre o fuera del círculo unitario, d es un vector $r \times 1$ de constantes y $\{a_t\}$ es un proceso estocástico ruido blanco Gaussiano multivariado con media cero y matriz de varianzas y covarianzas de rango completo $\sum a$. Los componentes del vector de factores comunes, f_t , pueden ser estacionarios o no estacionarios, y se asumen las condiciones usuales de invertibilidad para el modelo VARMA ver Lütkepohl (2005). Nótese que si $y_t = (y_{1t}, \dots, y_{mt})'$, entonces, $y_{it} = \sum_{j=1}^r p_{ij} f_{ij} + e_{it}$, $i = 1, \dots, m$.

El procedimiento propuesto por Peña y Poncela (2006) tiene dos objetivos: el primero es determinar el número de factores comunes y el segundo predecir los factores comunes con base en el vector de series observables y_t , $t = 1, \dots, T$.

Peña y Poncela (2006) definen la matriz de covarianza muestral generalizada $C_y(k, T)$, para $k = 0, 1, 2, \dots$, como

$$C_y(k, T) = \frac{1}{T^{2d+d'}} \sum_{t=k+1}^T (y_{t-k} - \bar{y})(y_t - \bar{y})', \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad (1.4)$$

donde T es el tamaño de la muestra, $\bar{y} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t$ y $d' = 0$ si el modelo de factores no incluye deriva o $d' = 1$ en otro caso, y la matriz de correlación canónica $M(k, T)$, para $k = 0, 1, 2, \dots$, como

$$M(k, T) = \left[\sum_{t=k+1}^T (y_t y_t') \right]^{-1} \sum_{t=k+1}^T (y_t y_{t-k}') \left[\sum_{t=k+1}^T (y_{t-k} y_{t-k}') \right]^{-1} \sum_{t=k+1}^T (y_{t-k} y_t'), \quad (1.5)$$

Se conoce que los valores propios de (1.5) son las correlaciones canónicas cuadradas entre y_{t-k} y y_t

Para determinar el número de factores comunes se usa una prueba estadística χ^2 , determinada de la siguiente manera

$$S_{m-r,k} = -(T-k) \sum_{j=1}^{m-r} \ln(1 - \hat{\lambda}_j), \quad (1.6)$$

donde $\hat{\lambda}_1 \leq \dots \leq \hat{\lambda}_m$ son los valores propios ordenados de la matriz $M(k, T)$. Esta estadística permite diseñar una prueba para determinar el número de factores comunes estacionarios y no estacionarios, bajo la hipótesis nula de al menos r factores comunes. Así pues, dado k , e incrementando r en la ecuación (1.6), el estadístico de prueba $S_{m-r,k}$ se compara con el percentil $(1 - \alpha)$ de la $\chi^2_{(m-r)^2}$. Peña y Poncela (2006) mostraron que la estadística de prueba presenta buenos resultados ante los análisis de potencia para muestra finita.

Para predecir los factores comunes, se hace una estimación inicial de la matriz de pesos \hat{P}^0 que podría ser los primeros vectores propios de la matriz de covarianzas generalizada, para el rezago $k = 1$, y a partir de esto una estimación inicial para los factores es $\hat{f}^0 = (\hat{P}^0)' y_t$.

El modelo es escrito en la forma espacio-estado y la estimación de factores comunes, se lleva a cabo por máxima verosimilitud. Las estimaciones son obtenidas por la implementación del algoritmo *Expectation Maximization (EM)* tal como lo indica Peña y Poncela (2006).

Vale la pena comentar en este punto que Escribano y Peña (1994) encuentran una relación entre cointegración y factores comunes no estacionales. Escencialmente, ellos prueban que una condición necesaria y suficiente para que exista cointegración con rango r , es que el proceso multivariado sea explicado por $m - r$ factores comunes. Otros autores han trabajado también en el entedimiento de esta relación, por ejemplo, Stock y Watson (1988), Hylleberg y Mizon (1989) y Johansen (1991), desde el punto de vista de las tendencias estocásticas comunes. El lector interesado en el tema puede consultar estas referencias.

1.3. Análisis de factores comunes estacionales

1.3.1. Método de componentes no observables

Buseti (2006) plantea una metodología para extraer factores comunes estacionales, asumiendo un modelo multivariado de componentes no observables. Se asume S como el número de periodos estacionales y $\lambda(h) = 2\pi h/s$, $h = 1, \dots, [s/2]$, las cuales son llamadas frecuencias estacionales. Sea $z_t(h) = (\cos\lambda(h)t, \sin\lambda(h)t)'$, para $h < s/2$, cuando S es par $z_t(s/2) = \cos\lambda(s/2)t = \cos\pi t$ y sea $\gamma_{it}(h)$ es un vector de coeficientes de caminatas aleatorias de dos dimensiones para $h < s/2$, mientras que $\gamma_{it}(h)$ es igual a un escalar cuando $h = s/2$ para S par.

Se considera el modelo

$$y_t = \mu_t + s_t + \epsilon_t, \quad (1.7)$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \zeta_t, \quad (1.8)$$

$$s_t = \sum_{h=1}^{[s/2]} Z_t(h) \gamma_t(h), \quad (1.9)$$

$$\gamma_t(h) = \gamma_{t-1}(h) + \eta_t(h), \quad h = 1, \dots, [s/2], \quad (1.10)$$

$$\{\eta_t(h)\} \sim IID\left(0, \sum \eta(h)\right), \quad h = 1, \dots, [s/2], \quad (1.11)$$

$$\{\epsilon_t\} \sim IID\left(0, \sum \epsilon\right), \quad (1.12)$$

donde μ_t es la tendencia estocástica dada por una caminata aleatoria, $\{\zeta_t\}$ es un proceso ruido blanco Gaussiano multivariado con media cero y matriz de varianzas y covarianzas $\sum \zeta$, s_t es un componente estacional con $Z_t(h) = (I_N \otimes z_t(h)')$, $z_t(h) = \sum_{h=1}^{[s/2]} z_t(h)' \gamma_{it}(h)$, para $i = 1, 2, \dots, N$, $\gamma_t = (\gamma_{1t}(h)', \dots, \gamma_{Nt}(h)')$, $h = 1, \dots, [s/2]$, $\{\eta_t(h)\}$ y $\{\epsilon_t\}$ son procesos ruido

blanco Gaussiano multivariado con media cero y matriz de varianzas y covarianzas $\sum \eta(h)$ y $\sum \epsilon$ respectivamente; N y \otimes denota el número de variables observables y producto Kronecker respectivamente.

El procedimiento propuesto por Busetti (2006) permite extraer factores comunes en las frecuencias estacionales $\lambda(h)$, para $h = 1, \dots, [s/2]$. Probar la presencia de estacionalidad común en un modelo de componentes no observables con tendencia estocástica se puede llevar a cabo por dos estrategias: ya sea mediante la eliminación de tendencia estocástica por diferenciación o mediante la estimación de un modelo completamente parametrizado y la construcción de la prueba a partir de los residuales del modelo.

Busetti (2006) para determinar el número de factores comunes bajo la hipótesis nula de K factores comunes estacionales, define la siguiente prueba estadística

$$\xi_{K,N}(h) = \sum_{j=k+1}^N \ell_j^*(h), \quad 0 \leq K < N, \quad (1.13)$$

donde $\ell_1^*(h), \dots, \ell_N^*(h)$ son los N valores propios ordenados de $\alpha(h) \widehat{\Omega}(h)^{-1} C(h)$ con

$$\alpha(h) = \begin{cases} 1, & \text{si } h = s/2 \\ 2, & \text{en otro caso} \end{cases},$$

y

$$\widehat{\Omega}(h) = \sum_{j=-m}^m \left(k(j, m) \widehat{\Gamma}(j) (\cos \lambda(h) j - i \sin \lambda(h) j) \right),$$

donde $k(\cdot, \cdot)$ es el Kernel Newey-West $k(j, m) = 1 - |j| / (m + 1)$, $\widehat{\Gamma}(|j|) = T^{-1} \sum_{t=j+1}^T (e_t e'_{t-j})$ es la autocovarianza muestral de los residuales estimados e_t por de la regresión por mínimos cuadrados ordinarios de y_t sobre z'_t de acuerdo a Busetti (2006) al rezago $j \geq 0$. Además

$$C(h) = T^{-2} \sum_{t=1}^T \left(S_t^A(h) S_t^A(h)' + S_t^B(h) S_t^B(h)' \right),$$

y

$$S_t^A(h) = \sum_{s=1}^t (e_s \cos \lambda(h) s),$$

$$S_t^B(h) = \sum_{s=1}^t (e_s \sin \lambda(h) s),$$

para $h = 1, \dots, [s/2]$. Nótese que las matrices $\widehat{\Omega}(h)$ y $C(h)$ son matrices definidas positivas, por tanto, los valores propios de $\widehat{\Omega}(h)^{-1}C(h)$ son reales y positivos.

El resultado del estadístico de prueba $\xi_{K,N}(h)$ obtenido en (1.13) es comparado con el percentil $(1 - \alpha)$ de los valores críticos asintóticos proporcionados por Busetti (2006, Tabla 1). Si el estadístico de prueba es mayor que estos percentiles, para cierto nivel de significancia α , entonces, se rechaza la hipótesis nula de que haya K factores comunes estacionales. Es necesario aclarar que Busetti (2006) demostró que la estadística de prueba (1.13), presenta buenos resultados ante los análisis de potencia para muestra finita.

1.3.2. Método de factores comunes dinámicos

Nieto *et al.* (2013), plantean una metodología que permite identificar factores comunes estacionales partiendo de la estructura de correlación canónica y la matriz de varianzas y covarianzas planteada por Peña y Poncela (2006).

Sea $\{y_t\}$ un proceso estocástico observable m -dimensional, generado por un proceso latente r -dimensional $\{f_t\}$, con $r \leq m$, tal que

$$y_t = Pf_t + e_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1.14)$$

donde \mathbb{Z} es el conjunto de números enteros, P es una matriz $m \times r$ de ponderaciones de los factores, y el proceso $\{e_t\}$ es un proceso ruido blanco Gaussiano multivariado con media cero y matriz de varianza diagonal de rango completo Σ_e .

Se asume que $\{f_t\} = (f'_{1t}, f'_{2t}, f'_{3t})'$, donde el proceso $\{f_{1t}\}$ de dimensión r_1 es no estacional y no estacionario, $\{f_{2t}\}$ de dimensión r_2 es un proceso no estacionario con periodo estacional de lapso S , y el proceso $\{f_{3t}\}$ de dimensión r_3 es estacionario. Además, sea

$$\begin{aligned} \phi_1(B)(1 - B)^d f_{1t} &= d_1 + \theta_1(B)a_{1t}, \quad \text{con } d \geq 1, \\ \phi_2(B^S)(1 - B^S)^D f_{2t} &= d_2 + \theta_2(B^S)a_{2t}, \\ \phi_3(B)f_{3t} &= d_3 + \theta_3(B)a_{3t}, \end{aligned}$$

donde $\{a_{it}\}$ un proceso de ruido blanco Gaussiano multivariado con media cero y matriz de varianzas Σ_i , $i = 1, 2, 3$.

Nieto *et al.* (2013) asumen $d = D$ y definen las matrices de covarianza generalizada $C(k, T)$, para $k = 0, 1, 2, \dots$, por

$$C(k, T) = \frac{S^{2d}}{T^{2d+d'}} \sum_{t=k+1}^T (y_{t-k} - \bar{y})(y_t - \bar{y})', \quad (1.15)$$

donde T es el tamaño de la muestra, $\bar{y} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t$ y $d' = 0$ si el modelo de factores no incluye deriva o $d' = 1$ en otro caso, y la matriz de correlación canónica $M(k, T)$, para $k = 1, 2, \dots$, por

$$M(k, T) = \left[\sum_{t=k+1}^T y_t y_t' \right]^{-1} \sum_{t=k+1}^T y_t y_{t-k}' \left[\sum_{t=k+1}^T y_{t-k} y_{t-k}' \right]^{-1} \sum_{t=k+1}^T y_{t-k} y_t'. \quad (1.16)$$

Se conoce que los valores propios de (1.16) son las correlaciones canónicas cuadradas entre y_{t-k} y y_t

Luego, construyen la prueba estadística para examinar la hipótesis nula de a lo más $m - r$ valores propios iguales a cero, la cual está dada por

$$S_{m-r,k} = -(T - k) \sum_{j=1}^{m-r} \ln(1 - \hat{\lambda}_j), \quad (1.17)$$

donde $\hat{\lambda}_1 \leq \dots \leq \hat{\lambda}_m$ son los valores propios ordenados de la matriz $M(k, T)$. Bajo los supuestos del Teorema 3 presentado por Nieto *et al.* (2013, pp 8) y que $m - r > 0$, $S_{m-r,k}$ es asintóticamente una $\chi_{(m-r)^2}^2$ para todos los rezagos k . Esta estadística permite diseñar una prueba para terminar el número de factores comunes estacionales y no estacionales, bajo la hipótesis nula de a lo más r factores comunes. Así pues, dado k , e incrementando r en la ecuación (1.17) el estadístico de prueba $S_{m-r,k}$ se compara con el percentil $(1 - \alpha)$ de la $\chi_{(m-r)^2}^2$.

Sea $\Delta(\lambda)$ el operador de diferencia en la frecuencia $\lambda \in [0, \pi]$ dado por

$$\Delta(\lambda) = \begin{cases} 1, & 1 - \cos \lambda L, \lambda \in 0, \pi \\ 2, & 1 - 2 \cos \lambda L + L^2, \lambda \in 0, \pi \end{cases},$$

donde L es el operador de rezago.

