IGUALDAD Y EQUIVALENCIA: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA QUE ENRIQUECE LA INTERPRETACIÓN DE ECUACIONES Y SU SOLUCIÓN

Jaime Vladimir Medellín Tobón

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
MAESTRIA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
BOGOTÁ COLOMBIA
2014

IGUALDAD Y EQUIVALENCIA: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA QUE ENRIQUECE LA INTERPRETACIÓN DE ECUACIONES Y SU SOLUCIÓN

Jaime Vladimir Medellín Tobón

Tesis o trabajo de investigación presentada como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director (a):

MYRIAM MARGARITA ACEVEDO CAICEDO

Magister en Matemáticas

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
MAESTRIA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
BOGOTÁ COLOMBIA
2014

Resumen

En este trabajo a partir de un análisis histórico, epistemológico y didáctico del concepto de igualdad y sus diferentes significados se presenta una unidad didáctica para los estudiantes de grado octavo del colegio Veinte de Julio. Inicialmente se incluye una síntesis del desarrollo histórico del concepto y la evolución del símbolo de igualdad; posteriormente se presenta un análisis epistemológico donde se evidencian los conflictos y obstáculos y se relacionan con la epistemología del aprendiz y sus dificultades para dar significado al concepto de igualdad en contextos diferentes al numérico. A continuación se discuten las diferentes categorías del concepto de igualdad y los problemas que se evidenciaron en algunos libros de texto respecto al abordaje de este tópico. En la parte final se incluye una unidad didáctica basada en el aprendizaje significativo, que introduce secuencialmente los significados de la igualdad en contextos aritméticos y algebraicos, enfatizando en la interpretación de la equivalencia y la igualdad, apoyándose en modelos geométricos que otorgan significado a la bilateralidad y bidireccionalidad de la igualdad.

Palabras claves: Igualdad, equivalencia, ecuación

Abstract

This study presents a didactic unit for eighth graders at Veinte de Julio School from a historical epistemological and didactic analysis of the concept of equality and its different meanings. Firstly, a synthesis of the historical development of the concept and the evolution of the equality symbol are included. Secondly an epistemological analysis is presented. This analysis shows the conflicts and obstacles and its relationships with the student’s epistemology and his/her difficulties to give meaning to the concept of equality in different contexts to numeric. Thirdly the different categories of the concept of equality and the problems that some mathematic textbooks had when tackling this concept are discussed. Finally, a didactic unit based on meaningful learning is included. This unit introduces sequentially the meanings of equality in algebraic and arithmetic contexts emphasizing the interpretation of equivalence and equality, this interpretation is based on geometrical models that give meaning to the bilaterality and directionality of the equality.

Key words: equality, equivalence, equation

Contenido

Introducción

En la actualidad nos enfrentamos a una diversidad de problemas en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de *las* matemáticas en la educación básica y media. Uno de ellos es la poca motivación frente al área expresada en la actitud de los estudiantes cuando se discuten los temas en la clase o cuando se proponen preguntas o problemas. Está situación desde luego no depende solamente de los estudiantes, sino que está relacionada con el tipo de prácticas que realiza el docente en el aula; las propuestas didácticas, curriculares y metodológicas no difieren de las utilizadas hace más de una década. Se necesita entonces, replantear tanto los contenidos como la forma de trabajarlos en la clase involucrando nuevas estrategias y herramientas actuales para su discusión. Un análisis epistemológico y didáctico de los tópicos de la matemática escolar, por ejemplo, podría ayudar al docente a repensar sus prácticas.

En la institución donde se ubica el proyecto, situaciones como la anterior han originado niveles bajos de apropiación de los conocimientos básicos, relacionadas especialmente con el manejo de las operaciones elementales y la interpretación, planteamiento y resolución de problemas. Esto ha incidido desde luego en su desempeño en cursos de matemáticas superiores y en otras áreas y situaciones de aplicación.

Los estudiantes de octavo grado además de la problemática anterior, se enfrentan en el inicio del curso a la transición del aritmética al algebra, transición en la que cambian los procesos de razonar matemáticamente, pero especialmente en la que cambian los objetos, se pasa de manejar los números a interpretar y dar significado a las variables y en este contexto las operaciones y relaciones, entre ellas la igualdad se convierte en un problema de especial complejidad.

Cuando posteriormente en el octavo grado se presenta la factorización de polinomios, esta se constituye en uno de los temas más difíciles de abordar. Pareciera resultarles claro el procedimiento de composición de factores (multiplicación de polinomios), pero la descomposición de un polinomio en factores, les resulta muy complicada. El mismo problema se evidencia cuando trabajan en décimo con identidades trigonométricas. En parte, esta situación se relaciona con el significado que los estudiantes dan a la igualdad en aritmética, que se reduce a una instrucción para operar, lo que incrementa sus dificultades para interpretar una identidad algebraica, entender la equivalencia de expresiones y dar sentido a una ecuación. En los niveles de la básica primaria y en el primero de básica secundaria la igualdad se aborda usualmente como una instrucción para operar: en una dirección, de izquierda a derecha y no en la expresión de una equivalencia. El problema es más evidente cuando los estudiantes se enfrentan a la resolución de una ecuación que requiere trasponer términos y trabajar con expresiones equivalentes.

Para aportar a la solución del problema, se diseña en este trabajo una unidad didáctica dirigida a los estudiantes del grado octavo, en la que se pretenderá dar significado a la igualdad y a la equivalencia, partiendo de su interpretación en el dominio aritmético hasta llegar al dominio algebraico, privilegiando en toda la unidad el planteamiento, resolución e interpretación de problemas.

Objetivo general

Diseñar una unidad didáctica para estudiantes de grado octavo fundamentada en un análisis conceptual, histórico y epistemológico de los conceptos de igualdad, equivalencia y ecuación.

Objetivos específicos

- Estudiar y describir algunos elementos históricos, epistemológicos y didácticos relativos a los conceptos de igualdad, equivalencia y ecuación.
- Revisar algunos textos de la básica para analizar presentación de los conceptos de igualdad, equivalencia y ecuación y contrastarla con textos matemáticos formales.
- Aplicar una prueba a los estudiantes del octavo grado para identificar preconceptos y conocimientos previos respecto a la igualdad, equivalencia y ecuación.
- Diseñar una unidad didáctica sobre los conceptos de igualdad, equivalencia y ecuación en contextos aritméticos y algebraicos centrada en la resolución de problemas.

1. Aspectos históricos y epistemológicos

En este capítulo se presenta una breve síntesis de algunos aspectos relativos a la introducción del concepto de igualdad y sus significados, el proceso de evolución del signo y la forma como las configuraciones epistémicas e interpretaciones de los estudiantes, respecto al concepto de igualdad, cambian e inciden en la apropiación de este concepto.

1.1 Aspectos históricos

1.1.1 Las nociones iniciales de igualdad y equivalencia.

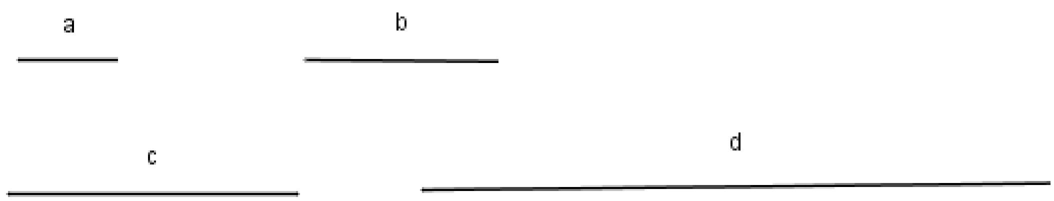
A pesar de que las matemáticas tenían desarrollos muy importantes en tiempos anteriores a la cultura griega (egipcios, babilonios, chinos), el interés fundamental se centraba hasta entonces, según los historiadores, en contar, medir y construir. Son los matemáticos griegos, los primeros en ocuparse de analizar la naturaleza de los objetos matemáticos y a partir de allí estructurar la matemática, por primera vez, como un sistema de conocimientos. Su concepción mística de los números, dio origen a la matemática como ciencia rigurosa y axiomática.

En la concepción griega desde el comienzo estuvieron ligados dos conceptos: "el número y la forma", se concebía el número como cantidad (multitud de unidades) o asociado a la medida de un segmento. Los números representaban segmentos finitos de recta (la longitud de un segmento de recta), un número (construido como un segmento) se podía transformar mediante diferentes operaciones, en otro número (otro segmento de recta).

¿Pero cómo evidenciar que las operaciones efectuadas con los números, son correctas si los segmentos iniciales (unidad seleccionada), que se asocian, son diferentes?, es decir ¿cómo garantizar que la operación (o las operaciones) está (n) unívocamente definida (s)?.

Para resolver este problema, los griegos demostraron que los dos segmentos iniciales y los dos segmentos obtenidos al efectuar las operaciones son semejantes usando el teorema de Thales, Encontramos aquí la que se podría caracterizar como una primera mención al significado de igualdad como equivalencia.

Si se parte de dos segmentos unidad, de diferente longitud, *a* y *b*, y efectuando las mismas operaciones a ambos segmentos, se obtienen respectivamente los segmentos *c* y *d*:



Los segmentos que se obtienen son diferentes, pero semejantes, (teorema de Thales[1]), observemos la ilustración

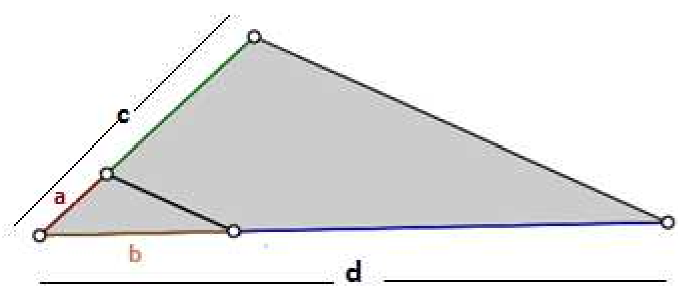


Ilustración 1

Se concluye que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Los segmentos obtenidos guardan la proporción, en esta proporción aparece por primera vez el significado de la igualdad como equivalencia, que posteriormente permite definir el concepto de fracción como razón.

[1] "Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado"

1.1.2 Euclides

Con respecto a la igualdad Euclides en los *Elementos* hace referencia a ella en el contexto geométrico. En el primer libro parte de las *definiciones,* en donde trabaja elementos de la igualdad. En la definición 10, define la igualdad de ángulos[2]; en la 17, la división de un círculo por su diámetro, en partes iguales[3]; en la 20, trabaja la definición de triángulos equiláteros e isósceles[4]; y en la 22, la definición de cuadrados y rombos.

Pero es en las nociones comunes, donde Euclides hace referencia a propiedades de la igualdad que son fundamentales en el campo aritmético y algebraico, la primera:

"Las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí" (Castaño, 1991), propiedad transitiva de la igualdad.

La segunda y tercera: "Si se añaden cosas iguales a cosas iguales, los totales son iguales.", "Y si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales." (Castaño, 1991)

Y la cuarta: "Y las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí."

Estas nociones son la base para poder resolver una ecuación de primer grado y permiten dar significado a la igualdad como una relación de equivalencia, e ir más allá del concepto de igualdad como una acción.

Heiberg adiciona a las nociones planteadas por Euclides un par de nociones comunes: "Y los dobles de una misma cosa son iguales entre sí" "Y las mitades de una misma cosa son iguales entre sí" (Castaño, 1991), estas nociones permiten entender más profundamente la bilateralidad de la igualdad y se utilizan para la resolución de ecuaciones algebraicas:

---

[2] "Cuando una recta levantada sobre otra recta forma ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos iguales es recto y la recta levantada se llama perpendicular a aquella sobre la que está." (Castaño, 1991)
[3] "Un diámetro del círculo es una recta cualquiera trazada a través del centro y limitada en ambos sentidos por la circunferencia del círculo, recta que también divide el círculo en dos partes iguales." (Castaño, 1991)
[4] "De entre las figuras triláteras, triángulo equilátero es la que tiene los tres lados iguales, isósceles la que tiene sólo dos lados iguales, y escaleno la que tiene los tres lados desiguales." (Castaño, 1991)

1.1.3 Arquímedes

Arquímedes desarrolló en su fantástica obra “El arenario” una construcción de una notación matemática capaz de relacionar los objetos cotidianos, como semillas de amapola, arena y dedos, con tamaños del sistema solar y de todo el universo, y relacionarlos mediante una sucesión de equivalencias.

Arquímedes intenta dar significado a la noción de infinito partiendo de una interesante pregunta~~:~~

“Hay algunos, rey Gelón, que creen que el número de los granos de arena es infinito por su multitud… También hay algunos que sin creer que sea infinita, piensa sin embargo que o existe ningún número que sea lo bastante grande como para superar tal abundancia. Y es claro que, si aquellos que sostienen esa opinión imaginasen una masa hecha de arena tan grande como la masa de la tierra, incluyendo en ella todos los mares y huecos de la tierra llenos hasta la altura de la más alta montaña, seguirán muy lejos de reconocer que se puede expresar cualquier número que supere esta multitud de arena.” (Arquimedes)

Para responder la pregunta Arquímedes presenta pruebas geométricas, usa desigualdades y una relación de equivalencia, que le permite relacionar cantidades y unidades cotidianas con tamaños tan solo imaginablemente “infinitos” hasta ese momento.

