



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Efectos en la Dinámica de un Convertidor Boost Cuando se Incluyen Resistencias Parásitas

Darío del Cristo Vergara Pérez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.
Manizales, Colombia
2015

Efectos en la Dinámica de un Convertidor Boost Cuando se Incluyen Resistencias Parásitas

Darío del Cristo Vergara Pérez

Tesis de grado presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias - Matemática Aplicada

Director:

Doctor: Simeón Casanova Trujillo

Codirector:

Doctor: Fredy Edimer Hoyos Velasco

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.
Manizales, Colombia
2015

(Dedicatoria)

A mi abuela materna: *Roquelina Rosa*

A mis padres: *Misael Dario y Enilda*

A mi esposa Sol María Canchila

A mis hijos *Daniela, Dariana, Dalila, Dania y Cesar Dario*

A mis hermanos: *Leonel, Teresa, Ketty y Sara*

A mis sobrinos: *María C, Juan David, Misael y María del Carmen*

Agradecimientos

*Le agradezco a **Dios** por ser el dador de vida, haberme guiado a lo largo de mi vida, por ser mi apoyo, mi luz y mi camino. Por haberme dado la fortaleza para seguir adelante en aquellos momentos de debilidad.*

*A mi director el Doctor **Simeón Casanova Trujillo**, por su colaboración incondicional en el presente trabajo, por su dedicación, perseverancia y disposición de tiempo a pesar de su ocupación.*

*A mi codirector el Doctor **Fredy Edimer Hoyos Velasco**, por haberme orientado en el desarrollo de la tesis y su disponibilidad, estímulos al crecimiento personal a través del conocimiento.*

*A la **Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales** y la **Universidad de Sucre** por darme la oportunidad de escalar un peldaño más en este proceso de superación con aras de brindar un mejor servicio a la cual me desempeño desde el punto de vista de mi profesión.*

*A mis compañeros de estudio por la compenetración recíproca en el intercambio de conocimientos, el buen clima de amistad y dinamismo de trabajo y perseverancia en nuestro propósito, dentro de estos quiero resaltar a **Aquiles José Morelo Sanchez** por su disposición al trabajo en equipo, su estímulo a avanzar en los momentos difíciles que se presentaron y que supimos sortear con paciencia y valentía.*

Resumen

La electrónica de potencia ocupa un lugar privilegiado en el campo de investigación debido a sus innumerables aplicaciones, desde elementos electrónicos de uso personal como celulares hasta el control de naves espaciales. Como dispositivos electrónicos podemos destacar los elevadores y reductores de voltaje, cada uno con su respectiva configuración y necesidad de uso. El diseño de estos conlleva a una modelación representada por sistemas de ecuaciones diferenciales suaves a tramos pero con discontinuidades en algunos puntos, generando por lo tanto comportamientos muy complejos como cuasiperiodicidad y caos. Sin embargo, la modelación que se hace es ideal ya que no incluye pérdidas energéticas en algunos de los elementos que componen el dispositivo y por lo tanto los resultados que se obtienen no siempre corresponden a la realidad. Por lo anterior, para obtener resultados coherentes entre las simulaciones del modelo y la implementación que se haga del dispositivo, se hace necesario la inclusión de ciertas resistencias internas en el circuito. En este trabajo se realizará un estudio de la dinámica de un convertidor boost cuando se incluyen resistencias internas.

El sistema sera controlado con ZAD (dinámica de promediado cero) usando un PWM de pulso al centro simétrico. Se hará un análisis de estabilidad de órbitas periódicas, existencia de bifurcaciones y de comportamiento caótico.

Palabras clave:Control no-lineal deslizante ZAD, PWM, convertidor Boost, caos, bifurcación Flip.

Abstract

Dynamic Effects of a Boost Converter with Parasitic Resistances

The power electronics occupies a privileged place in the field of research due to its countless applications, from electronic items of personal use such as mobile phones until the space-crafts control. As electronics devices we highlight the reducer and elevator voltage, each with its respective configurations of use and need. The design of these entails to a modeling systems represented by differential equations piecewise smooth but with discontinuities at some points, thus generating very complex behaviors like cuasiperiodicidad and chaos. However, the modeling is done is ideal it does not include energy losses in some of the elements of the device and therefore the results obtained do not always correspond to reality. Therefore, to obtain consistent results between model simulations and implementation is made of the device, it is necessary the inclusion of certain internal resistances in circuit. This paper presents a study of the dynamics of a boost converter when internal resistances are included. The system will be controlled ZAD (zero dynamics averaged) using a PWM pulse to the

symmetrical center. There will be an analysis of stability of periodic orbits, existence of bifurcations and chaotic behavior.

Keywords: Non-linear sliding control ZAD, PWM, Boost converter, chaos, Flip bifurcation

Contenido

Agradecimientos	VII
Resumen	IX
Lista de símbolos	XIII
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
2. Marco Teórico	3
2.1. El convertidor boost modelo ideal	3
2.2. El convertidor boost con resistencias parásitas	4
2.3. El convertidor boost con resistencias parásitas como sistema de estructura variable	9
2.4. Modulación de anchura de pulso	10
2.5. Técnica de control ZAD	11
2.6. Dinámica ideal de deslizamiento	12
3. Aplicación de Poincaré	20
3.1. Aproximación por rectas a tramos de la superficie de conmutación	20
3.1.1. Aproximación de $s(x(t))$ por rectas a tramos	20
3.2. Cálculo del ciclo de trabajo	22
3.3. Discretización del sistema	23
3.3.1. Ciclo de trabajo en estado estacionario	25
3.4. Desempeño de la estrategia ZAD con aproximación por rectas a tramos de la superficie de conmutación	26
4. Existencia y Estabilidad de órbitas Periódicas	34
4.1. Órbitas 1-TPeriódicas	34
4.2. Órbitas 2T-periódicas	37
4.2.1. Órbitas 2T-periódicas no saturadas	37
4.2.2. Órbitas 2T-periódicas semi-saturadas	38
4.2.3. Órbitas 2T-periódicas saturadas	39

4.3. Estabilidad de las órbitas periódicas	39
4.3.1. Jacobiano de la aplicación de Poincaré	40
5. Bifurcaciones	44
5.1. Bifurcaciones	44
5.2. Simulación del sistema con retardo de tiempo	51
6. Existencia y Control de Caos	54
6.1. Definición de caos.	54
6.2. Control de caos con FPIC	56
6.3. Técnica de control TDAS	66
7. Fenómeno de adición de periodo en el boost con resistencias parásitas	72
7.1. Adición de periodo	72
8. Convertidor boost modelo ideal vs convertidor boost con resistencias parásitas	78
8.1. Descripción de ambos modelos	78
8.2. Convertidor boost modelo ideal vs boost con resistencias parásitas, con distintos x_{2ref} e igual valor de x_{1ref}	79
8.3. Convertidor boost modelo ideal vs boost con resistencias parásitas, con igual punto de equilibrio	82
9. Conclusiones, trabajos futuros y difusión de resultados	86
9.1. Conclusiones	86
9.2. Trabajos Futuros	86
9.3. Difusión de resultados	87
Bibliografía	88

Lista de símbolos

Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
C	Capacitancia 2-1	μF	
d_T	Ciclo de trabajo 3-6		
d_E	Ciclo de trabajo en estado estacionario 3-15		
E	Tensión de alimentación 2-1	V	
i_L	Corriente en el inductor 2-1	A	
L	Inductancia 2-1	mH	
N	Parámetro de control con FPIC 6.2.1		
R	Resistencia de Carga 2-1	Ω	
r_L	Resistencia interna del inductor 2-2	Ω	
r_M	Resistencia de MOSFET 2-2	Ω	
r_{Med}	Resistencia de medida de corriente 2-2	Ω	
r_s	Resistencia interna de la fuente 2-2	Ω	
T	Periodo de muestreo 3-1	s	
v_C	Salida de tensión en el condensador 2-1	V	
v_{fd}	Voltaje de polarización del diodo 2-2	V	
L_i	Exponentes de Lyapunov 6-1		

Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
γ	Constante de adaptación	1	$\sqrt{\frac{L}{R^2C}}$

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
η	Parámetro de control con TDAS 6-3		
θ	ángulo 7.1		
ν	Constante de adaptación 2-13	1	$\frac{v_{fd}}{E}$
ρ_1	Constante de adaptación 2-12	1	$\sqrt{\frac{R_{eq1}^2 C}{L}}$
ρ_2	Constante de adaptación 2-13	1	$\sqrt{\frac{R_{eq2}^2 C}{L}}$

Superíndices

Superíndice	Término
n	Coefficiente T 3-1

Abreviaturas

Abreviatura	Término
DSP	Digital Signal Processing 5.2
FPIC	Fixed Point Induced Control 6.2.1
MCC	Modo de Conducción Continuo 2.2
MCD	Modo de Conducción Discontinuo 2.2
MOSFET	Metal-Oxide-Semiconductor Field-Effect Transistor 2-1
PWM	Modulación de ancho de pulso 2-6
PWMC	Modulación de ancho de pulso centrado 2-6
TDAS	Time- Delay Autosynchronization 6-3
VSS	Sistema De Estructura Variable 2.3
ZAD	Zero Averaged Dynamics 2.5

1 Introducción

Resumen:

Este capítulo presenta el estado del arte acerca de los trabajos realizados sobre la dinámica de algunos convertidores de potencia, manejados con PWM y ZAD, la motivación y la organización general del documento.

1.1. Motivación

El convertidor boost es un elevador de tensión con su implementación relativamente sencilla. En la mayoría de los casos, las aplicaciones del convertidor boost están orientadas a fuentes de potencia o en sistemas de potencia fotovoltaicos como primeras etapas de acondicionamiento de potencia. Uno de los principales problemas que presenta este tipo de topologías en su diseño es la estabilidad del sistema frente a perturbaciones de entrada y salida. Para efectos de implementación de un convertidor, se espera que, teóricamente, el interruptor conmute sólo un número finito de veces por período.

En el 2001 se reportó por primera vez la técnica de control ZAD (Zero Average Dynamics)[15, 14], la cual consiste en definir una superficie de conmutación y obligar a que el sistema dinámico que gobierna el convertidor evolucione en promedio sobre dicha superficie [16]. Esta técnica garantiza frecuencia fija de conmutación. Se trata de un diseño en el que se fija una salida auxiliar y con base en ella se define una acción de control digital que garantiza promedio de cero de error en cada iteración [5]. De manera numérica y experimental se ha demostrado que esta técnica funciona bien con el esquema de control de pulso al lado [7, 29]. La superficie de conmutación que usaremos en esta tesis se define como una combinación lineal del error en la tensión y el error en la corriente: en [9] y [23] se tomó este tipo de convertidor sin incluir resistencias parásitas, [9] tomó como superficie de conmutación

$$s(x(t)) = k_1(x_1(t) - x_{1ref}) + k_2(x_2(t) - x_{2ref}) \quad (1-1)$$

donde $x_1(t) - x_{1ref}$ y $x_2(t) - x_{2ref}$ representan el error en la tensión y corriente, respectivamente.

En [20] se controló un convertidor buck con ZAD-FPIC y se incluyeron resistencias internas para el convertidor buck, obteniendo resultados experimentales muy semejante a los numéricos.

Los exponentes de Lyapunov son una generalización de los multiplicadores característicos. Ellos miden el radio de separación de dos órbitas cercanas en el estado espacial. [1]

2 Marco Teórico

Resumen:

En este capítulo se presenta el sistema de ecuaciones del convertidor boost cuando se incluyen las pérdidas en la fuente, inductor, MOSFET y resistencia para medida de la corriente. También se describe la estrategia de control a usar con la cual se calcula el ciclo de trabajo, la cual corresponde a un PWMC. Se hace un estudio de la dinámica del boost cuando permitimos que el sistema evolucione sobre una superficie de conmutación $s(x(t))$, con el fin de obtener relaciones entre las variables de estado.

2.1. El convertidor boost modelo ideal

La Figura 2-1 muestra el esquema de un convertidor boost en su forma más simple, en esta figura, E es la tensión de entrada, i_L es la corriente en la inductancia del inductor L , S es el MOSFET, D el diodo, C la capacidad del condensador y v_0 es la tensión de salida.

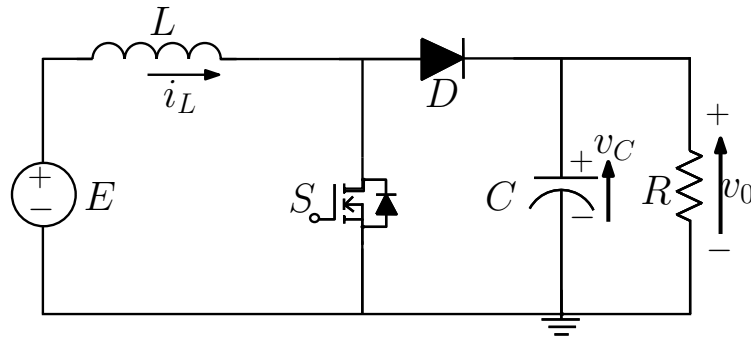


Figura 2-1: Esquema de un Convertidor boost modelo ideal

El convertidor boost está representado por el sistema de ecuaciones diferenciales [9]

$$\dot{x} = A_1 x + B + (A_2 - A_1) x u \quad (2-1)$$

$$\text{donde } A_1 = \begin{pmatrix} -\gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} -\gamma & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución de cada topología viene dada por:

$$x_i(t) = \phi_i(t - t_0)x_{i-1}(t_0) + \psi_i(t - t_0) \quad (2-2)$$

donde

$$\phi_i(t - t_0) = e^{A_i(t-t_0)}$$

$$\psi_1(t - t_0) = B(t - t_0)$$

$$\psi_2(t - t_0) = A_2^{-1}(e^{A_2(t-t_0)} - I_2)B$$

2.2. El convertidor boost con resistencias parásitas

La Figura 2-2 muestra el esquema de un convertidor boost con la inclusión de resistencias parásitas.

Donde r_S es la resistencia interna de la fuente, r_L resistencia interna del inductor, r_M resistencia del MOSFET, r_{Med} resistencia de medida de i_L y v_{fd} es el voltaje de polarización del diodo.

El convertidor boost presenta dos modos de conducción a saber [23]:

- Modo de Conducción Continua (MCC): si el MOSFET y el diodo están en condiciones complementaria ($S=ON$, $D=OFF$ o $S=OFF$, $D=ON$)
- Modo de Conducción Discontinua (MCD): si la corriente que atraviesa el diodo se hace igual a cero cuando el convertidor está operando con $u = 0$, el diodo dejará de conducir ($S=OFF$, $D=OFF$)

En esta tesis se trabaja con MCC

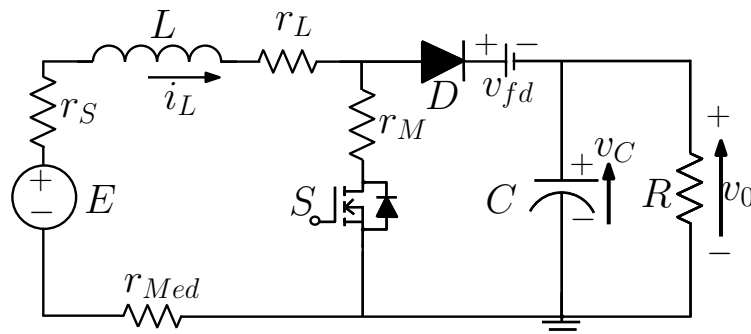


Figura 2-2: Esquema de un Convertidor boost ampliado

Cuando el interruptor S está cerrado (estado ON)[10], la bobina L almacena energía de la fuente de tensión E , mientras que la carga (R) es alimentada por la energía almacenada en el condensador (C).

En este caso, aplicamos las leyes de Kirchoff [12] para los voltajes en el primer circuito cerrado y haciendo sumas de corrientes en el nodo 1 de la Figura 2-3

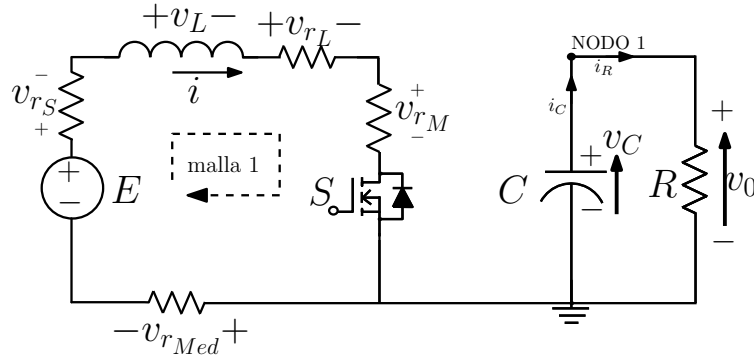


Figura 2-3: Convertidor boost Estado ON

Haciendo sumas de tensiones en la malla 1 el modelo queda:

$E = v_{r_s} + v_L + v_{r_L} + v_{r_M} + v_{r_{Med}}$ por estar conectados en serie.

$E = ir_s + L \frac{di}{dt} + ir_L + ir_M + ir_{Med}$ donde $i = i_L$

$E = L \frac{di}{dt} + (r_s + r_L + r_M + r_{Med})i$ despejando $\frac{di}{dt}$ tenemos:

$$\frac{di}{dt} = \frac{E}{L} - \frac{(r_s + r_L + r_M + r_{Med})}{L}i \quad (2-3)$$

Haciendo sumas de corrientes en el NODO 1 se tiene:

$i_C + i_R = 0$ despejando i_C se tiene

$i_C = -i_R$

$C \frac{dv_C}{dt} = -\frac{v_0}{R}$ despejando $\frac{dv_C}{dt}$ tenemos: donde $v_C = v_0$

$$\frac{dv_0}{dt} = -\frac{v_0}{RC} \quad (2-4)$$

De (2-3) y (2-4) se tiene

$$\frac{di}{dt} = \frac{E}{L} - \frac{(r_s + r_L + r_M + r_{Med})}{L}i \quad (2-5)$$

$$\frac{dv_0}{dt} = -\frac{v_0}{RC}$$

Cuando el interruptor está abierto (estado OFF) [10], la corriente sólo puede pasar a través del diodo D y alimenta al condensador C y a la carga. En este caso, aplicamos las leyes de corrientes de Kirchoff en la malla 2 como se muestra en la Figura 2-4,

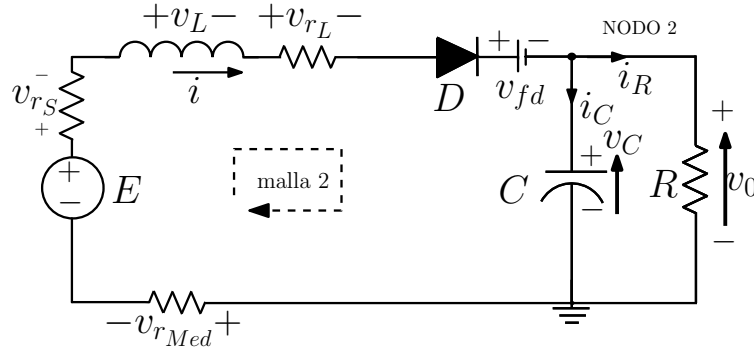


Figura 2-4: Convertidor boost Estado OFF

y obtenemos las siguientes ecuaciones

Para las tensiones en la malla 2:

$$E = v_{r_s} + v_L + v_{r_L} + v_{r_{Med}} + v_{fd} + v_C$$

$$E = L \frac{di}{dt} + (r_s + r_L + r_{Med})i + v_{fd} + v_C.$$

Para las corrientes en el NODO 2:

$$i_C + i_R = i \text{ despejando } i_C \text{ se tiene}$$

$$i_C = i - i_R$$

$$C \frac{dv_C}{dt} = i - \frac{v_0}{R}$$

Despejando $\frac{di}{dt}$ y $\frac{dv_C}{dt}$ tenemos: donde $i = i_L$ y $v_C = v_0$

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{E}{L} - \frac{(r_s + r_L + r_{Med})}{L} i - \frac{v_{fd} + v_C}{L} \\ \frac{dv_0}{dt} &= \frac{1}{C} i - \frac{v_0}{RC} \end{aligned} \quad (2-6)$$

Los sistema de ecuaciones (2-5) y (2-6) del convertidor boost con resistencias parásitas los podemos expresar como un solo sistema, si definimos el parámetro $(1 - u)$, donde $u \in \mathbb{R}$ es la variable de control o entrada del sistema, la cual toma valores en $\{0, 1\}$ así:

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{E}{L} - \frac{(r_s + r_L + r_{Med})}{L} i - \frac{r_M}{L} i(u) - \frac{v_0 + v_{fd}}{L} (1 - u) \\ \frac{dv_0}{dt} &= \frac{1}{C} i(1 - u) - \frac{v_0}{RC} \end{aligned} \quad (2-7)$$

Realizando el cambio de variables $x_1 = \frac{v_0}{E}$, $x_2 = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{i}{E}$, $\tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}$

donde τ es la nueva variable respecto de la cual se van a tomar las derivadas tenemos:

- $\sqrt{LC}\tau = t \Rightarrow \sqrt{LC}d\tau = dt$
- $x_1 = \frac{v_0}{E} \Rightarrow \frac{dx_1}{d\tau} = \frac{dv_0}{Ed\tau} \Rightarrow \frac{dx_1}{d\tau} = \frac{\sqrt{LC}}{E} \frac{dv_0}{dt}$, así $\frac{E}{\sqrt{LC}} \frac{dx_1}{d\tau} = \frac{dv_0}{dt}$
- $x_2 = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{i}{E} \Rightarrow i = \frac{x_2 \cdot E}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{E}{L} \frac{dx_2}{d\tau}$

sustituyendo en la ecuación (2-7) tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{E}{L} - \frac{(r_s + r_L + r_{Med})}{L} i - \frac{r_M}{L} i(u) - \frac{v_0 + v_{fd}}{L} (1 - u) \\ \frac{E}{L} \frac{dx_2}{d\tau} &= \frac{E}{L} - \frac{(r_s + r_L + r_{Med})}{L} \left(\frac{E}{\sqrt{\frac{L}{C}}} x_2 \right) - \frac{Ex_1 + v_{fd}}{L} (1 - u) - \frac{r_M}{L} \left(\frac{E}{\sqrt{\frac{L}{C}}} x_2 \right) (u) \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= 1 - \frac{(r_s + r_L + r_{Med})}{\sqrt{\frac{L}{C}}} x_2 - \frac{Ex_1 + v_{fd}}{E} (1 - u) - \frac{r_M}{\sqrt{\frac{L}{C}}} x_2 (u) \end{aligned}$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = x_1(u - 1) - \frac{r_s + r_L + r_{Med} + r_M(u)}{\sqrt{\frac{L}{C}}} x_2 - \frac{v_{fd}}{E} (1 - u) + 1 \quad (2-8)$$