Busetti (2006) encuentra una relación entre cointegración y factores comunes estacionales, así él plantea que un vector de series observables y_t es integrado de orden d en la frecuencia $\lambda \in 0, \pi$, denotado $I(d; \lambda)$ si $\Delta(\lambda)^d y_t$ es un proceso lineal con λ continuo y positivo. El proceso

y_t se dice que está cointegrado de orden d, b en la frecuencia λ , $CI(d, b; \lambda)$, si (i) cada componente de y_t es $I(d; \lambda)$ y (ii) existe un vector cero α tal que $\alpha' y_t$ es $I(d - b)$, donde $d > 0$. Por tanto, un proceso se dice que está integrado y cointegrado estacionalmente si es $I(d; \lambda(h))$ y $CI(d, b; \lambda(h))$ en una de las frecuencias $\lambda(h)$, $h = 1, \dots, [l/2]$.

La integración estacional de un proceso lineal, puede ser representada en términos de un componente estacional estocástico no estacionario, mientras, que el proceso cointegrado estacionalmente implica la existencia de componente estacional estocástico común. Otros autores han trabajado también en el concepto integración y cointegración estacional, por ejemplo, Hylleberg *et al* (1990), Gregoir (1999) y Cubadda (1999), desde el punto de vista del método de componentes no observables. El lector interesado en el tema puede consultar estas referencias.

Metodología y principales resultados

En este capítulo se presenta una metodología empírica para extraer simultáneamente factores comunes estacionales y no estacionarios combinando las teorías planteadas por Buseti (2006) y, Peña y Poncela (2006). Además se presentan algunas simulaciones realizadas en RATS (2011) y STAMP (2011) que ejemplifican de manera empírica la metodología propuesta.

2.1. Descripción de la metodología propuesta

El desarrollo de la metodología propuesta para extraer factores comunes estacionales y no estacionarios sigue los siguientes pasos:

- Se genera un conjunto de datos siguiendo la metodología de Nieto *et al.* (2013), incluyendo factores comunes estacionales y no estacionarios. A las series obtenidas se les quita la tendencia mediante la diferencia regular y se aplica la metodología propuesta por Buseti (2006), con el fin de detectar factores comunes estacionales.
- Se genera un conjunto de datos siguiendo la metodología de Buseti (2006), incluyendo componentes de tendencia estocástica común y componente estacional común. Las series obtenidas son desestacionalizadas con el procedimiento *X11* de RATS (2011) y se aplica la metodología propuesta por Peña y Poncela (2006), para detectar factores comunes no estacionales, los cuales pueden ser estacionarios y no estacionarios.

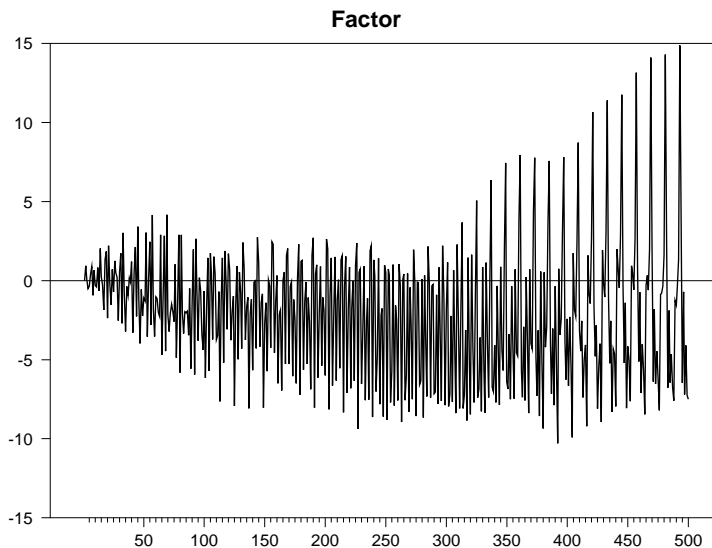


FIGURA 2.1. Factor común estacional simulado en el Ejemplo 1.

2.2. Detección de factores comunes estacionales usando el método de Buseti (2006)

Con el fin de identificar factores comunes estacionales se realizan 10 simulaciones de series de 500 datos, siguiendo la metodología de Nieto *et al.* (2013) incluyendo factores comunes estacionales y no estacionarios y suponiendo $S = 12$. Una vez se obtienen las series se eliminan los factores comunes no estacionarios mediante la primera diferencia regular, se calcula el estadístico $\xi_{K,N}(h)$ de Buseti(2006) dado en (1.13) y se hace el análisis para la frecuencia estacional $\lambda = \pi/6$ (periodo 12 meses).

Ejemplo 1. Aquí se considera un proceso bivariado con un factor común, el cual es un proceso estacional puro. El modelo es

$$\begin{aligned} y_{1t} &= f_t + \epsilon_{1t}, \\ y_{2t} &= 2f_t + \epsilon_{2t}, \end{aligned}$$

donde

$$(1 - B^{12}) f_t = a_t - 0.5a_{t-12},$$

$\{e_{it}\}$, $i = 1, 2$ y $\{a_t\}$ son procesos ruido blanco Gaussiano con media cero y varianza 1.

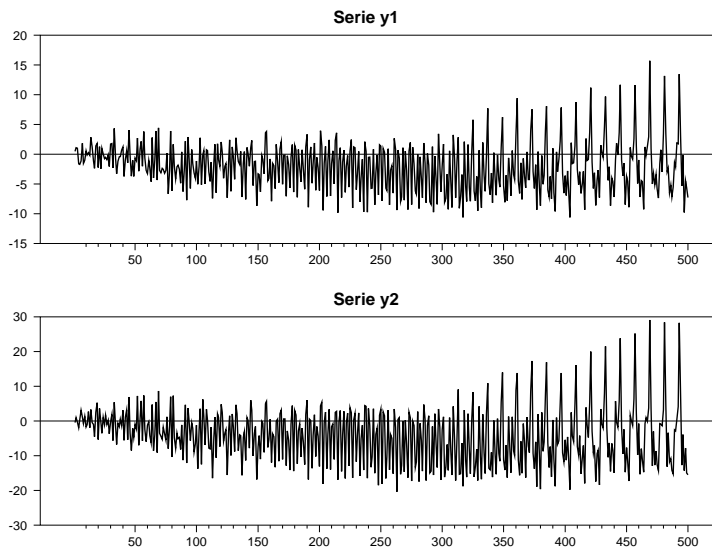


FIGURA 2.2. Series simuladas en el Ejemplo 1.

TABLA 2.1. Determinación del número de factores comunes estacionales para el Ejemplo 1.

K	Frecuencia $\lambda = 2\pi h/s$						Todas λ' s
	$h = 1$	$h = 2$	$h = 3$	$h = 4$	$h = 5$	$h = 6$	
	$\lambda = \pi/6$	$\lambda = \pi/3$	$\lambda = \pi/2$	$\lambda = 2\pi/3$	$\lambda = 5\pi/6$	$\lambda = \pi$	
0	2.417	0.263	0.286	0.145	0.174	0.324	3.609
1	1.234	0.184	0.146	0.061	0.089	0.317	2.030

En las Figuras 2.1 y 2.2 se presentan el factor común estacional y las dos series simuladas. Se puede observar que existe un fuerte componente estacional común en las dos series.

Las entradas de la Tabla 2.1 son los valores del estadístico de prueba $\xi_{K,N}(h)$ de Busetti (2006) (cifras redondeadas a tres decimales) a diferentes frecuencias $\lambda(h)$, para $h = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Podemos concluir que, para la frecuencia $\pi/6$ y con un nivel de significancia del 5% se rechaza la hipótesis nula de $K = 0$ factores comunes estacionales, por tanto, existe un factor común estacional $K = 1$ en las dos series. Mientras que, para las otras frecuencias no se rechaza la hipótesis nula de $K = 0$, entonces se puede concluir que no existen factores comunes estacionales en dichas frecuencias.

Ejemplo 2. Aquí se considera un proceso bivariado con un factor común, el cual es no estacionario. El modelo es

$$y_{1t} = f_t + \epsilon_{1t},$$

$$y_{2t} = 0.5f_t + \epsilon_{2t},$$

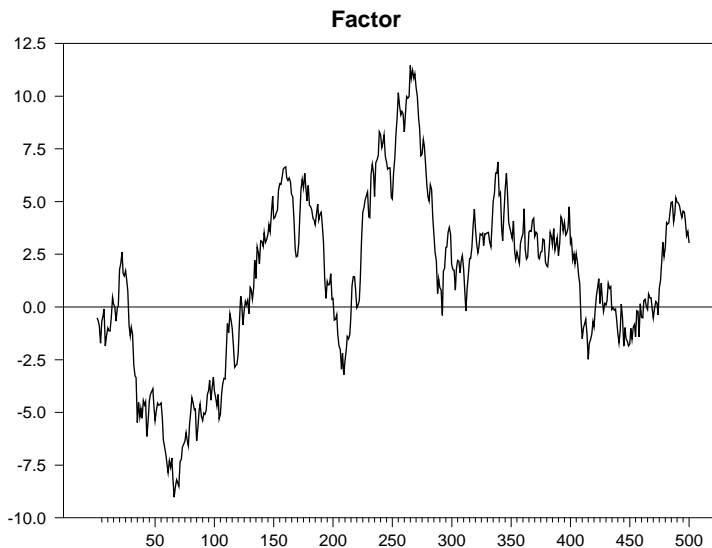


FIGURA 2.3. Factor común no estacionario simulado en el Ejemplo 2.

TABLA 2.2. Determinación del número de factores comunes estacionales para el Ejemplo 2.

K	Frecuencia $\lambda = 2\pi h/s$						Todas λ' s
	$h = 1$	$h = 2$	$h = 3$	$h = 4$	$h = 5$	$h = 6$	
	$\lambda = \pi/6$	$\lambda = \pi/3$	$\lambda = \pi/2$	$\lambda = 2\pi/3$	$\lambda = 5\pi/6$	$\lambda = \pi$	
0	0.014	0.001	0.002	0.001	0.001	0.002	0.020

donde

$$(1 - B) f_t = a_t ,$$

$\{e_{it}\}$, $i = 1, 2$ y $\{a_t\}$ son procesos ruido blanco Gaussiano con media cero y varianza 1.

En las Figuras 2.3 y 2.4 se presentan el factor común no estacionario y las dos series simuladas. Se puede observar que las dos series presentan una tendencia común.

Las entradas de la Tabla 2.2 son los resultados de aplicar la prueba $\xi_{K,N}(h)$ de Buseti (2006) (cifras redondeadas a tres decimales) a diferentes frecuencias $\lambda(h)$, para $h = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Podemos concluir que, para todas las frecuencias $\lambda(h)$ y con un nivel de significancia del 5% no se rechaza la hipótesis nula de $K = 0$ factores comunes estacionales, por tanto, no existen factores comunes estacionales en las dos series.

Ejemplo 3. Aquí se considera un proceso bivariado con dos factores comunes, uno de ellos no estacionario y el otro un proceso estacional puro. El modelo es

$$\begin{aligned} y_{1t} &= f_{1t} + f_{2t} + \epsilon_{1t} , \\ y_{2t} &= 0.5f_{2t} + 1.5f_{2t} + \epsilon_{2t} , \end{aligned}$$

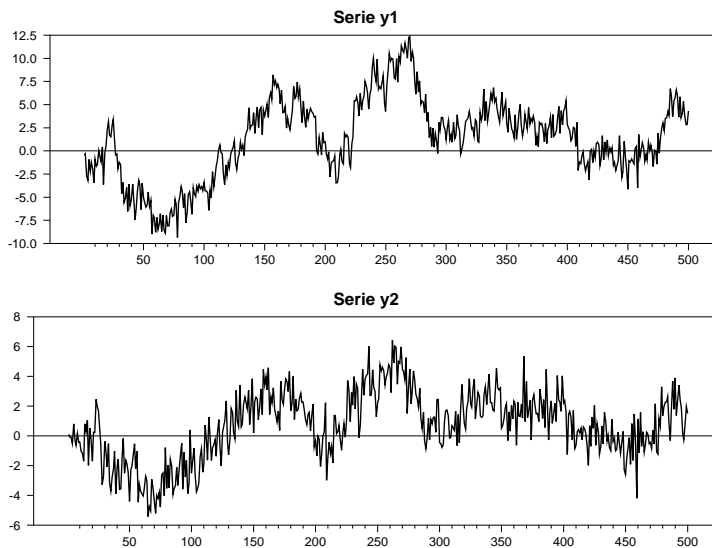


FIGURA 2.4. Series simuladas en el Ejemplo 2.

TABLA 2.3. Determinación del número de factores comunes estacionales para el Ejemplo 3.

K	Frecuencia $\lambda = 2\pi h/s$						Todas $\lambda' s$
	$h = 1$ $\lambda = \pi/6$	$h = 2$ $\lambda = \pi/3$	$h = 3$ $\lambda = \pi/2$	$h = 4$ $\lambda = 2\pi/3$	$h = 5$ $\lambda = 5\pi/6$	$h = 6$ $\lambda = \pi$	
0	2.313	0.252	0.273	0.139	0.166	0.310	3.452
1	1.197	0.130	0.141	0.072	0.086	0.160	1.786

donde

$$\begin{aligned} (1 - B) f_{1t} &= a_{1t}, \\ (1 - B^{12}) f_{2t} &= a_{2t} - 0.5a_{2t-12}, \end{aligned}$$

$\{e_{it}\}$, $i = 1, 2$ y $\{a_{jt}\}$, $j = 1, 2$ son procesos ruido blanco Gaussiano con media cero y varianza 1.

En la Figura 2.5 se presentan los dos factores comunes simulados. En la Figura 2.6 se observan las dos series de tiempo simuladas, donde cada una refleja una tendencia común y un fuerte componente estacional común en las dos series.