1.1.4 La igualdad y la equivalencia: De Leibniz a Frege

Respecto al significado de la igualdad en el dominio geométrico, Leibniz en su obra “Characteristica Geometrica”, hace una distinción entre semejanza e igualdad geométrica, relacionando la primera con lo cualitativo y la segunda con lo cuantitativo:

“Son semejantes aquellas cosas que no pueden ser discernidas consideradas una después de la otra, como dos triángulos semejantes; iguales son las cosas extensas que sin ser efectivamente congruentes, pueden serlo sin modificación de su masa, esto es de su cantidad, por medio de una transposición de puntos.” (Molina J. A., abril 2012)

Diferencia Leibniz, además cantidad y cualidad, “Cantidad o magnitud es aquello que puede conocerse en las cosas por su mera percepción simultanea; cualidad es aquello que puede conocerse cuando se las observa en su singularidad.” (Leibniz, 1982) Y sobre esta base define la igualdad como “entes de la misma cantidad.” Y semejante como “entes de la misma cualidad.” (Molina J. A., abril 2012)

En el libro “De Arte Combinatoria” Leibniz “hace de la igualdad de conceptos un objeto de estudio y de análisis.” (Heredia & Henao, 2004) De esta caracterización de la igualdad se deducen sus propiedades: reflexiva, simétrica y transitiva, llevando a que de esta manera a caracterizarla como una relación de equivalencia.

El nacimiento de la “teoría abstracta de conjuntos”[5] y su desarrollo como noción fundamental de la matemática, le permite a Frege, durante el siglo XIX, desarrollar todo un proceso donde se precisaban los conceptos básicos de la matemática. Frege logra desarrollar lo que hoy en día conocemos como una “teoría axiomática de conjuntos.

En la teoría de conjuntos moderna, podemos empezar formulando que todo teorema parte de: “Si admitimos que los conjuntos (sea los que sean), junto con las relaciones de pertenencia (sea esto lo que sea), cumplen unos axiomas dados, entonces tal afirmación es cierta.” (Ivorra)

Para definir número cardinal, Frege define sobre una clase *A (*conjunto de conjuntos*,* la clase formada por todos los conjuntos*)* una relación (coordinabilidad entre conjuntos, dos conjuntos son coordinables sí y sólo si se puede definir una biyección entre ellos), tal relación es reflexiva, simétrica y transitiva, es decir es de equivalencia, tal relación genera una partición de *A* en clases de equivalencia, los números cardinales. Aparece en este dominio, la Teoría de Conjuntos, un significado de la igualdad como relación de equivalencia, a la que hoy nos referimos como equipotencia de conjuntos: dos conjuntos son equipotentes si tienen el mismo cardinal.

[5] Para hacer una distinción con la noción de conjunto, como una idea de coleccionar elementos en un todo, la cual es una “idea “natural” de nuestro pensamiento” (Sanchez, 1996)

1.1.5 Acerca del signo de igualdad

Los signos para representar conceptos y relaciones se empezaron a usar desde los inicios de la matemática, aparecen ya algunos en los documentos de los egipcios y babilónicos. Pero la mayoría de los signos que se utilizan en la actualidad, , entre ellos el de la igualdad aparecen hasta los siglos XVI y XVII

Antes del siglo XVI los símbolos utilizados eran pocos, por lo general se utilizaba la abreviación de palabras para representar conceptos u operaciones. Durante y posteriormente a este siglo, se da un paso hacia la matemática puramente simbólica, permitiendo el planteamiento y resolución de problemas generales.

En el siglo XVI, el álgebra avanzó de manera muy significativa debido a la introducción del álgebra simbólica, que permitió plantear problemas y presentar soluciones generales. Los símbolos adquirieron así significado más allá de sustituir una palabra o término y esto permitió un florecimiento del conjunto de las matemáticas.

El símbolo “=” como muchos de los símbolos aritméticos, tuvo su origen en el álgebra. Particularmente es Robert Recorde, quien cansado de escribir “is equalle to” “escribía la igualdad con el signo =, ya que no habían dos cosas que pudieran ser “más iguales” que “un par de paralelas”…” (Bell, 2003). Recorde utilizó este símbolo por primera vez en el libro: “The Whetstone of Witte” (El aguzador del ingenio o la Piedra de afilar el Ingenio) en 1557.

Posteriormente otros matemáticos como Thomas Harriot y De Lagny acogen esta simbología y la utilizan en sus escritos del siglo XVII y XVIII. Se han identificado unas variaciones de la notación introducida por Recorde, los segmentos más distanciados, una leve inclinación hacia arriba o como dos unos (11) horizontales.

Pero el que consideran los historiadores como el principal rival del signo de Recordé fue el empleado por Descartes: “un signo parecido al del infinito pero abierto por la izquierda,  , procedente de la contracción de la palabra aequalis, que significa igual” (Molina, Castro, & Castro).

En la actualidad el signo “=” es utilizado en varios contextos, contextos que determinan diferentes significados. La igualdad entre dos objetos depende del dominio al que pertenecen los objetos: aritmético, geométrico, algebraico, analítico, etc.

1.2 Aspectos epistemológicos

Frente a las actuaciones, formas de expresión (verbal, gráfica o simbólica) o contextos que utiliza el docente para comunicar, resolver problemas, validar o generalizar el conocimiento matemático en el aula, los estudiantes generan configuraciones epistémicas (organizan las situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, propiedades, argumentos, procedimientos, entre otros). Si el docente enriquece sus prácticas, las organizaciones y redes que configuran los estudiantes serán cada vez más complejas y les permiten avanzar en niveles de significación.

Aparte de estas configuraciones epistémicas los estudiantes realizan una interpretación del significado de los objetos matemáticos, determinante para formar un conjunto de reglas que utiliza para pensar y operar con ellos, lo que define Godino como "sistemas de prácticas operatorias y discursivas" (Godino, 2003). Esta interpretación está definida por el contexto institucional y es lo que lleva a un "relativismo socio-epistémico", lo cual genera una diferenciación con el carácter "absoluto y universal que el matemático profesional atribuye a los objetos matemáticos" (Wilhelmi, Godino, & Lacasta, Junio 2004).

En esta perspectiva y dado que los objetos matemáticos evolucionan desde la práctica matemática, hasta convertirse en objeto de estudio y precisar conceptos y propiedades. El significado que los estudiantes dan a estos objetos, en particular a conceptos como el de igualdad, se va construyendo en un proceso similar. Esto no significa que no haya cambios súbitos entre apropiación de una noción inicial, la aceptación de diferentes significados y la definición formal.

En lo que respecta al concepto de igualdad por ejemplo, una práctica que permita entender lo general y lo particular del concepto, los aspectos que cambian y los que no en diferentes contextos o dominios (aritmética, álgebra, conjuntos, lógica, topología…) posibilita dar significado al concepto en un contexto específico, pasar de un contexto a otro y avanzar de lo simple a lo complejo

Un problema que identifican los docentes de matemáticas cuando el estudiante pasa de la básica primaria a la básica secundaria, está relacionado con el hecho de que usualmente la igualdad se interpretó en la primaria simplemente como una instrucción para operar, efectuar un cálculo numérico. Este problema se hace más patente cuando los estudiantes inician su trabajo con expresiones algebraicas, intentan efectuar operaciones ignorando las variables o piden asignar valores numéricos a las variables para operar, preguntas como “profesor cuánto vale X” muestran la tendencia a resolver cualquier problema algebraico con un cálculo numérico.

Según Godino, Wilhelmi y Lacasta “Gascón plantea que el estudiante asume que como el signo igual en contextos aritméticos representa una acción: “$2+3=5$” es equivalente a “2 más 3 da 5”, en contextos algebraicos tiene el mismo significado. Sin embargo, en el lenguaje algebraico, existe una dualidad entre el uso como acción ($2x+3=11$) y el uso como permanencia $(a(a+b)=ab+ac$.”[6] El significado de igualdad como “acción” representa un primer nivel de comprensión de la igualdad, pero si es el único significado que se interioriza, genera problemas para asumir significados diferentes, como por ejemplo cuando se usa para referirse a una relación de equivalencia o a una identidad.

Otro aspecto que incide en la apropiación de los diferentes significados de la igualdad, guarda relación con las rupturas que se dieron en el desarrollo de la disciplina matemática misma, de la matemática reducida a la aritmética para resolver problemas prácticos, a la matemática fundamentada en axiomas y estructuras, por ejemplo. El salto cualitativo que el estudiante debe dar desde concebir la matemática como herramienta para efectuar cálculos o resolver problemas cotidianos a estudiar objetos, conceptos y estructuras matemáticas, dar significado a variables y expresiones, exige niveles superiores de abstracción. En particular, el avanzar en los niveles de significación de la igualdad exige a los estudiantes dar este salto

Lo anterior se relaciona además con otro problema que se concentra en la sociedad en general y que particularmente se evidencia en la escuela, el problema del pragmatismo. Muchos de los estudiantes abordan la matemática desde el enfoque de “para que sirve esto en la vida diaria de ellos” evalúan si un conocimiento es verdadero o falso, o si el conocimiento sirve o no, desde este enfoque pragmático: “¿me sirvió de algo hoy, o esta mañana?” Si la respuesta es positiva es porque si sirve o incluso es verdadero ese conocimiento, si es negativa es porque no sirve o es falso.

---

[6] (Wilhelmi, Godino, & Lacasta, Junio 2004) Pág. 12-13

Los problemas de los estudiantes, relacionados con su contexto social, los llevan constantemente no solo a reflexionarlos, sino a ver “cómo utilizar lo que aprenden para resolverlos”. Si bien dicha “aplicación”, se da en un contexto un tanto diferente a la época previa a los pitagóricos, nos encontramos nuevamente en la disyuntiva entre estudiarla para resolver problemas, o estudiarla para sí. Esta situación social influye en la manera en que los estudiantes abordan las matemáticas en general, incide en que perciban solo un aspecto de ellas: su aplicación. Considerando además, que sirven solamente para aplicarlas a problemas cotidianos, esta percepción influye en el significado que el estudiante da a conceptos como el de igualdad, restringido al nivel de determinar el resultado de efectuar una operación.

Pero la matemática va mucho más allá de “su aplicación”, si bien los diversos propósitos prácticos han influido en su desarrollo, su mismo interés intrínseco ha sido fundamental en él. El desarrollo de la matemática teórica y aplicada están desde luego interrelacionados, múltiples desarrollos teóricos matemáticos han permitido modelar y avanzar en campos de las ciencias naturales o sociales, así mismo, la necesidad de resolver problemas prácticos de la humanidad ha impulsado importantes descubrimientos de la matemática teórica.

En consecuencia es sumamente importante presentar situaciones y contextos que permitan al estudiante modificar sus concepciones y empezar a comprender la verdadera naturaleza de la matemática; situaciones, que les permitan avanzar del nivel de solucionar problemas pragmáticos o cotidianos a entender la matemática en sí misma. Este tipo de contextos se pueden encontrar por ejemplo, en la geometría, las demostraciones geométricas de propiedades aritméticas o algebraicas permiten trascender los significados de la igualdad y la equivalencia en contextos rutinarios ligados exclusivamente a la solución de problemas netamente operatorios y cotidianos.

2. Aspectos disciplinares

En este capítulo se discuten aspectos teóricos relativos al concepto de igualdad, su significado y complejidad e ilustraciones de cómo se trabaja este concepto en algunos libros de texto de matemática elemental.

2.1 Diferentes categorías del concepto[7]

La igualdad se representa con el mismo símbolo “=”, independiente de los objetos, del contexto o dominio al que hace referencia, a esta situación se enfrentan nuestros estudiantes, sin comprender que el contexto determina el significado de la igualdad. En cada uno de los contextos aparecen aspectos similares y diferentes del concepto..

Esta situación plantea la necesidad de abordar claramente, además de la simbología, el significado de la igualdad que está determinado por el contexto en el que aparece. En la propuesta didáctica de este trabajo se hará énfasis en los contextos aritmético (equivalencia y orden) y algebraico.

Expresaremos a continuación diferentes categorías del concepto de igualdad presentados por Wilhelmi, Godino y Lacasta. (Wilhelmi, Godino, & Lacasta, Junio 2004)

Wilhelmi, Godino y Lacasta (2004), proponen organizar en 8 categorías las definiciones de igualdad, entre ellas se encuentran definiciones aritméticas, algebraicas, analíticas, etc.

[7] Las definiciones así como las ecuaciones planteadas en cada una de las definiciones, fueron tomadas del documento “Configuraciones epistémicas asociadas a la noción e igualdad de números reales” (Wilhelmi, Godino, & Lacasta, Junio 2004). Documento que busca desarrollar una discusión epistemológica sobre el concepto de igualdad, sus definiciones y algunos problemas a los que se enfrentan los estudiantes cuando abordan dicha noción en diferentes contextos.