Por otro lado, haciendo remplazo en la segunda ecuación tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dv_C}{dt} &= \frac{1}{C} i(1 - u) - \frac{v_C}{RC} \\ \frac{E}{\sqrt{LC}} \frac{dx_1}{d\tau} &= \frac{1}{C} \left(\frac{x_2 \cdot E}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \right) (1 - u) - \frac{E}{RC} x_1 \\ \frac{dx_1}{d\tau} &= x_2(1 - u) - \sqrt{\frac{L}{R^2 C}} x_1 \text{ ordenando un poco la ecuación tenemos:} \end{aligned}$$

$$\frac{dx_1}{d\tau} = -\sqrt{\frac{L}{R^2 C}} x_1 + x_2(1 - u) \quad (2-9)$$

$$\dot{x}_1 = -\sqrt{\frac{L}{R^2 C}} x_1 + x_2(1 - u) \quad (2-10)$$

$$\dot{x}_2 = x_1(u - 1) - \frac{r_s + r_L + r_{Med} + r_M(u)}{\sqrt{\frac{L}{C}}}x_2 - \frac{v_{fd}}{E}(1 - u) + 1 \quad (2-11)$$

Realizando el cambio de variables para adimensionalizar el sistema se tiene [17]

$$R_{eq1} = r_s + r_L + r_{Med} + r_M \quad \text{cuando } u = 1$$

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{R_{eq1}^2 C}{L}} \quad (2-12)$$

$$R_{eq2} = r_s + r_L + r_{Med} \quad \text{cuando } u = 0$$

$$\rho_2 = \sqrt{\frac{R_{eq2}^2 C}{L}} \quad \gamma = \sqrt{\frac{L}{R^2 C}} \quad \nu = \frac{v_{fd}}{E} \quad (2-13)$$

tenemos que el sistema queda

$$\dot{x}_1 = -\gamma x_1 + x_2(1 - u)$$

$$\dot{x}_2 = x_1(u - 1) - [\rho_2(1 - u) + \rho_1(u)]x_2 - \nu(1 - u) + 1$$

que se puede expresar matricialmente por:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & (1 - u) \\ (u - 1) & -\rho_2 + (\rho_2 - \rho_1)u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \nu(1 - u) \end{pmatrix} \quad (2-14)$$

De forma compacta se expresa como $\dot{x} = A_i x + B_i$, donde i toma los valores 1 y 2

$$\text{Para } i = 1 \text{ tomamos } u = 1 \text{ y así } A_1 = \begin{pmatrix} -\gamma & 0 \\ 0 & -\rho_1 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Para } i = 2 \text{ tomamos } u = 0 \text{ y así } A_2 = \begin{pmatrix} -\gamma & 1 \\ -1 & -\rho_2 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \nu \end{pmatrix}$$

Nuestro marco de estudio se basa en los sistemas de ecuaciones diferenciales descrito por

$$\text{dos configuraciones en el espacio de estados } x = f(x, u, t) = \begin{cases} A_1 x + B_1 & \text{si } u = 1 \\ A_2 x + B_2 & \text{si } u = 0 \end{cases}. \text{ Este}$$

sistema de ecuaciones puede escribirse de forma compacta como:

$$\dot{x} = A_2 x + B_2 + (A_1 - A_2)xu + (B_1 - B_2)u \quad (2-15)$$

La solución de cada topología dada es [11, 6]

$$x_i(t) = \phi_i(t - t_0)x_{i-1}(t_0) + \psi_i(t - t_0) \tag{2-16}$$

donde

$\phi_i(t - t_0) = e^{A_i(t-t_0)}$ y $\psi_i(t - t_0) = \int_{t_0}^t e^{A_i(t-\tau)} B_i d\tau$. Teniendo en cuenta cada topología y calculando las exponenciales matriciales, se tiene que

$$\psi_1(t - t_0) = A_1^{-1}(e^{A_1(t-t_0)} - I_2)B_1 \quad \psi_2(t - t_0) = A_2^{-1}(e^{A_2(t-t_0)} - I_2)B_2 \tag{2-17}$$

donde I_2 es la matriz identidad de tamaño 2 x 2.

2.3. El convertidor boost con resistencias parásitas como sistema de estructura variable

Un sistema de estructura variable (VSS) consiste en un conjunto de subsistemas continuos junto con una lógica de conmutación adecuada.

Los sistemas de estructura variable tienen la propiedad de posible existencia de modos deslizantes en la superficie de discontinuidad de la estructura.

Para que exista un modo deslizante en una superficie de discontinuidad entre dos estructuras, las trayectorias a ambos lados de la superficie, deben dirigirse a la superficie.[8]

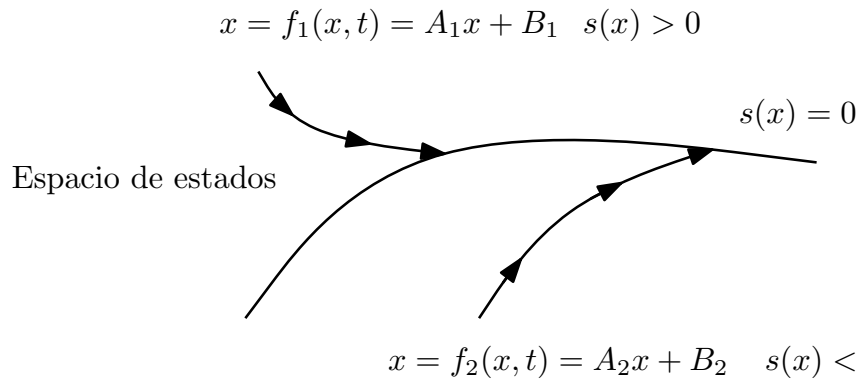


Figura 2-5: Trayectorias en el plano de fase de un sistema de estructura variable de segundo orden

Si la trayectoria evoluciona sobre la superficie de deslizamiento podemos decir que el sistema se encuentra en modo deslizante. La Figura 2-5 muestra que existe un modo deslizante en la superficie de discontinuidad, ya que las trayectorias a ambos lados de la superficie se dirigen hacia la región del deslizamiento.[24]

Para el convertidor boost con resistencias parásitas tenemos la ecuación (2-15), cuyos puntos de discontinuidad corresponden con los cambios de estructura del convertidor, por lo tanto el convertidor boost con resistencias parásitas es un sistema de estructura variable.

En [18] define la siguiente ley de control de conmutación:

$$u = \begin{cases} 1 & \text{si } s(x) > 0 \\ 0 & \text{si } s(x) < 0 \end{cases} \quad (2-18)$$

donde $s(x)$ se denomina superficie de conmutación y determina la siguiente superficie de dimensión $n - 1$

$$s = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = 0\} \quad (2-19)$$

Si hay alguna región donde existe un modo deslizante, esta es un subconjunto de s y se dice que el convertidor está en modo deslizante cuando se utiliza la ley de control (2-18)

2.4. Modulación de anchura de pulso

La modulación por ancho de pulso PWM (Pulse-Width Modulation) es una técnica que permite variar el ciclo de trabajo de una señal (definido como el tiempo en que el conmutador se encuentra en la posición **ON**, dividido por el periodo T) con el fin de controlar la tensión de la carga, manteniendo fija el periodo, o de forma equivalente la frecuencia fija.

Para un modulador PWMC, en un periodo de tiempo T se realizan 2 conmutaciones, de tal manera que un intervalo de tiempo $[nT; (n + 1)T]$ queda dividido en tres subintervalos, donde el primero y el último tienen la misma longitud (Figura 2-6)

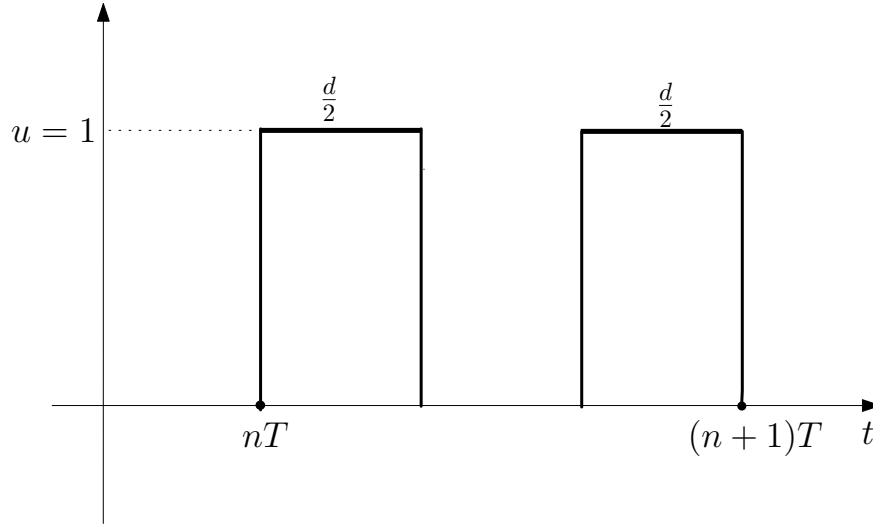


Figura 2-6: Pulso al centro simétrico

Las conmutaciones se realizan de acuerdo al esquema $\{1, 0, 1\}$. En general, el ciclo de trabajo varía periodo a periodo debido a la continua conmutación **ON-OFF**. Lo anterior implica que el sistema es T-periódicamente forzado y así la aplicación de Poincaré refleja toda la dinámica del sistema.

2.5. Técnica de control ZAD

La técnica de control **ZAD** (dinámica de promediado cero) nos permite calcular el ciclo de trabajo, es decir, el tiempo en el cual el interruptor está abierto o cerrado. Esta técnica consiste en lo siguiente:

1. Definir una superficie de conmutación $s(x(t)) = 0$ en la cual el sistema evolucionará en promedio. En esta tesis se propone usar la superficie dada por la ecuación (2-21), donde $x_1(t) - x_{1ref}$ y $x_2(t) - x_{2ref}$ representan el error en la tensión y corriente, respectivamente.
2. Fijar un periodo T
3. Imponer que s tenga media cero en cada ciclo:

$$\int_{nT}^{(n+1)T} s(x(t)) dt = 0 \quad (2-20)$$

$$s(x(t)) = k_1(x_1(t) - x_{1ref}) + k_2(x_2(t) - x_{2ref}) \quad (2-21)$$

La última condición nos garantiza que sólo habrá un número finito de conmutaciones por periodo, puesto que hemos definido el control con esa intención.

2.6. Dinámica ideal de deslizamiento

Se estudiará la dinámica del boost sin control alguno, es decir, se permitirá que el sistema evolucione sobre la superficie de conmutación dada por la ecuación (1-1).

Este estudio nos dará una idea de cómo escoger ciertas condiciones iniciales para cuando trabajemos con el boost con la técnica ZAD. También nos permitirá encontrar regiones de estabilidad del sistema a las que encontraremos con la técnica ZAD.

De la ecuación

$$s(x(t)) = k_1(x_1(t) - x_{1ref}) + k_2(x_2(t) - x_{2ref}) \quad (2-22)$$

tenemos que

$$\dot{s}(x(t)) = k_1\dot{x}_1(t) + k_2\dot{x}_2(t) \quad (2-23)$$

Reemplazando los valores de $\dot{x}_1(t)$ y $\dot{x}_2(t)$ obtenemos la siguiente ecuación

$$\dot{s}(x(t)) = k_1(-\gamma x_1 + x_2(1 - u)) + k_2(x_1(u - 1) - [\rho_2(1 - u) + \rho_1(u)]x_2 - \nu(1 - u) + 1) \quad (2-24)$$

El control equivalente u_{eq} se obtiene al igualar a cero la primera derivada temporal de la superficie de conmutación a lo largo de las trayectorias del sistema, y luego despejar u de la ecuación resultante.

Hallamos el control equivalente, igualando la ecuación (2-24) a cero y despejando u_{eq}

$$u_{eq} = -\frac{k_2(\nu + x_1 + \rho_2 x_2 - 1) - k_1(x_2 - \gamma x_1)}{k_1 x_2 - k_2(\nu + x_1 - x_2(\rho_1 - \rho_2))} \quad (2-25)$$

Si $k_2 = 0$ y $k_1 \neq 0$ tenemos que

$$u_{eq} = \frac{(x_2 - \gamma x_1)}{x_2} \quad (2-26)$$

Para encontrar las ecuaciones de la dinámica ideal de deslizamiento, se debe sustituir el control equivalente en las ecuaciones del sistema original, en nuestro caso (2-26) y asignar las condiciones iniciales sobre la región de deslizamiento.

Reemplazando la ecuación (2-26) en el sistema (2-14) tenemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & \frac{\gamma x_1}{x_2} \\ -\frac{\gamma x_1}{x_2} & -\rho_2 + (\rho_2 - \rho_1)\left(\frac{x_2 - \gamma x_1}{x_2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \nu\left(\frac{\gamma x_1}{x_2}\right) \end{pmatrix} \quad (2-27)$$

Igualando la ecuación (2-27) a cero obtenemos los puntos de equilibrio $(x_1, x_2)^T$ que satisfacen esta relación

$$x_2^1 = \frac{n + (1 + \sqrt{m})}{2\rho_1} \quad (2-28)$$

siendo

$$\begin{aligned} m &= 2\gamma\rho_1x_1 - 4\gamma\rho_1x_1^2 - 2\gamma\rho_2x_1 + \gamma^2\rho_1^2x_1^2 + \gamma^2\rho_2^2x_1^2 - 4\nu\gamma\rho_1x_1 - 2\gamma^2\rho_1\rho_2x_1^2 + 1 \\ n &= \gamma x_1(-\rho_1 + \rho_2) \end{aligned}$$

el valor de x_2 es

$$x_2^2 = \frac{n - (1 + \sqrt{m})}{2\rho_1} \quad (2-29)$$

siendo

$$\begin{aligned} m &= 2\gamma\rho_1x_1 - 4\gamma\rho_1x_1^2 - 2\gamma\rho_2x_1 + \gamma^2\rho_1^2x_1^2 + \gamma^2\rho_2^2x_1^2 - 4\nu\gamma\rho_1x_1 - 2\gamma^2\rho_1\rho_2x_1^2 + 1 \\ n &= \gamma x_1(-\rho_1 + \rho_2) \end{aligned}$$

Dados que estos puntos deben estar sobre la superficie de conmutación $s(x(t)) = k_1(x_1 - x_{1ref}) = 0$, se debe tener entonces que $x_1 = x_{1ref}$. Reemplazando así en la ecuación (2-28), obtenemos dos puntos de equilibrio dados por:

$$P_{eq}^1 = \left(\begin{array}{c} x_{1ref} \\ \frac{n_{ref} + (1 + \sqrt{m_{ref}})}{2\rho_1} \end{array} \right) \quad (2-30)$$

$$P_{eq}^2 = \left(\begin{array}{c} x_{1ref} \\ \frac{n_{ref} - (1 + \sqrt{m_{ref}})}{2\rho_1} \end{array} \right) \quad (2-31)$$

con

$$\begin{aligned} m_{ref} &= 2\gamma\rho_1x_{1ref} - 4\gamma\rho_1x_{1ref}^2 - 2\gamma\rho_2x_{1ref} + \gamma^2\rho_1^2x_{1ref}^2 + \gamma^2\rho_2^2x_{1ref}^2 - 4\nu\gamma\rho_1x_{1ref} \\ &\quad - 2\gamma^2\rho_1\rho_2x_{1ref}^2 + 1 \\ n_{ref} &= \gamma x_{1ref}(-\rho_1 + \rho_2) \end{aligned}$$

Como $x_2 > 1$, el punto P_{eq}^2 no se tiene en cuenta. Como estamos trabajando en modo de conducción continuo, $x_2 \neq 0$, y así el campo vectorial dado por el sistema (2-27) (escrito como f) es diferenciable en una vecindad del punto de equilibrio P_{eq} .

$$f(x) \approx f(P_{eq}) + J_f(P_{eq}) \cdot (x - P_{eq})$$

y como $f(P_{eq}) = 0$, entonces la dinámica del sistema (2-27) en una vecindad del punto de equilibrio P_{eq} se puede estudiar con el sistema linealizado

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = J_f(P_{eq}) \cdot (x - P_{eq})$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ R1^1 & R2^1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_{1ref} \\ x_2 - x_{2ref} \end{pmatrix}$$

donde

$$R1^1 = [(2\nu\gamma\rho_1 + 4\gamma\rho_1x_{1ref})(2\gamma\rho_1x_{1ref} - 4\gamma\rho_1x_{1ref}^2 - 2\gamma\rho_2x_{1ref} + \gamma^2\rho_1^2x_{1ref}^2 + \gamma^2\rho_2^2x_{1ref}^2 - 4\nu\gamma\rho_1x_{1ref} - 2\gamma^2\rho_1\rho_2x_{1ref}^2 + 1)]^{1/2} - (2\nu\gamma\rho_1 + 4\gamma\rho_1x_{1ref})(\gamma\rho_1x_{1ref} - \gamma\rho_2x_{1ref} + 1)/(4\gamma\rho_1x_{1ref}^2 + 4\nu\gamma\rho_1x_{1ref}) + \gamma(\rho_1 - \rho_2)$$

y

$$R2^1 = -\rho_1 - ((2\gamma\rho_1^2x_{1ref}^2 + 2\nu\gamma\rho_1^2x_{1ref})(2\gamma\rho_1x_{1ref}^2 - 2\gamma\rho_1x_{1ref} + 2\gamma\rho_2x_{1ref} - \gamma^2\rho_1^2x_{1ref}^2 - \gamma^2\rho_2^2x_{1ref}^2 + 2\nu\gamma\rho_1x_{1ref} + 2\gamma^2\rho_1\rho_2x_{1ref}^2 - 1) + (2\gamma\rho_1^2x_{1ref}^2 + 2\nu\gamma\rho_1^2x_{1ref})(\gamma\rho_1x_{1ref} - \gamma\rho_2x_{1ref} + 1) + (2\gamma\rho_1x_{1ref} - 4\gamma\rho_1x_{1ref}^2 - 2\gamma\rho_2x_{1ref} + \gamma^2\rho_1^2x_{1ref}^2 + \gamma^2\rho_2^2x_{1ref}^2 - 4\nu\gamma\rho_1x_{1ref} - 2\gamma^2\rho_1\rho_2x_{1ref}^2 + 1)(1/2))/(4\nu^2\gamma^2\rho_1^2x_{1ref}^2 + 8\nu\gamma^2\rho_1^2x_{1ref}^3 + 4\gamma^2\rho_1^2x_{1ref}^4)$$

La estabilidad del punto de equilibrio P_{eq} se puede ver analizando la estabilidad del origen. Trasladando el punto de equilibrio al origen, el sistema (2-27) se puede escribir como

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = J_f(P_{eq}) \cdot z$$

La traza y el determinante de la matriz Jacobiana

$$J_f(P_{eq}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ R1^2 & R2^2 \end{pmatrix}$$

son $p = tr(J_f) = R2^2$ y $q = det(J_f) = 0$. Sabemos que los valores propios de esta matriz Jacobiana, vienen dados por

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2} \left[p \pm (p^2 - 4q)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Se obtiene entonces que:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = R2^2$$

En particular, para los valores $\rho_1 = 0.2782$, $\rho_2 = 0.2371$, $\gamma = 0.1860$, $\nu = 0.0274$ y $x_{1ref} = 2.1$ se tiene que

$$\begin{aligned} R1^2 &= -0.3178 \\ R2^2 &= -0.1358 \end{aligned} \tag{2-32}$$

Así

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -0.1358$$

En consecuencia, el punto de equilibrio P_{eq} es un nodo degenerado o nodo impropio. Si $k_1 = 0$ y $k_2 \neq 0$ tenemos que

$$u_{eq} = \frac{\nu + x_1 + \rho_2 x_2 - 1}{\nu + x_1 - x_2(\rho_1 - \rho_2)} \tag{2-33}$$

Reemplazando la ecuación (2-26) en el sistema (2-14) tenemos:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\gamma & 1 - \frac{\nu + x_1 + \rho_2 x_2 - 1}{\nu + x_1 - x_2(\rho_1 - \rho_2)} \\ \frac{\nu + x_1 + \rho_2 x_2 - 1}{\nu + x_1 - x_2(\rho_1 - \rho_2)} - 1 & -\rho_2 + (\rho_2 - \rho_1) \left(\frac{\nu + x_1 + \rho_2 x_2 - 1}{\nu + x_1 - x_2(\rho_1 - \rho_2)} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \nu \left(\frac{\nu + x_1 + \rho_2 x_2 - 1}{\nu + x_1 - x_2(\rho_1 - \rho_2)} \right) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2-34}$$

Igualando esta última ecuación al vector cero, obtenemos los puntos de equilibrio $(x_1^1, x_1^2)^T$ que satisfacen la relación

$$x_1^1 = \frac{\tilde{n} - \sqrt{\tilde{m}}}{2\gamma} \tag{2-35}$$

siendo

$$\begin{aligned} \tilde{m} &= \gamma(\gamma\nu^2 - 2\gamma\nu\rho_1 x_2 + 2\gamma\nu\rho_2 x_2 + \gamma\rho_1^2 x_2^2 - 2\gamma\rho_1\rho_2 x_2^2 - 4\rho_1 x_2^2 + \gamma\rho_2^2 x_2^2 + 4x_2) \\ \tilde{n} &= \gamma\rho_1 x_2 - \gamma\rho_2 x_2 - \nu\gamma \end{aligned}$$

$$x_1^2 = \frac{\tilde{n} + \sqrt{\tilde{m}}}{2\gamma} \quad (2-36)$$

siendo

$$\begin{aligned} \tilde{m} &= \gamma(\gamma\nu^2 - 2\gamma\nu\rho_1x_2 + 2\gamma\nu\rho_2x_2 + \gamma\rho_1^2x_2^2 - 2\gamma\rho_1\rho_2x_2^2 - 4\rho_1x_2^2 + \gamma\rho_2^2x_2^2 + 4x_2) \\ \tilde{n} &= \gamma\rho_1x_2 - \gamma\rho_2x_2 - \nu\gamma \end{aligned}$$