Las entradas de la Tabla 2.3 son los resultados de calcular el estadístico de prueba $\xi_{K,N}(h)$ de Busetti (2006) (cifras redondeadas a tres decimales) a diferentes frecuencias $\lambda(h)$, para $h = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Podemos concluir que, para la frecuencia $\pi/6$ (periodo 12 meses) y con un nivel de significancia 5% se rechaza la hipótesis nula de $K = 0$ factores comunes estacionales, por tanto, existe un factor común estacional $K = 1$ en las dos series. Mientras que, para las otras frecuencias

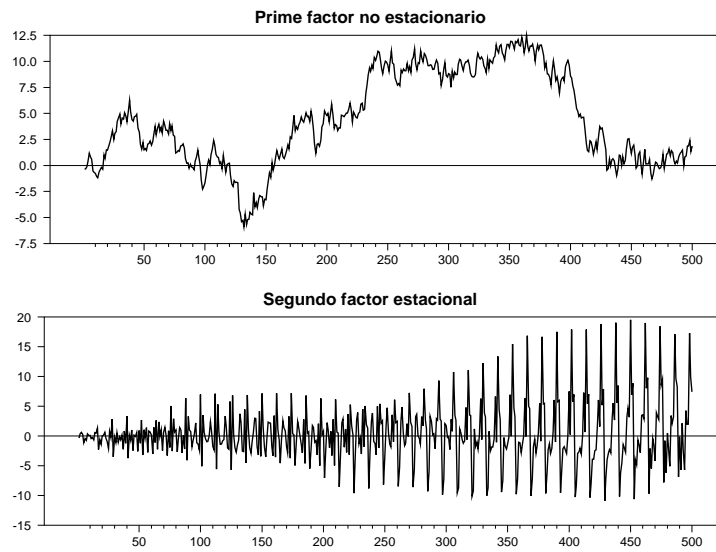


FIGURA 2.5. Factores comunes simulados en el Ejemplo 3.

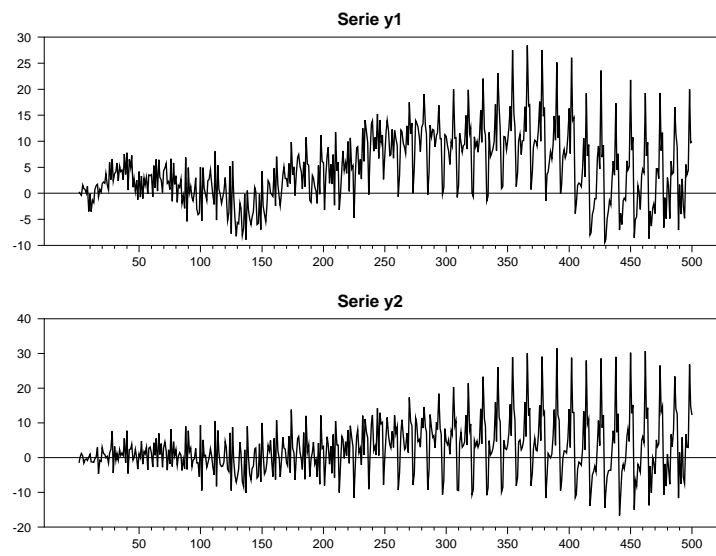


FIGURA 2.6. Series simuladas en el Ejemplo 3.

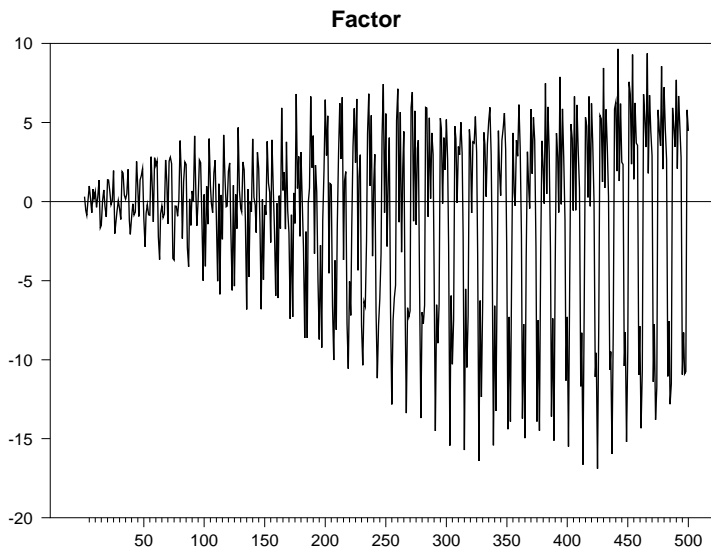


FIGURA 2.7. Factor común estacional simulado en el Ejemplo 4.

TABLA 2.4. Determinación del número de factores comunes estacionales para el Ejemplo 4.

K	Frecuencia $\lambda = 2\pi h/s$						Todas λ' s
	$h = 1$ $\lambda = \pi/6$	$h = 2$ $\lambda = \pi/3$	$h = 3$ $\lambda = \pi/2$	$h = 4$ $\lambda = 2\pi/3$	$h = 5$ $\lambda = 5\pi/6$	$h = 6$ $\lambda = \pi$	
0	3.310	0.360	0.391	0.199	0.238	0.443	4.940
1	2.211	0.244	0.261	0.133	0.159	0.296	3.303

no se rechaza la hipótesis nula de $K = 0$, entonces se puede concluir que no existen factores comunes estacionales en dichas frecuencias.

Ejemplo 4. Aquí se considera un proceso estocástico 3-dimensional observable con un factor común, el cual es un proceso estacional puro. El modelo es

$$y_{1t} = f_{1t} + \epsilon_{1t},$$

$$y_{2t} = f_{1t} + \epsilon_{2t},$$

$$y_{3t} = f_{1t} + \epsilon_{3t},$$

donde

$$(1 - B^{12}) f_t = a_t - 0.5a_{t-12},$$

$\{\epsilon_{it}\}$, $i = 1, 2, 3$ y $\{a_t\}$ son procesos ruido blanco Gaussiano con media cero y varianza 1.

En las Figuras 2.7 y 2.8 se presentan el factor común estacional y las tres series simuladas, donde se puede observar un fuerte componente estacional en las tres series.

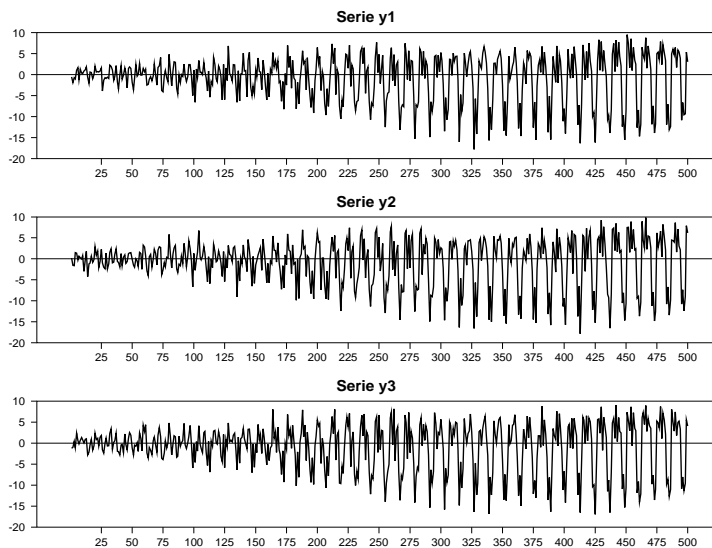


FIGURA 2.8. Series simuladas en el Ejemplo 4.

Las entradas de la Tabla 2.4 son los valores del estadístico de prueba $\xi_{K,N}(h)$ de Busetti (2006) (cifras redondeadas a tres decimales) a diferentes frecuencias $\lambda(h)$, para $h = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Podemos concluir que, para la frecuencia $\pi/6$ (periodo 12 meses) y con un nivel de significancia del 5 % se rechaza la hipótesis nula de $K = 0$ factores comunes estacionales, por tanto, existe un factor común estacional $K = 1$ en las tres series. Mientras que, para las otras frecuencias no se rechaza la hipótesis nula de $K = 0$, entonces se puede concluir que no existen factores comunes estacionales en dichas frecuencias.

Ejemplo 5. Aquí se considera un proceso estocástico 3-dimensional observable con un factor común, el cual es no estacionario. El modelo es

$$y_{1t} = f_{1t} + \epsilon_{1t} ,$$

$$y_{2t} = f_{1t} + \epsilon_{2t} ,$$

$$y_{3t} = f_{1t} + \epsilon_{3t} ,$$

donde

$$(1 - B) f_t = a_t ,$$

$\{e_{it}\}$, $i = 1, 2, 3$ y $\{a_t\}$ son procesos ruido blanco Gaussiano con media cero y varianza 1.

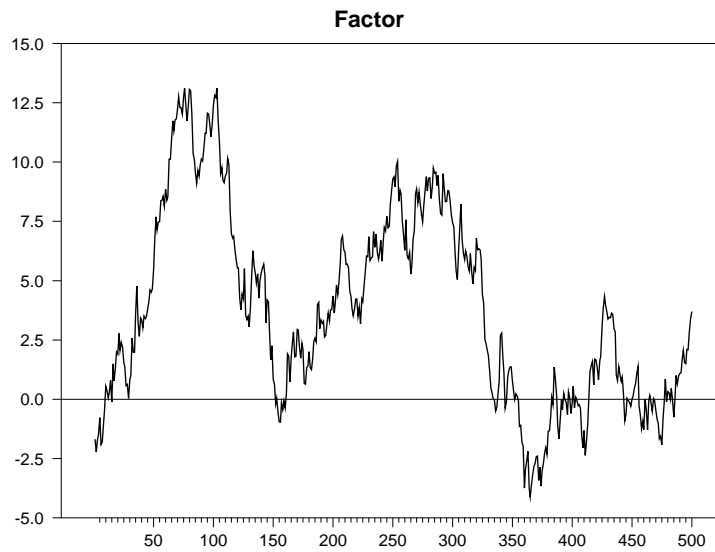


FIGURA 2.9. Factor común no estacionario simulado en el Ejemplo 5.

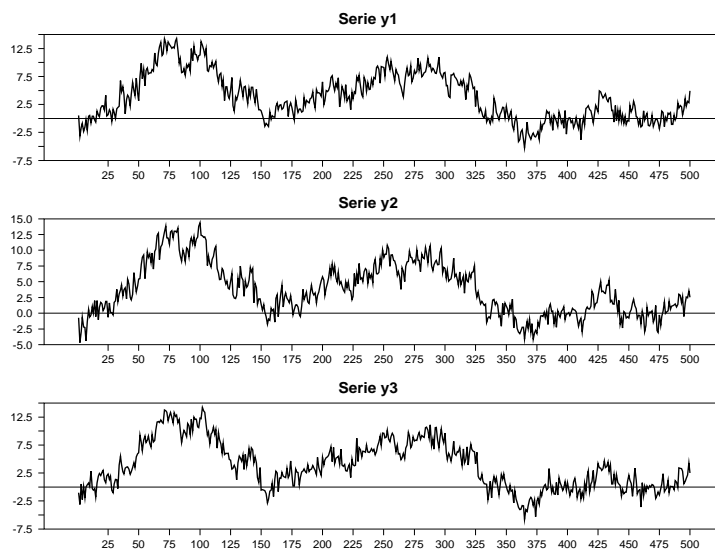


FIGURA 2.10. Series simuladas en el Ejemplo 5.

TABLA 2.5. Determinación del número de factores comunes estacionales para el Ejemplo 5.

K	Frecuencia $\lambda = 2\pi h/s$						Todas λ' s
	$h = 1$	$h = 2$	$h = 3$	$h = 4$	$h = 5$	$h = 6$	
	$\lambda = \pi/6$	$\lambda = \pi/3$	$\lambda = \pi/2$	$\lambda = 2\pi/3$	$\lambda = 5\pi/6$	$\lambda = \pi$	
0	0.276	0.030	0.033	0.017	0.020	0.037	0.412

En las Figuras 2.9 y 2.10 se presenta el factor común no estacionario y las tres series simuladas. Se puede observar que existe un componente de tendencia común en las tres series, pero no se observa componente estacional común.

En la Tabla 2.5 se presentan los resultados de aplicar el estadístico de prueba $\xi_{K,N}(h)$ de Buseti (2006) (cifras redondeadas a tres decimales) a diferentes frecuencias $\lambda(h)$, para $h = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Podemos concluir que, tanto para la frecuencia $\pi/6$ (periodo 12 meses) como para el resto de frecuencias y con un nivel de significancia del 5% no se rechaza la hipótesis nula de $K = 0$ factores comunes estacionales, por tanto, se puede concluir que no existen factores comunes estacionales a ninguna frecuencia estacional.

Ejemplo 6. Aquí se considera un proceso estocástico 3-dimensional observable con dos factores comunes, los cuales son procesos estacionales puros. El modelo es

$$\begin{aligned} y_{1t} &= f_{1t} + f_{2t} + \epsilon_{1t}, \\ y_{2t} &= f_{1t} + f_{2t} + \epsilon_{2t}, \\ y_{3t} &= f_{1t} + f_{2t} + \epsilon_{3t}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} (1 - B^{12}) f_{1t} &= a_{1t} - 0.5a_{1t-12}, \\ (1 - B^{12}) f_{2t} &= a_{2t} - 0.5a_{2t-12}, \end{aligned}$$

$\{e_{it}\}$, $i = 1, 2, 3$ y $\{a_{jt}\}$, $j = 1, 2$ son procesos ruido blanco Gaussiano con media cero y varianza 1.

En las Figuras 2.11 y 2.12 se presentan los dos factores comunes estacionales y las tres series simuladas, donde se puede observar un fuerte componente estacional en las tres series.