2.1.1 Aritmética

COMO EQUIVALENCIA

Sobre el conjunto de números reales se define una relación de equivalencia que particiona este conjunto en clases disyuntas Dos clases son iguales si y solamente si sus representantes satisfacen la relación. Ej.: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}; 0,\overline{3} = \frac{1}{3}$

"Definición 1 (Igualdad como equivalencia): Dos números reales a y b son iguales, se denota $a=b$, si representan la misma clase; esto es:"

$$a = b \Leftrightarrow \{a\} \equiv \{b\}$$

ORDEN

Usando el hecho de que los reales son un cuerpo ordenado, se puede definir la igualdad a través de una doble desigualdad, considerando la relación $\leq$

"Definición 2 (igualdad de orden): Dos números reales a y b son iguales, se denota $a = b$, si la relación de orden en $\mathbb{R}$ (≤) cumple la propiedad antisimétrica; esto es:"

$$a = b \Leftrightarrow [a \leq b \wedge b \leq a]$$

O equivalentemente

$$a = b \Leftrightarrow (a \in (-\infty; b] \wedge b \in (-\infty; a])$$

IGUALDAD EN TERMINOS DE UNA METRICA

Si sobre el conjunto de los reales se define la métrica usual (inducida por el valor absoluto), la distancia entre dos reales, $a\ y\ b\ se\ define\ d(a,b) = |a - b|$ y con esta definición es posible caracterizar la igualdad así:

"Definición 3 (igualdad métrica): Dos números reales a y b son iguales, se denota $a = b$, si la distancia entre ambos es nula; esto es:"

$$a = b \Leftrightarrow d(a; b) = |a - b| = 0$$

IGUALDAD EN TERMINOS TOPOLOGICOS

Si con la métrica del valor absoluto consideramos ahora (R, d) como un espacio topológico; la igualdad entre dos números reales puede ser caracterizada en términos del concepto de conexidad, la distancia entre dos reales a y b es cero si el conjunto $\{a, b\}$ es conexo, es decir si no puede ser expresado como la unión disyunta de conjuntos abiertos.

"Definición 4 (igualdad conectiva): Dos números reales a y b son iguales, se denota a = b, si el conjunto $\{a; b\}$ *es conexo."*

Las anteriores definiciones pueden ser ilustradas a través de la siguiente gráfica:

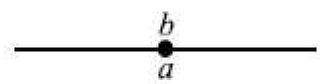
Definición	Descripción $(a = b \iff)$	Representación
Equivalencia	$\{a\} \equiv \{b\}$	
De orden	$[a \leq b \wedge b \leq a]$	
Métrica	$d(a; b) = \|a - b\| = 0$	
Conectiva	$\{a; b\}$ conexo	

Ilustración 2.[8]

2.1.2 Igualdad algebraica

EN TERMINOS DE LA SOLUCION DE ECUACIONES

Una primera mirada en este contexto hace referencia a la igualdad pensada en términos de la solución de ecuaciones.

Recordemos que si $E(t)$ es una ecuación de variable t sobre R, un real a es una solución de la ecuación sí y sólo sí $E(a) = 0$.

[8] Ilustración tomada del trabajo de Wilhelmi, M., Godino, J., & Lacasta, E. (Junio 2004). "Configuraciones Epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales."

Para relacionar la igualdad entre números reales con la solución de ecuaciones, se puede utilizar la noción de función característica en los siguientes términos.

Si $E(t)$ es una ecuación, $a \in R$ cualesquiera, se presentan dos posibilidades para a, ser solución o no de la ecuación. Si es solución y λ es la función característica, $\lambda(E(a)) = 1$ y si no es solución $\lambda(E(a)) = 0$

"Definición 5 (igualdad algebraica) Dos números reales a y b son iguales, se denota $a = b$, si siempre que a es solución de una ecuación E, b también lo es:"

$$a = b \Leftrightarrow \left[\delta\big(E(a)\big) = 1 \Leftrightarrow \delta\big(E(b)\big) = 1\right]$$

Esto significa que dos reales son iguales sí y sólo sí son solución exactamente de las mismas ecuaciones.

La anterior definición puede ser ilustrada a través de la siguiente gráfica, cabe aclarar que ésta representación parte de la negación de igualdad, es decir $a \neq b$ si existe una ecuación donde a, es solución y b no lo es, o viceversa, que b es solución y a no lo es.

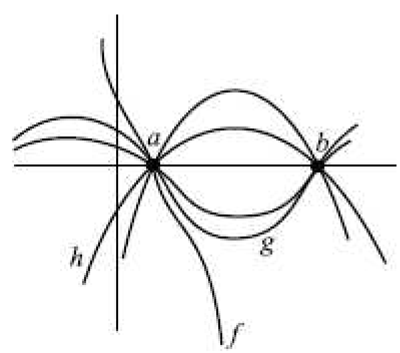
Definición	Descripción ($a = b \iff$)	Representación
Algebraica	$[\delta(E(a)) = 1 \Leftrightarrow \delta(E(b)) = 1]$	De la negación 

Ilustración 3.[9]

[9] Ilustración tomada del trabajo de Wilhelmi, M., Godino, J., & Lacasta, E. (Junio 2004). "Configuraciones Epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales."

2.1.3 En términos de la igualdad funcional

Si se usa la teoría de funciones, es posible definir la igualdad entre dos números reales evaluando una función inyectiva[10], en estos reales. Serán iguales si sus imágenes por la función inyectiva coinciden. Es decir:

"Definición 6 (Igualdad funcional) Sea $F_i(D)$el conjunto de funciones reales de variable real inyectivas y con dominio D, Dos números reales a y b son iguales, se denota $a = b$, si sus respectivas imágenes a través de una función inyectiva son iguales; esto es:

$a = b \Leftrightarrow \exists f \in F_i(D), \{a, b\} \subseteq D,\ f$ *no lineal, tal que* $f(a) = f(b)$

En la definición anterior, se excluye la posibilidad de que la función f sea lineal, puesto que, en caso contrario, la sentencia anterior se convierte en una tautología semántica que nada dice $(f(x) = mx + n)$: $a = b \Leftrightarrow am + n = bm + n \Leftrightarrow a = b$."

La anterior definición puede ser ilustrada a través de la siguiente gráfica

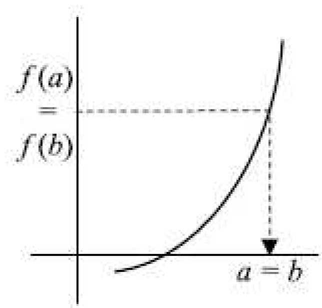
Definición	Descripción ($a = b \iff$)	Representación
Funcional	$\exists f \in F_i(D), \{a, b\} \subseteq D$, f no lineal, tal que $f(a) = f(b)$	

Ilustración 4.[11]

[10] Una función es inyectiva si en todo el dominio de la función, para cada elemento del dominio, su imagen tiene un único valor distinto, es decir a cada valor del conjunto de imágenes le corresponde un único valor del dominio. Es importante que la función sea inyectiva, ya que si no lo es, para elementos diferentes se pueden obtener imágenes iguales, y caeríamos en un error de definición.

[11] Ilustración tomada del trabajo de Wilhelmi, M., Godino, J., & Lacasta, E. (Junio 2004). "Configuraciones Epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales."

2.1.4 En términos analíticos

La igualdad en términos del concepto de límite[12] se expresa a través de la intersección de una familia no numerable de entornos (bolas abiertas[13]); dos reales son iguales si uno cualquiera de ellos pertenece a toda bola abierta con centro en el otro. Es decir:

"Definición 7 (igualdad como proceso de paso al límite) Dos números reales a *y* b *son iguales, se denota* $a = b$*, si* a *está dentro de todo entorno abierto centrado en* b*,* $(B(b;\varepsilon))$ *o viceversa; esto es*

"$a = b \Leftrightarrow a \in B(b;\varepsilon), \forall\varepsilon > 0 \Leftrightarrow b \in B(a;\epsilon), \forall\epsilon > 0$"

O equivalentemente:

"$(a = b) \Leftrightarrow (|a - b| < \varepsilon, \forall\varepsilon > 0)$"

La anterior definición puede ser ilustrada a través de la siguiente gráfica

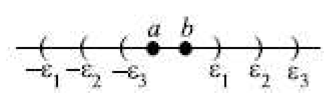
Definición	Descripción $(a = b \iff)$	Representación
Proceso límite	$\lvert a-b\rvert < \varepsilon, \forall\varepsilon > 0$	

Ilustración 5.[14]

2.1.5 Igualdad con margen de error

Si en un proceso de medición, por ejemplo, se obtienen resultados muy cercanos, próximos a un valor determinado, por razones prácticas del problema se tolera el error y

[12] El concepto de límite de una función se define como la formalización de la noción intuitiva de una aproximación a un punto de una función, en la medida en que los parámetros de la función se acercan a un valor determinado.
[13] Una bola abierta se define como un conjunto de puntos contenidos en una superficie esférica, de radio menor a una distancia determinada "ε".
[14] Ilustración tomada del trabajo de Wilhelmi, M., Godino, J., & Lacasta, E. (Junio 2004). "Configuraciones Epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales."

se afirma que son casi iguales, muy próximos. Aparece en estos términos la siguiente definición de igualdad que asume un margen de tolerancia

"Definición 8 (igualad numérica) Sea T una tolerancia de error admitido, dos números reales a y b son iguales, se denota $a = b$, si a está dentro de un entorno abierto centrado en b y radio menor o igual a T, $(B(b;t), t < T)$ o viceversa; esto es:"

$$a = b \Leftrightarrow a \in B(b;t), t < T \Leftrightarrow b \in B(a;t), t < T$$

O equivalentemente:

$$(a = b) \Leftrightarrow |a - b| < T$$

La anterior definición puede ser ilustrada a través de la siguiente gráfica

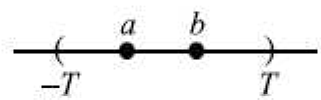
Definición	Descripción ($a = b \iff$)	Representación
Numérica	$T > 0$ (arbitrario, pero fijo): $|a - b| < T$	

Ilustración 6.[15]

2.2 Análisis de los libros de texto

2.2.1 Enseñanza de la aritmética: sexto y séptimo

Algunos libros de sexto grado dedican la primera unidad (o capítulo) a introducir elementos básicos de la teoría de conjuntos. Particularmente, hacen uso del signo de

[15] Ilustración tomada del trabajo de Wilhelmi, M., Godino, J., & Lacasta, E. (Junio 2004). "Configuraciones Epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales."

igualdad, con un significado completamente nuevo para los estudiantes: en el contexto de la determinación por extensión o comprensión de un conjunto, se enfrentan a escrituras como: $V = \{a, e, i, o, u\}$ o $A = \{x \in N : x \geq 5\}$. A continuación los textos hacen referencia a la igualdad entre conjuntos, significado que exige comprensión previa de las relación de contenencia (conjunto, conjunto) y esta a su vez de la interpretación de la relación de pertenencia (elemento, conjunto), se usa el mismo símbolo que en la aritmética pero no tiene relación alguna con la noción de determinar el resultado de efectuar una operación entre números.

La igualad aparece posteriormente, aunque no explícitamente, cuando se hace referencia a los conjuntos coordinables, en este caso, está inmersa la idea de cardinalidad de conjuntos, pues dos conjuntos son coordinables si tienen el mismo cardinal, es decir son **iguales** sus cardinales..

Luego de discutir los elementos de teoría de conjuntos, los textos pasan a trabajar el sistema de los números naturales. Comienzan definiendo la adición entre naturales, como el cardinal de la unión de conjuntos disyuntos[16], se utilizan en estos casos los signos de las operaciones entre conjuntos o de las operaciones aritméticas y de igualdad indistintamente conduciendo al estudiante a confusiones e imprecisiones conceptuales.

EJEMPLO

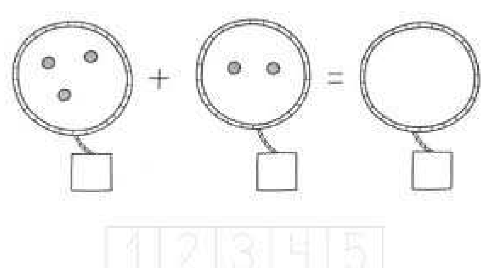


Ilustración 7.[17]

[16] La disyunción hace referencia a dos conjuntos que no comparten elementos comunes.
[17] Ilustración tomada de: http://picasaweb.google.com/lh/photo/4uZNCrr2MLTC6muaB-W3XQ

2.2.2 La igualdad en las propiedades aritméticas

Es importante resaltar que cuando en los textos de este grado se hace referencia a las propiedades de las operaciones: adición y multiplicación, aparece la igualdad como acción: instrucción para efectuar una operación. Pero cuando se plantean descomposiciones de un número en sumandos o en factores o cuando, o se enuncian y aplican propiedades de las operaciones, se está haciendo referencia a expresiones equivalentes, un nuevo significado de igualdad, la equivalencia. Lo anterior podría dar sentido además a la bilateralidad, pero usualmente se pasa por alto, no hay análisis, ni interpretación de las propiedades y su aplicación se transforma en una actividad mecánica, que lleva generalmente a expresiones erróneas, que presentan los estudiantes, como los que se ilustran:

$$3 \times (2 + 5) = 3 \times 2 + 5$$

$$3 \times (2 + 5) = 3 \times 2 = 6 + 5$$

Sin reflexionar desde luego sobre el hecho de que los resultados en los dos miembros de la igualdad son diferentes, hecho que tampoco se valida cuando se aplica mecánicamente la propiedad:

$$5 \times (7 + 8) = (5 \times 7) + (5 \times 8) = 35 + 40 = 75$$

De esta forma, las actividades relacionadas con suprimir los signos de agrupación o eliminar paréntesis, resultan de especial complejidad para los estudiantes llevándolos a cometer más errores. Algunos tienden a resolver un paréntesis en la misma expresión, sin tener en cuenta los otros términos; otros expresan con la igualdad otra expresión pero obvian ciertos elementos de la anterior expresión. Los libros de texto señalados, no le prestan la suficiente atención en trabajar la bilateralidad de la igualdad con el objeto de que los estudiantes desarrollen correctamente una secuencia de equivalencias. Como por ejemplo:

$$9 \times 4 = 36 = 6^2 = (2 \times 3)^2$$

2.2.3 La igualdad en las operaciones aritméticas

En las definiciones de sustracción y división exacta, los libros de texto proceden desde la idea de operación inversa. Así la sustracción la presentan como la operación inversa de la adición: $a - b = c$ si y solo si $b + c = a$. Similarmente la división exacta es presentada como la operación inversa de la multiplicación: $a \div b = c$ si y solo si $b \times c = a$. Esto tiene implicaciones positivas para los estudiantes, ya que más adelante les permitirán efectuar transformaciones donde se use la bilateralidad de la igualdad en diferentes contextos.