Dados que estos puntos deben estar sobre la superficie de conmutación

$s(x(t)) = k_2(x_2 - x_{2ref}) = 0$, se debe tener entonces que $x_2 = x_{2ref}$. Reemplazando así en la ecuación (2-34), obtenemos dos puntos de equilibrio dados por:

$$P_{eq2}^1 = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{n}_{ref} - \sqrt{\tilde{m}_{ref}}}{2\rho_1} \\ x_{2ref} \end{pmatrix} \quad (2-37)$$

$$P_{eq2}^2 = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{n}_{ref} + \sqrt{\tilde{m}_{ref}}}{2\rho_1} \\ x_{2ref} \end{pmatrix} \quad (2-38)$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{ref} &= \gamma(\gamma\nu^2 - 2\gamma\nu\rho_1x_{2ref} + 2\gamma\nu\rho_2x_{2ref} + \gamma\rho_1^2x_{2ref}^2 - 2\gamma\rho_1\rho_2x_{2ref}^2 - 4\rho_1x_{2ref}^2 \\ &\quad + \gamma\rho_2^2x_{2ref}^2 + 4x_{2ref}) \\ \tilde{n}_{ref} &= \gamma\rho_1x_{2ref} - \gamma\rho_2x_{2ref} - \nu\gamma \end{aligned}$$

Como $x_1 > 1$, el punto P_{eq2}^1 no se tiene en cuenta. Entonces la dinámica del sistema (2-34) en una vecindad del punto de equilibrio P_{eq} se puede estudiar con el sistema linealizado

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= J_f(P_{eq}) \cdot (x - P_{eq}) \\ \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R1^2 & R2^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_{1ref} \\ x_2 - x_{2ref} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2-39)$$

donde

$$\begin{aligned} R1^2 &= -(2\gamma^2(\gamma\nu^2 - 2\gamma\nu\rho_1x_{2ref} + 2\gamma\nu\rho_2x_{2ref} + \gamma\rho_1^2x_{2ref}^2 - 2\gamma\rho_1\rho_2x_{2ref}^2 \\ &\quad - 4\rho_1x_{2ref}^2 + \gamma\rho_2^2x_{2ref}^2 + 4x_{2ref}) + 2\gamma^2(\gamma(\gamma\nu^2 - 2\gamma\nu\rho_1x_{2ref} + 2\gamma\nu\rho_2x_{2ref} \\ &\quad + \gamma\rho_1^2x_{2ref}^2 - 2\gamma\rho_1\rho_2x_{2ref}^2 - 4\rho_1x_{2ref}^2 + \gamma\rho_2^2x_{2ref}^2 + 4x_{2ref}))^{(1/2)} \\ &\quad (\nu - \rho_1x_{2ref} + \rho_2x_{2ref}) / (\nu\gamma + (\gamma(\gamma\nu^2 - 2\gamma\nu\rho_1x_{2ref} + 2\gamma\nu\rho_2x_{2ref} + \gamma\rho_1^2x_{2ref}^2 \\ &\quad - 2\gamma\rho_1\rho_2x_{2ref}^2 - 4\rho_1x_{2ref}^2 + \gamma\rho_2^2x_{2ref}^2 + 4x_{2ref}))^{(1/2)} - \gamma\rho_1x_{2ref} + \gamma\rho_2x_{2ref})^2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
R2^2 = & (\rho_1^2 x_{2ref}^2 + \rho_2((x_{2ref}(2\rho_1 x_{2ref} - 1))/2 - \rho_1 x_{2ref}^2) - \nu(\rho_1 x_{2ref} - 1/2) \\
& - (((\gamma(\gamma\nu^2 - 2\gamma\nu\rho_1 x_{2ref} + 2\gamma\nu\rho_2 x_{2ref} + \gamma\rho_1^2 x_{2ref}^2 - 2\gamma\rho_1\rho_2 x_{2ref}^2 \\
& - 4\rho_1 x_{2ref}^2 + \gamma\rho_2^2 x_{2ref}^2 + 4x_{2ref}))^{1/2} + \gamma\rho_1 x_{2ref})(2\rho_1 x_{2ref} - 1))/(2\gamma)) \\
& /(\nu - \rho_1 x_{2ref} + \rho_2 x_{2ref} - (\nu\gamma - (\gamma(\gamma\nu^2 - 2\gamma\nu\rho_1 x_{2ref} + 2\gamma\nu\rho_2 x_{2ref} \\
& + \gamma\rho_1^2 x_{2ref}^2 - 2\gamma\rho_1\rho_2 x_{2ref}^2 - 4\rho_1 x_{2ref}^2 + \gamma\rho_2^2 x_{2ref}^2 + 4x_{2ref}))^{1/2} \\
& - \gamma\rho_1 x_{2ref} + \gamma\rho_2 x_{2ref})/(2\gamma))^2
\end{aligned}$$

La estabilidad del punto de equilibrio P_{eq} se puede ver analizando la estabilidad del origen. Trasladando el punto de equilibrio al origen, el sistema (2-39) se puede escribir como

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = J_f(P_{eq}) \cdot z$$

La traza y el determinante de la matriz Jacobiana

$$J_f(P_{eq}) = \begin{pmatrix} R1^2 & R2^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

son $p = tr(J_f) = R1^2$ y $q = det(J_f) = 0$. Sabemos que los valores propios de esta matriz Jacobiana, vienen dados por

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2} \left[p \pm (p^2 - 4q)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Obteniendo

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = R1^2$$

En particular, para los valores $\rho_1 = 0.2782$, $\rho_2 = 0.2371$, $\gamma = 0.1860$, $\nu = 0.0274$ y $x_{1ref} = 2.1$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
R1^1 &= -0.3786 \\
R2^1 &= -0.1618
\end{aligned} \tag{2-40}$$

Así

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -0.3786$$

En consecuencia, el punto de equilibrio P_{eq} es un nodo degenerado o nodo impropio

Si $k_1 \neq 0$ y $k_2 \neq 0$ tenemos que

$$u_{eq} = -\frac{k_2(\nu + x_1 + \rho_2 x_2 - 1) - k_1(x_2 - \gamma x_1)}{k_1 x_2 - k_2(\nu + x_1 - x_2(\rho_1 - \rho_2))} \quad (2-41)$$

Reemplazando la ecuación (2-41) en el sistema (2-14) tenemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & \frac{k_2(\nu + x_1 + \rho_2 x_2 - 1) - k_1(x_2 - \gamma x_1)}{k_1 x_2 - k_2(\nu + x_1 - x_2(\rho_1 - \rho_2))} + 1 \\ -\frac{k_2(\nu + x_1 + \rho_2 x_2 - 1) - k_1(x_2 - \gamma x_1)}{k_1 x_2 - k_2(\nu + x_1 - x_2(\rho_1 - \rho_2))} - 1 & \frac{(k_2(\nu + x_1 + \rho_2 x_2 - 1) - k_1(x_2 - \gamma x_1))(\rho_1 - \rho_2)}{k_1 x_2 - k_2(\nu + x_1 - x_2(\rho_1 - \rho_2))} - \rho_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \nu \left(\frac{k_2(\nu + x_1 + \rho_2 x_2 - 1) - k_1(x_2 - \gamma x_1)}{k_1 x_2 - k_2(\nu + x_1 - x_2(\rho_1 - \rho_2))} + 1 \right) \end{pmatrix} \quad (2-42)$$

Igualando esta última ecuación al vector cero para obtener los puntos de equilibrio $(x_{12}^1, x_{12}^2)^T$ que satisfacen la relación

$$x_{12}^1 = \frac{\tilde{n} - \sqrt{\tilde{m}}}{2\gamma}$$

siendo

$$\begin{aligned} \tilde{m} &= \gamma(\gamma\nu^2 - 2\gamma\nu\rho_1 x_2 + 2\gamma\nu\rho_2 x_2 + \gamma\rho_1^2 x_2^2 - 2\gamma\rho_1\rho_2 x_2^2 - 4\rho_1 x_2^2 + \gamma\rho_2^2 x_2^2 + 4x_2) \\ \tilde{n} &= \gamma\rho_1 x_2 - \gamma\rho_2 x_2 - \nu\gamma \end{aligned}$$

$$x_{12}^2 = \frac{\tilde{n} + \sqrt{\tilde{m}}}{2\gamma} \quad (2-43)$$

siendo

$$\begin{aligned} \tilde{m} &= \gamma(\gamma\nu^2 - 2\gamma\nu\rho_1 x_2 + 2\gamma\nu\rho_2 x_2 + \gamma\rho_1^2 x_2^2 - 2\gamma\rho_1\rho_2 x_2^2 - 4\rho_1 x_2^2 + \gamma\rho_2^2 x_2^2 + 4x_2) \\ \tilde{n} &= \gamma\rho_1 x_2 - \gamma\rho_2 x_2 - \nu\gamma \end{aligned}$$

Los puntos de equilibrio están dados por:

$$P_{eq3}^1 = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{n}_{ref} - \sqrt{\tilde{m}_{ref}}}{2\rho_1} \\ x_{2ref} \end{pmatrix} \quad (2-44)$$

$$P_{eq3}^2 = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{n}_{ref} + \sqrt{\tilde{m}_{ref}}}{2\rho_1} \\ x_{2ref} \end{pmatrix} \quad (2-45)$$

con

$$\begin{aligned}\tilde{m}_{ref} &= \gamma(\gamma\nu^2 - 2\gamma\nu\rho_1x_{2ref} + 2\gamma\nu\rho_2x_{2ref} + \gamma\rho_1^2x_{2ref}^2 - 2\gamma\rho_1\rho_2x_{2ref}^2 - 4\rho_1x_{2ref}^2 \\ &\quad + \gamma\rho_2^2x_{2ref}^2 + 4x_{2ref}) \\ \tilde{n}_{ref} &= \gamma\rho_1x_{2ref} - \gamma\rho_2x_{2ref} - \nu\gamma\end{aligned}$$

Es de notar que en los tres casos dados ($k_1 = 0$, $k_2 = 0$ y $k_1 \neq 0$ y $k_2 \neq 0$), se obtuvo dos puntos de equilibrio, los primeros expresados en función de x_{1ref} y los dos siguientes en función de x_{2ref} , en el resto de las capítulos se utilizará como valor de referencia (2-44).

La traza y el determinante de la matriz Jacobiana

$$J_f(P_{eq}) = \begin{pmatrix} R1^3 & R2^3 \\ R3^3 & R4^3 \end{pmatrix}$$

son $p = tr(J_f) = R1^3 + R4^3$ y $q = det(J_f) = (R1^3 \cdot R4^3) - (R3^3 \cdot R2^3)$. Sabemos que los valores propios de esta matriz Jacobiana, vienen dados por

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2} \left[p \pm (p^2 - 4q)^{\frac{1}{2}} \right]$$

En particular, para los valores $\rho_1 = 0.2782$, $\rho_2 = 0.2371$, $\gamma = 0.1860$, $\nu = 0.0274$, $k_1 = 0.5$, $k_2 = 0.5$ y $x_{1ref} = 2.1$ se tiene que:

$$\begin{aligned}R1^3 &= 1.9802 \\ R2^3 &= 0.8462 \\ R3^3 &= -1.9802 \\ R4^3 &= -0.8462\end{aligned}\tag{2-46}$$

Así

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1.1340$$

En consecuencia, el punto de equilibrio P_{eq3}^2 es un nodo degenerado o nodo impropio.

En todos los casos el valor máximo que puede tener x_{1ref} es 2.221706 . Para cuando $k_1 \neq 0$ y $k_2 \neq 0$ los valores que tome k_1 y k_2 afectan los valores de los valores propios.

3 Aplicación de Poincaré

Resumen:

En este capítulo se hace discretización del sistema, el estudio del convertidor boost con resistencias internas se maneja con PWM. Se hace una aproximación por rectas a tramos de la superficie de conmutación y se calcula el ciclo de trabajo, se muestran resultados sobre el desempeño de la técnica ZAD.

3.1. Aproximación por rectas a tramos de la superficie de conmutación

Ahora lo que haremos es el cálculo del ciclo del trabajo y de la aplicación de Poincaré, cuando se aplica PWM (este método es conocido como modulación por ancho de pulso o PWM por sus siglas en inglés *Pulse Width Modulation* [25]) con centro simétrico [13]. La variable de control u que se usará en el sistema se define de la siguiente forma:

$$u = \begin{cases} 1 & \text{si } nT \leq t \leq nT + \frac{d}{2} \\ 0 & \text{si } nT + \frac{d}{2} < t < (n+1)T - \frac{d}{2} \\ 1 & \text{si } (n+1)T - \frac{d}{2} \leq t \leq (n+1)T \end{cases} \quad (3-1)$$

3.1.1. Aproximación de $s(x(t))$ por rectas a tramos

La aproximación de $s(x(t))$ se hace bajo las siguientes suposiciones:

1. La dinámica del error o superficie de conmutación se comporta como una recta a tramos.
2. Las pendientes de la dinámica del error en cada tramo están determinadas por las pendientes calculadas al momento de la conmutación. Esto incluye suponer que la pendiente al inicio del periodo notada como \dot{s}_1 es la misma al final, es decir, en los tramos comprendidos entre $[nT, nT + \frac{d}{2}]$ y $[(n+1)T - \frac{d}{2}, (n+1)T]$. La pendiente de $s(x(t))$, \dot{s}_1 , corresponde a la derivada con respecto al tiempo cuando $u = 1$, en el tramo $[nT + \frac{d}{2}, (n+1)T - \frac{d}{2}]$; la pendiente \dot{s}_2 corresponde a la derivada de la superficie de conmutación respecto al tiempo para el caso $u = 0$.

La Figura 3-1 muestra esta aproximación.

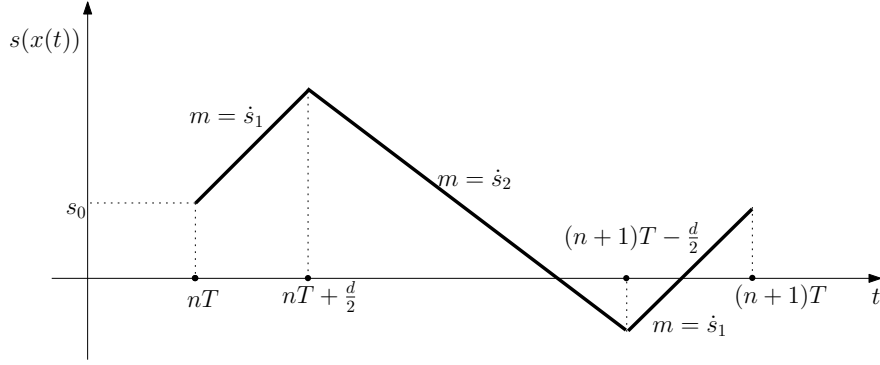


Figura 3-1: Aproximación por rectas a tramos de la superficie de conmutación

De lo anterior tenemos que:

$$s(x(nT)) = k_1(x_1(nT) - x_{1ref}) + k_2(x_2(nT) - x_{2ref})$$

Como nuestra superficie de conmutacion esta dada por la ecuación (2-24), tenemos que:

$$\begin{aligned} \dot{s}(x(nT)) &= k_1(-\gamma x_1(nT) + x_2(nT)(1 - u)) \\ &+ k_2(x_1(nT)(1 - u) - [\rho_2(1 - u) + \rho_1(u)]x_2(nT)) \\ &- \nu(1 - u) + 1 \end{aligned} \quad (3-2)$$

Así cuando $u = 1$ tenemos:

$$\dot{s}_1(x(nT)) = k_1(-\gamma x_1(nT)) + k_2(-\rho_1 x_2(nT) + 1) \quad (3-3)$$

Cuando $u = 0$ tenemos:

$$\dot{s}_2(x(nT)) = k_1(-\gamma x_1(nT) + x_2(nT)) + k_2(-x_1(nT) - \rho_2 x_2(nT) + 1 - \nu) \quad (3-4)$$

Conociendo los puntos al principio de cada tramo y calculando las pendientes correspondientes a ese punto, podemos hacer la aproximación de la recta en cada tramo [31].

Partiendo con $t = nT$ tenemos para cada uno de los tramos lo siguiente:

- En el primer tramo $t \in (nT, nT + \frac{d}{2})$ se tiene:

$$s(x(t)) = \dot{s}_1(x(nT))(t - nT) + s(x(nT))$$

- En el segundo tramo $t \in (nT + \frac{d}{2}, (n+1)T - \frac{d}{2})$ se tiene:

$$s(x(t)) = \dot{s}_2(x(nT))(t - (nT + \frac{d}{2})) + (\frac{d}{2})\dot{s}_1(x(nT)) + s(x(nT))$$

- En el tercer tramo $t \in ((n+1)T - \frac{d}{2}, (n+1)T)$ se tiene:

$$s(x(t)) = \dot{s}_1(x(nT))(t - (n+1)T + d) + \dot{s}_2(x(nT))(T - d) + s(x(nT))$$

La Figura 3-2 muestra numéricamente que la aproximación por rectas a tramos de la superficie de conmutación es buena

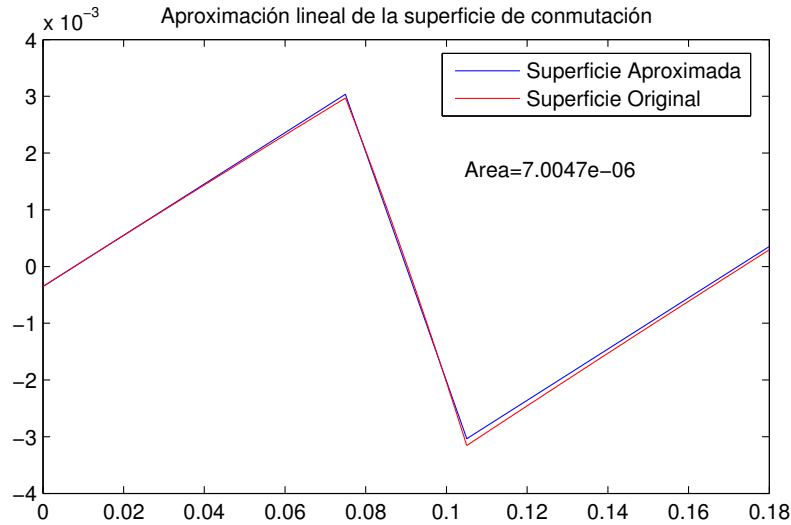


Figura 3-2: Superficie original vs aproximación por rectas a tramos

3.2. Cálculo del ciclo de trabajo

El ciclo de trabajo se calcula mediante la técnica *ZAD*, aproximando la superficie de conmutación mediante rectas a tramos y utilizando directamente la igualdad $\int_{nT}^{(n+1)T} s(x(t))dt = 0$ donde $s(x(nT)) = k_1(x_1(nT) - x_{1ref}) + k_2(x_2(nT) - x_{2ref})$

De esta manera:

$$\begin{aligned}
\int_{nT}^{(n+1)T} s(x(t)) \approx & \int_{nT}^{nT+\frac{d}{2}} (\dot{s}_1(x(nT))(t-nT) + s(x(nT)))dt \\
& + \int_{nT}^{(n+1)T-\frac{d}{2}} (\dot{s}_2(x(nT))(t-nT-\frac{d}{2}) + \dot{S}_1(x(nT))\frac{d}{2} + s(x(nT)))dt \\
& + \int_{(n+1)T-\frac{d}{2}}^{(n+1)T} (\dot{s}_2(x(nT))(T-d) + \dot{s}_1(x(nT))\frac{d}{2} + s(x(nT))) \\
& + \dot{s}_1(x(nT))(t+\frac{d}{2} - (n+1)T)dt
\end{aligned} \tag{3-5}$$

Resolviendo la integral dada en (3-5), igualando a cero y resolviendo para d se obtiene que: [4]

$$d_T = \frac{2s(x(nT)) + T\dot{s}_2(x(nT))}{\dot{s}_2(x(nT)) - \dot{s}_1(x(nT))} \tag{3-6}$$

donde d es un número real entre 0 y T . Si se presenta el hecho que $d < 0$ o que $d > T$, se redefine la expresión (3-6), diciendo que el sistema **satura**, en cuyo caso hacemos la siguiente elección en cada periodo:

1. Si $d_T < 0$, obligamos al sistema a que evolucione según la topología 1.
2. Si $d_T > T$, obligamos al sistema a que evolucione según la topología 2.
3. El denominador de la ecuación (3-6) es igual a $k_1x_2(nT) - k_2x_1(nT)$. Si esta expresión es cero, le exigimos al sistema que evolucione según la topología 1 si el numerador $2s(x(nT)) + Ts_2(x(nT)) > 0$; y que evolucione según la topología 2 si $2s(x(nT)) + Ts_2(x(nT)) < 0$.

3.3. Discretización del sistema

Para construir la aplicación de poincaré que utilizaremos para estudiar la dinámica del convertidor de boost con resistencias parásitas, tomaremos un muestreo del sistema cada periodo, concatenando las soluciones en cada uno de los intervalos $[nT, nT + \frac{d_0}{2}]$, $[nT + \frac{d_0}{2}, (n+1)T - \frac{d_0}{2}]$, $[(n+1)T - \frac{d_0}{2}, (n+1)T]$ y usamos la relación (2-16).

Si $x(nT)$ es el estado del sistema en el tiempo nT , entonces al final del intervalo $[nT; nT + \frac{d_0}{2}]$ y evaluamos la solución del sistema, cuando $u = 1$ en el tiempo $t = nT + \frac{d_0}{2}$ tenemos

$$x_1 \left(nT + \frac{d_0}{2} \right) = \phi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) x_0(nT) + \psi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) \quad (3-7)$$

Ahora, al final del segundo tramo $[nT + \frac{d_0}{2}, (n+1)T - \frac{d_0}{2}]$, evaluamos la solución del sistema cuando $u = 0$ en el tiempo $t = (n+1)T - \frac{d_0}{2}$ y tenemos:

$$x_2 \left((n+1)T - \frac{d_0}{2} \right) = \phi_2(T - d_0) x_1 \left(nT + \frac{d_0}{2} \right) + \psi_2(T - d_0) \quad (3-8)$$

Sustituyendo (3-7) en (3-8) se tiene:

$$x_2 \left((n+1)T - \frac{d_0}{2} \right) = \phi_2(T - d_0) \left[\phi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) x_0(nT) + \psi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) \right] + \psi_2(T - d_0)$$

$$\begin{aligned} x_2 \left((n+1)T - \frac{d_0}{2} \right) &= \phi_2(T - d_0) \phi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) x_0(nT) + \phi_2(T - d_0) \psi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) \\ &+ \psi_2(T - d_0) \end{aligned}$$

Para el tercer tramo $[(n+1)T - \frac{d_0}{2}, (n+1)T]$, evaluamos la solución del sistema cuando $u = 1$ en el tiempo $t = (n+1)T$ y tenemos:

$$x_3((n+1)T) = \phi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) x_2 \left((n+1)T - \frac{d_0}{2} \right) + \psi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) \quad (3-9)$$

Sustituyendo (3-9) en (3-9) se tiene:

$$\begin{aligned} x_3((n+1)T) &= \phi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) \\ &\left[\phi_2(T - d_0) \phi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) x_0(nT) + \phi_2(T - d_0) \psi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) + \psi_2(T - d_0) \right] \\ &+ \psi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) \end{aligned}$$

donde se tiene que:

$$\begin{aligned} x_3((n+1)T) &= \phi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) \phi_2(T - d_0) \phi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) x_0(nT) \\ &+ \phi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) \phi_2(T - d_0) \psi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) \\ &+ \phi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) \psi_2(T - d_0) + \psi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) \end{aligned} \quad (3-10)$$

Continuando con el proceso, se obtiene de esta forma una sucesión de puntos del plano $x_{n+1} = P(x_n; d_n)$, donde d_n es el ciclo de trabajo definido en (3-10) y determinado con x_n . Así, la aplicación de Poincaré, si $d_n \in (0, T)$, queda definida como:

$$P(x_n, d_n) = \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right)\phi_2(T-d_n)\phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right)x_0(nT) + \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right)\phi_2(T-d_n)\psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) + \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right)\psi_2(T-d_n) + \psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \quad (3-11)$$

Cuando el ciclo de trabajo satura procedemos como sigue:

1. Si $d_n = 0$, el mapa de Poincaré corresponde a

$$P(x_0(nT)) = \phi_2(T)x_0(nT) + \psi_2(T) \quad (3-12)$$

2. Si $d_n = T$, el mapa de Poincaré corresponde a

$$P(x_0(nT)) = \phi_1(T)x_0(nT) + \psi_1(T) \quad (3-13)$$

Por lo tanto, las expresiones (3-11), (3-12) y (3-13) definen la aplicación de Poincaré para el esquema $\{1, 0, 1\}$.