En la Tabla 2.6 se presentan los resultados de calcular el estadístico de prueba $\xi_{K,N}(h)$ de Buseti (2006) (cifras redondeadas a tres decimales) a diferentes frecuencias $\lambda(h)$, para

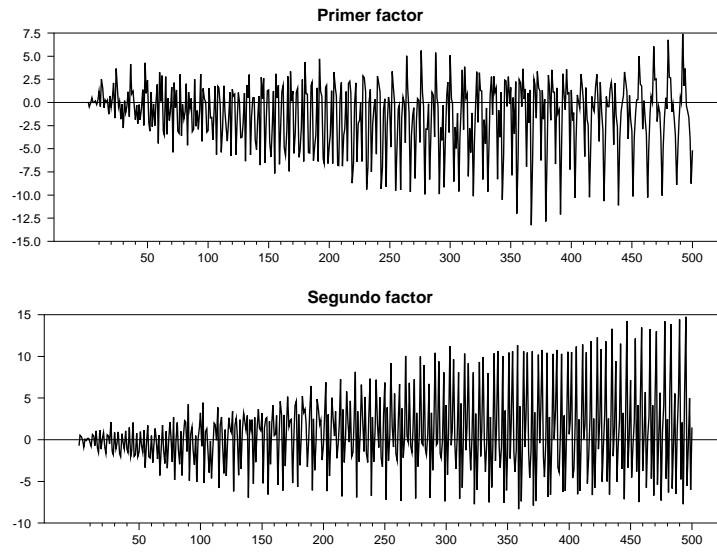


FIGURA 2.11. Factores comunes estacionales simulados en el Ejemplo 6.

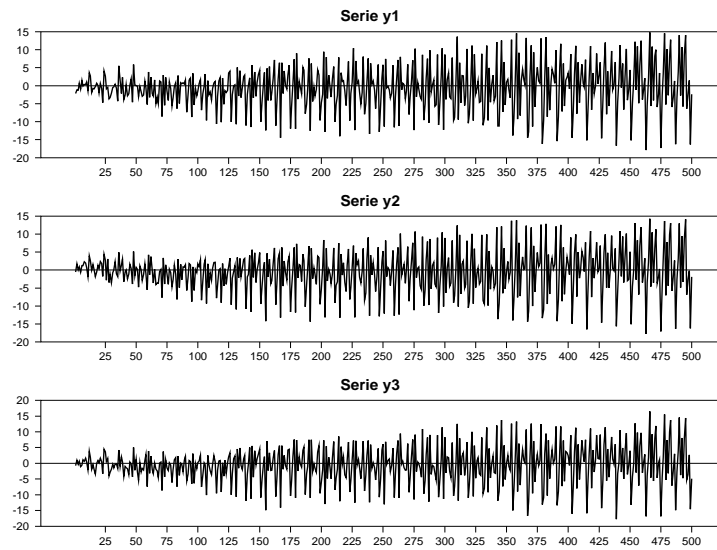


FIGURA 2.12. Series simuladas en el Ejemplo 6.

TABLA 2.6. Determinación del número de factores comunes estacionales para el Ejemplo 6.

K	Frecuencia $\lambda = 2\pi h/s$						Todas λ' s
	$h = 1$	$h = 2$	$h = 3$	$h = 4$	$h = 5$	$h = 6$	
	$\lambda = \pi/6$	$\lambda = \pi/3$	$\lambda = \pi/2$	$\lambda = 2\pi/3$	$\lambda = 5\pi/6$	$\lambda = \pi$	
0	3.326	0.362	0.393	0.200	0.239	0.446	4.964
1	2.227	0.242	0.263	0.134	0.160	0.298	3.324
2	1.126	0.123	0.133	0.068	0.081	0.151	1.681

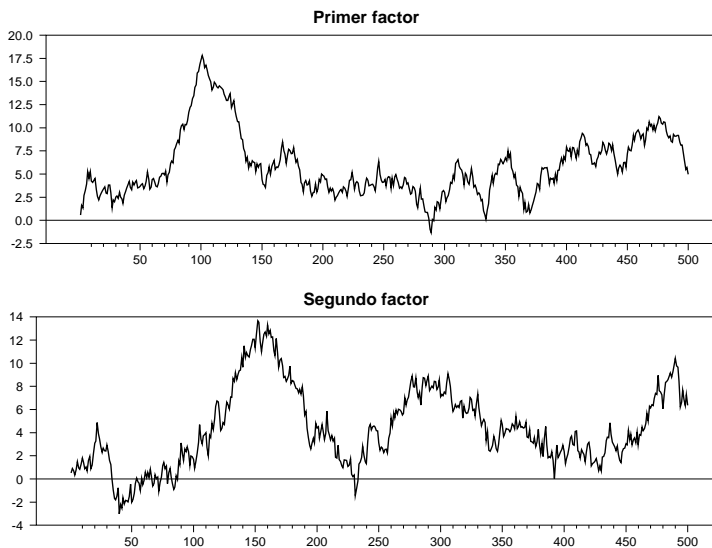


FIGURA 2.13. Factores comunes no estacionarios simulados en el Ejemplo 7.

$h = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Podemos concluir que, para la frecuencia $\pi/6$ (periodo 12 meses) y con un nivel de significancia del 5 % se rechaza la hipótesis nula de $K = 0$ y $K = 1$ factores comunes estacionales, por tanto, existen $K = 2$ factores comunes estacionales en las tres series. Mientras que, para las otras frecuencias no se rechaza la hipótesis nula de $K = 0$, entonces se puede concluir que no existen factores comunes estacionales en dichas frecuencias.

Ejemplo 7. Aquí se considera un proceso estocástico 3-dimensional observable con dos factores comunes, los cuales son no estacionarios. El modelo es

$$y_{1t} = f_{1t} + f_{2t} + \epsilon_{1t} ,$$

$$y_{2t} = f_{1t} + f_{2t} + \epsilon_{2t} ,$$

$$y_{3t} = f_{1t} + f_{2t} + \epsilon_{3t} ,$$

donde

$$(1 - B) f_t = a_{1t} ,$$

$$(1 - B) f_t = a_{2t} ,$$

$\{e_{it}\}$, $i = 1, 2, 3$ y $\{a_{jt}\}$, $j = 1, 2$ son procesos ruido blanco Gaussiano con media cero y varianza 1.

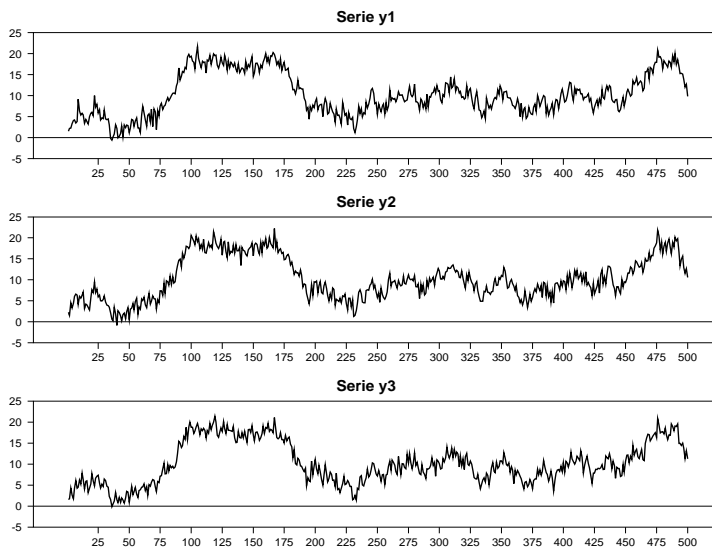


FIGURA 2.14. Series simuladas en el Ejemplo 7.

TABLA 2.7. Determinación del número de factores comunes estacionales para el Ejemplo 7.

K	Frecuencia $\lambda = 2\pi h/s$						Todas $\lambda' s$
	$h = 1$	$h = 2$	$h = 3$	$h = 4$	$h = 5$	$h = 6$	
	$\lambda = \pi/6$	$\lambda = \pi/3$	$\lambda = \pi/2$	$\lambda = 2\pi/3$	$\lambda = 5\pi/6$	$\lambda = \pi$	
0	0.074	0.008	0.009	0.004	0.005	0.010	0.110

En las Figuras 2.13 y 2.14 se presentan los factores comunes no estacionarios y las tres series simuladas, se puede observar que hay una tendencia común en las series, pero no existe componente estacional común en ellas.

En la Tabla 2.7 se presentan los resultados de aplicar el estadístico de prueba $\xi_{K,N}(h)$ de Busetti (2006) (cifras redondeadas a tres decimales) a diferentes frecuencias $\lambda(h)$, para $h = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Podemos concluir que, tanto para la frecuencia $\pi/6$ como para el resto de frecuencias no se rechaza la hipótesis nula $K = 0$ factores comunes estacionales, por tanto, no existen factores comunes estacionales a ninguna frecuencia estacional.

Ejemplo 8. Aquí se considera un proceso estocástico 3-dimensional observable con dos factores comunes, uno de ellos no estacionario y el otro un proceso estacional puro. El modelo es

$$y_{1t} = f_{1t} + f_{2t} + \epsilon_{1t} ,$$

$$y_{2t} = f_{1t} + f_{2t} + \epsilon_{2t} ,$$

$$y_{3t} = f_{1t} + f_{2t} + \epsilon_{3t} ,$$

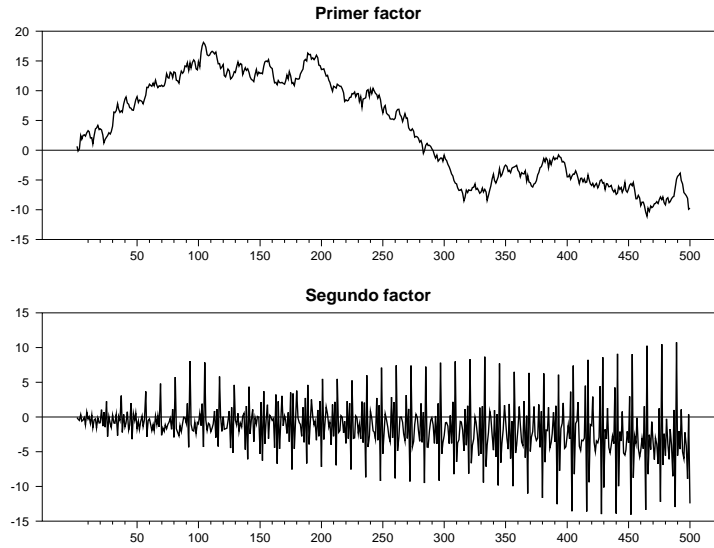


FIGURA 2.15. Factores comunes simulados en el Ejemplo 8.

TABLA 2.8. Determinación del número de factores comunes estacionales para el Ejemplo 8.

K	Frecuencia $\lambda = 2\pi h/s$						Todas $\lambda' s$
	$h = 1$	$h = 2$	$h = 3$	$h = 4$	$h = 5$	$h = 6$	
	$\lambda = \pi/6$	$\lambda = \pi/3$	$\lambda = \pi/2$	$\lambda = 2\pi/3$	$\lambda = 5\pi/6$	$\lambda = \pi$	
0	6.644	0.722	0.785	0.399	0.477	0.890	9.917
1	4.441	0.483	0.525	0.267	0.319	0.595	6.629

donde

$$(1 - B) f_t = a_{1t},$$

$$(1 - B^{12}) f_{2t} = a_{2t} - 0.5a_{2t-12},$$

$\{e_{it}\}$, $i = 1, 2, 3$ y $\{a_{jt}\}$, $j = 1, 2$ son procesos ruido blanco Gaussiano con media cero y varianza 1.

En la Figura 2.15 se presentan los dos factores comunes simulados. En la Figura 2.16 se observan las dos series de tiempo simuladas, donde cada una refleja una tendencia común y un componente estacional común.

Las entradas de la Tabla 2.8 son los resultados de calcular el estadístico de prueba $\xi_{K,N}(h)$ de Busetti (2006) (cifras redondeadas a tres decimales) a diferentes frecuencias $\lambda(h)$, para $h = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Podemos concluir que, para la frecuencia $\pi/6$ (periodo 12 meses) y con un nivel de significancia de 5% se rechaza la hipótesis nula de $K = 0$ factores comunes estacionales, por tanto, existe un factor común estacional $K = 1$ en las tres series. Mientras que, para las otras

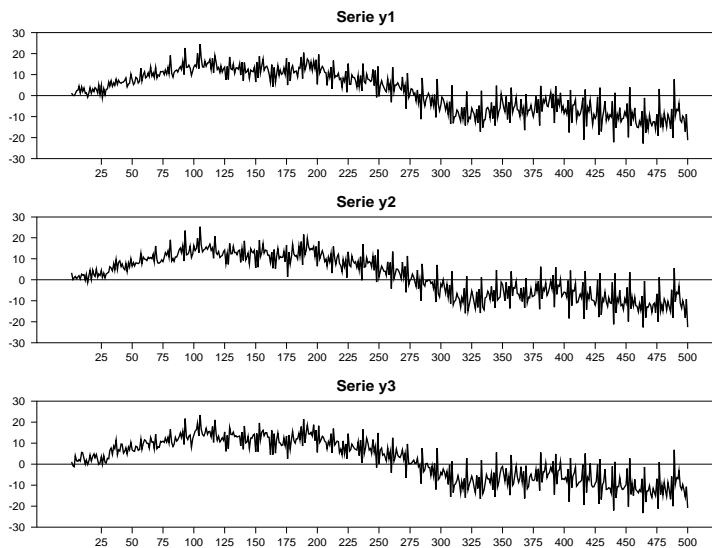


FIGURA 2.16. Series simuladas en el Ejemplo 8.

frecuencias no se rechaza la hipótesis nula de $K = 0$, entonces se puede concluir que no existen factores comunes estacionales en dichas frecuencias.

Ejemplo 9. Aquí se considera un proceso estocástico 3-dimensional observable con tres factores comunes, dos de ellos no estacionarios y el otro un proceso estacional puro. El modelo es

$$y_{1t} = f_{1t} + f_{2t} + f_{3t} + \epsilon_{1t} ,$$

$$y_{2t} = f_{1t} + f_{2t} + f_{3t} + \epsilon_{2t} ,$$

$$y_{3t} = f_{1t} + f_{2t} + f_{3t} + \epsilon_{3t} ,$$

donde

$$(1 - B) f_{1t} = a_{1t} ,$$

$$(1 - B) f_{2t} = a_{2t} ,$$

$$(1 - B^{12}) f_{3t} = a_{3t} - 0.5a_{3t-12} ,$$

$\{e_{it}\}$, $i = 1, 2, 3$ y $\{a_{jt}\}$, $j = 1, 2, 3$ son procesos ruido blanco Gaussiano con media cero y varianza 1.