Es de anotar que cuando se definen formalmente las operaciones de multiplicación y potenciación:

$n \times a = a + a + \cdots + a\ (n\ veces)$, *con n un número natural*

$a^n = a \times a \times \ldots \times a\ (n\ veces)$, *con n un número natural*

La igualdad toma el significado de permanencia, dado que las operaciones están definidas en términos de otra operación. La complejidad de este significado se evidencia especialmente en la potenciación, en el aspecto sintáctico (notación) (ya que $2^3\ se\ interpreta\ usualmente\ como\ 2 \times 3$). Con la complejidad adicional que para determinar la potencia, el resultado, la igualdad adquiere un significado de acción.

2.2.4 La igualdad de fracciones y decimales

Cuando los textos presentan el tema de las fracciones, un problema importante es caracterizar cuando dos fracciones son iguales. Aparecen dos ejemplos y en ocasiones una ilustración gráfica, para introducir en el lenguaje natural o con la expresión simbólica una regla que formalmente se enuncia:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\ si\ y\ solo\ si\ \ a \times d = c \times b$$

En este caso la igualdad adquiere el significado de una relación de equivalencia.

Posteriormente se hace referencia a la expresión decimal de una fracción (paso de fracción a decimal) y se presenta una regla para efectuar el proceso inverso, identificar la fracción representada por una expresión decimal. En algunos textos se presenta en forma más completa la expansión decimal, usando fracciones decimales.

$$\frac{47}{22} = 2{,}1363636\ldots$$

$$2{,}13636\ldots = 2 + \frac{1}{10} + \frac{3}{100} + \frac{6}{1000} + \cdots$$

Nótese que en este caso aparece un significado mucho más complejo de la igualdad, hace referencia al límite de una sucesión. Aspecto que naturalmente no pueden entender los estudiantes de este nivel, pero sin embargo se plantea sin aclaración alguna, limitándose a una regla operativa, efectuar divisiones, copiar y escribir como suma de fracciones decimales.

Para el grado séptimo además de presentar los mismos significados discutidos hasta el momento, aparecen en el contexto del conjunto de los números enteros, en donde los estudiantes complejizan más el problema cuando se encuentran con números negativos, puesto que adicionalmente se les dificulta asignar significado a estos objetos.

2.2.5 La igualdad en geometría

Además de la parte aritmética los libros de texto se adentran al campo de la geometría y en este contexto el estudiante deberá dar significado a la igualdad. Cuando se trabajan los problemas de medición relacionados con perímetros, áreas, volúmenes, la igualdad aparece como una fórmula. En esta situación el estudiante debe entender la fórmula y operar. El problema se incrementa con la interpretación del lenguaje simbólico. Por ejemplo en la fórmula del área de un rectángulo: $A = b \times h$, donde A es el área, b es la base del rectángulo y h la altura, el estudiante necesita interpretar las variables: A, b, h en el contexto geométrico y además tiene que entender y diferenciar sus dimensiones, puesto que de otra manera la fórmula no tendría ningún sentido.

Además es importante para los estudiantes establecer en este momento la relación entre aritmética, álgebra y geometría, teniendo en cuenta que la geometría permite ver a los estudiantes la aplicación de los conceptos básicos de las otras ramas, así como construir figuras que posibiliten entender su relación, etc.

2.2.6 La igualdad en el conjunto de los números racionales e irracionales

Es los libros de texto analizados, cuando se presenta el conjunto de los números racionales, aparece de nuevo la igualdad como una equivalencia tanto en la definición formal del número racional como de sus operaciones.

En el caso de los números irracionales aparece la igualdad como una aproximación o como paso al límite, aunque como se comentó anteriormente no sea explicito para los estudiantes. Se ilustra con ejemplos como:

$\frac{\pi}{2} = \frac{3{,}1416\ldots}{2} = 1{,}5708\ldots \approx 1{,}57,$ [18] o expresiones como: $\sqrt{2} \approx 1{,}4142\,;\ \sqrt{3} \approx 1{,}732,$ [19]

2.2.7 Enseñanza del algebra

En la parte introductoria del álgebra, en los libros de texto, no se aborda la importancia de ésta con su principal fortaleza: instrumento de modelización matemática; donde las ecuaciones, variables o expresiones literales se utilicen en situaciones problema, ya sea del dominio aritmético, del geométrico o de aplicación a otras áreas o a la vida cotidiana.

Se logran percibir en esta introducción otro tipo de problemas al asumir linealidad y pretender que el álgebra es simplemente una continuación de la aritmética, para entenderla y profundizar en ella el único requisito es manejar los sistemas numéricos. Aparte de ello el álgebra se reduce a una manipulación de letras y números o al manejo de expresiones literales, en donde las letras representan números no especificados, ya sean incógnitas o variables. Este significado del álgebra es el denominado por diferentes autores como “aritmética generalizada” (Godino J. , 2003), La enseñanza del algebra se centra en la manipulación simbólica y la generalización de los métodos aritméticos concretos, lo cual ha llevado a una “desarticulación del cuerpo de problemas de la aritmética generalizada.” (Wilhelmi, Godino, & Lacasta, Junio 2004)

---

[18] Tomado de “Matemática constructiva 10” Pág. 77
[19] Tomado de “Matemáticas con énfasis en competencias 8” Pág. 26

Los libros de texto introducen el álgebra, definiendo las expresiones algebraicas y sus respectivas operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división.

Posteriormente presentan expresiones algebraicas equivalentes sin reflexionar sobre el carácter de esta equivalencia, haciendo énfasis en los llamados productos notables, insistiendo en su utilidad para determinar el resultado de una operación entre expresiones algebraicas, más no en el carácter de la equivalencia. Presentan los principales siete casos, entre ellos:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$ [20]

El énfasis en este caso debería estar en comprobar la validez de la expresión para cualesquiera valores de $a\ y\ b$, hecho que introduciría al estudiante en la comprensión de una identidad. La igualdad en este caso tiene además el carácter de permanencia, pero pareciera que el único objetivo de los textos es el de resolver el producto notable y no el relacionar ni profundizar.

Las demostraciones geométricas de los productos notables permitirán interpretar visualmente la equivalencia, y esto posteriormente al trabajar la factorización, posibilitará comprender la relación entre los dos procesos, aspecto que los libros de texto no hacen explícito.

Cuando los textos discuten la teoría relativa a la factorización[21] se percibe mucho más la necesidad de trabajar la bilateralidad de la igualdad en el contexto de equivalencia de expresiones algebraicas. Pero como en el caso de los productos notables se presentan reglas, sin mayor análisis sobre la bilateralidad. Se mencionan resultados de mayor nivel de abstracción como el binomio de Newton y el triángulo de Pascal[22], pero no hay en general reflexiones sobre sus fundamentos en la teoría combinatoria, aparece el teorema como una fórmula para calcular, que los estudiantes no entienden ni logran operacionalizar.

---

[20] Tomado de “Matemáticas con énfasis en competencias 8” Pág. 76

[21] Denominamos factorización, al proceso de hallar los factores primos en los que se puede descomponer una expresión algebraica.

[22] El binomio de Newton permite obtener la expresión $(a+b)^n$, y el triángulo de pascal obtener coeficientes de la misma expresión.

Finalmente encontramos en estos textos la igualdad en el contexto de las ecuaciones lineales simples (una variable), significado de la variable como incógnita, la igualdad es válida solamente para un valor específico. Por ejemplo en la ecuación:

$$3x + 2 = 0$$ [23]

La igualdad solo tiene validez para $x = -\frac{2}{3}$

Es de anotar que en las ecuaciones, la bilateralidad cumple un papel muy importante cuando la complejidad de la ecuación no da la posibilidad de identificar el valor de la incógnita por ensayo y error y se requiere transformar la ecuación (despejar) o utilizar cualquier otro método algebraico que permita llegar a su solución, para ello es necesario concebir la igualdad como unidad y entender el sentido de la equivalencia entre expresiones algebraicas.

Si bien algunos de los aspectos de la bilateralidad de la igualdad se han venido trabajando hasta el momento, es en las ecuaciones, y su correspondiente solución, donde se necesita que el estudiante dé el salto de la comprensión de la igualdad como acción a la igualdad como equivalencia, lo que implícitamente lo lleva a trabajar su bilateralidad y bidireccionalidad

[23] Tomado de “Matemáticas con énfasis en competencias 8” Pág. 127

3. Componente pedagógico y didáctico

En este capítulo se discuten aspectos relativos a lo pedagógico y elementos didácticos relacionados con el proceso de enseñanza aprendizaje de la igualdad, en los contextos aritmético y algebraico, se presentan modelos geométricos que le permiten al estudiante dar significado a los conceptos de equivalencia, ecuación e identidad algebraica.

3.1 Elementos generales

Es muy usual que en su práctica el docente de matemáticas, bien sea por desconocimiento o por no considerarlo importante, ignore el proceso de evolución de los conceptos matemáticos y las rupturas y dificultades que se presentaron en él. Se limita a presentar la versión final y elaborada de los objetos y conceptos matemáticos, carente de significado, sin reflexionar sobre los obstáculos epistemológicos, cognitivos y didácticos que generan errores análogos a los evidenciados en el proceso de evolución del conocimiento matemático.

Investigadores en educación matemática plantean la importancia de realizar un análisis didáctico del proceso de evolución mencionado en el párrafo anterior y otros proponen además que la escuela trabaje elementos que contribuyan a que el estudiante desarrolle elementos del razonamiento lógico, la creatividad, los modelos matemáticos, la operatoria. (Segura & Romero, 2000)

La creatividad no puede desarrollarse en el marco de una enseñanza unilateral (considerando la enseñanza como un proceso unidireccional de profesor-estudiante) considerando que los estudiantes resuelvan “los problemas establecidos por el docente” mediante “los métodos enseñados por el docente”. Tampoco es posible formar estudiantes creativos si el conocimiento matemático se presenta en el aula lineal, terminado y sin significado, tiene que permitirse un ambiente mucho más flexible, en donde se busque que el estudiante intente construir diferentes métodos de resolución de problemas, sin coartar la imaginación, permitiendo en cierta medida lo divergente, sobre una base de irreverencia hacia el conocimiento, concepción ligada a la naturaleza misma de la matemática y al proceso que se dio para llegar al desarrollo actual.

El abordar la matemática por fuera de las concepciones dogmáticas, sin considerarla como algo ya terminado, como una verdad absoluta acabada y sobre la cual el único papel del sujeto es el de acoger esa verdad, permitirá al estudiante percibir la matemática como una construcción que se encuentra en constante desarrollo, y su papel en el proceso de enseñanza aprendizaje es partir de lo construido para ir mucho más allá, lo que implica incluso cuestionar las verdades existentes.

Otro elemento importante a tener en cuenta en la práctica en el aula de matemáticas, que se puede evidenciar en la unidad diseñada es el relativo a lograr que los conceptos y procedimientos matemáticos tengan, en la medida de lo posible, significado para los estudiantes y para ello se sugiere trabajar con diferentes contextos, lenguajes y formas de representación. Esto implica por ejemplo en el caso del pensamiento algebraico, modelar e interpretar problemas de aplicación relacionados con situaciones cotidianas, de otros dominios de la matemática o de otras disciplinas, que permitan entre otros: traducir e interpretar el enunciado con lenguaje natural o simbólico y determinar la pertinencia de una solución obtenida. Problemas que utilicen diferentes formas de representación (gráficas, modelos, diagramas, símbolos) para que el estudiante logre entender lo general y lo particular de un problema.

Uno de los marcos referenciales para la unidad didáctica lo aporta la teoría del aprendizaje significativo, en donde los estudiantes construyen los saberes: conceptos, estructuras y procedimientos nuevos a partir de sus conocimientos o concepciones previas. Es importante resaltar que lo significativo del aprendizaje no se reduce a lo particular para el estudiante sino que es necesario abordarlo desde las "prácticas sociales con sentido utilidad y eficacia." (MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL , 2006). Se requiere en consecuencia partir de los conocimientos básicos del estudiante y sus desarrollos ya que "el mismo proceso de adquirir información produce una modificación tanto en la información adquirida como en el aspecto específico de la estructura cognoscitiva con la cual aquella está vinculada." (Ausubel & Novak, 1983)

El aprendizaje significativo tiene que ver además con el nivel de profundidad de los conceptos, niveles más avanzados de profundidad logran los estudiantes en la medida que comprenden lo general y lo particular de un concepto, pasan de lo simple a lo complejo y de lo particular a lo general. De esta manera se trataría de conectar las ideas previas de los estudiantes a través de una estrategia didáctica adecuada que desarrolle una red de conocimientos estructurada que pueda mantenerse a largo plazo.