Un mapa de Poincaré es un dibujo clásico para el análisis de sistemas dinámicos. Es debido a Henri Poincaré y su principal idea es reemplazar el flujo de n -ésimo orden de un sistema de tiempo continuo por un sistema de tiempo discreto de $(n-1)$ orden. El es construido por una vista del espacio de fase diagramado ostroboscópicamente de tal forma que su movimiento se pueda observar periódicamente. Gráficamente se muestra en la Figura 3-3

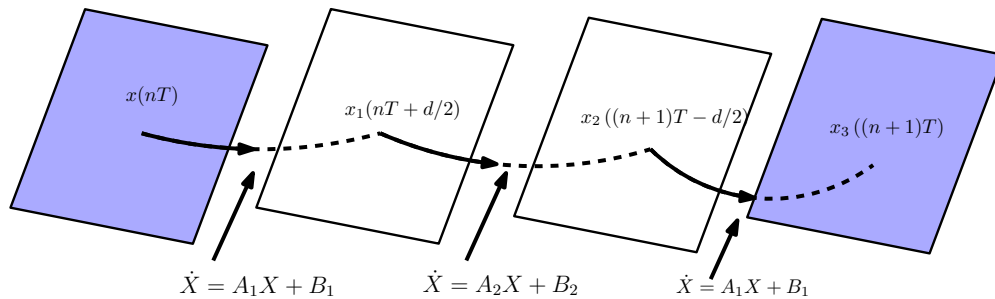


Figura 3-3: Construcción del mapa de Poincaré

3.3.1. Ciclo de trabajo en estado estacionario

En estado estacionario, la señal de entrada en el sistema sigue la señal de referencia. Para este trabajo la señal de referencia es constante e igual al vector

$$\begin{pmatrix} x_{1ref} \\ x_{2ref} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1ref} \\ (\gamma x_{1ref})/2 - (x_{1ref} - (x_{1ref}^2 - 2x_{1ref} - 2\gamma\rho_1 x_{1ref}^2 + 2\gamma\rho_2 x_{1ref}^2 \\ + 2\gamma\rho_1 x_{1ref} - 2\gamma\rho_2 x_{1ref} + \gamma^2\rho_1^2 x_{1ref}^2 + \gamma^2\rho_2^2 x_{1ref}^2 - 4\nu\gamma\rho_1 x_{1ref} \\ - 2\gamma^2\rho_1\rho_2 x_{1ref}^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + \gamma\rho_2 x_{1ref} - 1)/(2\rho_1) \end{pmatrix} \quad (3-14)$$

Remplazando (3-14) en (3-6), obtenemos la expresión para el ciclo de trabajo d_E en estado estacionario

$$d_E = \frac{T(N) + 2Tk_2\rho_1 - T\gamma k_1\rho_1 x_{1ref} - T\gamma k_2\rho_1\rho_2 x_{1ref}}{k_2\rho_1 k_2\rho_1 \sqrt{M} + \gamma k_1\rho_1 x_{1ref} + \gamma k_2\rho_1^2 x_{1ref} - 2\gamma k_2\rho_1\rho_2 x_{1ref}}$$

siendo

$$\begin{aligned} M &= 2\gamma\rho_1 x_{1ref} - 4\gamma\rho_1 x_{1ref}^2 - 2\gamma\rho_2 x_{1ref} + \gamma^2\rho_1^2 x_{1ref}^2 + \gamma^2\rho_2^2 x_{1ref}^2 \\ &\quad - 4\nu\gamma\rho_1 x_{1ref} - 2\gamma^2\rho_1\rho_2 x_{1ref}^2 + 1 \\ N &= k_1 - k_2\rho_2 + k_1\sqrt{M} - 2k_2\rho_1 x_{1ref} - k_2\rho_2\sqrt{M} - \gamma k_1\rho_2 x_{1ref} \\ &\quad + \gamma k_2\rho_2^2 x_{1ref} \end{aligned} \quad (3-15)$$

3.4. Desempeño de la estrategia ZAD con aproximación por rectas a tramos de la superficie de conmutación

A continuación se muestran algunos gráficos de la evolución del ciclo de trabajo calculado periodo a periodo.

El sistema se simula manteniendo fijos los parámetros k_1 y k_2 . En cada una de las gráficas se tomaron $x_{1ref} = 2, 1$, $T = 0, 18$, $\gamma = 0.1860$, $\rho_1 = 0.2782$, $\rho_2 = 0.2371$ y $\nu = 0.0274$. El ciclo de trabajo se ha normalizado, en las figuras. Las líneas rojas corresponden a los valores de referencia de tensión y corriente.

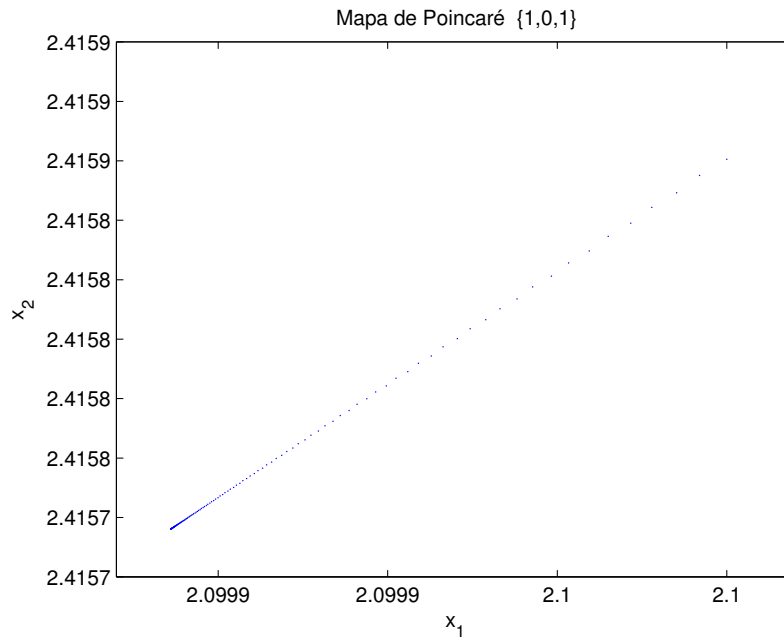


Figura 3-4: Evolución del sistema

En la Figura 3-4 el sistema evoluciona al punto fijo estable $(2.0998, 2.4157)^T$ de la aplicación de Poincaré, que corresponde a una órbita $1T$ -periódica del sistema (2-14).

En la Figura 3-4 se ha escogido $k_1 = -0.38$ y $k_2 = 0.5$

$$|2.1 - 2.0998| = 0.0002$$

$$|2.4159 - 2.4157| = 0.0002$$

cuyos errores relativos son 0.0095 % para la tensión y 0.0082 % para la corriente , lo cual nos permite decir que el sistema del convertidor boost con resistencias parásitas tiene una buena capacidad de seguir la señal de referencia constante.

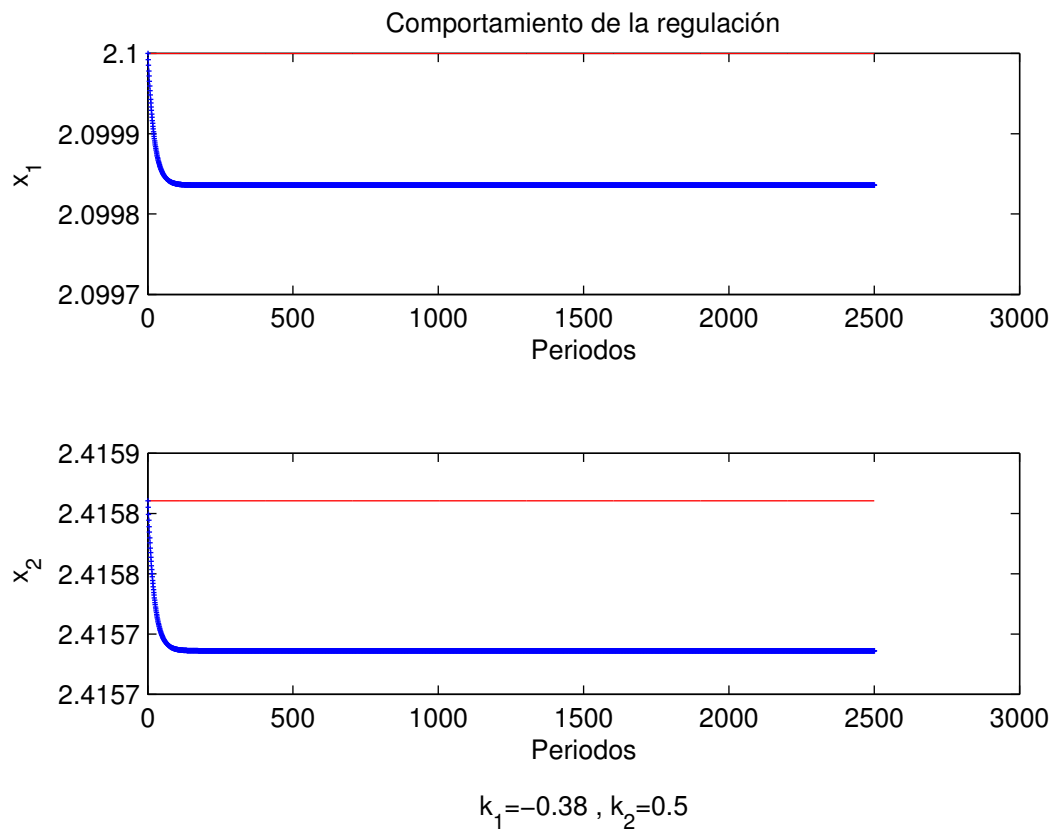


Figura 3-5: Comportamiento de la regulación

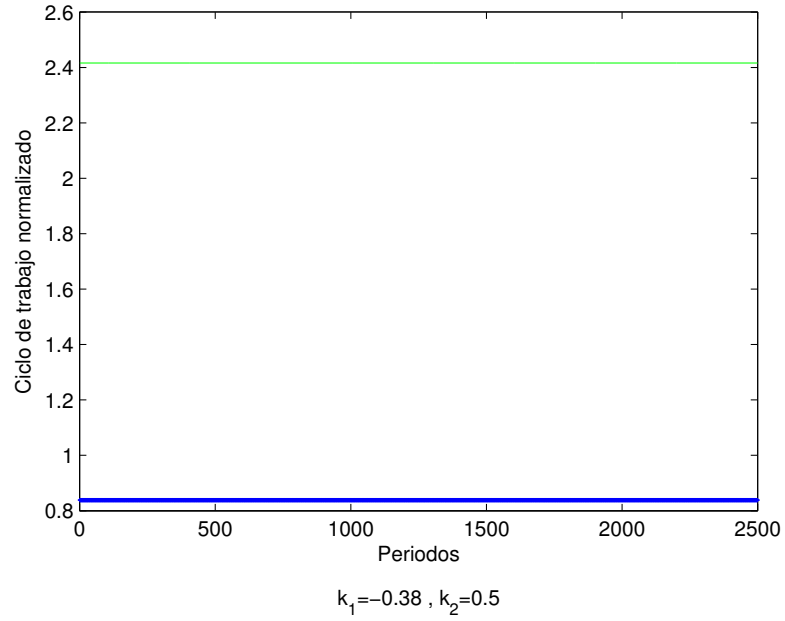


Figura 3-6: Evolución del ciclo de trabajo

La Figura 3-7 corresponde al atractor caótico, en esta gráfica se ha tomado $k_1 = 0.375$ y $k_2 = 0.5$

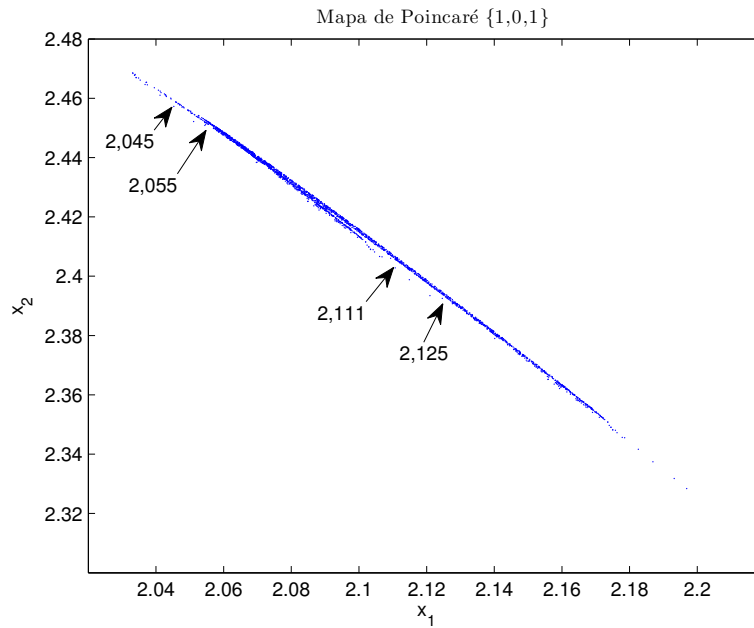


Figura 3-7: Atractor caótico

En la Figura 3-8 se observa que el sistema presenta una regulación aceptable, tanto en tensión como en corriente.

$$|2.1 - 2.1290| = 0.029$$

$$|2.4159 - 2.3905| = 0.0254$$

cuyos errores relativos son 1.38 % para la tensión y 1.051 % para la corriente.

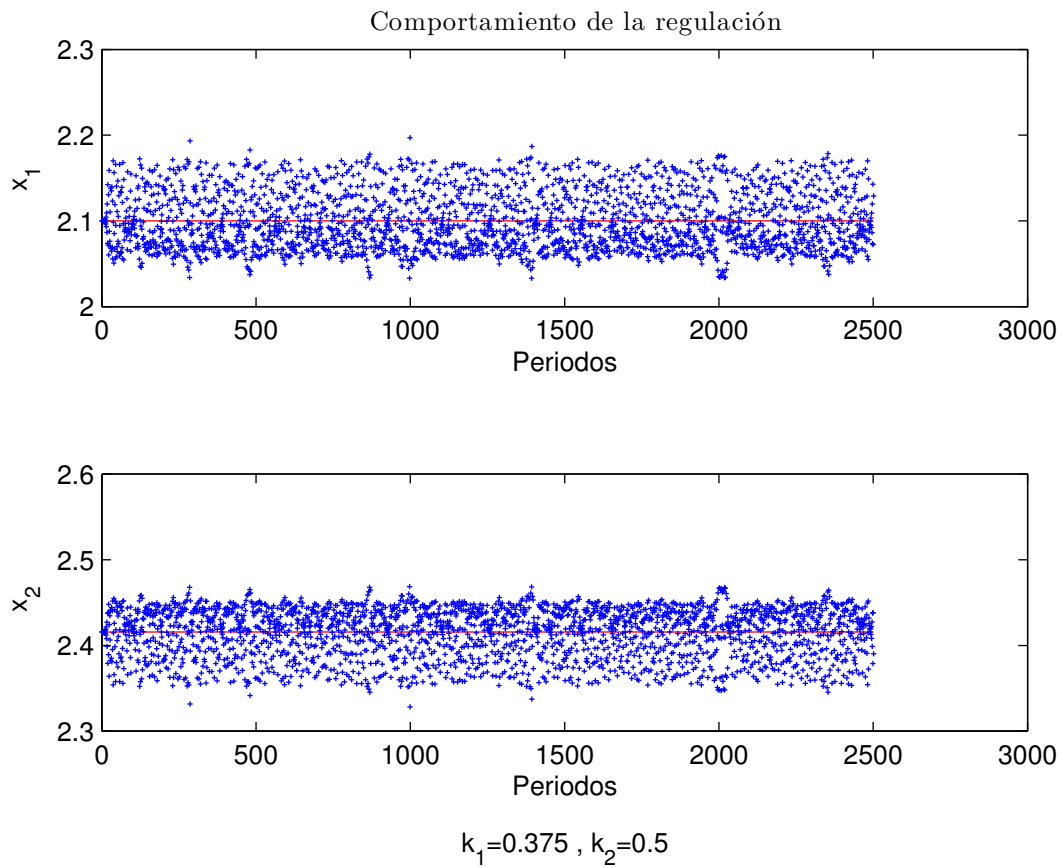


Figura 3-8: Comportamiento de la regulación

La Figura 3-9 nos muestra que el sistema está operando en régimen caótico.

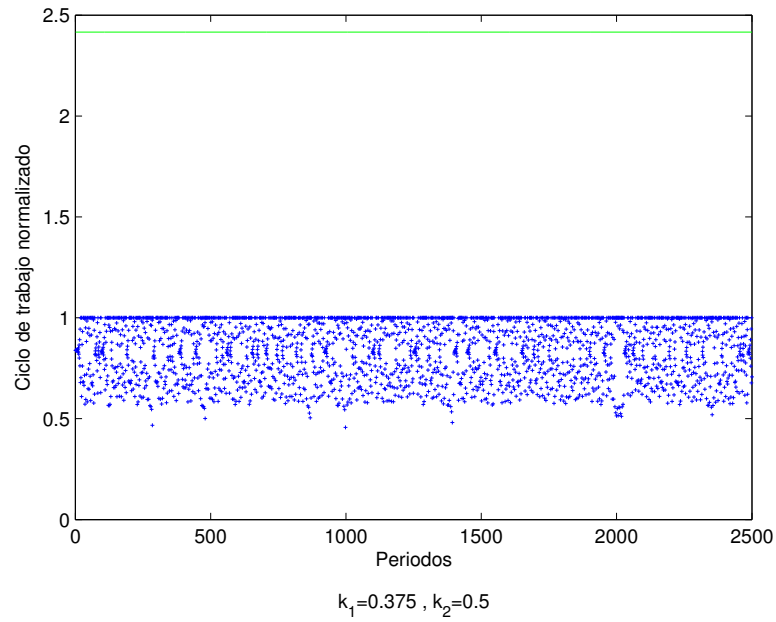


Figura 3-9: Evolución del ciclo de trabajo

La Figura 3-10 corresponde al atractor caótico, en esta gráfica se ha tomado $k_1 = 0.375$ y $k_2 = 0.5$

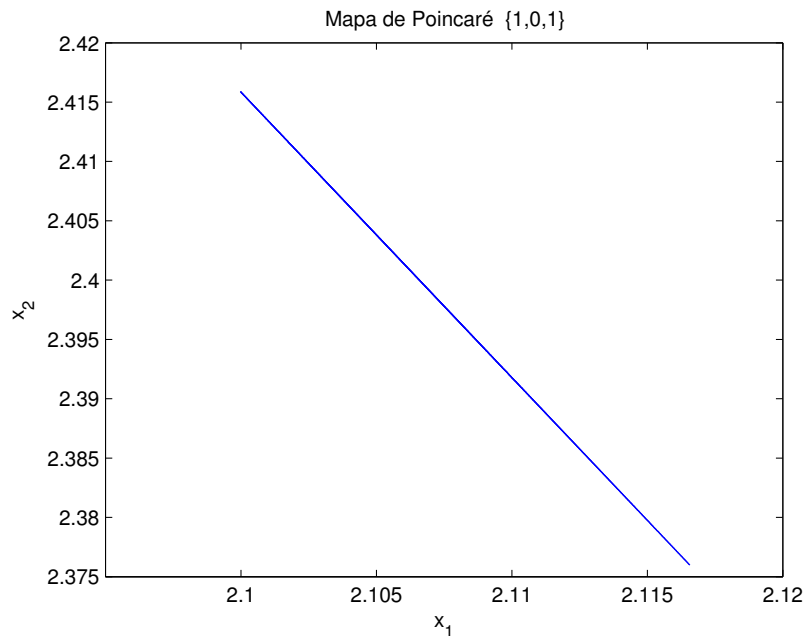


Figura 3-10: Atractor caótico

En la Figura 3-11 se observa que el sistema presenta una regulación aceptable, tanto en tensión pero no para la corriente .

$$|2.1 - 2.1166| = 0.0166$$

$$|2.4159 - 2.3760| = 0.0399$$

cuyos errores relativos son 0.79 % para la tensión y 1.65 % para la corriente.

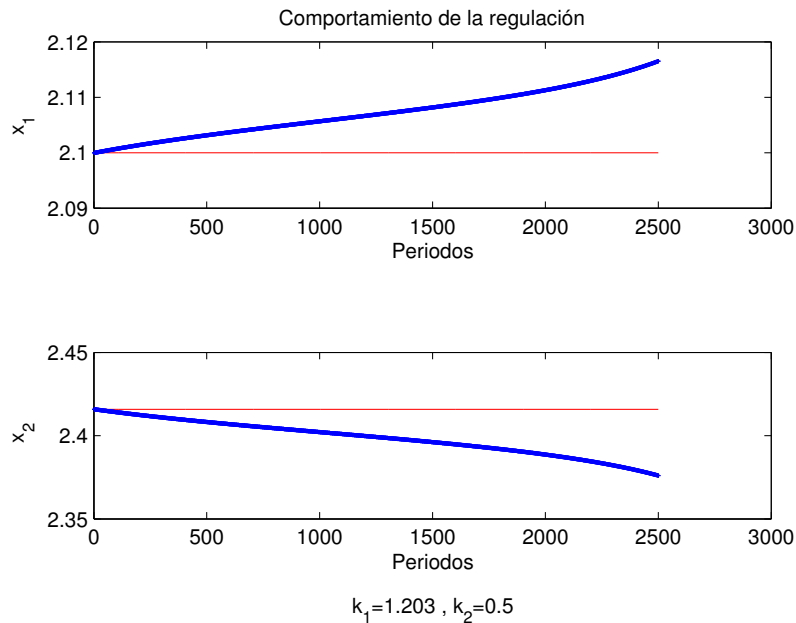


Figura 3-11: Comportamiento de la regulación

La Figura 3-12 nos muestra que el sistema está operando en régimen caótico.