En la Figura 2.17 se presentan el factor común estacional y los dos factores comunes no estacionarios y en la Figura 2.18 se muestran las tres series simuladas donde es claro la presencia de una tendencia común, mientras que la estacionalidad común no se observa fácilmente.

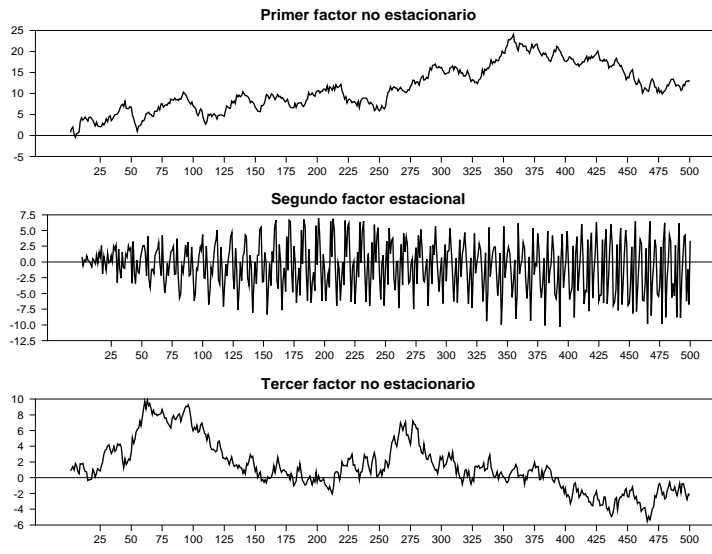


FIGURA 2.17. Factores comunes simulados en el Ejemplo 9.

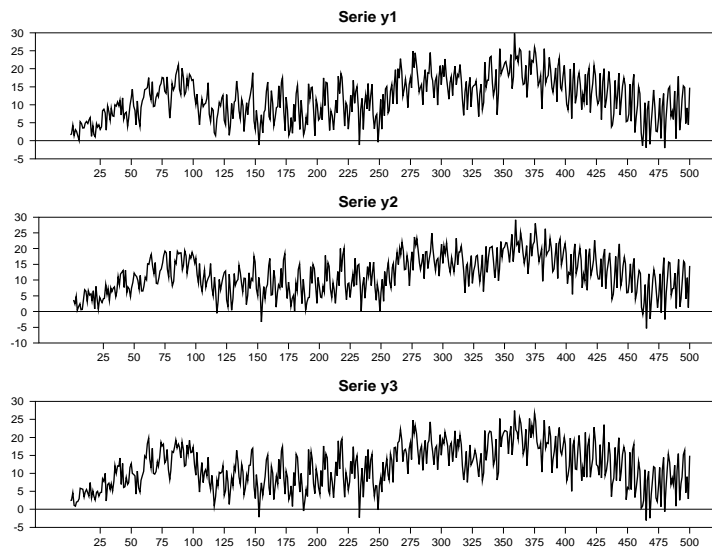


FIGURA 2.18. Series simuladas en el Ejemplo 9.

TABLA 2.9. Determinación del número de factores comunes estacionales para el Ejemplo 9.

K	Frecuencia $\lambda = 2\pi h/s$						Todas $\lambda' s$
	$h = 1$ $\lambda = \pi/6$	$h = 2$ $\lambda = \pi/3$	$h = 3$ $\lambda = \pi/2$	$h = 4$ $\lambda = 2\pi/3$	$h = 5$ $\lambda = 5\pi/6$	$h = 6$ $\lambda = \pi$	
0	1.044	0.513	0.525	0.509	0.512	0.528	3.632
1	1.030	0.209	0.217	0.206	0.208	0.219	2.088

TABLA 2.10. Determinación del número de factores comunes estacionales para el Ejemplo 10.

K	Frecuencia $\lambda = 2\pi h/s$						Todas $\lambda' s$
	$h = 1$	$h = 2$	$h = 3$	$h = 4$	$h = 5$	$h = 6$	
	$\lambda = \pi/6$	$\lambda = \pi/3$	$\lambda = \pi/2$	$\lambda = 2\pi/3$	$\lambda = 5\pi/6$	$\lambda = \pi$	
0	2.992	1.003	1.089	0.553	0.662	1.235	7.535
1	2.762	0.670	0.728	0.370	0.423	0.825	5.778
2	2.531	0.337	0.366	0.186	0.223	0.416	4.059

En la Tabla 2.9 se presentan los resultados de calcular el estadístico de prueba $\xi_{K,N}(h)$ de Busetti (2006) (cifras redondeadas a tres decimales) a diferentes frecuencias $\lambda(h)$, para $h = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Podemos concluir que, para la frecuencia $\pi/6$ y con un nivel de significancia del 5% se rechaza la hipótesis nula de $K = 0$ factores comunes estacionales, por tanto, existe un factor común estacional $K = 1$ en las tres series. Mientras que, para las otras frecuencias no se rechaza la hipótesis nula de $K = 0$, entonces se puede concluir que no existen factores comunes estacionales en dichas frecuencias.

Ejemplo 10. Aquí se considera un proceso estocástico 3-dimensional observable con dos factores comunes, uno de ellos no estacionario y dos son procesos estacionales puros. El modelo es

$$\begin{aligned} y_{1t} &= f_{1t} + f_{2t} + f_{3t} + \epsilon_{1t}, \\ y_{2t} &= f_{1t} + f_{2t} + f_{3t} + \epsilon_{2t}, \\ y_{3t} &= f_{1t} + f_{2t} + f_{3t} + \epsilon_{3t}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} (1 - B) f_{1t} &= a_{1t}, \\ (1 - B^{12}) f_{2t} &= a_{2t} - 0.5a_{2t-12}, \\ (1 - B^{12}) f_{3t} &= a_{3t} - 0.5a_{3t-12}, \end{aligned}$$

$\{e_{it}\}$, $i = 1, 2, 3$ y $\{a_{jt}\}$, $j = 1, 2, 3$ son procesos ruido blanco Gaussiano con media cero y varianza 1.

En la Figura 2.19 se presentan los dos factores comunes estacionales y el factor común no estacionario y en la Figura 2.20 se muestran las tres series simuladas donde es claro la presencia de una tendencia común, mientras que la estacionalidad común no se observa fácilmente.

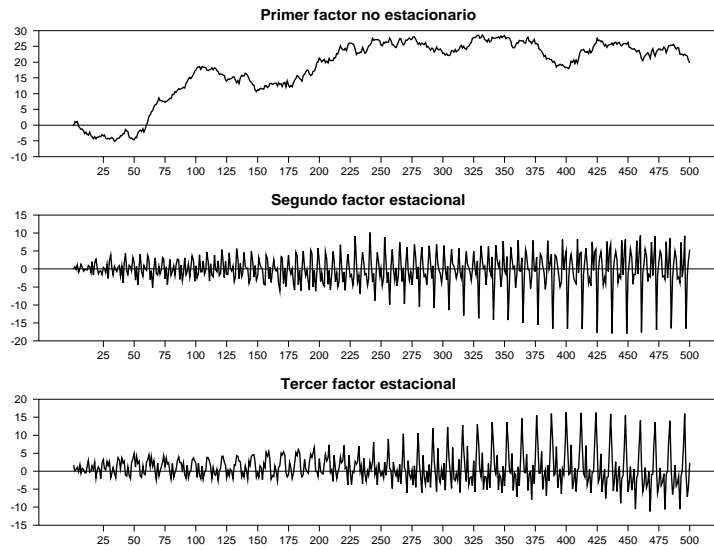


FIGURA 2.19. Factores comunes simulados en el Ejemplo 10.

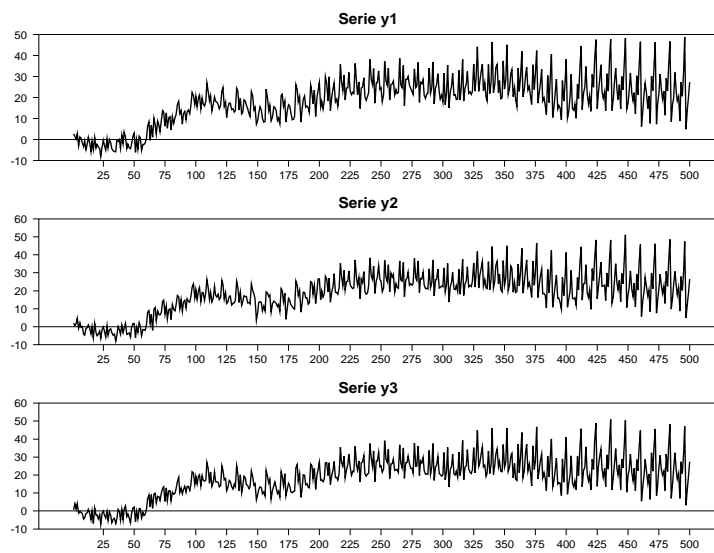


FIGURA 2.20. Series simuladas en el Ejemplo 10.

En la Tabla 2.10 se presentan los resultados de calcular el estadístico de prueba $\xi_{K,N}(h)$ de Busetti (2006) (cifras redondeadas a tres decimales) a diferentes frecuencias $\lambda(h)$, para $h = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Podemos concluir que, para la frecuencia $\pi/6$ y con un nivel de significancia del 5% se rechaza la hipótesis nula de $K = 0$ y $K = 1$ factores comunes estacionales, por tanto, existen dos factores comunes estacionales $K = 2$ en las tres series. Mientras que, para las otras frecuencias no se rechaza la hipótesis nula de $K = 0$, entonces se puede concluir que no existen factores comunes estacionales en dichas frecuencias.

2.3. Detección de factores comunes no estacionales usando el método de Peña y Poncela (2006)

Con el fin de identificar factores comunes no estacionales los cuales pueden ser estacionarios y no estacionarios se realizan 4 simulaciones de series de 500 datos, siguiendo la metodología de Busetti (2006), incluyendo componentes de tendencia estocástica común, componente estacional común y suponiendo $S = 12$. Una vez se obtienen las series, se eliminan los factores comunes estacionales mediante la desestacionalización usando el procedimiento $X11$ de RATS (2011) y se calcula el estadístico $S_{m-r,k}$ dado en (1.6) de Peña y Poncela (2006), considerando los rezagos $k = 1, \dots, 5$.

Ejemplo 11. Aquí se presenta un proceso bivariado con un componente tendencia estocástica común y un componente estacional común. El modelo es

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \mu_{1t} + s_{1t} + \epsilon_{1t} , \\ y_{2t} &= 0.5\mu_{1t} + 2.0s_{1t} + \epsilon_{2t} , \end{aligned}$$

donde

$$\mu_{1t} = \mu_{1t-1} + \zeta_{1t} ,$$

cuando S es par

$$s_{1t} = \sum_{h=1}^{[s/2]} (\cos\pi t\gamma_{1t-1}(h) + \cos\pi t\eta_{1t}(h)) , \quad h = 1, \dots, [s/2] ,$$



FIGURA 2.21. Componente de tendencia estocástica común simulado en el Ejemplo 11.

TABLA 2.11. Determinación del número de factores comunes no estacionales para el Ejemplo 11.

r	Rezagos				
	1	2	3	4	5
0	2019.5*	889.8*	843.9*	799.5*	755.8*
1	1.9	0.7	0.11	2.0	3.0

*Indica que la hipótesis nula de al menos r factores comunes es rechazadacuando $h < s/2$

$$s_{1t} = \sum_{h=1}^{[s/2]} \begin{pmatrix} \cos\lambda(h)\gamma_{1t-1}(h) + \cos\lambda(h)\eta_{1t}(h) & \cos\lambda(h)\gamma_{1t-1}^*(h) + \cos\lambda(h)\eta_{1t}^*(h) \\ \sin\lambda(h)\gamma_{1t-1}(h) + \sin\lambda(h)\eta_{1t}(h) & \sin\lambda(h)\gamma_{1t-1}^*(h) + \sin\lambda(h)\eta_{1t}^*(h) \end{pmatrix}, h = 1, \dots, [s/2],$$

$\{\epsilon_{it}\}$, $i = 1, 2$, $\{\zeta_{1t}\}$, $\{\eta_{1t}(h)\}$ y $\{\eta_{1t}^*(h)\}$, son procesos ruido blanco Gaussiano con media cero y varianza 1.

En las Figuras 2.21 y 2.22 se presentan el componente de tendencia estocástica común y el componente estacional común. En la Figura 2.23 se observan las dos series simuladas mediante el ejemplo 11, en ella se puede observar que existe un fuerte componente estacional común en las dos series, mientras que el componente de tendencia común no se observa fácilmente.

En las entradas de la Tabla 2.11 se encuentran los valores del estadístico de prueba $S_{m-r,k}$ de Peña y Poncela (2006) (cifras redondeadas a un decimal), para cada rezago $k = 1, 2, 3, 4, 5$, dichos valores son usados para probar la hipótesis nula de al menos r factores comunes y deben ser comparados con una distribución χ^2 con $(m - r)^2$ grados de libertad. Para todos los rezagos

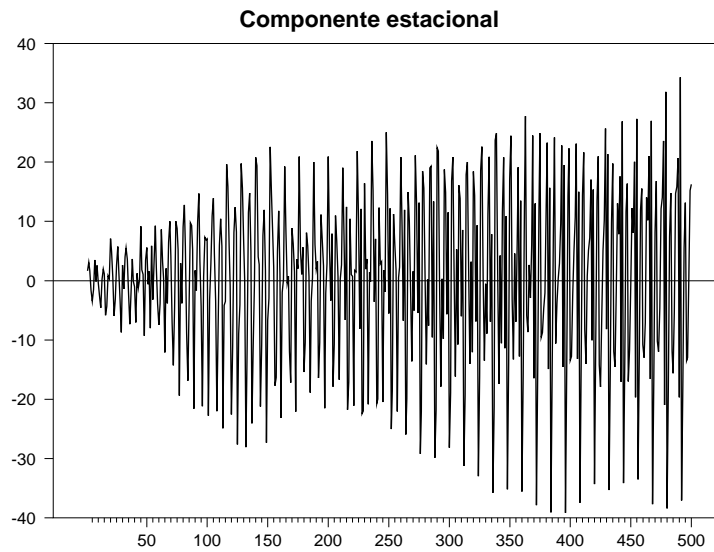


FIGURA 2.22. Componente estacional simulado en el Ejemplo 11.