Una de las estrategias que permiten al docente aportar en el proceso de construcción del saber es el llamado método Socrático, secuencias de preguntas bien orientadas, cada vez más complejas, que cuestionen sobre condiciones, ejemplos, contraejemplos, validez de soluciones, posibilidad de una o más soluciones, extensión de una solución, generalización…etc. Esta estrategia permite a los estudiantes no solamente relacionar los conocimientos y significados básicos anteriores en un dominio determinado con nuevos conocimientos y significados en dominios y contextos diversos sino desarrollar pensamiento matemático.

De otra parte cada tema, área o dominio de la matemática tiene aplicaciones en diversidad de contextos, en particular, tiene aplicaciones en otras ciencias y en otros dominios de la matemática misma. El trabajar con diferentes contextos (si es pertinente del entorno próximo) y proponer variadas aplicaciones aportará a la estructuración de los conceptos y enriquecerá la visión que tienen los estudiantes acerca de la naturaleza de la matemática, la percibirán más próxima y accesible.

3.2 Del pensamiento geométrico a la equivalencia aritmética y algebraica.

En la línea de la afirmación que se planteaba en el párrafo anterior se expresa el MEN respecto a los dominios geométrico, métrico y aritmético de la siguiente manera:

"El desarrollo de la percepción espacial y de las intuiciones sobre las figuras bi y tridimensionales" además del *"comprender los atributos medibles… y su carácter de invarianza…"* dando significado al *"patrón y a la unidad de medida, y a los procesos mismos de medición…"* para desarrollar en los estudiantes el sentido de medida, lo que representa el desarrollo de la estimación en los estudiantes y sus capacidades para la medición. Todo esto involucra a su vez aspectos geométricos como *"la semejanza en*

mediciones indirectas y los aspectos aritméticos…” (MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, 1998)

Es posible mediante el desarrollo de estas percepciones, comprensiones y significados, comenzar a introducir al estudiante en el álgebra, para posteriormente, trabajar con la generalización de patrones aritméticos desarrollándola como herramienta de *“modelación de situaciones de cuantificación y de diversos fenómenos de variación y cambio… ”* Lo anterior conlleva a comprender lo que es *“la variable y sus diferentes significados, la interpretación y modelación de la igualdad y de la ecuación...”* (MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, 1998)

Usando el modelo de la balanza para trabajar la equivalencia aritmética, y posteriormente introducir con este modelo la noción de variable se pueden comenzar a trabajar ecuaciones y dar significado a la igualdad en este contexto..

Para desarrollar el concepto de igualdad como equivalencia, analizar la bilateralidad y bidireccionaliad, se puede utilizar la analogía del equilibrio de la balanza. (Rojano, 2010) A medida que los estudiantes comprendan el significado de bilateralidad en la equivalencia de la igualdad, es posible introducir al estudiante a la ecuación algebraica y su resolución. Para la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita, la metáfora de la preservación del equilibrio, permite que los estudiantes apliquen ciertas reglas en el despeje de la ecuación, por ejemplo: aplicar la misma operación (suma o resta) a ambos miembros de una igualdad, manteniendo el equilibrio; o la eliminación de términos semejantes en lados opuestos de la igualdad.

Finalmente en lo que respecta a la representación geométrica de las identidades algebraicas, usando el modelo de áreas permite profundizar en la comprensión de bilateralidad de la igualdad. La geometría y la modelización geométrica de expresiones algebraicas representa un elemento esencial en el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante, desarrollando un mayor entendimiento entre la relación dialéctica del algebra y la geometría, y permitiendo al estudiante “interpretar, entender y apreciar un mundo que es eminentemente geométrico” (MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, 1998)

4. Unidad didáctica

4.1 Introducción de las guías

Los estudiantes de grado octavo de la jornada de la tarde del colegio 20 de julio, muestran dificultades para dar significado a la igualdad como una relación de equivalencia, la mayoría concibe la igualdad como una acción: la resolución de una operación; o la visión de un resultado final[24].

El predominio de ésta visión operacional de la igualdad tiene que ver con las experiencias de los estudiantes en la primaria. Los estudiantes en la primaria, encuentran referencias a la igualdad en varias frases o problemas que buscan que efectúen operaciones, estas operaciones aparecen usualmente a la izquierda del signo y se insta a los estudiantes a que anoten la respuesta en la parte derecha. Por ejemplo ($4 + 3 =$ __ , $9 - 5 =$ __, o $6 \times 7 =$ __) El énfasis único en este tipo de operaciones no permite que el estudiante piense, en los primeros niveles, en el signo igual como un símbolo relacionado con una relación de equivalencia.

Aparte de lo anterior en la enseñanza media y superior no se profundiza en el análisis de otros significados de la igualdad, se presenta en diferentes contextos: algebraico, geométrico o aritmético pero no se reflexiona sobre el sentido que tiene la igualdad en ellos; el tratamiento que se da a este concepto se puede apreciar en la forma como los textos de esos niveles lo abordan.

La concepción limitada de lo que puede representar el signo de igualdad es uno de los mayores problemas de los estudiantes cuando trabajan con expresiones algebraicas, ecuaciones e identidades, en donde se requiere interpretar la igualdad como una relación.

Las guías descritas a continuación pretenden dar significado a la igualdad en diferentes dominios: aritmético, geométrico y algebraico. La primera se orienta a trabajar la igualdad como una relación de equivalencia en un contexto de medida.

---

[24] Ver Anexo A y Anexo B.

La segunda hace énfasis en la igualdad como equivalencia en el contexto aritmético, aplicando propiedades de las operaciones, descomposición aditiva y multiplicativa. Lo anterior como punto de partida para dar significado a la variable como incógnita y aproximarse a la solución de ecuaciones lineales.

Y la tercera guía se orienta inicialmente a la comprensión de la bilateralidad de la igualdad en el contexto algebraico, para lo cual parte del análisis del modelo de la balanza para dar significado a la resolución de ecuaciones de primer grado. En la parte final de esta guía se trabaja la equivalencia de expresiones algebraicas apoyándose en un modelo geométrico.

4.2 Guía 1

Objetivo: Reconocer e interpretar secuencias de igualdades a través de la comparación entre diferentes sistemas de unidades de una medida de una magnitud.

Descripción general de secuencia

Inicialmente en esta guía se pide al estudiante medir y hallar el área de una región rectangular usando diferentes patrones y sistemas de medida. Luego relacionar la expresión del área de la región rectangular en los diferentes sistemas de medida, estableciendo una secuencia de igualdades.

Conceptos a trabajar en la secuencia

- Igualdad como equivalencia.
- Aplicación de fórmulas para el área de superficie del rectángulo.
- Equivalencia entre diferentes sistemas de unidades de medidas.

Actividades

Actividad 1

Los estudiantes de grado octavo durante el año en curso, están todos los días relacionados con el aula de clase, a pesar de esta situación, no se han preguntado o estimado las dimensiones de esta.

.**Estimando y midiendo las dimensiones del salón de clase**

Paso 1

1. El salón tiene forma rectangular. Haga un estimativo del largo y el ancho del salón. ¿Cuál es su estimativo? Describa cómo hizo el estimativo.
2. Compare su estimativo con el de sus compañeros.

Paso 2

1. Mida el ancho y el largo del salón. Utilice primero alguna parte adecuada de su cuerpo (medidas antropométricas) como sus brazos, el paso corto, el paso largo u otro elemento disponible. ¿Cuáles son las medidas?
2. Mida ahora estas dimensiones usando un metro u otro instrumento adecuado. ¿Cuánto mide de ancho? ¿Cuánto mide de largo?
3. Con la información obtenida complete la siguiente tabla

	Estimativo	**Medición antropométrica**	**Medición con metro**
Ancho			
Largo			
Área			

Paso 3:

1. Obtuvo los mismos resultados en los pasos 1 y 2. Explique su respuesta
2. Compare y relacione los resultados obtenidos.

Paso 4

1. Con los resultados obtenidos en los pasos 2 y 3 halle el área del salón.
2. Compare y relacione los resultados obtenidos.
3. El piso del salón de clase esta embaldosado: recubierto con baldosas de forma cuadrada. ¿Cuántas baldosas lo recubren? Determine el área del salón usando esta información.
4. Compare y relacione los resultados obtenidos en 1 y 3. ¿Qué concluye?

Discusión: En las actividades anteriores usted uso diferentes sistemas de medida para determinar las medidas del salón. Reúnase con sus compañeros, comparen y discutan las relaciones que existen entre los diferentes sistemas de medidas utilizados.

Sistematización de la actividad

Organice la información obtenida en los pasos anteriores de la siguiente manera según los patrones o unidades que selecciono

$$Ancho = \#pasos$$

$$Ancho = \#pies$$

$$Ancho = \#metros$$

Es posible entonces escribir las siguientes igualdades:

$$Ancho = \#pasos = \#pies = \#metros$$

Explique porqué

Haga el mismo proceso para la medida del largo.

Sabiendo el ancho y el largo del salón, podemos calcular el área. Usando las diferentes unidades de medida, el área del salón se puede calcular con la siguiente expresión

$$Area = Ancho \times Largo$$

Es posible entonces escribir las siguientes igualdades.

$$Area\left(baldosas\quad\right) = Area(\#pasos^2) = Area(\#pies^2) = Area(m^2)$$

Complete y explique ¿porqué son correctas las igualdades?

Discusión: Reúnase con sus compañeros y analice la secuencia de la parte anterior.

4.3 Guía 2

Objetivo: Aplicar propiedades de las operaciones aritméticas para dar significado a la igualdad como equivalencia.

Descripción general de la guía

La guía trabaja en la primera parte la descomposición aditiva y multiplicativa de números enteros, buscando que el estudiante interprete la igualdad como una relación de equivalencia, mediante la descomposición. Posteriormente introduce al estudiante en el análisis de ecuaciones de primer grado con una incógnita, a partir de la noción de encontrar el "número oculto", contexto con el que se encuentran familiarizados los estudiantes.

Conceptos a trabajar:

La igualdad como equivalencia:

- Descomposición aditiva y multiplicativa.
- Expresiones aritméticas equivalentes y aplicación de propiedades de adición y multiplicación.
- Ecuaciones lineales de primer grado, la variable como incógnita, significado de la igualdad.

Descomposición de números enteros

1. Observe el ejemplo

$$6 = 5 + 1 = 4 + 2 = 3 + 3 = -8 + 14$$

$$12 = 6 \times 2 = 4 \times 3 = 2 \times 2 \times 3 = (-36) \div (-3)$$

Utilice las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división para expresar los siguientes números de 5 maneras diferentes. Escriba en cada caso las igualdades correspondientes:

120,– 40, 5, 1 y 0

Propiedades de las operaciones y su aplicación

1. Observe las siguientes expresiones, en cada caso se presenta una serie o cadena de igualdades. Diga si son o no correctas y explique por qué:

$$-2(4-7) = -8+14 = -2(-3) = 2(3) = -(-6)$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{5}{6}-\frac{1}{5}=\frac{1}{2}+\frac{2}{15}=\frac{1}{3}+\frac{3}{10}$$

2. Utilice las propiedades de las operaciones para construir 3 secuencias diferentes de igualdades.

Ecuaciones:

Desde que estaba en la básica primaria le planteaban a usted ejercicios como:

$$3+a=5$$

¿Qué número se debe ubicar en el cuadro para que se cumpla la igualdad? O ¿cuál es el número oculto?

Para resolver la pregunta usted se preguntaba: ¿Cuál es el número que debo sumar a 3, para obtener a 5? Y concluía que este número es 2. De la misma forma podría resolver preguntas como:

$$a+10=18$$

$$25-a=12$$

$$\frac{1}{4}+a=1$$

$$1-a=\frac{1}{2}$$

1. Resuelva estos ejercicios y comente con sus compañeros cómo los resolvió.

Analice si es posible resolver la primera pregunta o cualquiera de las planteadas usando la siguiente propiedad de las igualdades que estudió en el grado sexto:

“Si a los dos lados de una igualdad sumamos o restamos el mismo número la igualdad se conserva.”

$$(3+a)\ -3=5-3$$

Y de esta nueva expresión podemos concluir que

$$a=2$$

Explique usted porqué. Discuta con sus compañeros.

2. Resuelva ahora los ejercicios mencionados en el punto 1 usando el mismo procedimiento.
3. Analice ahora la siguiente propiedad de las igualdades:

“Si multiplicamos o dividimos los dos lados (o miembros) de una igualdad por el mismo número la igualdad se conserva.”

Proponga ejemplos y compárelos con los de sus compañeros.