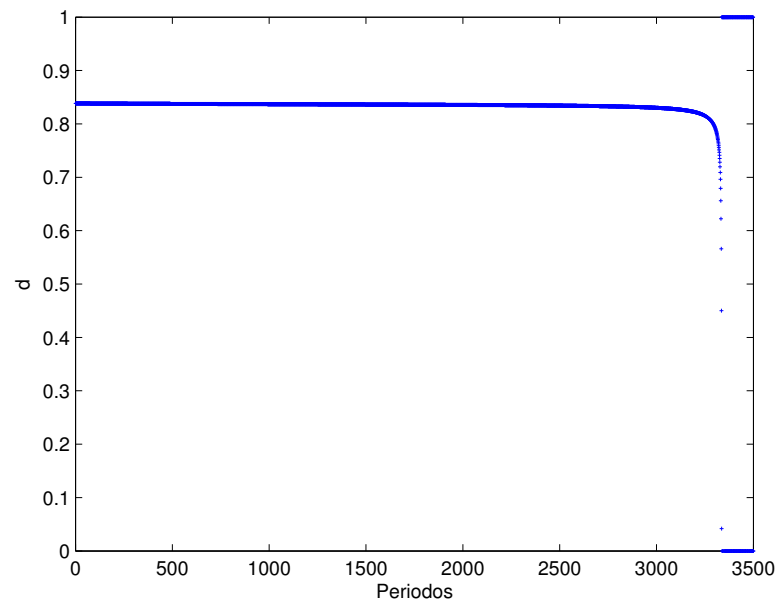


Figura 3-12: Evolución del ciclo de trabajo

4 Existencia y Estabilidad de órbitas Periódicas

Resumen:

En este capítulo se obtiene analíticamente la estabilidad para órbitas $2T$ -periódicas, además de la estabilidad de otras órbitas a través de los valores propios de la matriz Jacobiana de la aplicación de Poincaré.

Para determinar las órbitas periódicas del sistema (2-14), haremos uso de las expresiones del mapa de Poincaré (3-11), (3-12) y (3-13), las cuales corresponde a sus puntos fijos.

4.1. Órbitas 1-T Periódicas

Hallaremos los puntos fijos de la aplicación de Poincaré en el caso en que no hay saturación del ciclo de trabajo $P(x_n, d_n) = x_0(nT)$ donde $P(x_n, d_n)$ es la ecuación dada en (3-11), e igualando a $x_0(nT)$:

$$\begin{aligned} x_0(nT) &= \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \phi_2(T - d_n) \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) x_0(nT) \\ &+ \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \phi_2(T - d_n) \psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) + \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \psi_2(T - d_n) \\ &+ \psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \end{aligned} \quad (4-1)$$

Así,

$$\begin{aligned} x_0(nT) &= \left[I_2 - \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \phi_2(T - d_n) \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \right]^{-1} \\ &+ \left[\phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \phi_2(T - d_n) \psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) + \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \psi_2(T - d_n) + \psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (4-2)$$

Haciendo $A = \left[I_2 - \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \phi_2(T - d_n) \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \right]^{-1}$ la existencia de órbitas 1T-periódicas se restringe a la invertibilidad de la matriz A , y esta es invertible si el radio espectral de

$\phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right)\phi_2(T-d_n)\phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right)$ es menor que 1.

En la Figura 4-1 se ha fijado el periodo $T = 0.18s$ y variado γ en el intervalo $(0.1, 0.5)$ y se aprecia que el radio espectral de la matriz $\phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right)\phi_2(T-d_n)\phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right)$ es menor que 1, por tanto la matriz A es no singular.

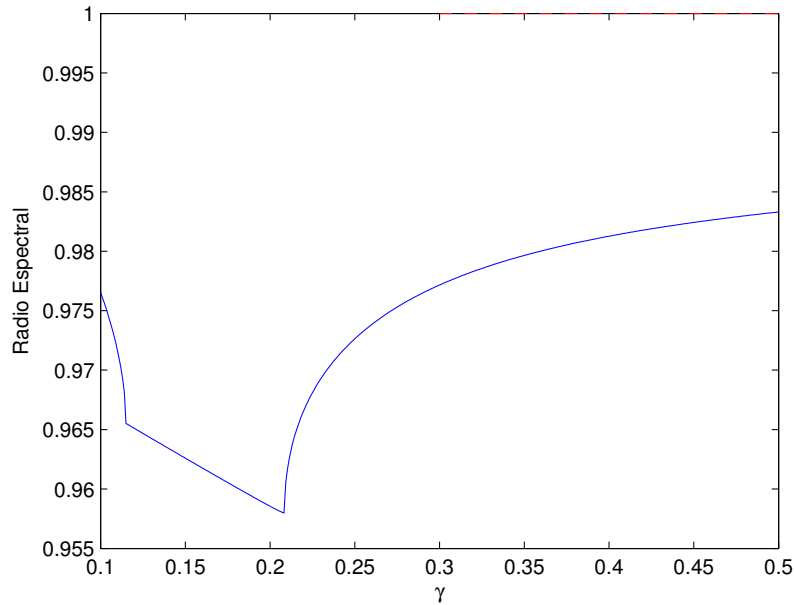


Figura 4-1: Evolución temporal de la tensión y de la corriente.

Cuando hay saturación del ciclo de trabajo, obtenemos las siguientes condiciones suficientes para la existencia de órbitas 1T-periódicas:

1. Si $d_n = 0$,

$$x_0(nT) = [I_2 - \phi_2(T)]^{-1} \psi_2(T) \quad (4-3)$$

2. Si $d_n = T$,

$$x_0(nT) = [I_2 - \phi_1(T)]^{-1} \psi_1(T) \quad (4-4)$$

El radio espectral de la matriz $\phi_1(T)$ es justamente 1, así que la fórmula dada en 2 no es aplicable. Nótese que en el caso 1:, la existencia (condición suficiente) de órbitas 1T-periódicas depende únicamente del valor que tomen en T las funciones ψ_2, ϕ_2 .

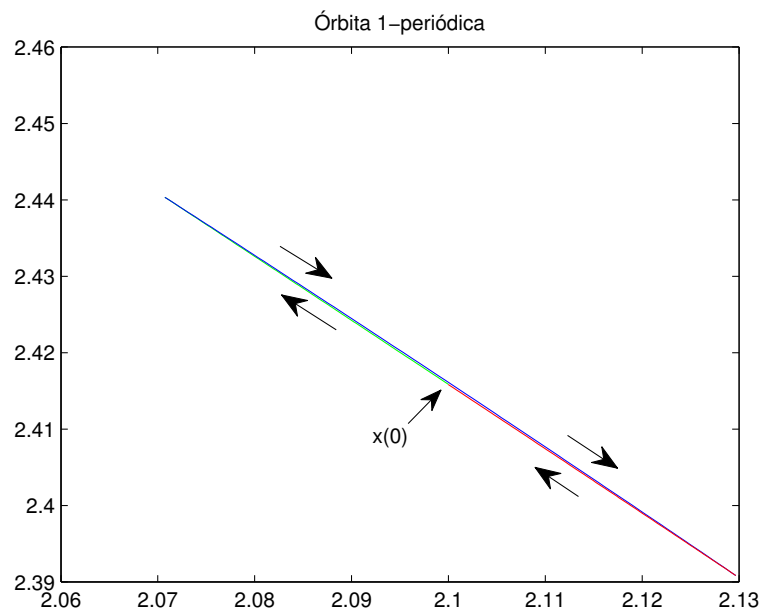


Figura 4-2: Órbita 1T-periódica en el esquema CPWM

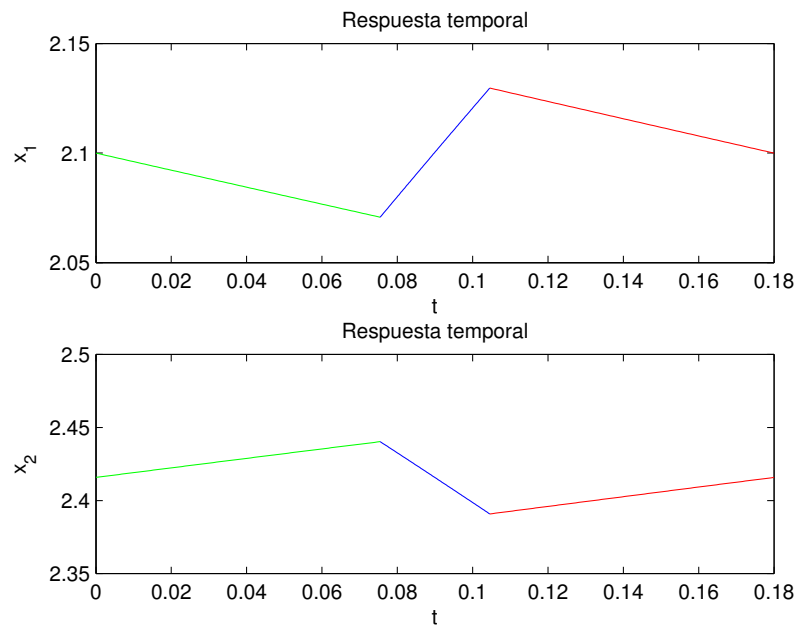


Figura 4-3: Evolución temporal de la tensión y de la corriente.

4.2. Órbitas 2T-periódicas

Las órbitas 2T-periódicas corresponden a dos ciclos de la aplicación de Poincaré. Se pueden presentar tres tipos de órbitas 2T-periódicas:

4.2.1. Órbitas 2T-periódicas no saturadas

Para este caso los ciclos de trabajo d_n y \tilde{d}_n no son saturadas, es decir pertenecen al intervalo $(0, T)$, Supongamos que $\{x_0, x_1\}$ son puntos de la órbita 2T-periódica no saturada, entonces a partir de (3-11) se tiene que:

$$\begin{aligned}
 x_1((n+1)T) &= \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \phi_2(T-d_n) \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) x_0(nT) \\
 &+ \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \phi_2(T-d_n) \psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) + \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \psi_2(T-d_n) \\
 &+ \psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{4-5}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
 x_2((n+2)T) &= \phi_1\left(\frac{\tilde{d}_n}{2}\right) \phi_2(T-\tilde{d}_n) \phi_1\left(\frac{\tilde{d}_n}{2}\right) x_1((n+1)T) \\
 &+ \phi_1\left(\frac{\tilde{d}_n}{2}\right) \phi_2(T-\tilde{d}_n) \psi_1\left(\frac{\tilde{d}_n}{2}\right) + \phi_1\left(\frac{\tilde{d}_n}{2}\right) \psi_2(T-\tilde{d}_n) \\
 &+ \psi_1\left(\frac{\tilde{d}_n}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{4-6}$$

Como no hay saturación de los ciclos de trabajo, entonces $d_n \in (0, T)$ y $\tilde{d}_n \in (0, T)$.

Al ser un 2 ciclo se debe tener que $x_0(nT) = x_2((n+2)T)$ por lo tanto

$$\begin{aligned}
 x_0((n)T) &= \phi_1\left(\frac{\tilde{d}_n}{2}\right) \phi_2(T-\tilde{d}_n) \phi_1\left(\frac{\tilde{d}_n}{2}\right) x_1((n+1)T) \\
 &+ \phi_1\left(\frac{\tilde{d}_n}{2}\right) \phi_2(T-\tilde{d}_n) \psi_1\left(\frac{\tilde{d}_n}{2}\right) + \phi_1\left(\frac{\tilde{d}_n}{2}\right) \psi_2(T-\tilde{d}_n) \\
 &+ \psi_1\left(\frac{\tilde{d}_n}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{4-7}$$

Sustituyendo (4-5) en (4-7) y despejando $x_0(nT)$ tenemos

$$x_0((n)T) = [I_2 - A]^{-1} \cdot (B(C + D) + J) \tag{4-8}$$

siendo

$$\begin{aligned}
A &= B \cdot \phi_1 \left(\frac{d_n}{2} \right) \phi_2 (T - d_n) \phi_1 \left(\frac{d_n}{2} \right) \\
B &= \phi_1 \left(\frac{\tilde{d}_n}{2} \right) \phi_2 (T - \tilde{d}_n) \phi_1 \left(\frac{\tilde{d}_n}{2} \right) \\
C &= \phi_1 \left(\frac{d_n}{2} \right) \phi_2 (T - d_n) \psi_1 \left(\frac{d_n}{2} \right) \\
D &= \phi_1 \left(\frac{d_n}{2} \right) \psi_2 (T - d_n) + \psi_1 \left(\frac{d_n}{2} \right) \\
J &= \phi_1 \left(\frac{\tilde{d}_n}{2} \right) \phi_2 (T - \tilde{d}_n) \psi_1 \left(\frac{\tilde{d}_n}{2} \right) + \phi_1 \left(\frac{\tilde{d}_n}{2} \right) \psi_2 (T - \tilde{d}_n) \psi_1 \left(\frac{\tilde{d}_n}{2} \right)
\end{aligned} \tag{4-9}$$

Numéricamente se tiene que la matriz $I_2 - A$ es invertible, ya que el radio espectral de la matriz A es menor que 1. Esto nos muestra que existen órbitas 2T-periódicas no saturadas

4.2.2. Órbitas 2T-periódicas semi-saturadas

Estas se presentan cuando en la aplicación de Poincaré le corresponde dos ciclos el cual uno pertenece al intervalo $(0, T)$ y el otro satura en T .

Supongamos que el 2-ciclo corresponde a $\{x_0, x_1\}$, si $d_n \in (0, T)$ entonces

$$\begin{aligned}
x_1((n+1)T) &= \phi_1 \left(\frac{d_n}{2} \right) \phi_2 (T - d_n) \phi_1 \left(\frac{d_n}{2} \right) x_0(nT) \\
&+ \phi_1 \left(\frac{d_n}{2} \right) \phi_2 (T - d_n) \psi_1 \left(\frac{d_n}{2} \right) + \phi_1 \left(\frac{d_n}{2} \right) \psi_2 (T - d_n) \\
&+ \psi_1 \left(\frac{d_n}{2} \right)
\end{aligned} \tag{4-10}$$

Haciendo $\tilde{d}_n = T$, entonces de la relación (3-13) tenemos que

$$x_2((n+2)T) = \phi_1(T) x_1((n+1)T) + \psi_1(T) \tag{4-11}$$

Hacemos $x_0((n)T) = x_2((n+2)T)$ y obtenemos condiciones iniciales para la existencia de órbitas 2T-periódicas semi-saturadas, de (4-11) tenemos:

$$x_0((n)T) = \phi_1(T) x_1((n+1)T) + \psi_1(T) \tag{4-12}$$

Sustituyendo el valor de (4-10) en (4-12) se tiene

$$x_0((n)T) = [I_n - A]^{-1} \cdot (B + C) \tag{4-13}$$

$$\begin{aligned}
A &= \phi_1(T) \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \phi_2(T - d_n) \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \\
B &= \phi_1(T) \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \phi_2(T - d_n) \psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \\
C &= \phi_1(T) \left(\phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \psi_2(T - d_n) + \psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \right) + \psi_1(T)
\end{aligned} \tag{4-14}$$

El radio espectral de A es menor que 1 por tanto $(I_2 - A)$ es invertible

4.2.3. Órbitas 2T-periódicas saturadas

Estas órbitas corresponden a los ciclos de orden 2 de la aplicación de Poincaré cuyos ciclos de trabajo son saturados en 0 y en T . Supongamos nuevamente que los puntos a los cuales corresponde el 2-ciclo son $\{x_0, x_1\}$. De (3-12) y (3-13) se sigue que

$$x_1((n+1)T) = \phi_2(T)x_0(nT) + \psi_2(T) \tag{4-15}$$

y

$$x_2((n+2)T) = \phi_1(T)x_1((n+1)T) + \psi_1(T) \tag{4-16}$$

Haciendo $x_0(nT) = x_2((n+2)T)$ se tiene

$$x_0(nT) = \phi_1(T)x_1((n+1)T) + \psi_1(T)$$

$$x_0(nT) = \phi_1(T) [\phi_2(T)x_0(nT) + \psi_2(T)] + \psi_1(T)$$

$$x_0(nT) = \phi_1(T)\phi_2(T)x_0(nT) + \phi_1(T)\psi_2(T) + \psi_1(T)$$

$$x_0(nT) - \phi_1(T)\phi_2(T)x_0(nT) = \phi_1(T)\psi_2(T) + \psi_1(T)$$

$$[I_2 - \phi_1(T)\phi_2(T)]x_0(nT) = \phi_1(T)\psi_2(T) + \psi_1(T)$$

con lo que finalmente obtenemos

$$x_0(nT) = [I_2 - \phi_1(T)\phi_2(T)]^{-1} [\phi_1(T)\psi_2(T) + \psi_1(T)] \tag{4-17}$$

esta condición inicial depende únicamente del periodo T

4.3. Estabilidad de las órbitas periódicas

En esta sección se hace un análisis detallado de la estabilidad de las órbitas 1T-periódicas haciendo uso de los multiplicadores característicos. La idea es hallar la matriz Jacobiana de la aplicación de Poincaré y evaluarla en los puntos fijos de dicha aplicación. Es conocido que si los valores propios de la Jacobiana evaluada en los puntos de equilibrio, están dentro del círculo unidad (frontera de estabilidad), entonces la órbita 1T-periódica es estable, y si existe un valor propio fuera del círculo unidad, entonces la órbita 1T-periódica es inestable

4.3.1. Jacobiano de la aplicación de Poincaré

Para hallar la matriz Jacobiana de la aplicación de Poincaré, debemos tener en cuenta que esta se encuentra definida por tres casos:

1. Vamos a suponer que $d_n \in (0, T)$, es decir el ciclo de trabajo no satura, para este caso la aplicación de Poincaré viene dada por la expresión (3-11). Aplicando la regla de la cadena tenemos:

$$JP = \frac{\partial P}{\partial x_n} + \frac{\partial P}{\partial d_n} \cdot \frac{\partial d_n}{\partial x_n} \quad (4-18)$$

De (3-11) se tiene que

$$\frac{\partial P}{\partial x_n} = \phi_1 \left(\frac{d_n}{2} \right) \phi_2(T - d_n) \phi_1 \left(\frac{d_n}{2} \right) \quad (4-19)$$

Teniendo en cuenta las expresiones (2-16) y (2-17) tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1(\frac{d_n}{2})}{\partial d_n} &= \frac{1}{2} A_1 e^{A_1(\frac{d_n}{2})} = \frac{1}{2} A_1 \phi_1 \left(\frac{d_n}{2} \right) \\ \frac{\partial \phi_2(T - d_n)}{\partial d_n} &= -A_2 e^{A_2(T-d_n)} = -A_2 \phi_2(T - d_n) \\ \frac{\partial \psi_1(\frac{d_n}{2})}{\partial d_n} &= \frac{1}{2} \cdot e^{A_1(\frac{d_n}{2})} \cdot B_1 = \frac{1}{2} \phi_1 \left(\frac{d_n}{2} \right) \cdot B_1 \\ \frac{\partial \psi_2(T - d_n)}{\partial d_n} &= -e^{A_2(T-d_n)} \cdot B_2 = -\phi_2(T - d_n) \cdot B_2 \end{aligned} \quad (4-20)$$

Definimos

$$\begin{aligned} M &= \phi_1 \left(\frac{d_n}{2} \right) \phi_2(T - d_n) \phi_1 \left(\frac{d_n}{2} \right) \\ N &= \phi_1 \left(\frac{d_n}{2} \right) \phi_2(T - d_n) \psi_1 \left(\frac{d_n}{2} \right) \\ Q &= \phi_1 \left(\frac{d_n}{2} \right) \psi_2(T - d_n) + \psi_1 \left(\frac{d_n}{2} \right) \end{aligned} \quad (4-21)$$

Tomando las derivadas parciales respecto a d_n tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial d_n} &= \frac{\partial \phi_1(\frac{d_n}{2})}{\partial d_n} \phi_2(T - d_n) \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) + \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \frac{\partial \phi_2(T - d_n)}{\partial d_n} \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \\
&+ \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \phi_2(T - d_n) \frac{\partial \phi_1(\frac{d_n}{2})}{\partial d_n} \\
\frac{\partial N}{\partial d_n} &= \frac{\partial \phi_1(\frac{d_n}{2})}{\partial d_n} \phi_2(T - d_n) \psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) + \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \frac{\partial \phi_2(T - d_n)}{\partial d_n} \psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \\
&+ \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \phi_2(T - d_n) \frac{\partial \psi_1(\frac{d_n}{2})}{\partial d_n} \\
\frac{\partial Q}{\partial d_n} &= \frac{\partial \phi_1(\frac{d_n}{2})}{\partial d_n} \psi_2(T - d_n) + \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \frac{\partial \psi_2(T - d_n)}{\partial d_n} + \frac{\partial \psi_1(\frac{d_n}{2})}{\partial d_n}
\end{aligned} \tag{4-22}$$

Sustituyendo (4-20) en (4-22) se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial d_n} &= \left[\frac{1}{2} A_1 \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \right] \phi_2(T - d_n) \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \\
&+ \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) [-A_2 \phi_2(T - d_n)] \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \\
&+ \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \phi_2(T - d_n) \left[\frac{1}{2} A_1 \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \right] \\
\frac{\partial N}{\partial d_n} &= \left[\frac{1}{2} A_1 \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \right] \phi_2(T - d_n) \psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \\
&+ \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) [-A_2 \phi_2(T - d_n)] \psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \\
&+ \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \phi_2(T - d_n) \left[\frac{1}{2} \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \cdot B_1 \right] \\
\frac{\partial Q}{\partial d_n} &= \left[\frac{1}{2} A_1 \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \right] \psi_2(T - d_n) + \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) [-\phi_2(T - d_n) \cdot B_2] \\
&+ \left[\frac{1}{2} \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \cdot B_1 \right]
\end{aligned} \tag{4-23}$$