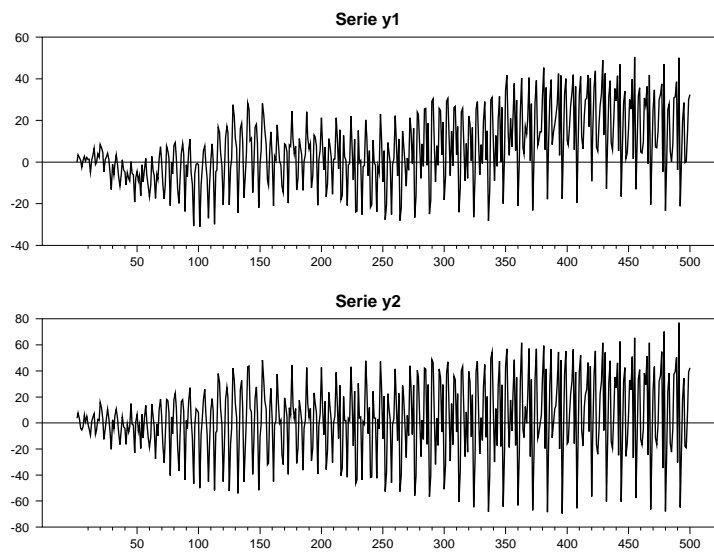


FIGURA 2.23. Series simuladas en el Ejemplo 11.

se rechaza la hipótesis nula de al menos $r = 0$ factores comunes, con un nivel de significancia del 5 %, como era de esperarse, mientras que, no se rechaza para al menos $r = 1$ factores comunes en todos los rezagos, por tanto, se puede concluir que existe un factor común no estacional (el cual puede ser estacionario o no estacionario) en las dos series.

Ejemplo 12. Aquí se presenta un proceso 3-dimensional con un componente de tendencia estocástica común y un componente estacional común. El modelo es

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \mu_{1t} + s_{1t} + \epsilon_{1t} , \\ y_{2t} &= 0.5\mu_{1t} + s_{1t} + \epsilon_{2t} , \\ y_{3t} &= 0.5\mu_{1t} + 2.0s_{1t} + \epsilon_{3t} , \end{aligned}$$

donde

$$\mu_{1t} = \mu_{1t-1} + \zeta_{1t} ,$$

cuando S es par

$$s_{1t} = \sum_{h=1}^{[s/2]} (\cos\pi t \gamma_{1t-1}(h) + \cos\pi t \eta_{1t}(h)) , \quad h = 1, \dots, [s/2] ,$$

cuando $h < s/2$

$$s_{1t} = \sum_{h=1}^{[s/2]} \begin{pmatrix} \cos\lambda(h)\gamma_{1t-1}(h) + \cos\lambda(h)\eta_{1t}(h) & \cos\lambda(h)\gamma_{1t-1}^*(h) + \cos\lambda(h)\eta_{1t}^*(h) \\ \sen\lambda(h)\gamma_{1t-1}(h) + \sen\lambda(h)\eta_{1t}(h) & \sen\lambda(h)\gamma_{1t-1}^*(h) + \sen\lambda(h)\eta_{1t}^*(h) \end{pmatrix} , \quad h = 1, \dots, [s/2] ,$$

$\{\epsilon_{it}\}$, $i = 1, 2, 3$, $\{\zeta_{1t}\}$, $\{\eta_{1t}(h)\}$ y $\{\eta_{1t}^*(h)\}$, son procesos ruido blanco Gaussiano con media cero y varianza 1.

En las Figuras 2.24 y 2.25 se presentan el componente de tendencia estocástica común y el componente estacional común. En la Figura 2.26 se observan las tres series simuladas mediante el ejemplo 12, en ella se puede observar que existe un fuerte componente estacional común en las dos series, mientras que el componente de tendencia común no se observa fácilmente.

En las entradas de la Tabla 2.12 se encuentran los valores del estadístico de prueba $S_{m-r,k}$ de Peña y Poncela (2006) (cifras redondeadas a un decimal), para $k = 1, 2, 3, 4, 5$, dichos valores son usados para probar la hipótesis nula de al menos r factores comunes y deben ser comparados con una distribución χ^2 con $(m - r)^2$ grados de libertad. Para todos los rezagos se rechaza la



FIGURA 2.24. Componente de tendencia estocástica común simulado en el Ejemplo 12.

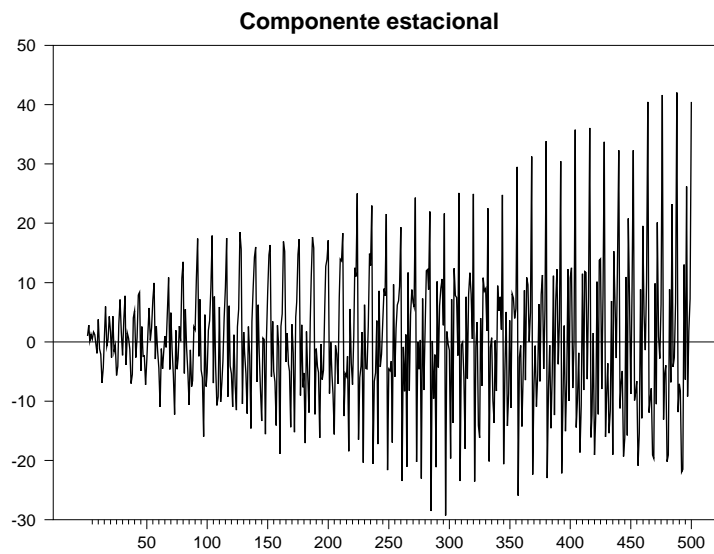


FIGURA 2.25. Componente estacional común simulado en el Ejemplo 12.

TABLA 2.12. Determinación del número de factores comunes no estacionales para el Ejemplo 12.

r	Rezagos				
	1	2	3	4	5
0	1508.6*	1435.9*	1381.2*	1362.2*	1376.5*
1	1.9	6.7	1.9	4.2	2.4
2	0.1	2.3	0.2	0	0

*Indica que la hipótesis nula de al menos r factores comunes es rechazada

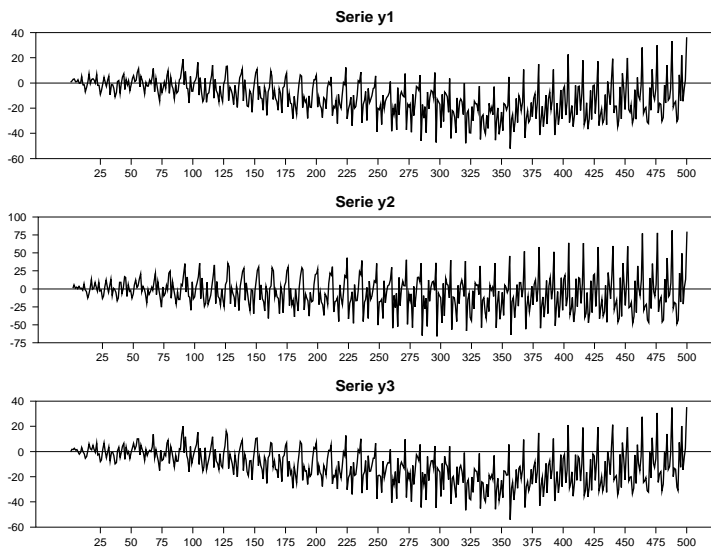


FIGURA 2.26. Series simuladas en el Ejemplo 12.

hipótesis nula de al menos $r = 0$ factores comunes, con un nivel de significancia del 5%, como era de esperarse, mientras que, no se rechaza para al menos $r = 1$ factores comunes en todos los rezagos, por tanto, se puede concluir que existe un factor común no estacional (el cual puede ser estacionario o no estacionario) en las tres series.

Ejemplo 13. Aquí se presenta un proceso 3-dimensional con dos componentes de tendencia estocástica común y un componente estacional. El modelo es

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \mu_{1t} + \mu_{2t} + s_{1t} + \epsilon_{1t} , \\ y_{2t} &= 0.5\mu_{1t} + 0.5\mu_{2t} + 2.0s_{1t} + \epsilon_{2t} , \\ y_{3t} &= 0.5\mu_{1t} + 0.5\mu_{2t} + 2.0s_{1t} + \epsilon_{3t} , \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \mu_{1t} &= \mu_{1t-1} + \zeta_{1t} , \\ \mu_{2t} &= \mu_{2t-1} + \zeta_{2t} , \end{aligned}$$

cuando S es par

$$s_{1t} = \sum_{h=1}^{[s/2]} (\cos\pi t \gamma_{1t-1}(h) + \cos\pi t \eta_{1t}(h)) , \quad h = 1, \dots, [s/2] ,$$

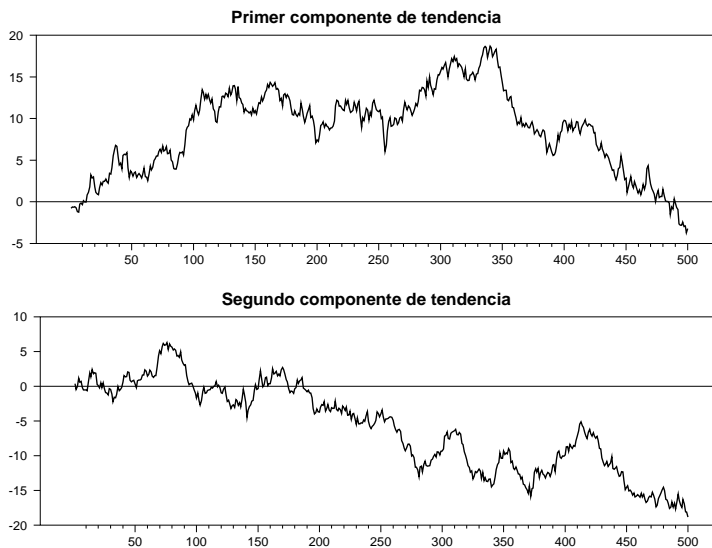


FIGURA 2.27. Componentes de tendencia estocástica comunes simulados en el Ejemplo 13.

TABLA 2.13. Determinación del número de factores comunes no estacionales para el Ejemplo 13.

r	Rezagos				
	1	2	3	4	5
0	2198.0*	2095.1*	2004.3*	1919.3*	1883.1*
1	713.2*	690.1*	695.7*	640.0*	677.8*
2	2.7	0.2	24.3*	1.2	1.0

*Indica que la hipótesis nula de al menos r factores comunes es rechazadacuando $h < s/2$

$$s_{1t} = \sum_{h=1}^{\lfloor s/2 \rfloor} \begin{pmatrix} \cos\lambda(h)\gamma_{1t-1}(h) + \cos\lambda(h)\eta_{1t}(h) & \cos\lambda(h)\gamma_{1t-1}^*(h) + \cos\lambda(h)\eta_{1t}^*(h) \\ \sin\lambda(h)\gamma_{1t-1}(h) + \sin\lambda(h)\eta_{1t}(h) & \sin\lambda(h)\gamma_{1t-1}^*(h) + \sin\lambda(h)\eta_{1t}^*(h) \end{pmatrix}, h = 1, \dots, \lfloor s/2 \rfloor,$$

$\{\epsilon_{it}\}$, $i = 1, 2, 3$, $\{\zeta_{jt}\}$, $j = 1, 2$, $\{\eta_{1t}(h)\}$ y $\{\eta_{1t}^*(h)\}$, son procesos ruido blanco Gaussiano con media cero y varianza 1.

En las Figuras 2.27 y 2.28 se presentan los dos componentes de tendencia estocástica común y el componente estacional común. En la Figura 2.29 se observan las tres series simuladas mediante el ejemplo 13, en ella se puede observar que existe un fuerte componente estacional común en las dos series, mientras que el componente de tendencia común no se observa fácilmente.

En las entradas de la Tabla 2.13 se encuentran los valores del estadístico de prueba $S_{m-r,k}$ de Peña y Poncela (2006) (cifras redondeadas a un decimal), para $k = 1, 2, 3, 4, 5$, dichos valores son usados para probar la hipótesis nula de al menos r factores comunes y deben ser comparados con una distribución χ^2 con $(m-r)^2$ grados de libertad. Para todos los rezagos se rechaza la hipótesis

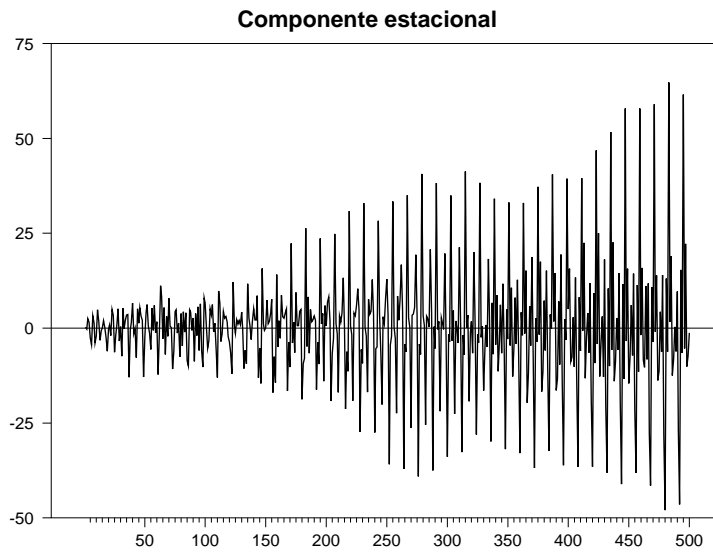


FIGURA 2.28. Componente estacional común simulado en el Ejemplo 13.