4. Utilice la propiedad mencionada en 1 para encontrar en cada caso el número escondido.

$$(2\times\quad)+4=20$$
$$(\quad)\div 5=5$$
$$\frac{1}{2}\times\quad=8$$
$$1\div\quad=3$$

5. Use las propiedades mencionadas en 1 y 2 para encontrar en cada caso el número escondido.

$$(2\times\quad)+3=11$$
$$3\times(\quad)-1=14$$
$$40=(2\times\quad)+10$$
$$8=(10\div\quad)+6$$

4.4 Guía 3

Equivalencia en el contexto algebraico

Objetivos:

Dar significado a la igualdad como relación de equivalencia a través del análisis de expresiones algebraicas y ecuaciones.

Iniciar al estudiante en la diferenciación entre los conceptos de igualdad, identidad y equivalencia en el contexto algebraico.

Descripción de la guía:

En la primera parte de la guía, utilizando el modelo de la balanza se presentan situaciones que permiten analizar identidades aritméticas y resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita.

En la segunda parte se trabajan algunas identidades algebraicas usando el álgebra geométrica.

Conceptos a trabajar:

- Expresiones algebraicas en una variable.
- Factorización de polinomios cuadráticos simples.
- Solución algebraica ecuaciones de primer grado con una incógnita

Desarrollo

En los cursos anteriores y en las guías 1 y 2 usted ha encontrado expresiones como:

$$\quad + 7 = 12, \qquad (2 \times \quad) - 6 = 10, \qquad 9 = (27 \div 3) + $$

En el primer caso el número oculto es 5, en el segundo 8 y en el tercero 0. **Explique usted porqué**

Si usted ahora quiere representar estos números ocultos de otra forma, usando por el ejemplo letras del alfabeto, como:

$$a + 7 = 12, \qquad (2 \times m) - 6 = 10, \qquad 9 = (27 \div 3) + x$$

¿Qué puede decir de los números ocultos ahora? Discuta esta pregunta con sus compañeros y complete

$$a = \quad , \qquad m = \qquad y \quad x =$$

1. Determine en cada el valor que debe tomar la **letra** para que se cumplan las siguientes igualdades

$$(3 \times b) + 1 = 25, \qquad 5 - m = -3, \qquad 0 = 10 - (2 \times s)$$

Las letras en estos casos representan un número desconocido.

En la clase de geometría desde la básica primaria se presentan enunciados como:

Si las medidas de los lados de un rectángulo, son *a* y *b,* su área *A,* se puede determinar usando la fórmula:

$$A = a \times b$$

Si la base de un triángulo es *b* y su altura es *h,* el área *A* del triángulo se puede determinar usando la fórmula:

$$A = \frac{1}{2}(b \times h)$$

2. Use estas fórmulas para:

Determinar el área de un rectángulo cuyos lados miden 3 y 4 centímetros respectivamente.
Determinar el área de un triángulo de base 5 centímetros y altura 7 centímetros.
¿Qué medidas puede tener un rectángulo de área 36 centímetros cuadrados?
¿Qué medidas puede tener la base y la altura de un triángulo cuya área es 20 centímetros cuadrados?

¿Usted puede concluir que en las fórmulas las letras pueden tomar valores arbitrarios, que pueden variar dependiendo el área que pretendemos hallar?

3. Familiarización con la balanza.

Para esta actividad se utilizarán los programas encontrados en las direcciones electrónicas: www.educaplus.org o www.nlvm.usu.edu.

Ingrese a alguna de estas páginas para continuar.

Paso 1: Pese diferentes objetos manteniendo el equilibrio de la balanza. Por ejemplo:

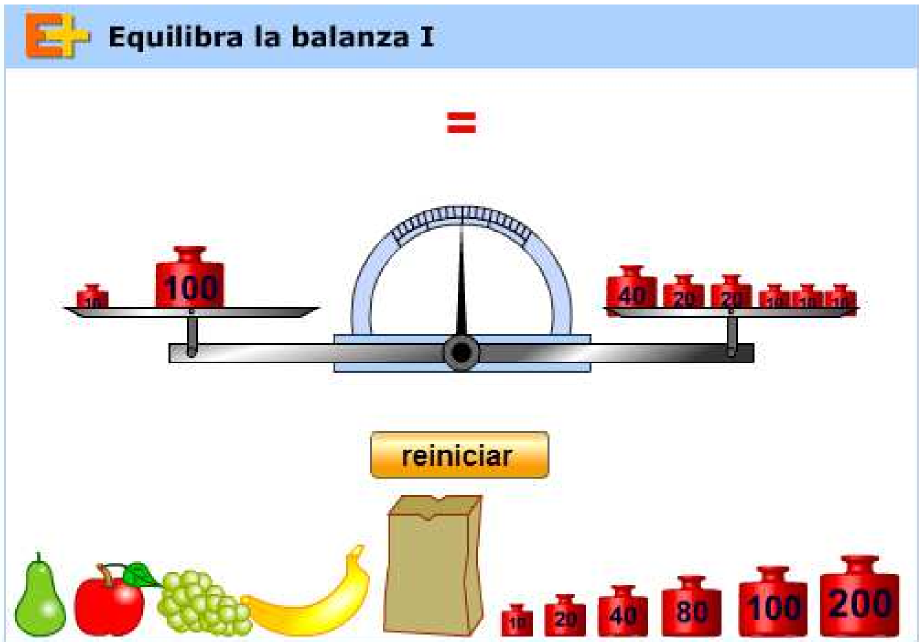


Ilustración 8. [25]

En la figura la balanza está en equilibrio, porque

$$10 + 100 = 40 + (2 \times 20) + (3 \times 10)$$

Las dos expresiones son equivalentes. Explique por qué.

- Use objetos de diferentes pesos, manteniendo la balanza equilibrada y represente en cada caso la situación con expresiones equivalentes.

Paso 2: Represente en cada caso la expresión equivalente usando la balanza:

$$20 + (2 \times 40) = 40 + (3 \times 20)$$

$$10 + 20 + 30 + 40 = 10 + (2 \times 10) + (3 \times 10) + (4 \times 10)$$

[25] Ilustración tomada del programa en www.educaplus.org

Paso 3: Representación de ecuaciones lineales en la balanza virtual.

Observe detenidamente la siguiente ecuación y su representación en la balanza virtual:

$$3x + 1 = 7$$

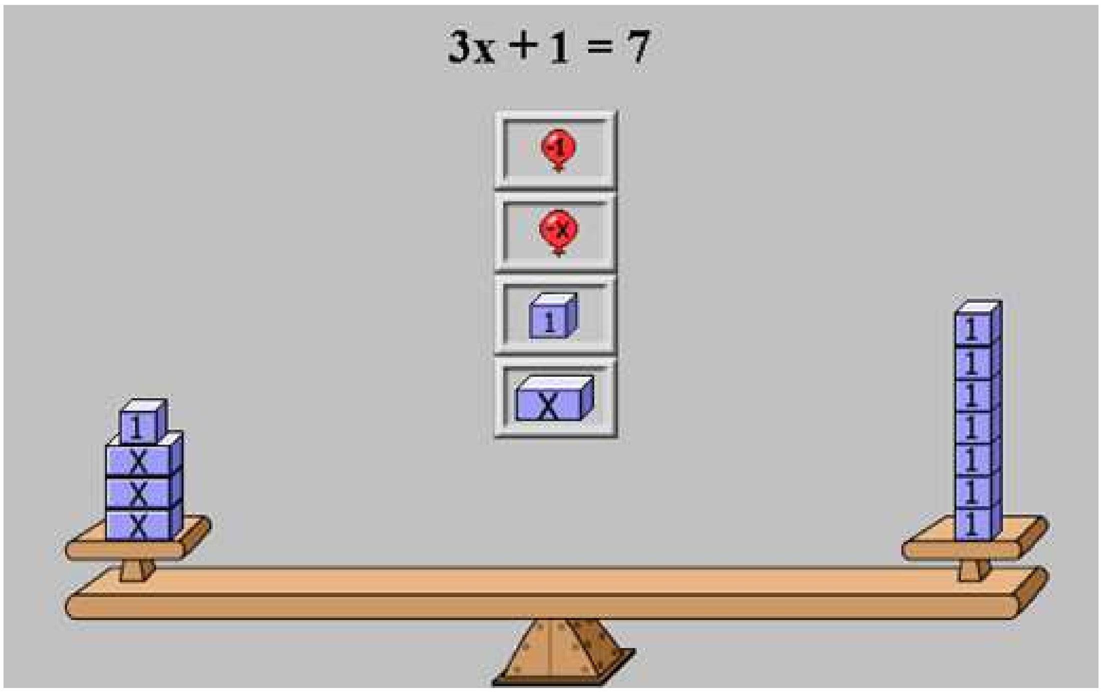


Ilustración 9. [26]

Represente las siguientes ecuaciones lineales en la balanza virtual:

$$4x + 1 = 13$$

$$3x + 3 = 2x + 8$$

$$3x - 4 = x + 6$$

$$-2x + 5 = -4x - 1$$

[26] Ilustraciones tomadas del programa de resolución de ecuaciones: www.nlvm.usu.edu

Paso 4: Resolución de ecuaciones lineales con una incógnita:

Manteniendo el equilibrio en la balanza, elimine pesos iguales en ambos lados de la balanza para encontrar el valor de “x”.

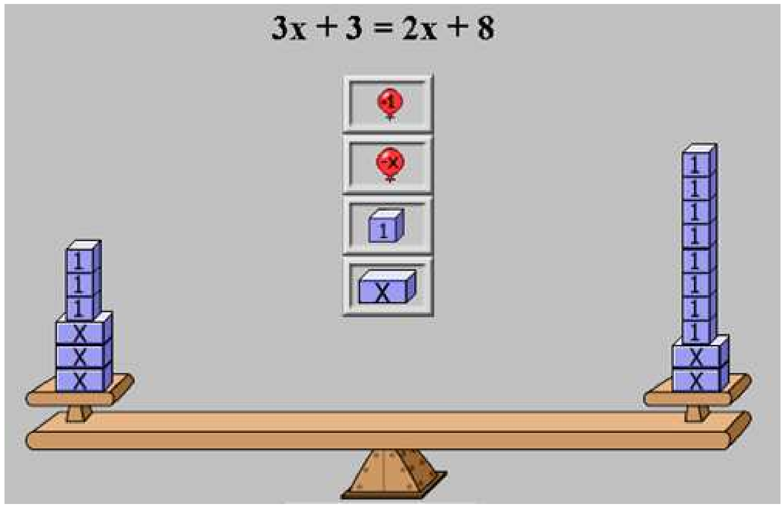


Ilustración 10.

¿Qué resultados obtuvo?

Aplique el mismo método para hallar el valor de “x” en los siguientes ejercicios:

a) $3x - 4 = x + 6$

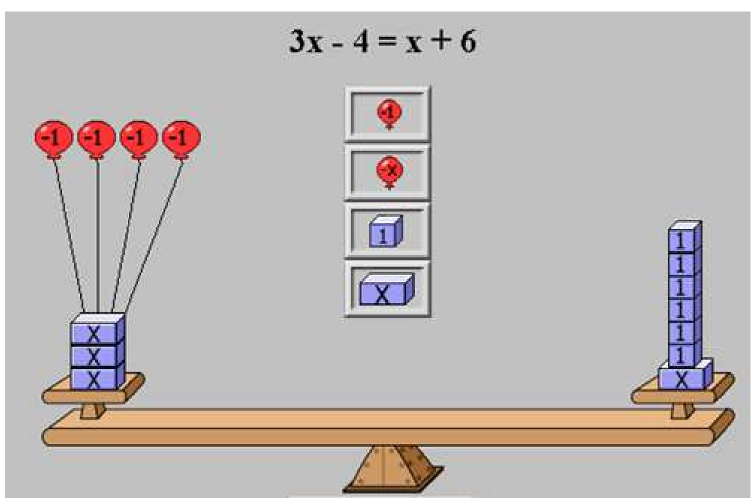
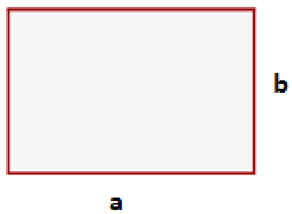


Ilustración 11.

b) $-2x + 5 = -4x - 1$

El álgebra geométrica



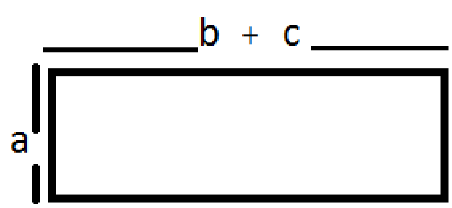
El perímetro de un rectángulo es la suma de las medidas de sus lados, es decir el perímetro P es

$$P = 2a + 2b$$

Y el área como se comentó en el aparte anterior de esta guía es el producto de sus dos dimensiones (lados), es decir:

$$A = a \times b.$$

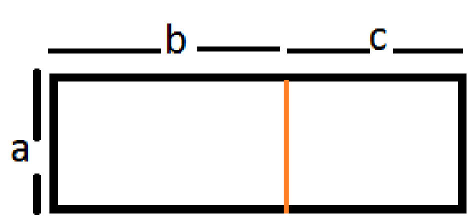
Observa ahora el rectángulo de la figura:



El área *A* de este rectángulo es:

$$A = a \times (b + c)$$

Observa ahora el mismo rectángulo



Se identifican ahora dos rectángulos: uno de lados *a* y *b* y el otro de lados *a* y *c.*

Sus áreas son: A_1 y A_2

$$A_1 = a \times b; \quad A_2 = a \times c$$

La suma de sus áreas es

$$A_1 + A_2 = (a \times b) + (a \times c)$$

Podemos concluir que:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

Explique claramente porqué. Comente con sus compañeros.