Tenemos así que:

$$\frac{\partial P}{\partial d_n} = \frac{\partial M}{\partial d_n} \cdot x_n + \frac{\partial N}{\partial d_n} + \frac{\partial Q}{\partial d_n} \tag{4-24}$$

Sea ahora $x_n = (x_1^n, x_2^n)^T$. Tenemos así que:

$$\frac{\partial d_n}{\partial x_n} = \left[\frac{\partial d_n}{\partial x_1^n}, \frac{\partial d_n}{\partial x_2^n} \right] \tag{4-25}$$

De las expresiones (3-6) y (1-1) se tiene

$$\frac{\partial d_n}{\partial x_i^n} = \frac{(2\frac{\partial s}{\partial x_i^n} + T\frac{\partial \dot{s}_2}{\partial x_i^n})(\dot{s}_2 - \dot{s}_1) - (2s + T\dot{s}_2)(\frac{\partial \dot{s}_2}{\partial x_i^n} - \frac{\partial \dot{s}_1}{\partial x_i^n})}{(\dot{s}_2 - \dot{s}_1)^2} \quad (4-26)$$

De (1-1) Tenemos

$$s = k_1(x_1^n - x_{1ref}) + k_2(x_2^n - x_{2ref})$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_i^n} = k_i \quad \frac{\partial s}{\partial x_1^n} = k_1 \quad \frac{\partial s}{\partial x_2^n} = k_2 \quad (4-27)$$

De (3-3) y (3-4) Se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{s}_2 &= k_1(x_2^n - \gamma x_1^n) - k_2(\nu + x_1^n + \rho_2 x_2^n - 1) \\ \dot{s}_1 &= -k_2(\rho_1 x_2^n - 1) - \gamma k_1 x_1^n \end{aligned} \quad (4-28)$$

Para simplificar llamaremos $D = \dot{s}_2 - \dot{s}_1$ y $F = 2s + T\dot{s}_2$, así

$$\begin{aligned} D &= \dot{s}_2 - \dot{s}_1 = k_1 x_2^n - k_2(x_1^n - \rho_1 x_2^n + \rho_2 x_2^n + \nu) \\ F &= 2s + T\dot{s}_2 \\ F &= 2k_1(x_1^n - x_{1ref}) + k_2(x_2^n - x_{2ref}) + T(k_1(x_2^n - \gamma x_1^n) \\ &\quad - k_2(\nu + x_1^n + \rho_2 x_2^n - 1)) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \dot{s}_2}{\partial x_1^n} = -\gamma k_1 - k_2 \quad \frac{\partial \dot{s}_2}{\partial x_2^n} = k_1 - k_2 \rho_2 \quad \frac{\partial \dot{s}_1}{\partial x_1^n} = -\gamma k_1 \quad \frac{\partial \dot{s}_1}{\partial x_2^n} = -k_2$$

Remplazando en (4-26) Obtenemos:

$$\frac{\partial d_n}{\partial x_1^n} = \frac{(2k_1 - T(\gamma k_1 + k_2))D + Fk_2}{(D)^2} \quad (4-29)$$

y

$$\frac{\partial d_n}{\partial x_2^n} = \frac{(2k_2 - T(\rho_2 k_2 - k_1))D - F(k_1 - k_2(\rho_2 + \rho_1))}{D^2} \quad (4-30)$$

Así se tiene

$$\frac{\partial d_n}{\partial x_2^n} = \frac{1}{D^2} \left[\begin{array}{c} (2k_1 - T(\gamma k_1 + k_2))D + Fk_2 \\ (2k_2 - T(\rho_2 k_2 - k_1))D - F(k_1 - k_2(\rho_2 + \rho_1)) \end{array} \right] \quad (4-31)$$

2. Si $d_n = 0$, la aplicación de Poincaré viene dada por la relación (3-12) y la matriz Jacobiana viene dada por

$$JP = \phi_2(T) \tag{4-32}$$

3. Si $d_n = T$, la aplicación de Poincaré está dada por la relación (3-13) y en este caso la matriz Jacobiana viene dada por

$$JP = \phi_1(T) \tag{4-33}$$

5 Bifurcaciones

Resumen:

En este capítulo se presenta el análisis del cambio cualitativo del convertidor boost, al variar los parámetros asociados a la superficie de conmutación. En el capítulo anterior se establecieron unos valores específicos para los parámetros a partir de los cuales el sistema experimenta un cambio en la estabilidad de sus órbitas periódicas, estos cambios son cualitativos, por lo tanto, se dice que el sistema experimenta una bifurcación justo en el valor de dicho parámetro.

Para caracterizar el tipo de bifurcación presente, haremos uso de los diagramas de bifurcación, el cual se obtiene de la aplicación de Poincaré dada por las relaciones (3-11), (3-12) y (3-13), y de los valores propios de la matriz Jacobiana evaluada en los puntos de equilibrio del sistema.

5.1. Bifurcaciones

Una bifurcación es un cambio cualitativo de un sistema dinámico, ocurrido al variar uno de los parámetros del sistema [27, 26]. Al revisar los valores propios de la matriz jacobiana asociados a la aplicación de Poincaré, observamos que se obtiene una bifurcación tipo Flip [21], dado que uno de estos valores pasa de ser estable a inestable para un valor del parámetro $k_1 \approx 0,097$. Este tipo de bifurcación pasa por un doblamiento de período, es decir que el sistema pasa de tener una órbita 1-periódica a órbitas 2-periódicas. En las figuras 5-1, 5-2 y 5-3 se ha escogido $\gamma = 0.186$, $T = 0.18s$, $\rho_1 = 0.2782$, $\rho_2 = 0.2371$ y $\nu = 0.0274$. Como condición inicial se tomó $(2.1, 2.4159)^T$.

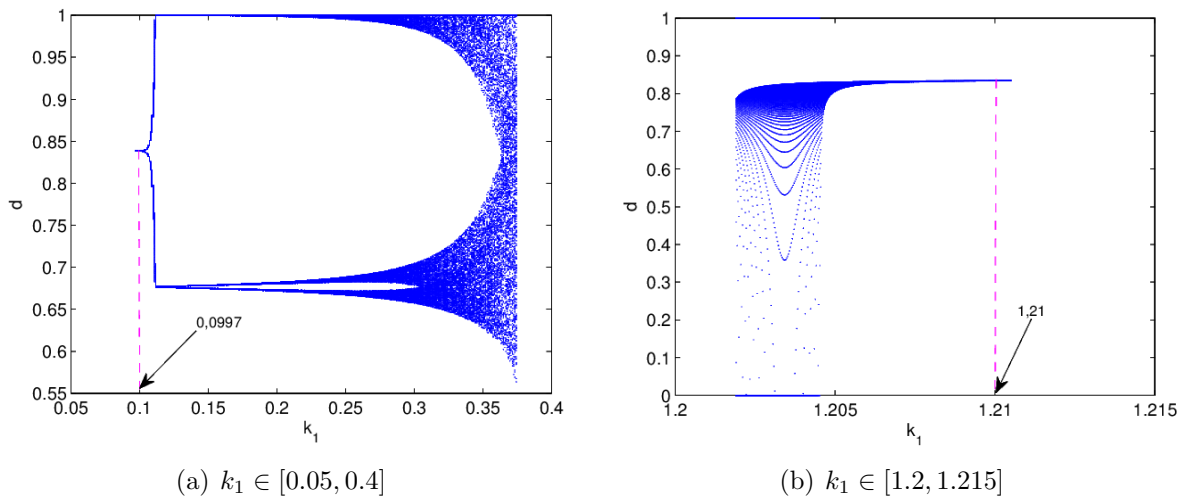


Figura 5-1: Diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo en función de $k_1, k_2 = 0.5$

La curva en color cyan de la Figura 5-1 corresponde a la órbita 1T -periódica que se ha inestabilizado

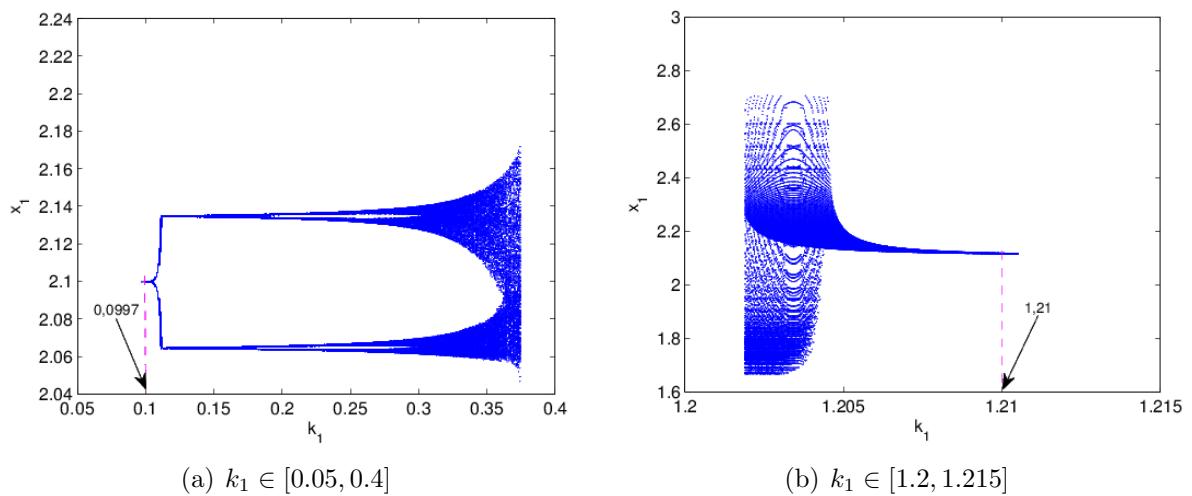


Figura 5-2: Diagrama de bifurcación de la tensión en función de $k_1, k_2 = 0.5$

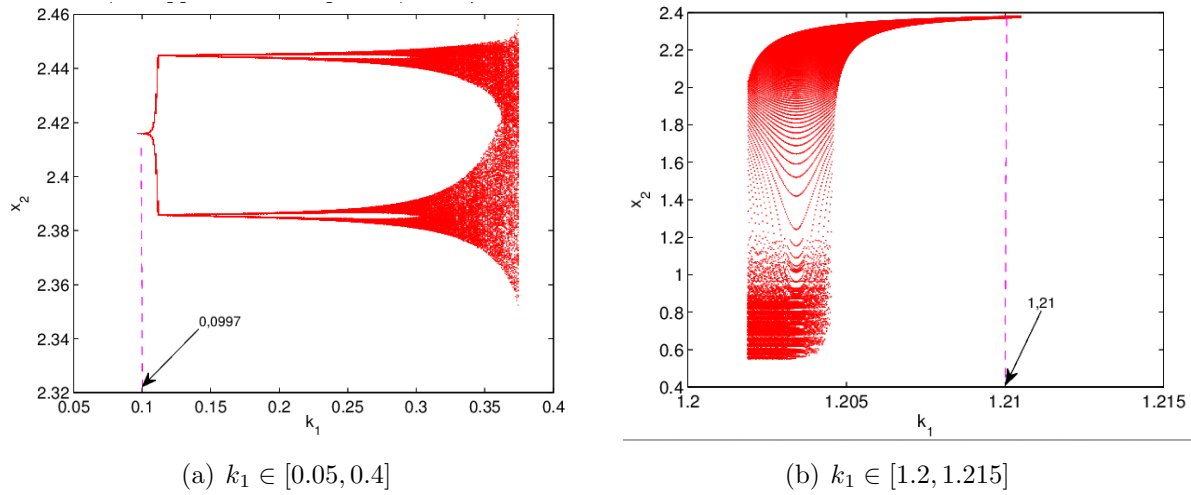


Figura 5-3: Diagrama de bifurcación de la corriente en función de $k_1, k_2 = 0.5$

k_1	λ_1	λ_2	ρ
0.09	0.9231	-0.9986	0.9986
0.094	0.9225	-0.9993	0.9993
0.098	0.9218	-1.0000	1.0000
0.102	0.9212	-1.0008	1.0008
0.106	0.9205	-1.0015	1.0015
0.11	0.9198	-1.0023	1.0023

Tabla 5-1: Valores propios asociados a la variación de $k_1, k_2 = 0.5$

k_1	λ_1	λ_2	ρ
1.2155	-0.9195	-1.0000	1.0000
1.2157	-0.9195	-1.0000	1.0000
1.2159	-0.9196	-1.0000	1.0000
0.102	0.9196	-1.0000	1.0000
1.2164	-0.9196	0.9999	0.9999
1.2166	-0.9196	0.9999	0.9999

Tabla 5-2: Valores propios asociados a la variación de k_1 , $k_2 = 0.5$

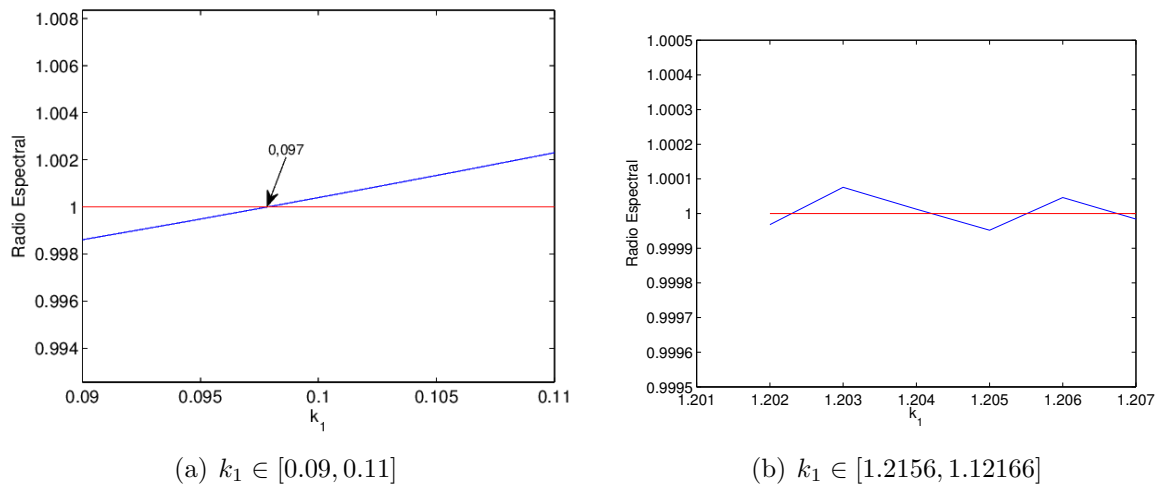


Figura 5-4: Variación del radio espectral en función de k_1 , $k_2 = 0.5$

La variación de los valores propios de la matriz Jacobiana de la aplicación de Poincaré se muestran en la Figura 5-5. En ella vemos que inicialmente los valores propios están dentro del círculo unidad, lo que muestra la estabilidad de la órbita 1T -periódica. Al incrementarse el valor de k_1 los valores propios salen del círculo unidad por -1

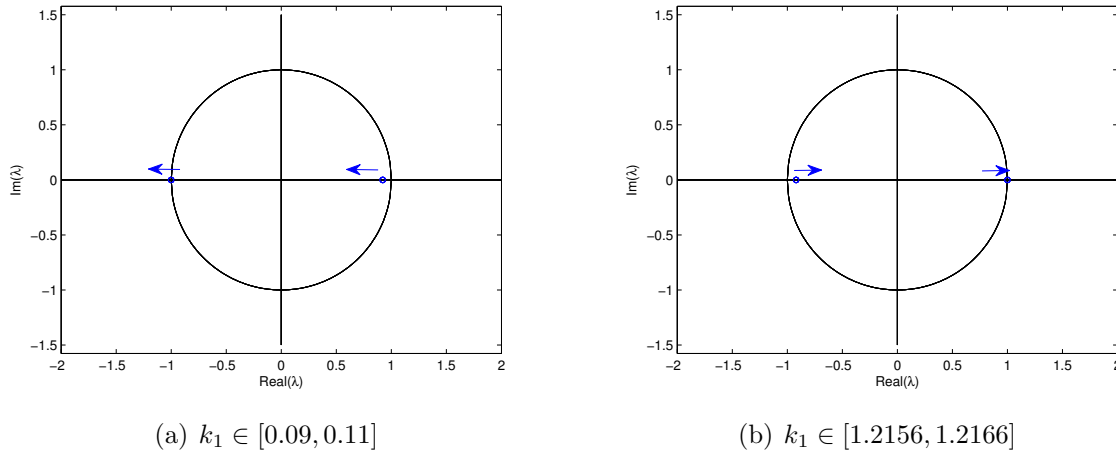


Figura 5-5: Variación de los valores propios en función de $k_1, k_2 = 0.5$

En las figuras 5-6, 5-7, 5-8, 5-9 y 5-10 se escogió $\gamma = 0.186$, $T = 0.18s$, $\rho_1 = 0.2782$, $\rho_2 = 0.2371$ y $\nu = 0.0274$. Como condición inicial se tomó $(2.1, 2.4159)^T$ y $k_2 = -0.5$.

En estas figuras se observa la inestabilidad de las órbitas 1T-periódicas para valores de k_1 menores que -0.097 , después de este valor, la órbita 1T-periódica se hace estable como lo muestra la Tabla 5-4.

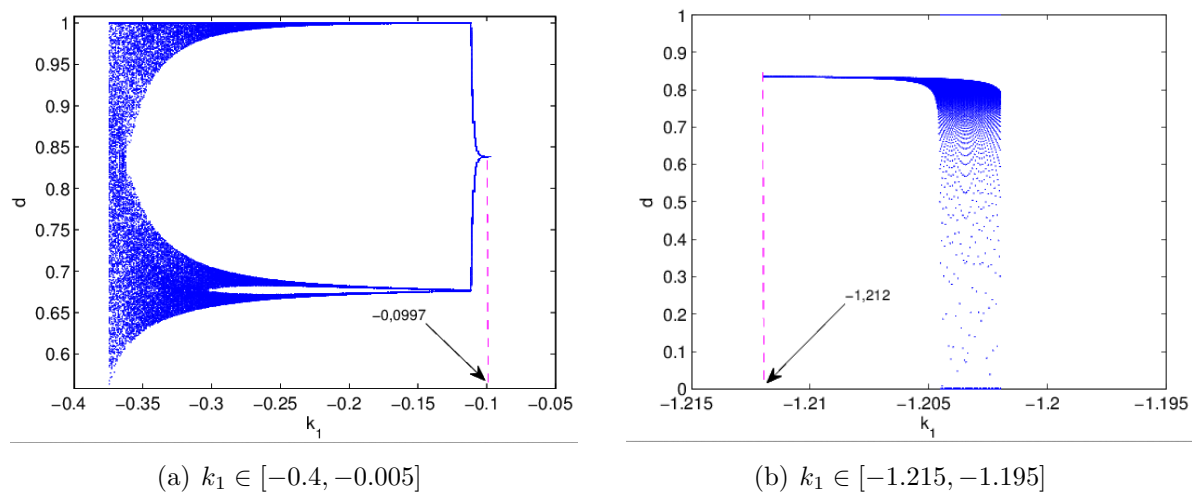


Figura 5-6: Diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo en función de $k_1, k_2 = -0.5$

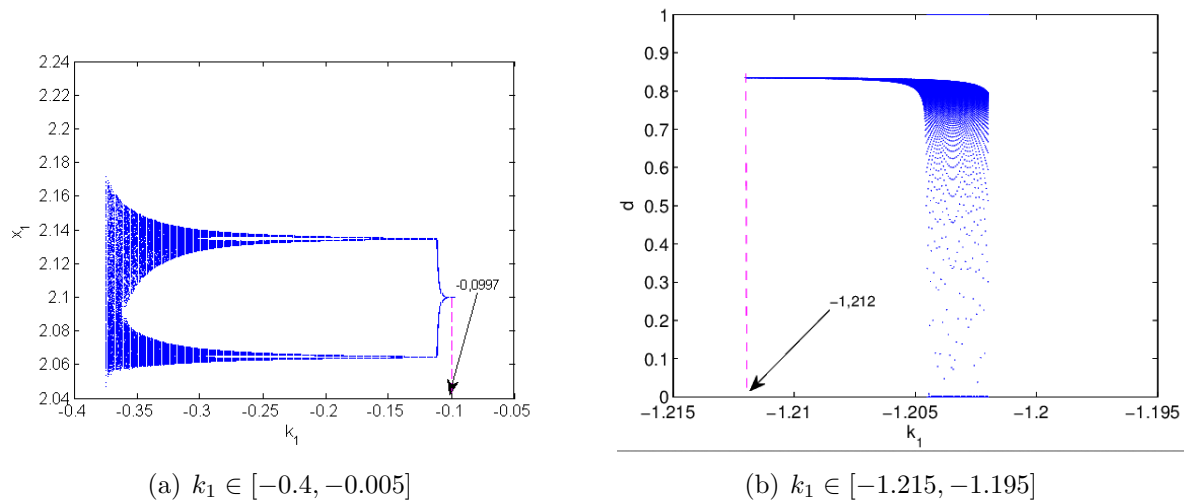


Figura 5-7: Diagrama de bifurcación de la tensión en función de $k_1, k_2 = -0.5$

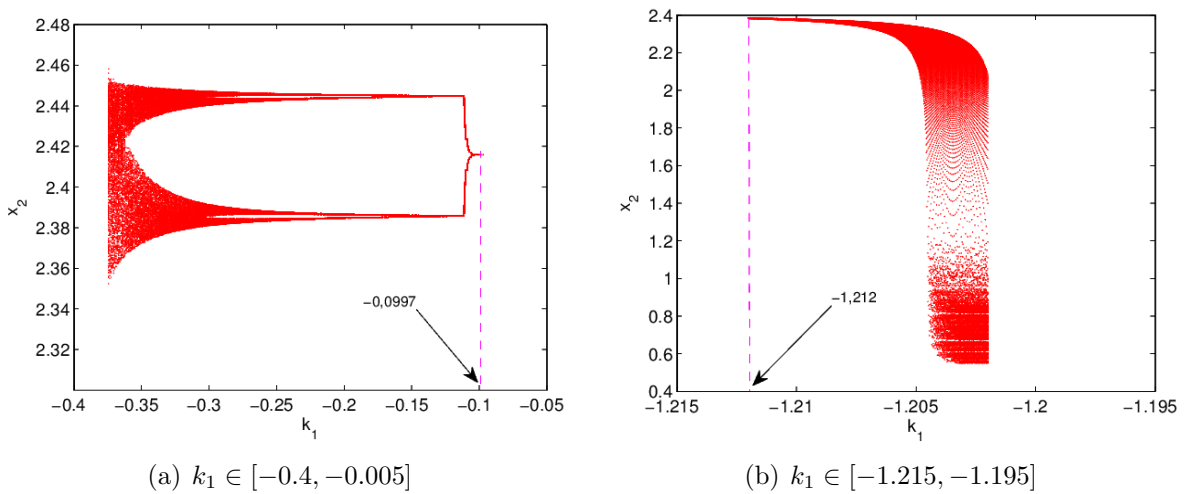


Figura 5-8: Diagrama de bifurcación de la corriente en función de $k_1, k_2 = -0.5$