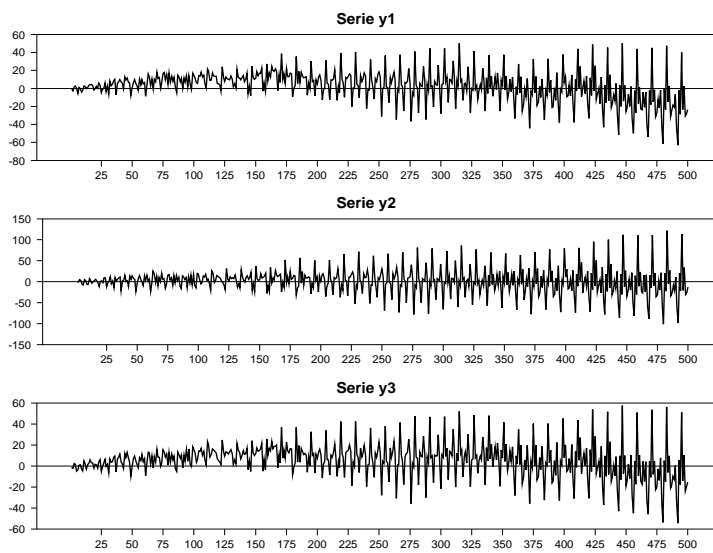


FIGURA 2.29. Series simuladas en el Ejemplo 13.

nula de al menos $r = 0$ y $r = 1$ factores comunes, con un nivel de significancia del 5%, como era de esperarse, mientras que, no se rechaza para al menos $r = 2$ factores comunes en todos los rezagos, por tanto, se puede concluir que existen dos factores comunes no estacionales (los cuales pueden ser estacionarios o no estacionarios) en las series simuladas.

Ejemplo 14. Aquí se presenta un proceso 3-dimensional con un componente de tendencia estocástica común y dos componentes estacionales. El modelo es

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \mu_{1t} + s_{1t} + s_{2t} + \epsilon_{1t}, \\ y_{2t} &= 0.5\mu_{1t} + 0.5s_{1t} + s_{2t} + \epsilon_{2t}, \\ y_{3t} &= 0.5\mu_{1t} + 0.5s_{1t} + 2.0s_{2t} + \epsilon_{3t}, \end{aligned}$$

donde

$$\mu_{1t} = \mu_{1t-1} + \zeta_{1t},$$

cuando S es par

$$\begin{aligned} s_{1t} &= \sum_{h=1}^{[s/2]} (\cos\pi t \gamma_{1t-1}(h) + \cos\pi t \eta_{1t}(h)), \\ s_{2t} &= \sum_{h=1}^{[s/2]} (\cos\pi t \gamma_{2t-1}(h) + \cos\pi t \eta_{2t}(h)), \quad h = 1, \dots, [s/2], \end{aligned}$$

cuando $h < s/2$

$$\begin{aligned} s_{1t} &= \sum_{h=1}^{[s/2]} \begin{pmatrix} \cos\lambda(h)\gamma_{1t-1}(h) + \cos\lambda(h)\eta_{1t}(h) & \cos\lambda(h)\gamma_{1t-1}^*(h) + \cos\lambda(h)\eta_{1t}^*(h) \\ \sen\lambda(h)\gamma_{1t-1}(h) + \sen\lambda(h)\eta_{1t}(h) & \sen\lambda(h)\gamma_{1t-1}^*(h) + \sen\lambda(h)\eta_{1t}^*(h) \end{pmatrix}, \\ s_{2t} &= \sum_{h=1}^{[s/2]} \begin{pmatrix} \cos\lambda(h)\gamma_{2t-1}(h) + \cos\lambda(h)\eta_{2t}(h) & \cos\lambda(h)\gamma_{2t-1}^*(h) + \cos\lambda(h)\eta_{2t}^*(h) \\ \sen\lambda(h)\gamma_{2t-1}(h) + \sen\lambda(h)\eta_{2t}(h) & \sen\lambda(h)\gamma_{2t-1}^*(h) + \sen\lambda(h)\eta_{2t}^*(h) \end{pmatrix}, \quad h = 1, \dots, [s/2], \end{aligned}$$

$\{\epsilon_{it}\}$, $i = 1, 2, 3$, $\{\zeta_{1t}\}$, $\{\eta_{jt}(h)\}$, $j = 1, 2$ y $\{\eta_{lt}^*(h)\}$, $l = 1, 2$, son procesos ruido blanco Gaussiano con media cero y varianza 1.

En las Figura 2.30 y 2.31 se presentan el componente de tendencia estocástica común y los dos componentes estacionales comunes. En la Figura 2.32 se observan las tres series simuladas mediante el ejemplo 14, en ella se puede observar que existe un fuerte componente estacional común en las dos series, mientras que el componente de tendencia común no se observa fácilmente.



FIGURA 2.30. Componente de tendencia estocástica común simulado en el Ejemplo 14.

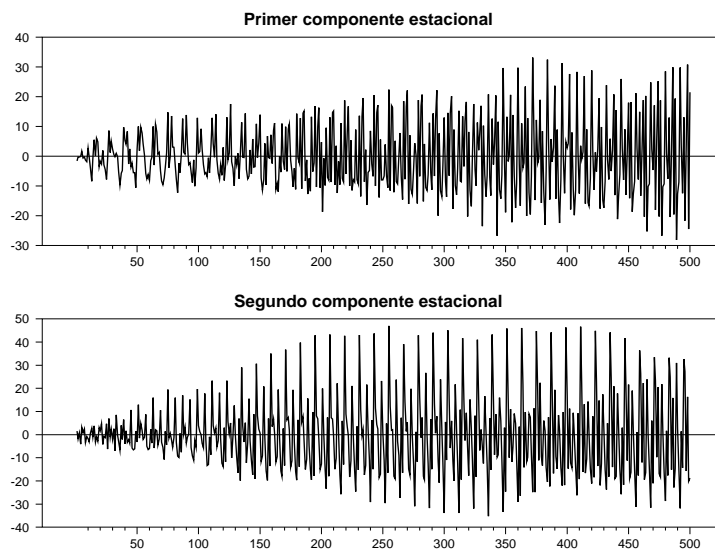


FIGURA 2.31. Componentes estacionales comunes simulados en el Ejemplo 14.

TABLA 2.14. Determinación del número de factores comunes no estacionales para el Ejemplo 14.

r	Rezagos				
	1	2	3	4	5
0	1831.1*	1787.5*	1756.1*	1694.8*	1646.3*
1	2.2	2.3	1.7	5.7	1.7
2	0.1	0.3	2.8	0.5	0.1

*Indica que la hipótesis nula de al menos r factores comunes es rechazada

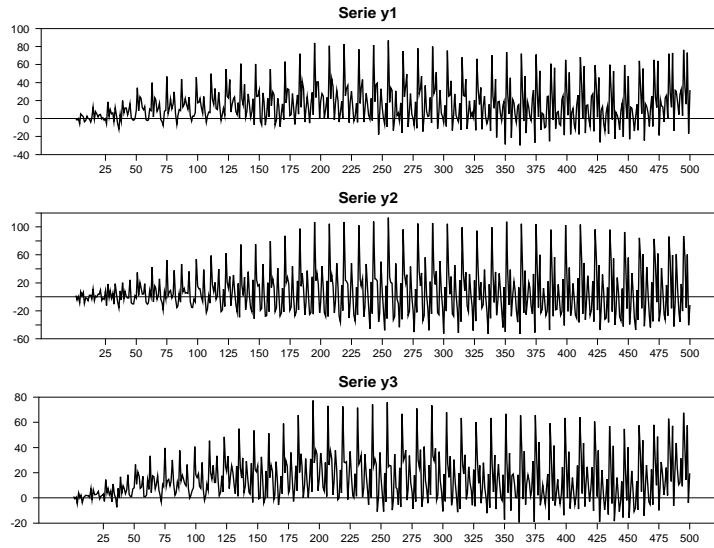


FIGURA 2.32. Series simuladas en el Ejemplo 14.

En las entradas de la Tabla 2.14 se encuentran los valores del estadístico de prueba $S_{m-r,k}$ de Peña y Poncela (2006) (cifras redondeadas a un decimal), para $k = 1, 2, 3, 4, 5$, dichos valores son usados para probar la hipótesis nula de al menos r factores comunes y deben ser comparados con una distribución χ^2 con $(m - r)^2$ grados de libertad. Para todos los rezagos se rechaza la hipótesis nula de al menos $r = 0$ factores comunes, con un nivel de significancia del 5%, como era de esperarse, mientras que, no se rechaza para al menos $r = 1$ factores comunes en todos los rezagos, por tanto, se puede concluir que existe un factor común no estacional (el cual puede ser estacionario o no estacionario) en las tres series simuladas.

Aplicación a datos reales

En el presente capítulo se lleva a cabo una aplicación de la metodología propuesta con datos reales del sector macroeconómico Colombiano. Un primer análisis a este conjunto de datos utilizando la metodología de Peña y Poncela (2006) fue hecho por Palencia (2006) y Martínez(2010), quienes identificaron algunos factores comunes. Martínez (2010), por ejemplo, encontró dos factores comunes después de ajustar las series por intervenciones, datos atípicos y estacionalidad.

Las series son las mismas usadas por Melo *et al.* (2001) para construir un índice coincidente para la economía Colombiana: situación económica actual de la industria (y_1), tomada como el balance entre porcentajes positivos y negativos de las respuestas individuales de la pregunta número uno de la encuesta de opinión empresarial de Fedesarrollo; volumen actual de pedidos por atender de la industria (y_2), tomado como el balance entre porcentajes positivos y negativos de las respuestas individuales de la pregunta número seis de la encuesta de opinión empresarial de Fedesarrollo; producción nacional de cemento (y_3); índice de producción real de la industria manufacturera sin trilla de café (y_4); índice de empleo de obreros de la industria manufacturera sin trilla de café (y_5); saldo de efectivo en términos reales (y_6); demanda de energía más consumo de gas residencial e industrial (y_7); importaciones reales exceptuando las de bienes de capital y duraderos (y_8); y cartera neta real en moneda legal (y_9). En Melo *et al.* (2001) se analizan estas series desde enero de 1980 hasta agosto de 2001; en esta aplicación se amplió el periodo de observación hasta enero de 2006. En la Figura 3.1 se presentan las series mencionadas y realizando un

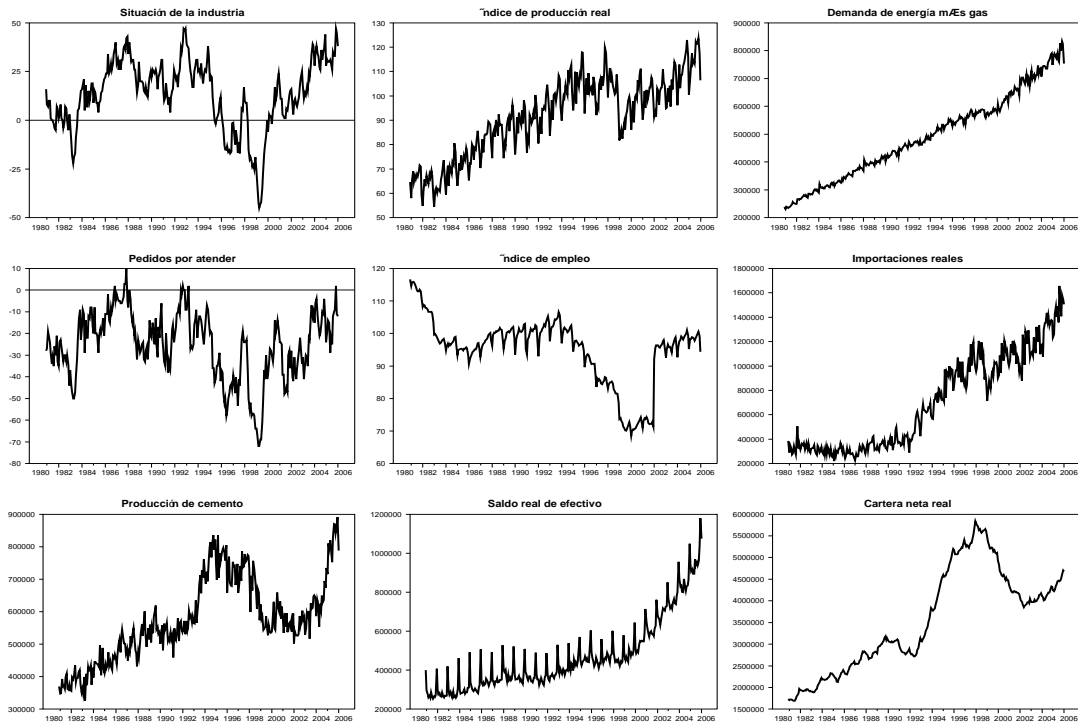


FIGURA 3.1. Series de tiempo de la macroeconomía Colombiana.

primer análisis visual, se puede concluir la posible presencia de tendencias estocásticas comunes y componentes estacionales comunes.

Las series usadas en esta aplicación fueron ajustadas por datos atípicos mediante el paquete TSW (2004) y se les hicieron algunas transformaciones planteadas en Melo *et al.* (2001), como logaritmo a las variables producción de cemento, importaciones reales, cartera neta real y saldo de efectivo. Además, la interpretación de los factores comunes es generalmente más fácil si las variables tienen la misma escala, por tal motivo, las series son ajustadas a su escala mediante la "desviación estandar muestral" s_i , donde $s_i^2 = (1/n) \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$, con y_{ij} la j -ésima observación de Y_i , \bar{y}_i la media muestral de los datos para la variable i , $i = 1, \dots, 9$ y n denota la longitud de las series temporales. En la Figura 3.2 se presentan las series transformadas.