1. Dibuje en cada caso rectángulos o cuadrados adecuados, determine sus áreas para comprobar que las siguientes expresiones son equivalentes:

$$a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c), \qquad (a + b)(a - b) = (a \times a) - (b \times b)$$

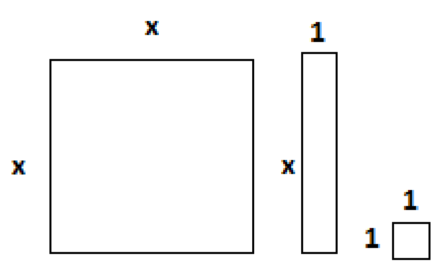
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

2. Observa en la siguiente figura se han dibujado dos cuadrados y un rectángulo:

Un cuadrado de lado x

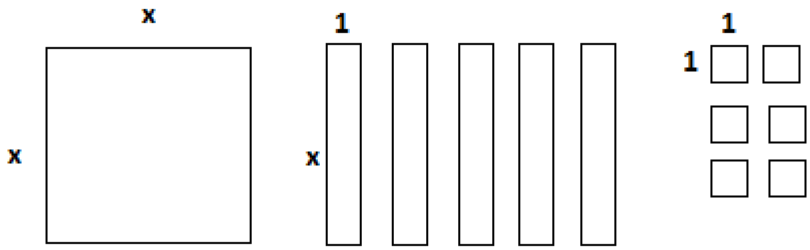
Un rectángulo de lados x y 1, respectivamente.

Un cuadrado de lado 1.

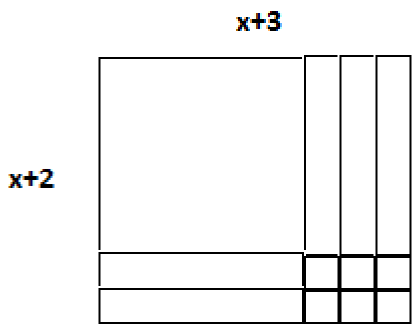


Si cortamos varias piezas de cartulina como estas, podemos usarlas para representar expresiones algebraicas equivalentes.

Observa un ejemplo:



Arreglamos las piezas y podemos formar con ellas un nuevo rectángulo



Observa sus lados miden, $x + 2$ y $x + 3$ unidades. Su área es entonces

$$A = (x + 2)(x + 3)$$

Pero si miramos las piezas que componen este rectángulo podemos concluir que:

$$A = x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

3. Usando piezas como las del item 2, compruebe que las siguientes expresiones son equivalentes.

$$(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12, \qquad x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2),$$

$$(x + 3)(x - 3) = x^2 - 9$$

4. Usando piezas como las del ítem 2 encuentre en cada caso expresiones equivalentes a las que se proponen:

$x^2 + 7x + 10,$ $\qquad (x - 1)(x + 4),$ $\qquad x^2 - 16$

5. Intente ahora usar el concepto de volumen para representar las siguientes expresiones algebraicas y encontrar expresiones equivalentes a ellas. Recuerde que si un paralelepípedo (caja rectangular) tiene dimensiones: a b y c. Su volumen es: $V = a \times b \times c$

$$(a+b)^3, \qquad (a-b)^3, \qquad a^3 - b^3, \quad a^3 + b^3$$

5. Conclusiones y recomendaciones

- Del análisis de la prueba de entrada se concluye que los estudiantes evidencian dificultades relativas a la bilateralidad y la bidireccionalidad de la igualdad. Las actividades diseñadas que hacen énfasis especialmente en estos aspectos podrían aportar elementos para resolver estas dificultades.

- Posiblemente por los énfasis del trabajo de aula y el tratamiento poco profundo que se da a la igualdad en los textos consultados, limitado al dominio aritmético y asociado únicamente a determinar el resultado de una operación, el significado de la igualdad como equivalencia no es entendido por los estudiantes y naturalmente esto tiene implicaciones en el reconocimiento de equivalencias entre expresiones algebraicas y en la solución de ecuaciones. Se considera muy importante que el docente reflexione en torno a las diferencias de los contextos y a la noción de la igualdad en dichos contextos, ya que La unidad didáctica pretende contribuir a la solución de este problema.

- El conocimiento y análisis del desarrollo histórico de las matemáticas (obstáculos y rupturas), en particular el conocimiento relacionado con el concepto, significados, propiedades y notación de la igualdad permitiría a los docentes entender aspectos relativos al proceso de aprendizaje de los estudiantes, los obstáculos y dificultades y adecuar su enseñanza a su contexto específico.

- Trabajar la igualdad como equivalencia aritmética y algebraica permite a los estudiantes desarrollar la noción de bilateralidad y dejar de lado la noción exclusiva de la igualdad como una acción y esto permitirá desarrollar la noción bilateral de la igualdad en una ecuación algebraica.

- La analogía de “equilibrio de una balanza” permite desarrollar la noción de equivalencia bilateral de la igualdad, lo cual puede generar un mejor desempeño cuando los estudiantes trabajen la resolución de ecuaciones lineales de manera formal.

- El álgebra geométrica es un modelo que puede ayudar a interpretar el significado de la equivalencia entre expresiones algebraicas y aportar a la diferenciación entre ecuación e identidad algebraica.

- Se sugiere a los docentes llevar a las aulas la unidad didáctica después de analizar los conocimientos previos de su grupo y adecuar las preguntas y niveles de complejidad.

- El conocimiento científico se ha desarrollado a pesar de los obstáculos, dificultades y errores se debe pues permitir al estudiante un contexto similar, permitiendo la imaginación y la creatividad en los estudiantes, para que lo aprendido tenga significado no solo para el estudiante sino para el conjunto de las prácticas sociales. Para esto es necesario trabajar diferentes contextos, lenguajes y formas de representación, partiendo de las ideas previas, hacer las respectivas rupturas y construir lo nuevo sobre esta base.

A. Anexo: Prueba para estudiantes de grado octavo

Mire con detenimiento la siguiente expresión y responda las preguntas.

$$4 + 5 = 9$$

¿Cuál es el nombre del símbolo “=”? ____

¿Qué representa ese símbolo? ____
____
____

¿Puede representar este símbolo algo diferente a lo mencionado en tu respuesta anterior?
____
____

1. A un estudiante de primaria se le pidió determinar el resultado de la adición:

$$3 + 5 + 2 + 5$$

El escribió: $3 + 5 + 2 + 5 = 3 + 5 = 8 + 2 = 10 + 5 = 15$

¿Es correcto? Justifique claramente su respuesta____________________________________
____
____

2. La expresión: $(3 + 9 - 4) \times 2$ es equivalente a:

a. 10
b. (12-8)
c. (9-4)x2
d. 2x8
e. Todas las anteriores

Explique su respuesta.
____
____

3. La expresión: $(5 + 10 - 3) \times 3$ es equivalente a:

a. 6^2
b. $\left(4 \times (15 \div 3)\right) + 16$
c. $(15 + 25) - 4$
d. Todas las anteriores
e. Ninguna de las anteriores

Explique claramente su respuesta ____

4. Trace una línea para relacionar cada uno de los enunciados con la expresión que le corresponda.

Excede en 2 unidades a x	$\frac{x}{2}$
La mitad de x	x^2
El cuadrado de x	$2x$
El doble de x	$2 \times (x + 1)$
2 veces más que el siguiente de x	$x + 2$

5. La expresión: $(a + b)^2$ es equivalente a:

a. $a^2 + b^2$
b. $a^2 + ab + b^2$
c. $a^2 + 2ab + b^2$
d. $2ab$

6. ¿Qué valor debe tomar "m", en cada caso, para obtener una igualdad? Explique su respuesta.

$a)$ $m - 10 = 105$ ____

____

$b)$ $3m + 5 = 23$ ____

____

7. En las dos ecuaciones siguientes, hay un número oculto. ¿Tienen el mismo valor? Justifique su respuesta..

$3 \times \blacksquare + 12 = 36$ $\quad\quad$ $3 \times \blacksquare + 12 - 7 = 36 - 7$

8. En la siguiente ecuación, hay un número oculto: $\blacksquare + 16 = 35$, el número oculto es 19. ¿Es posible usar esta información para determinar el número oculto de la ecuación: $\blacksquare + 16 + 25 = 35 + 25$? Explique su respuesta.

9. Si *k* y *m* son dos números arbitrarios racionales positivos y $m=3k$. Usted concluye que:

a. $k<m$
b. $k=m$
c. $k>m$
d. ninguna de las anteriores.

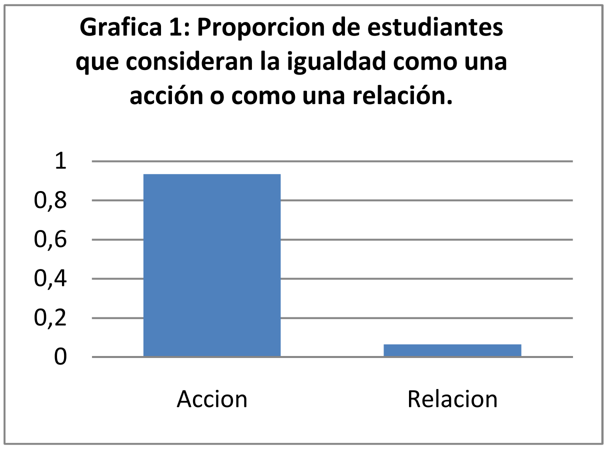
Explique su respuesta: ______________________________

B. Anexo: Resultados y análisis de la prueba

La prueba (Anexo A) se aplicó a 46 estudiantes de los dos cursos de grado octavo de la jornada de la tarde del colegio 20 de julio. Los estudiantes dispusieron de aproximadamente 50 minutos para responderla.

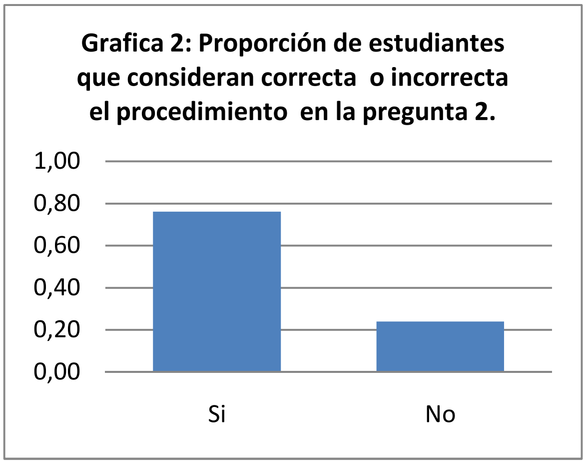
En la primera pregunta a los estudiantes se les pidió que identificaran el nombre y significado del signo igual. Las respuestas se pueden clasificar en dos categorías: la igualdad es una relación entre dos términos, lados o miembros o es una acción o es una instrucción para efectuar una operación.

El planteamiento de los estudiantes en torno a los ítems uno y dos de la primera pregunta es similar, hacen referencia a su nombre "igual". Algunos lo plantean en términos de "el resultado" o "la respuesta" de la operación, otros lo perciben como la separación entre la suma y el resultado, o como la consecuencia de una operación, y otros consideran que la parte izquierda de la igualdad representa la pregunta, y la parte derecha la respuesta o que es simplemente un símbolo "final" de un ejercicio, operación o problema. Respecto al significado, casi la totalidad de los estudiantes plantean que el símbolo "=" representa una acción o una consecuencia de resolución de la operación. (Grafica 1)

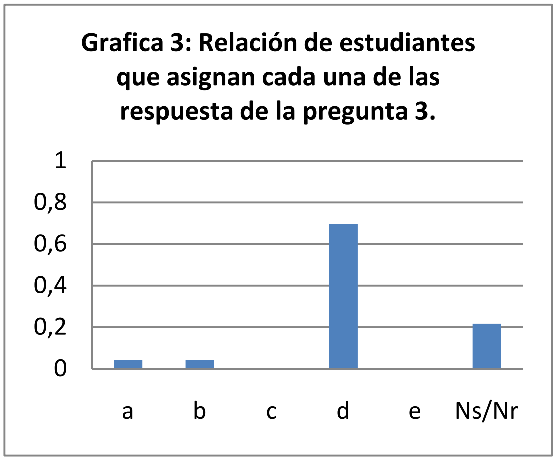


El ítem 3 de la primera pregunta pretendía que el estudiante reflexionara sobre la posibilidad de otros significados de la igualdad, el de equivalencia por ejemplo. En las respuestas se evidenció que si bien la mayoría de los estudiantes no ven otro significado para el símbolo, unos pocos logran identificar la igualdad como una relación de equivalencia reconociendo ejemplos de equivalencias como: “4+5=8+1” o “4=4” o “lo que está antes del igual equivale a lo que está después”. (Grafica 1)

En la segunda pregunta, el 76% de los estudiantes considera correcta la solución planteada y el 24% incorrecta, pero la totalidad de los estudiantes se basan exclusivamente en el resultado y no analizan el procedimiento, lo que implica que no consideran la secuencia de equivalencias, sino que solo les preocupa el resultado. Perciben la igualdad como el resultado o final de un procedimiento. (Gráfica 2)