La Figura 5-9 muestra que inicialmente los valores propios menores a -1 y que ingresan al círculo unidad por -1, justo cuando $k_1 = -0.097$, esta bifurcación es de tipo Flip.

k_1	λ_1	λ_2	ρ
-0.1100	0.9198	-1.0023	1.0023
-0.1050	0.9206	-1.0013	1.0013
-0.1000	0.9215	-1.0004	1.0004
-0.0950	0.9223	-0.9995	0.9995
-0.0900	0.9231	-0.9986	0.9986
-0.0850	0.9239	-0.9978	0.9978

Tabla 5-3: Valores propios asociados a la variación de k_1 , $k_2 = -0.5$

k_1	λ_1	λ_2	ρ
-1.2166	-0.9196	0.9999	0.9999
-1.2164	-0.9196	0.9999	0.9999
-1.2162	-0.9196	1.0000	1.0000
-1.2159	-0.9196	1.0000	1.0000
-1.2157	-0.9195	1.0000	1.0000
-1.2155	-0.9195	1.0000	1.0000

Tabla 5-4: Valores propios asociados a la variación de k_1 , $k_2 = -0.5$

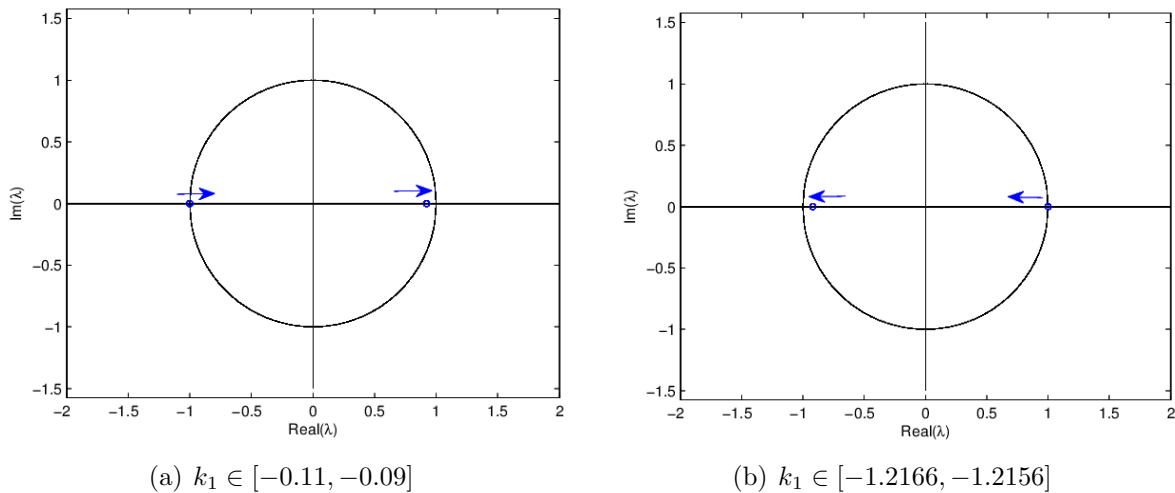


Figura 5-9: Variación de los valores propios en función de k_1 , $k_2 = -0.5$

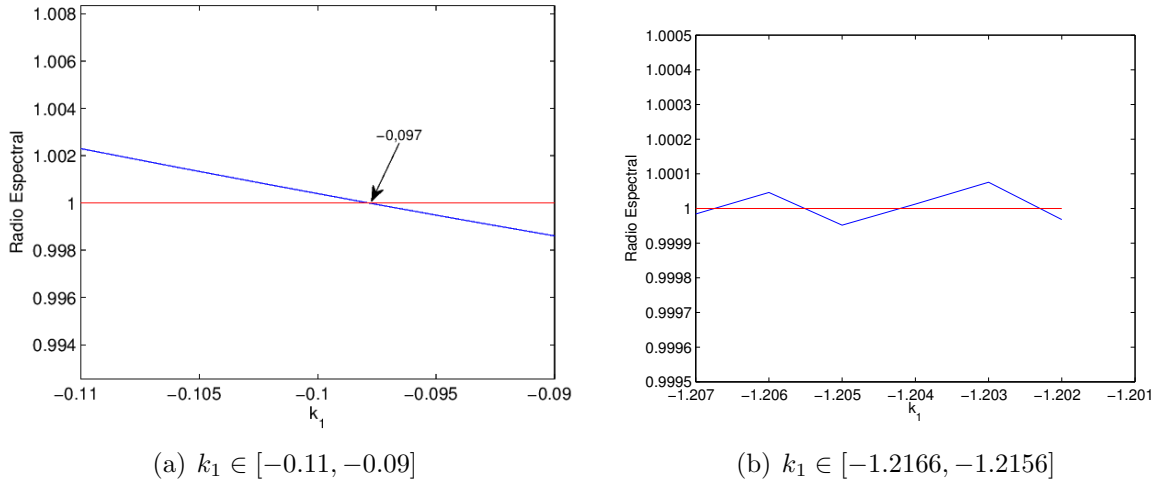


Figura 5-10: Variación del radio espectral en función de $k_1, k_2 = -0.5$

5.2. Simulación del sistema con retardo de tiempo

En algunas plataformas de programación en tiempo real, tales como microcontroladores, DSPs, DSPics, es muy factible que se presenten retardos de tiempo a la hora de hacer control en tiempo real. Y más aun si el con PWM centrado ya que para realizar el muestreo en la mitad del periodo muchas veces hay que recurrir a interrupciones que hacen que el sistema tenga retardo de tiempo.

A continuación se realiza un estudio al convertidor de boost con resistencias parásitas con un período de atraso, para ello debemos considerar el ciclo de trabajo en el estado $t = (1 - n)T$ y no en $t = nT$ ([9]). Por tanto el ciclo de trabajo que debemos usar viene dado por

$$d_c = \frac{2s(x(n-1)T) + T\dot{s}_2(x((n-1)T))}{\dot{s}_2(x((n-1)T)) - \dot{s}_1(x((n-1)T))} \quad (5-1)$$

Como incorporamos un periodo de atraso al sistema, debemos cambiar t por $t - T$, donde T es el periodo de conmutación. La simulación del sistema con retardo de tiempo se muestra en las figuras 5-11, 5-12 y 5-13.

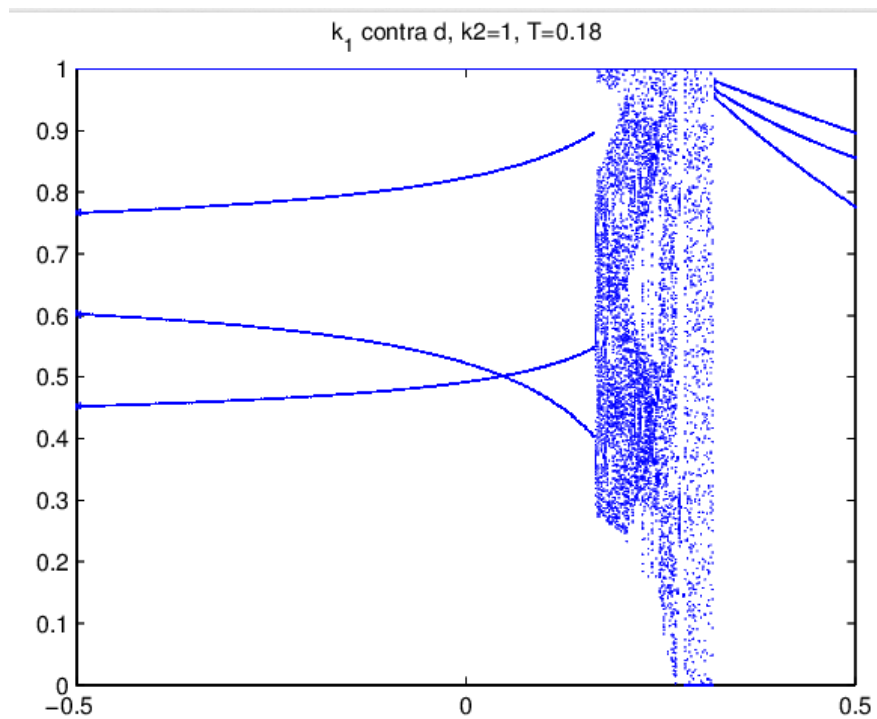


Figura 5-11: Diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo en función de k_1 , $k_2 = 0.5$, cuando se introduce un periodo de atraso.

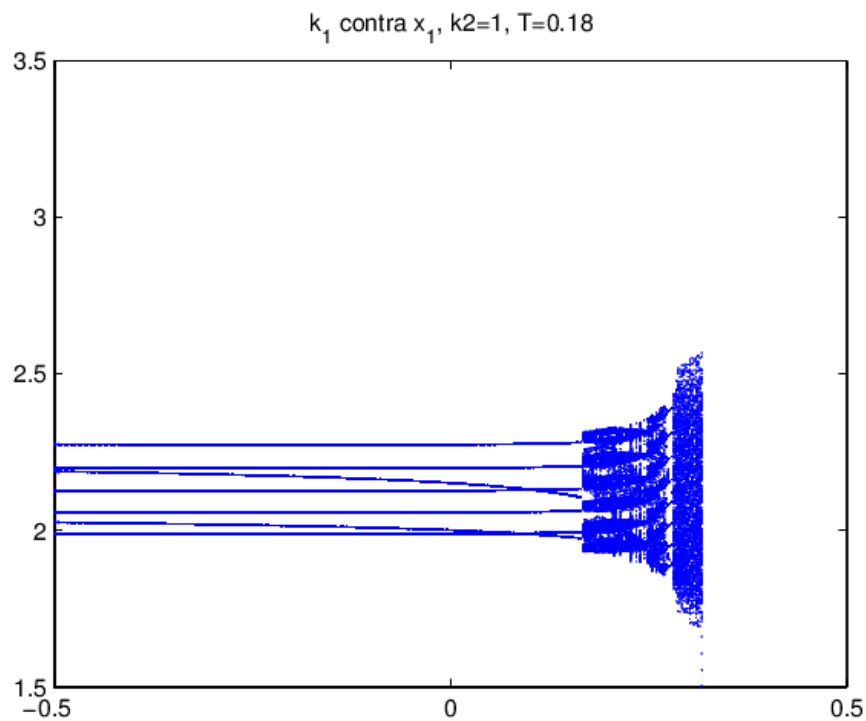


Figura 5-12: Diagrama de bifurcación de la tensión en función de k_1 , $k_2 = 0.5$, cuando se introduce un periodo de atraso

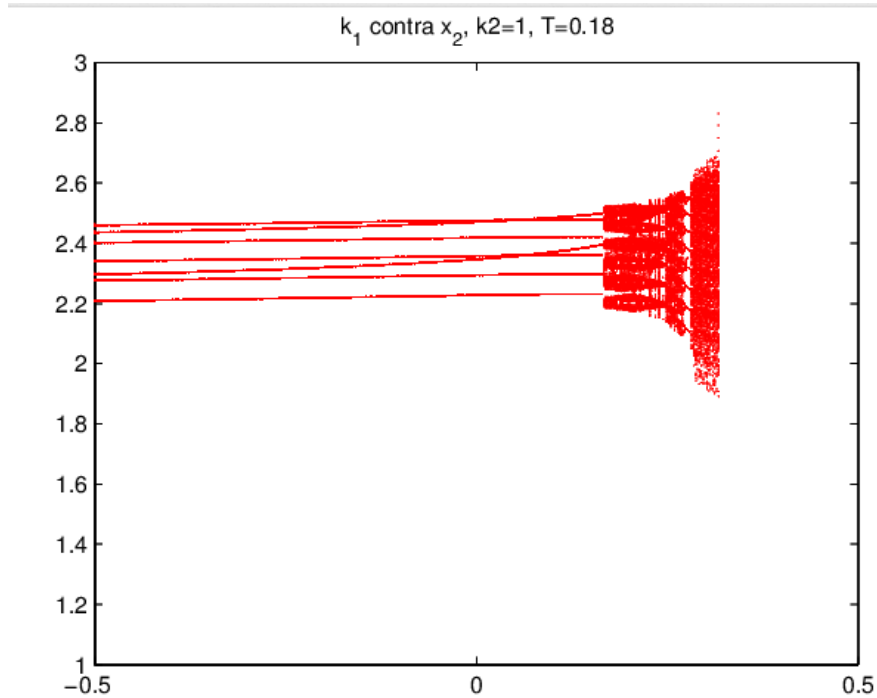


Figura 5-13: Diagrama de bifurcación de la corriente en función de k_1 , $k_2 = 0.5$, cuando se introduce un periodo de atraso

Se escogieron las condiciones $\gamma = 0.1860$, $\rho_1 = 0.2782$, $\rho_2 = 0.2371$, $T = 0.18$, $\nu = 0.0274$ y $k_2 = 2.5$ y como condición inicial $(2.1, 2.4159)^T$. Se ha usado el ciclo de trabajo dado por la relación (6-2).

Si comparamos con los diagramas de bifurcación de las figuras 5.1(a), 5.2(a) y 5.3(a) se observa que la órbita $1T$ -periódica pierde su estabilidad en ciertos rangos en los que antes era estable, por tanto al introducir un retardo de tiempo en el convertidor boost con resistencias parásitas, la región de estabilidad es más pequeña.

6 Existencia y Control de Caos

Resumen:

En este capítulo se hace un estudio de caos en el convertidor boost con resistencias internas, donde se muestra numéricamente la presencia de caos utilizando el cálculo de los exponentes de Lyapunov. Luego se hace control de caos mediante las técnicas FPIC y TDAS.

6.1. Definición de caos.

El Caos es una palabra que originalmente denotaba la completa falta de forma o de organización sistemática, pero que ahora suele utilizarse para indicar la ausencia de un cierto orden que debería estar presente. [19].

Una definición más aceptada es la de un comportamiento aperiódico a largo plazo en un sistema determinístico, comportamiento que exhibe dependencia sensible a las condiciones iniciales.

Es decir, se trata de un comportamiento irregular, en el que cualquier variación en alguna condición inicial, puede ocasionar un cambio drástico en la evolución del sistema [31].

Para el estudio del caos utilizamos la siguiente definición [9].

Definición 1

Un sistema es caótico si satisface las siguientes condiciones:

1. Posee exponentes de Lyapunov positivos
2. Tiene dependencia sensible sobre condiciones iniciales en su dominio
3. Es acotado

Los exponentes de Lyapunov son una herramienta matemática por medio de la cual se puede determinar la velocidad de convergencia o divergencia de dos órbitas de una ecuación diferencial, cuyas condiciones iniciales difieren infinitesimalmente una de la otra.[3]

Definición 2

Sea $D\mathbf{F}(\mathbf{x})$ la matriz Jacobiana de la aplicación de Poincaré y $\lambda_i(D\mathbf{F}(\mathbf{x}))$ el i -ésimo valor propio de $D\mathbf{F}(\mathbf{x})$. El exponente de Lyapunov L_i para cada valor propio viene dado por

$$L_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \log |\lambda_i(D\mathbf{F}(\mathbf{x}))| \right) \quad (6-1)$$

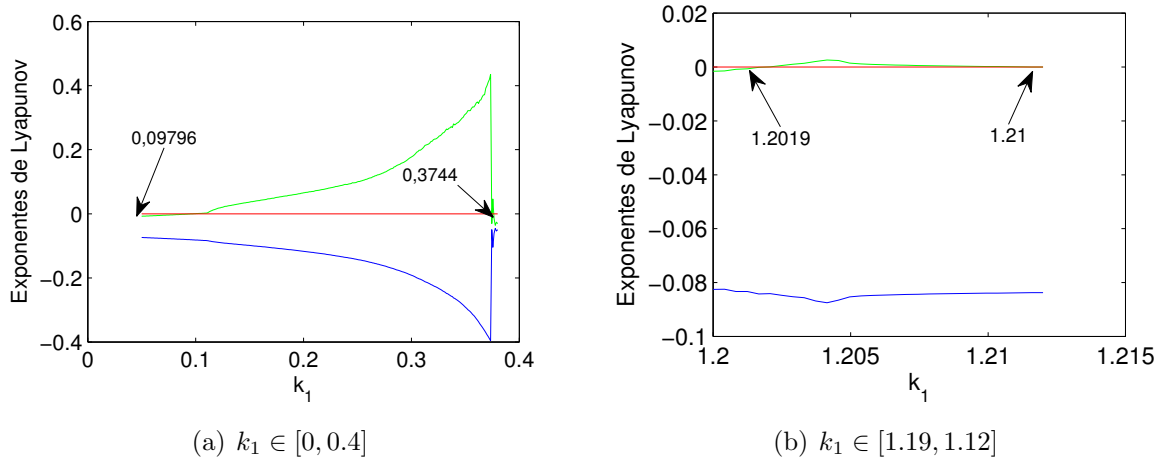


Figura 6-1: Variación de los exponentes de Lyapunov en función de k_1 , $k_2 = 0, 5$

En la Figura 6-1 se confirma la existencia de caos en el convertidor boost con resistencias parásitas, esto es debido a la presencia de exponentes de Lyapunov positivos, En 6.1(a) nos muestra que el caos para la variación del parámetro k_1 se encuentra entre $k_1 = 0,09796$ y $k_1 = 0,3744$, las condiciones iniciales escogidas fueron las mismas utilizadas en los diagramas de bifurcación 5.1(a), 5.2(a) y 5.3(a). En 6.1(b) se tiene que el caos para la variación del parámetro k_1 se encuentra entre $k_1 = 1,2019$ y $k_1 = 1,21$, las condiciones iniciales escogidas fueron las mismas utilizadas en los diagramas de bifurcación 5.1(b), 5.2(b) y 5.3(b).

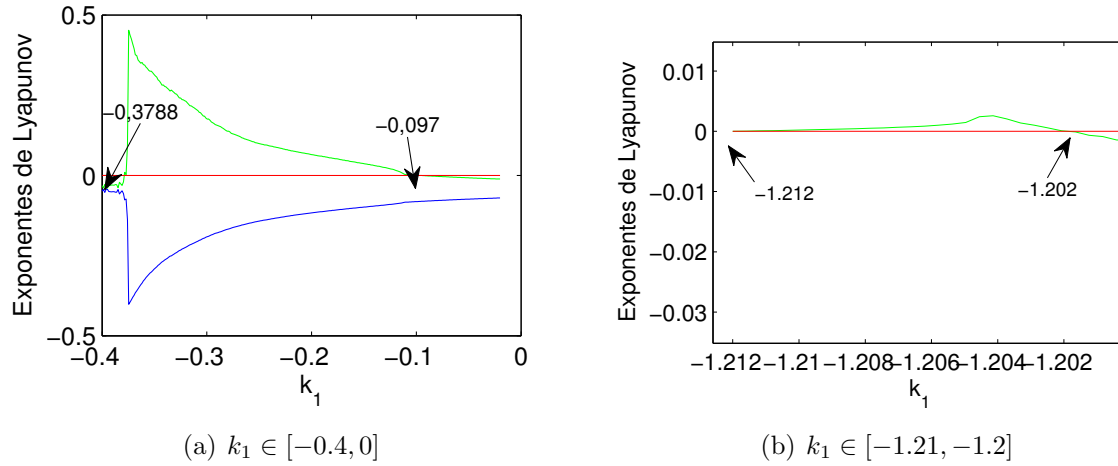


Figura 6-2: Variación de los exponentes de Lyapunov en función de k_1 , $k_2 = -0,5$

En la Figura 6-2 se confirma la existencia de caos en el convertidor boost con resistencias parásitas, esto es debido a la presencia de exponentes de Lyapunov positivos. En 6.2(a) nos muestra que el caos para la variación del parámetro k_1 se encuentra entre $k_1 = -0,3744$ y $k_1 = -0,09796$, las condiciones iniciales escogidas fueron las mismas utilizadas en los diagramas de bifurcación 5.6(a), 5.7(a) y 5.8(a). En 6.2(b) nos muestra que el caos para la variación del parámetro k_1 se encuentra entre $k_1 = -1,21$ y $k_1 = -1,2019$, las condiciones iniciales escogidas fueron las mismas utilizadas en los diagramas de bifurcación 5.6(b), 5.7(b) y 5.8(b).

6.2. Control de caos con FPIC

El sistema estudiado es no autónomo, es decir, está excitado con una señal externa u .

Para controlar el caos que presenta el convertidor boost cuando se le introducen resistencias parásitas con ZAD, en esta sección utilizaremos la técnica FPIC (fixed Point Induced Control).

Teorema 6.2.1 FPIC[4] Consideremos un sistema dinámico discreto descrito por un conjunto de ecuaciones

$$x_{k+1} = f(x_k, u(x_k))$$

donde $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, supongamos que el sistema posee un punto fijo

$$(x^*, u(x^*)) := (x^*, u^*)$$

Al calcular el jacobiano del sistema en este punto fijo obtenemos $J = J_x + J_u$ donde

$$J_x = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(x^*, u^*)} \quad y \quad J_u = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{(x^*, u^*)}$$

Supongamos que el radio espectral de J_x es menor que uno ($\rho(J_x) < 1$), entonces existe una señal de control

$$\hat{u}(k) = \frac{u(x(k)) + Nu^*}{N + 1}$$

que garantiza la estabilidad del punto fijo (x^*, u^*) para algún $N \in \mathbb{R}^+$.

Considerando el ciclo de trabajo del sistema como la variable a controlar, modificamos el ciclo de trabajo así:

$$d(k) = \frac{d_T + Nd_E}{N + 1}$$

donde $d(k)$ es el ciclo de trabajo que se va a aplicar, d_T es el ciclo de trabajo obtenido en (3-6), d_E es el ciclo de trabajo en estado estacionario (3-15) y N una constante arbitraria positiva.

Para poder aplicar la técnica FPIC, primero se debe encontrar el radio espectral de la matriz

$$\frac{\partial p}{\partial x_n} = \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right)\phi_2(T - d_n)\phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \quad (6-2)$$

evaluada en el punto fijo y^* de la aplicación de Poincaré y ver si es menor que 1.