Usando la metodología propuesta por Buseti (2006) con las series transformadas y después de eliminar las tendencias mediante la primera diferencia regular, se identifica el número de factores comunes estacionales, con el estadístico $\xi_{K,N}(h)$, definido en (1.13), para las diferentes frecuencias $\lambda(h)$, para $h = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ y se obtienen los resultados presentados en la Tabla 3.1 (cifras redondeadas a tres decimales).

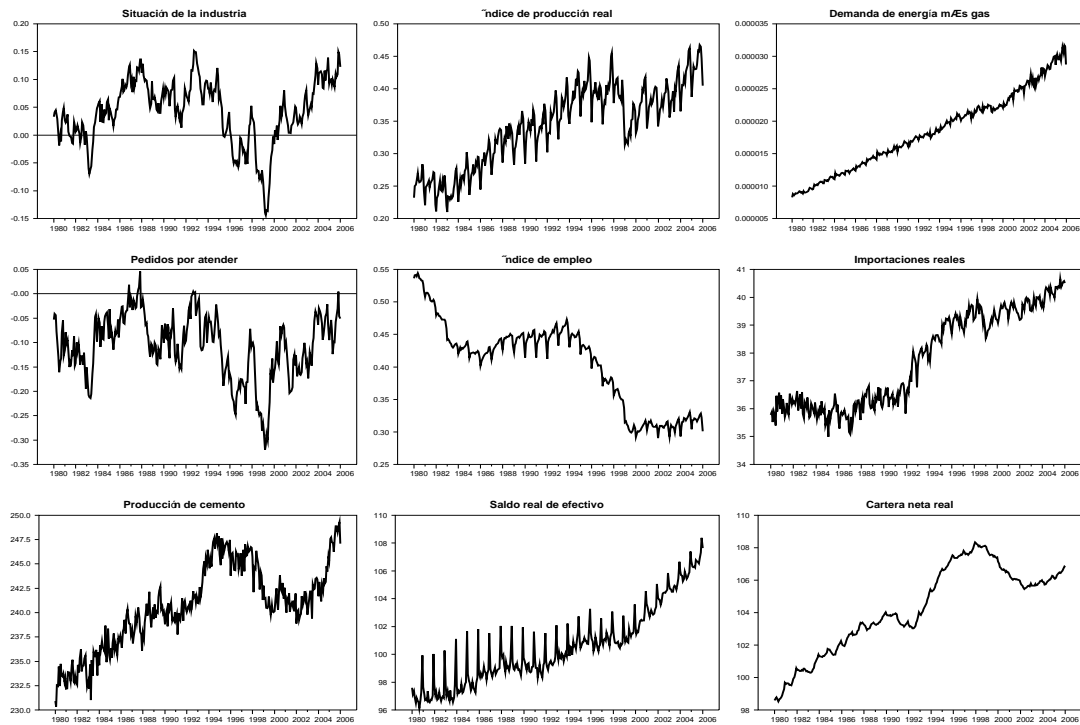


FIGURA 3.2. Series de tiempo transformadas de la macroeconomía Colombiana.

TABLA 3.1. Determinación del número de factores comunes estacionales para los datos reales.

K	Frecuencia $\lambda = 2\pi h/s$						Todas λ' s
	$h = 1$	$h = 2$	$h = 3$	$h = 4$	$h = 5$	$h = 6$	
	$\lambda = \pi/6$	$\lambda = \pi/3$	$\lambda = \pi/2$	$\lambda = 2\pi/3$	$\lambda = 5\pi/6$	$\lambda = \pi$	
0	2.880*	2.304*	1.054*	0.843*	0.772*	0.617*	8.470*
1	2.564*	2.052*	0.939*	0.751	0.687	0.550	7.543*
2	2.249*	1.800*	0.823	0.659	0.603	0.482	6.615
3	1.934*	1.547	0.708	0.566	0.518	0.415	5.688
4	1.619	1.295	0.593	0.474	0.434	0.347	4.761
5	1.303	1.043	0.477	0.382	0.349	0.280	3.834
6	0.988	0.791	0.362	0.289	0.265	0.212	2.907
7	0.673	0.539	0.246	0.197	0.180	0.144	1.980
8	0.358	0.286	0.131	0.105	0.096	0.077	1.052

*Indica que la hipótesis nula de K factores comunes estacionales es rechazada

Estos valores son usados para probar la hipótesis nula de K factores comunes estacionales y deben ser comparados con los percentiles proporcionados por Buseti (2006), con un nivel de significancia de 5%. La prueba se desarrolla secuencialmente incrementando K , para cada frecuencia $\lambda(h)$. Los valores marcados con un asterisco indican que la hipótesis nula de K factores comunes estacionales es rechazada.

Las filas de la Tabla 3.1 indican los factores y las columnas indican las frecuencias estacionales $\lambda(h)$, para las cuales se aplicó el estadístico. Los resultados se pueden analizar así:

- Para la frecuencia $\lambda = \pi/6$, es decir, periodo de 12 meses los resultados sugieren que existen alrededor de tres factores comunes estacionales.
- Para la frecuencia $\lambda = \pi/3$, es decir, periodo de 6 meses los resultados sugieren que existen alrededor de dos factores comunes estacionales.
- Para la frecuencia $\lambda = \pi/2$, es decir, periodo de 4 meses los resultados sugireren que existe alrededor de un factor común estacional.
- Para las frecuencias $\lambda = 2\pi/3$ (periodo de tres meses), $\lambda = \pi$ (periodo de dos meses) y $\lambda = 5\pi/6$ (periodo de dos meses y diez días), los resultados sugieren que no existe ningún factor común estacional.
- Finalmente, se observa que para todas las frecuencias λ' s los resultados sugieren que existen alrededor de dos factores comunes estacionales.

Por tanto, se puede concluir que existen alrededor de dos factores comunes estacionales en las nueve series de la macroeconomía Colombiana, los cuales no se encuentran presentes en todos los periodos analizados, sino en algunos de ellos, tal como se observó anteriormente.

Usando la metodología propuesta por Peña y Poncela (2006) con las series transformadas y desestacionalizadas mediante el procedimiento X11 de RATS (2011), se identifica el número de factores comunes no estacionales (los cuales pueden ser estacionarios y no estacionarios), con el estadístico $S_{m-r,k}$ dado en (1.6), para $k = 1, \dots, 5$ y se obtienen los resultados mostrados en la Tabla 3.2 (cifras redondeadas a un decimal).

Las entradas de la Tabla 3.2 son los valores del estadístico $S_{m-r,k}$, para cada rezago k . La prueba se desarrolla secuencialmente incrementando r ; dichos valores son usados para probar al menos r factores comunes y deben ser comparados con una distribución χ^2 con $(m-r)^2$ grados de

TABLA 3.2. Determinación del número de factores comunes no estacionales para los datos reales.

r	Rezagos				
	1	2	3	4	5
0	3555.8*	3233.6*	3108.9*	3005.0*	2934.0*
1	565.3*	496.0*	467.4*	434.6*	392.2*
2	307.3*	248.3*	230.6*	203.1*	179.7*
3	182.5*	139.7*	128.3*	102.2*	94.6*
4	97.3*	57.1*	40.3*	38.2*	32.1*
5	50.1*	26.4*	16.1	18.9	15.6
6	16.2	8.7	6.0	9.2	2.5
7	4.6	1.3	1.1	3.5	0.2
8	0	0	0	0.1	0

*Indica que la hipótesis nula de al menos r factores comunes no estacionales es rechazada

libertad, un asterisco indica que la hipótesis nula de al menos r factores comunes no estacionales es rechazada, por tanto, para todos los rezagos se rechazan las hipótesis nulas de $r = 0$, $r = 1$, $r = 2$, $r = 3$, $r = 4$ factores comunes no estacionales, así se puede concluir que la prueba sugiere la existencia de al menos 4 factores comunes no estacionales, los cuales pueden ser estacionarios y no estacionarios.

Una vez realizada la aplicación a las nueve series de la macroeconomía Colombiana se puede concluir que existen alrededor de dos factores comunes estacionales y alrededor de cuatro factores comunes no estacionales, los cuales pueden ser estacionarios y no estacionarios. Este resultado es similar al obtenido por Nieto *et al.* (2013) quienes encontraron tres factores comunes no estacionales y dos factores comunes estacionales.

Conclusiones

En este trabajo se presentó una metodología empírica que permite extraer factores comunes dinámicos estacionales y no estacionales (estacionarios y no estacionarios) combinando la metodología de Buseti (2006) y, Peña y Poncela (2006). Se encontró que tanto en las simulaciones como en la aplicación a datos reales de la macroeconomía Colombiana, los dos métodos tienen la capacidad para identificar el número de factores comunes estacionales y no estacionales.

Para identificar el número de factores comunes estacionales se eliminan las tendencias mediante la diferenciación y para identificar factores comunes no estacionales las series son desestacionalizadas con el procedimiento *X11* de RATS (2011).

Una vez planteada la metodología, se hace una aplicación a nueve series de la macroeconomía Colombiana obteniendo 4 factores comunes no estacionales, los cuales pueden ser estacionarios y no estacionarios y 2 factores comunes estacionales, que es un resultado similar al obtenido por Nieto *et al.* (2013).

Trabajo futuro

Este trabajo sirve como un estudio preliminar empírico para la extracción simultánea de factores comunes estacionales y no estacionales (los cuales pueden ser estacionarios y no estacionarios). En este sentido, constituye una base para la construcción formal de una metodología estadística para analizar este problema.

Bibliografía

- Ahn, S. (1997). Inference of vector autoregressive models with cointegration and scalar components, *Journal of the American Statistical Association* (437): 350–356.
- Alonso, A., Rodríguez, J., García-Martos, C. & Sánchez, M. (2011). Seasonal Dynamic Factor Analysis and Bootstrap Inference: Application to Electricity Market Forecasting, *Technometrics* (53): 137–151.
- Box, G. & Tiao, G. (1977). A canonical analysis of multiple time series, *Biometrika* (64): 355–365.
- Brillinger, D. (1981). *Time series data analysis and theory*, Holden Day: San Francisco.
- Busetti, F. (2006). Test of Seasonal Integration and Cointegration in Multivariate Unobserved Component Models, *Journal of Applied Econometrics* (21): 419–438.
- Caporello, G. and Maravall, A. (2004). *Manual TSW*, Banco de España, Madrid. España.
- Cubadda, G. (1999). Common cycles in seasonal non-stationary time series, *Journal of Applied Econometrics* (14): 273–291.
- Doan, T. (2011). *WinRATS Pro (v. 8.10)*, Estima: Evanston, IL.
- Durbin, J. & Koopman, S. (2001). *Time series analysis by state space methods*, Oxford University Press.
- Elements of multivariate time series analysis* (1993). Springer-Verlag, New York.
- Escribano, A. & Peña, D. (1994). Cointegration and Common Factors, *Journal of Time Series Analysis* (6): 577–586.
- Forni, M., Hallin, M., Lippi, M. & Reichlin, L. (2003). The generalized dynamic factor model: one-sided estimation and forecasting, *CEPR Discussion paper* (3432): 37–54.
- García-Martos, C., Rodríguez, J. & Sánchez, M. (2011). Forecasting electricity prices and their volatilities using Unobserved Components, *Energy Economics* (33): 1227–1239.
- Geweke, J. & Singleton, K. (1981). Maximum likelihood confirmatory analysis of economic time series, *International Economic Review* (22): 37–54.
- Gregoir, S. (1999). Multivariate time series with various hidden unit roots part I: integral operator algebra and representation theory, *Econometric Theory* (15): 435–468.

- Harvey, A. (1989). *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge University Press: Cambridge.
- Hylleberg, S. & G.E., M. (1989). Cointegration and error correction mechanisms, *The Economic Journal* (99): 113–125.
- Hylleberg, S., R. E. C. G. & Yoo., B. (1990). Seasonal integration and cointegration, *Journal of Econometrics* (44): 215–238.
- Johansen, S. (1991). Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in Gaussian vector autoregressive models, *Econometrica* (6): 1551–1580.
- Koopman, S., Harvey, A., Doornik, J. & Shephard, N. (2011). *Stamp 8.0: Structural Time Series Analyser, Modeller and Predictor*, Timberlake Consultants, London.
- Lütkepohl, H. (2005). *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer. Verlag. New York, New York.
- Martínez, W. (2010). *Construcción de un índice coincidente por medio de factores comunes dinámicos*, Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias. Departamento de Estadística, Bogotá.
- Melo, L., Nieto, F., Posada, C., Betancourt, Y. & Barón, J. (2001). Un índice coincidente para la actividad económica de Colombia, *ENSAYOS sobre política económica* pp. 46–88.
- Nieto, F., Peña, D. & Saboyá, D. (2013). Characterizing Common Seasonality in Multivariate Time Series, *Reporte interno de investigación No 22, Departamento de Estadística. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá*.
- Palencia, A. (2006). *Cálculo de un índice para el estado de la economía utilizando modelos de series temporales multivariadas*, Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias. Departamento de Estadística, Bogotá.
- Peña, D. & Box, G. (1987). Identifying a simplifying structure in time series, *Journal of the American Statistical Association* (82): 836–843.
- Peña, D. & Poncela, P. (2006). Nonstationary Dynamic Factor Analysis, *Journal of Statistical Planning and Inference* (136): 1237–1257.
- Stock, J. & Watson, M. (1988). Testing for common trends, *Journal of the American Statistical Association* (83): 1097–1107.
- Tiao, G. & Tsay, R. (1989). Model specification in multivariate time series, *Journal of the Royal Statistical Society B* (51): 157–213.
- Velu, R., Reinsel, G. & Wichern, D. (1986). Reduced rank models for multiple time series, *Biometrika* (73): 105–118.