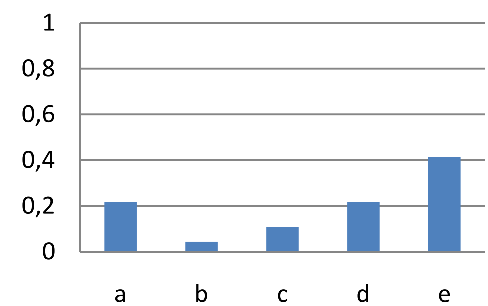


Las preguntas tercera y cuarta indagaban por la comprensión de la igualdad como equivalencia, independiente de un resultado numérico particular. En la tercera pregunta, el 70% de los estudiantes, respondió correctamente, opción (d), mientras que el 30% no respondió correctamente. El 22% de los estudiantes, no respondió la pregunta, esto se debe posiblemente a que buscan un resultado numérico, en este caso 16, y al no encontrarlo no responden la pregunta. Y los otros seleccionaron opciones diferentes, posiblemente producto del azar, al no encontrar una respuesta numérica acertada, seleccionaron una opción cualquiera. Quienes respondieron correctamente efectuaron las diferentes operaciones planteadas en el enunciado y en las opciones e identificaron de esta manera expresiones equivalentes, opción d. (Gráfica 3)



En la cuarta pregunta tan solo el 22% de los estudiantes acertó a la respuesta, opción d: Todas las anteriores. El 41% respondió: ninguna de las anteriores, esto debido a que estaban buscando la respuesta numérica exacta, y al no encontrarla, seleccionan esta opción, incluso algunos no le encontraban sentido a las opciones, lo que indica que los estudiantes están muy inmersos en la noción de que la igualdad o incluso la resolución de un problema busca un resultado numérico. Contrario a la noción de la igualdad como equivalencia o la resolución de un problema matemático como la exposición del procedimiento. El 36% seleccionaron a, b o c, cada una equivalente a la dada, lo que indica que los estudiantes resolvieron las operaciones y encontraron una expresión equivalente, posiblemente a algunos se les dificulta manipular los signos de agrupación y a otros la potenciación, o consideraron que no es posible plantear un problema con más de una solución.. (Gráfica 4)

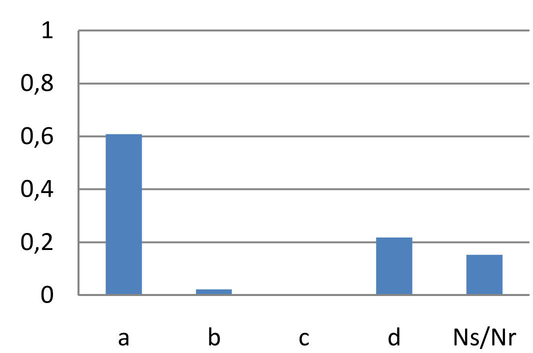
Grafica 4: Relación de respuestas de estudiantes en la pregunta 4.



En la quinta pregunta se evidenció la dificultad de los estudiantes, para traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico. Posiblemente porque no interpretan las relaciones o condiciones expresadas: no diferencian el doble de la mitad, el cuadrado o el siguiente de un número, o porque no pueden generalizar estas relaciones.

La sexta pregunta pretendía introducir a los estudiantes en el contexto algebraico, el significado de la variable y el análisis de expresiones algebraicas equivalentes. En los resultados se evidencia la dificultad que les genera a los estudiantes comenzar a adentrarse a elementos del algebra, el 15% de los estudiantes no respondieron esta pregunta, esto se puede deber a las dificultades para dar significado a las variables o entender una expresión general. Se identifican problemas sintácticos, confunden por ejemplo potenciación con la multiplicación, el 22% seleccionó

Grafica 5: Relación de respuestas de los estudiantes en la pregunta 6



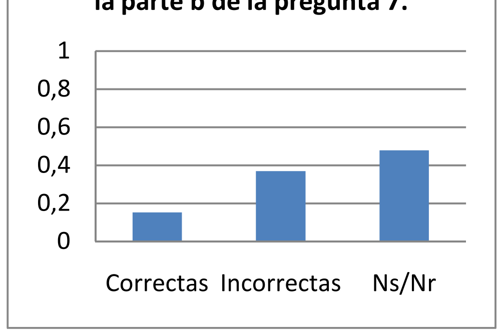
la opción d y consideran además que la potenciación es distributiva con respecto a la adición, la mayoría de los estudiantes, el 61%, seleccionaron la opción a. Ningún estudiante del grupo logró responder correctamente esta pregunta. (Gráfica 5)

Las preguntas 7, 8 y 9 referidas a la resolución de ecuaciones se presentaron en el contexto de determinar el número escondido, dar significado a la variable como incógnita, contexto familiar que se introduce desde la básica primaria. En las ecuaciones se requiere que el estudiante dé significado a la igualdad como una equivalencia, relacionando y comparando los dos miembros de la igualdad.

En la séptima pregunta tan solo el 50% de los estudiantes seleccionó la opción correcta, la a. Esta situación evidencia la dificultad que les genera trabajar con ecuaciones lineales de una incógnita, incluso en contextos intuitivos, ya que casi el 33% no sabía o no respondió la pregunta y el 17% lo respondió incorrectamente. (Gráfica 6)

Grafica 6: Resultados de los estudiantes en la prueba, para la parte a de la pregunta 7.

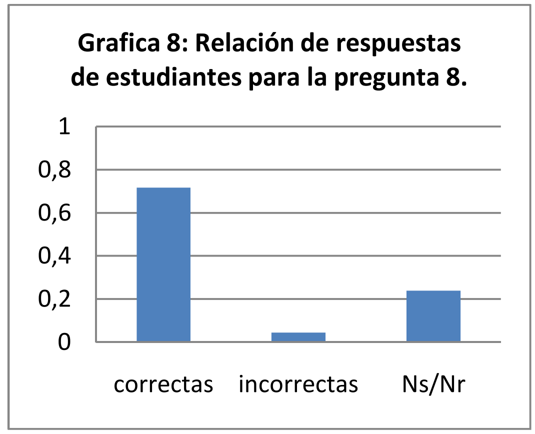
En el literal b de la pregunta 7, tan solo el 15% respondió correctamente. Un alto número de estudiantes (48%) no respondió esta pregunta, evidenciando la dificultad en los estudiantes al trabajar ecuaciones lineales en donde los coeficientes de las variables son diferentes de uno. Entre las respuestas se evidencian dificultades como confundir un producto con una suma, o incluso de considerar que el coeficiente hace parte de la incógnita, así cuando se preguntaba el valor de la variable “m” en la ecuación $3m + 5 = 23$, el 17% respondió que el valor de “m” debía ser 18 (Gráfica 7)



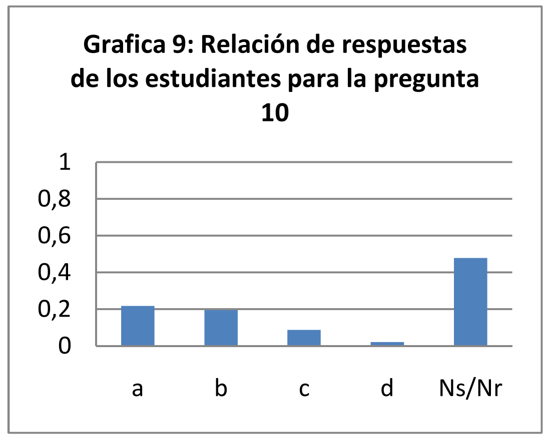
Grafica 7: Resultados de los estudiantes en la prueba, para la parte b de la pregunta 7.

En la octava pregunta la mayoría de los estudiantes (72%) logró hallar el número oculto, pero solo se limitaron a esto, tan solo una persona logró evidenciar la relación entre ambas ecuaciones anotando que en la segunda ecuación “se cancelan los 7” y sobre esta base se obtiene la primera ecuación. El 24% no respondió esta pregunta. (Gráfica 8)

En la novena pregunta los estudiantes se limitaron a dar explicaciones de la respuesta numérica de la ecuación, que se explícita en el enunciado. Tan solo dos estudiantes lograron evidenciar una relación entre las dos ecuaciones mientras los demás no lograron analizar o justificar si en realidad la información de la primera ecuación les permitía resolver la segunda ecuación.



Finalmente en la pregunta 10, se puede evidenciar un mayor problema, ya que los estudiantes han establecido relaciones de orden entre números pero no están familiarizados con estas relaciones para expresiones simbólicas. Aún así el 22% respondió correctamente la pregunta, no es posible determinar a partir de esta selección si comprenden el problema o simplemente seleccionan una opción al azar. Un alto porcentaje (casi el 50%) no respondió esta pregunta, por la situación antes mencionada. (Gráfica 9)



Bibliografía

Alvarado, M. J. (2006). PAPEL DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS EN LA CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS NATURALES. *Paradìgma v.27 n.1 Maracay* .

Arquimedes. (s.f.). *El Arenario.* Recuperado el 05 de 05 de 2014, de http://dgespe.edutlixco.org/pdf/matem/arenario.pdf

Ausubel, D. P., & Novak, J. D. (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* Mexico: Trias Ed.

Bell, E. T. (2003). *Historia de las matemáticas.* Mexico: Fondo de cultura económica.

Boyer, C. (1969). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza Universidad 1996.

Castaño, M. L. (1991). *Elementos de Euclides.* Madrid: Gredos.

Chasing, S. P. (2001). *Matemáticas con énfasis en competencias 6.* Bogotá: Horizontes Editorial.

Filloy, E. (1993). Tendencias cognitivas y procesos de abstracción en el aprendizaje del álgebra y de la geometría. *Investigación y experiencias didácticas* , 160-166.

Filloy, E., & Rojano, T. (1985). Operating the Unknown nd Models of Teaching (A clinical Study with 12-13 years olds with a high proficiency in Pre-Algebra). *Proceedings of the seventh Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* , 75-79.

GM, L. (1849-1863). Leibnizens mathemathische Schriften. En H. C. Gerhardt.. Berlin: (Reimpresión: Olms, Hildenheim 1971).

Godino. (2003). Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática. *Granada: Departamento de didáctica de la matemática, Universidad de Granada* , 38.

Godino, J. (Febrero de 2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Granada: Edumat-maestros.

Gustavo Centeno, H. C. (1997). *Matemática Constructiva 10.* Santa fé de Bogotá: Libros y Libros S. A.

Heredia, D. P., & Henao, J. U. (2004). La filosofía y el descubrimiento de los irracionales. *Matemática y Filosofía en el aula de clase* .

Ivorra, C. *La axiomática de la Teoría de Conjuntos.* Universidad de Valencia.

Kieran. (Agosto de 1980). Concepts associated with the equality symbol. *Fourth International Confrence of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* . Berkeley, California.

Kieran, C., & Filloy, E. (. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias; investigación y experiencias didácticas* , 229-240.

Knuth, E., Alibali, M., Hattikudur, S., McNeil, N., & Stephens, A. (Mayo 2008). The Importance of Equal Sign Understanding in the Middle Grades . *Mathematics Teaching in the Middle School Vol 13, No 9* , 514-519.

Leibniz. (1982). Principios metafisicos de la matemática. GM VII.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL . (2006). *Estandares Básicos de Competencias en matemáticas.* Bogotá.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (1998). *Matemáticas Lineamientos Curriculares.* Bogotá.

Molina, J. A. (abril 2012). La crítica de Leibniz a los Elementos de Euclides. *Notae Philisiphicae Scientiae Formalis* , Vol. 1, n. 1, P. 23-31.

Molina, M., Castro, E., & Castro, E. (s.f.). Historia del signo igual. *Representaciones, nuevas tecnologías y construcción de significados en Educación Matematica"* .

Nuñez, L. A. (2001). *Matemáticas con énfasis en competencias 6.* Bogotá: Horizontes.

Nuñez, L. A. (2001). *Matemáticas con énfasis en competencias 7.* Bogotá: Horizontes.

Nuñez, L. A. (2001). *Matemáticas con énfasis en competencias 8.* Bogotá: Horizontes.

Nuñez, L. A. (2001). *Matemáticas con énfasis en competencias 9.* Bogotá: Hoizontes.

Pedreño, J. J. (Febrero 2004). Ecuaciones lineales. Didáctica y perspectiva histórica. *Numeros Volumen 7* , 3-18.

Perez, A. *Lógica, conjuntos, relaciones y funciones.* Madrid: Publicaciones Electronicas Sociedad Matemática Mexicana.

Rojano, M. T. (2010). Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos. *Números (Revista de didáctica de las matemáticas* , Pág. 5-20.

Sanchez, C. H. (1996). El surgimiento de la teoría de conjuntos. *XIII Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística.* Universidad Nacional de Colombia; Bogotá.

Segura, D., & Romero, J. (2000). Las matemáticas en el aula: posibilidades de construcción significativa. *Coleccion polémica educativa* , 9-32.

Vinner. (1991). The role of definitions in the teaching and lerning of mathematics. En *Avanced mathematical thincking* (págs. 65-81). D. Tall.

Wilhelmi, M., Godino, J., & Lacasta, E. (Junio 2004). Configuraciones Epistémicas asociadas a la oción de igualdad de números reales.