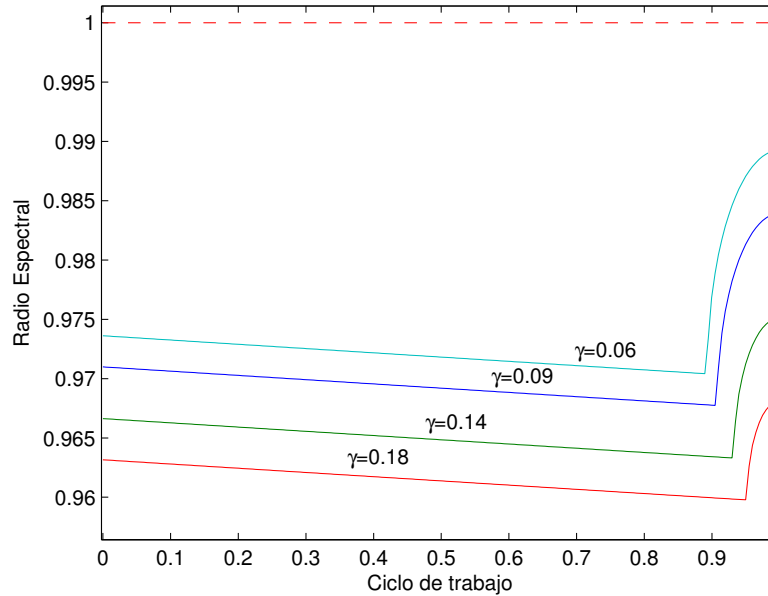


Figura 6-3: Radio espectral en función de γ .

La Figura 6-3 muestra la variación del radio espectral de la matriz $\frac{\partial p}{\partial x_n}$ para varios valores de γ . Por lo tanto la técnica de control FPIC es aplicable al esquema $\{1, 0, 1\}$. La técnica de control garantiza la existencia de un número real positivo.

Las figuras 6-4 , 6-5 y 6-6 muestran 3 diagramas de bifurcación, donde se ve que al escoger $N = 0.06$, disminuye la zona en la que el sistema presenta comportamiento caótico.

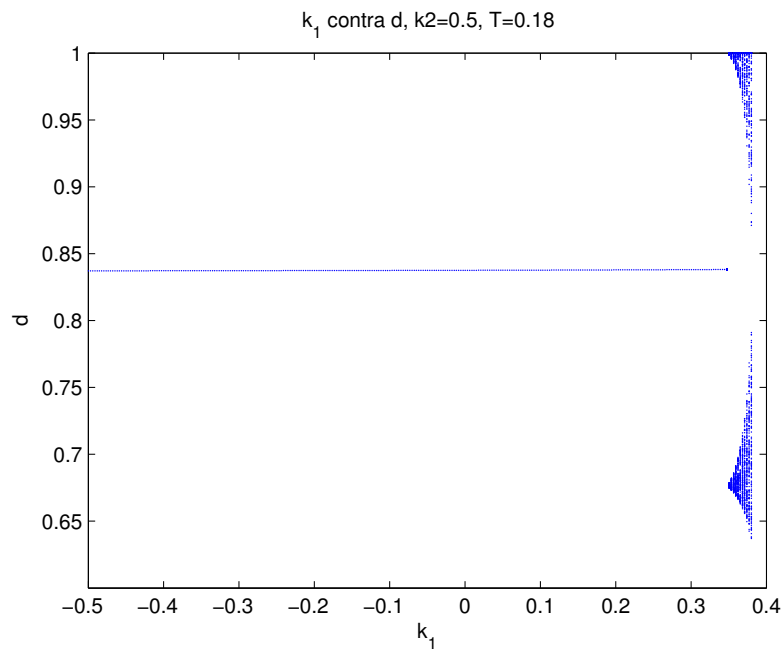


Figura 6-4: Diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo en función de k_1 con $N = 0.06$.

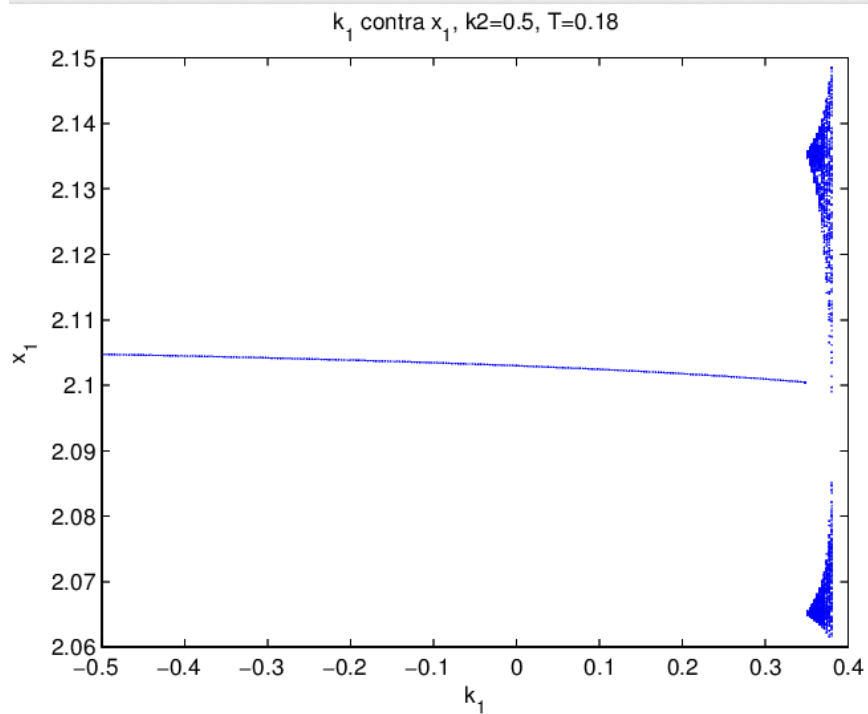


Figura 6-5: Diagrama de bifurcación de la Tensión en función de k_1 con $N = 0.06$.

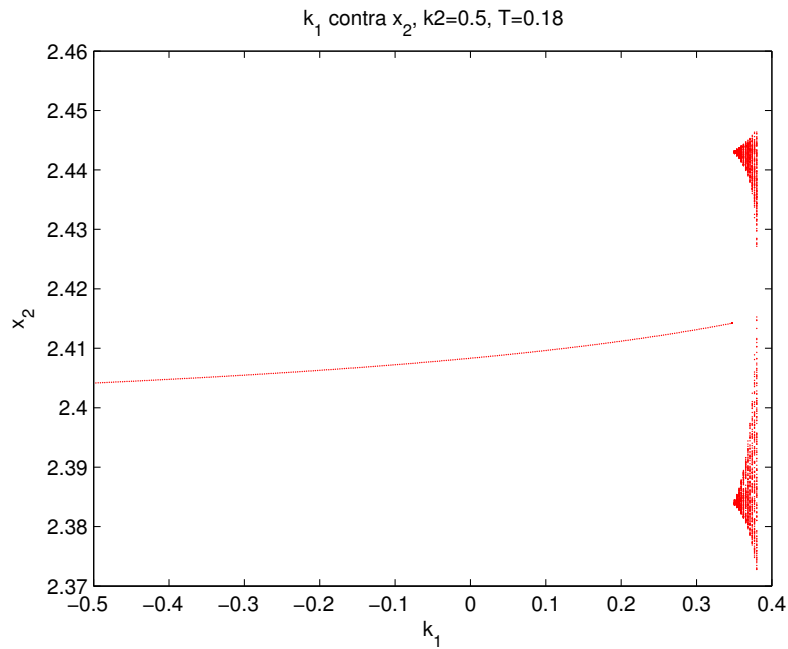


Figura 6-6: Diagrama de bifurcación de la corriente en función de k_1 con $N = 0.06$.

La Figura 6-9 nos muestra que el sistema mejora su capacidad de regulación cuando aplicamos el control FPIC.

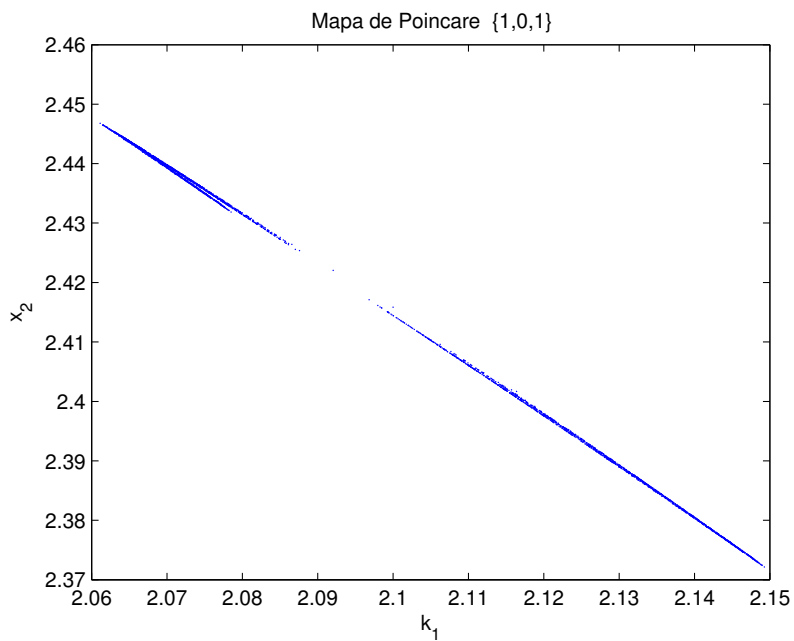


Figura 6-7: Atractor del sistema en el espacio de estados aplicando FPIC con $N = 0.06$.

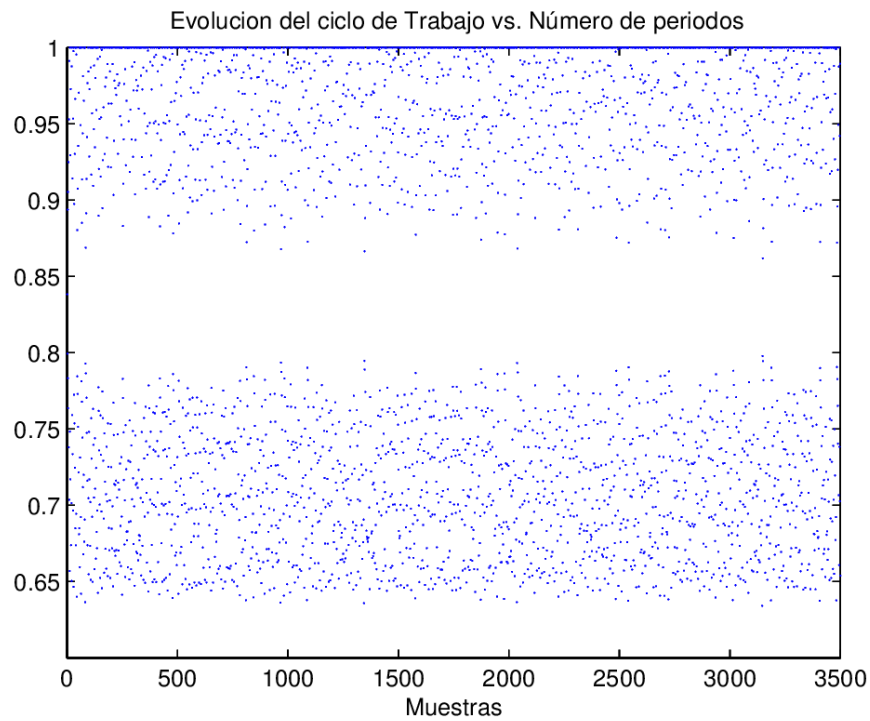


Figura 6-8: Evolución del ciclo de trabajo aplicando FPIC con $N = 0.06$.

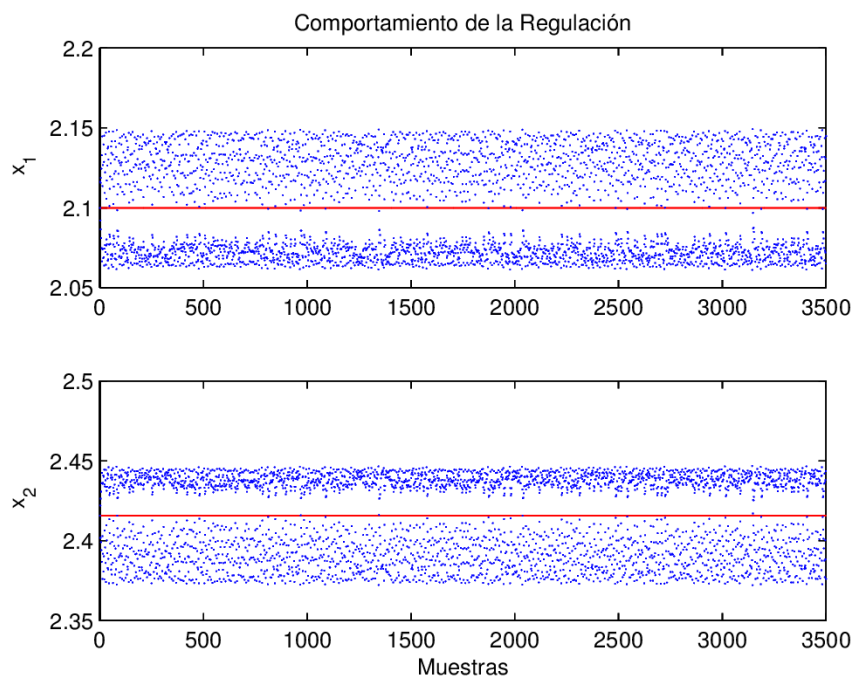


Figura 6-9: Regulación del sistema aplicando FPIC con $N = 0.06$.

Las figuras 6-10 , 6-11 y 6-12 muestran 3 diagramas de bifurcación, donde se vé que

al escoger $N = 0.08$, disminuye considerablemente la zona en la que el sistema presenta comportamiento caótico.

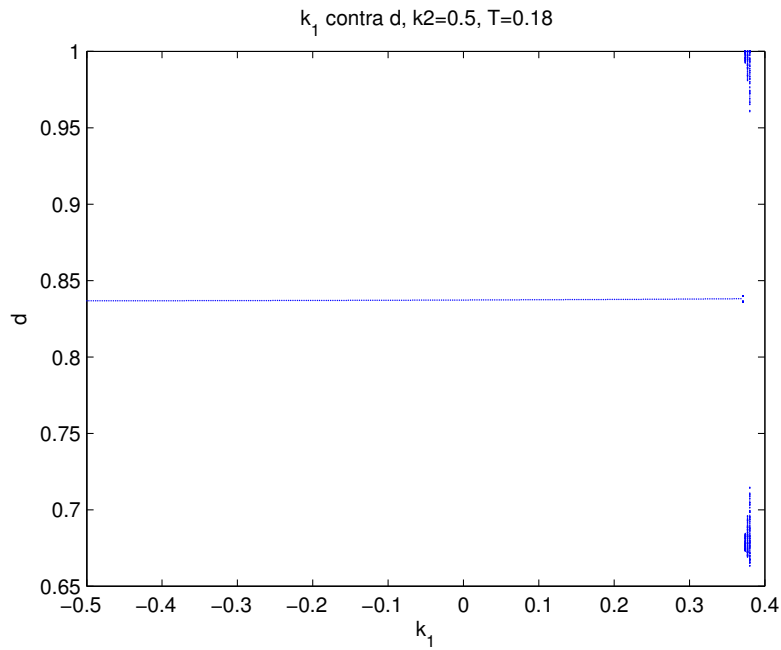


Figura 6-10: Diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo en función de k_1 con $N = 0.08$.

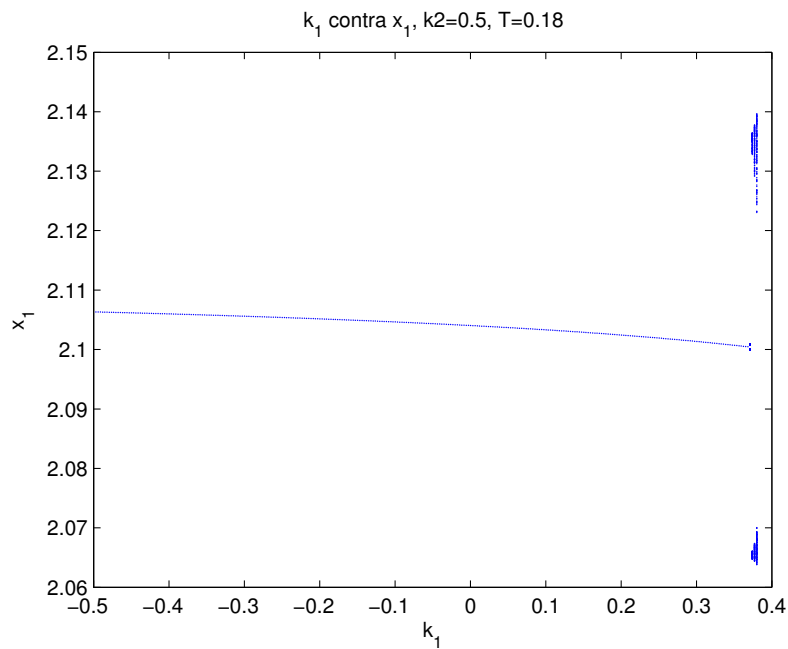


Figura 6-11: Diagrama de bifurcación de la Tensión en función de k_1 con $N = 0.08$.

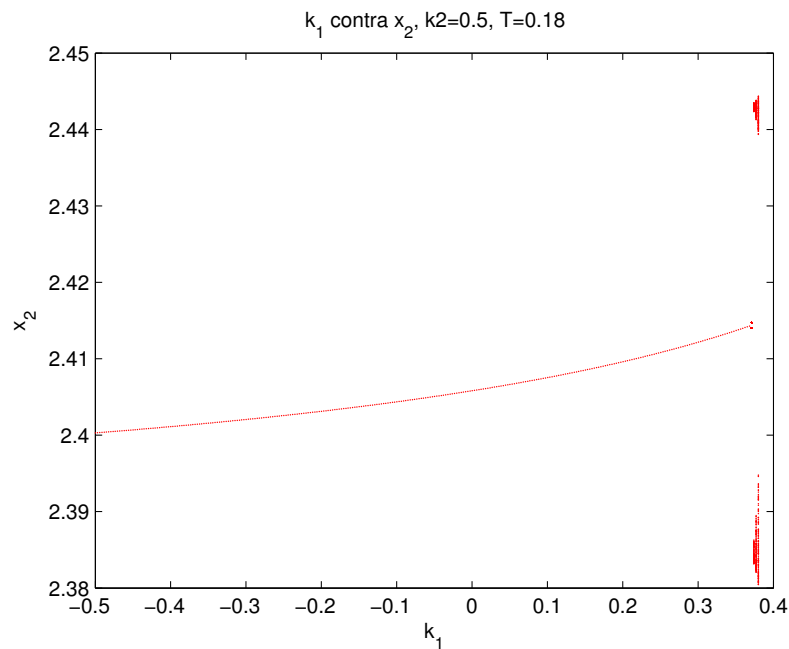


Figura 6-12: Diagrama de bifurcación de la corriente en función de k_1 con $N = 0.08$.

Las figuras 6-13 , 6-14 y 6-15 muestran 3 diagramas de bifurcación, donde se ve que al escoger $N = 0.1$, prácticamente ha desaparecido la zona en la que el sistema presentaba caos.

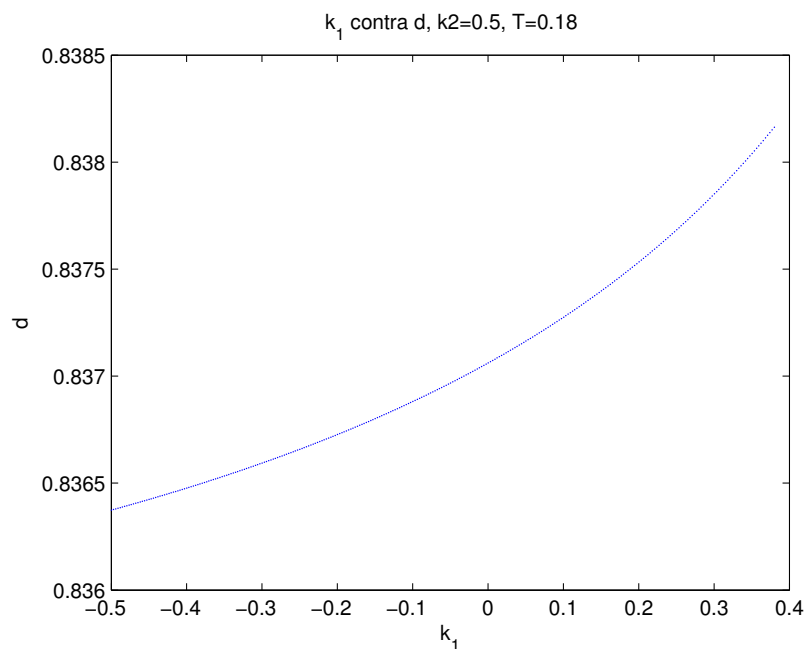


Figura 6-13: Diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo en función de k_1 con $N = 0.1$.

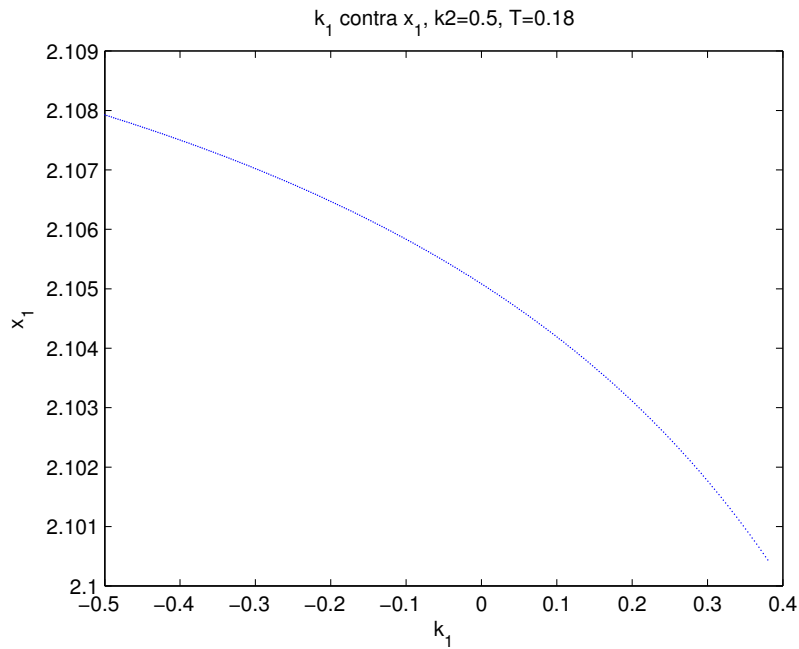


Figura 6-14: Diagrama de bifurcación de la Tensión en función de k_1 con $N = 0.1$.

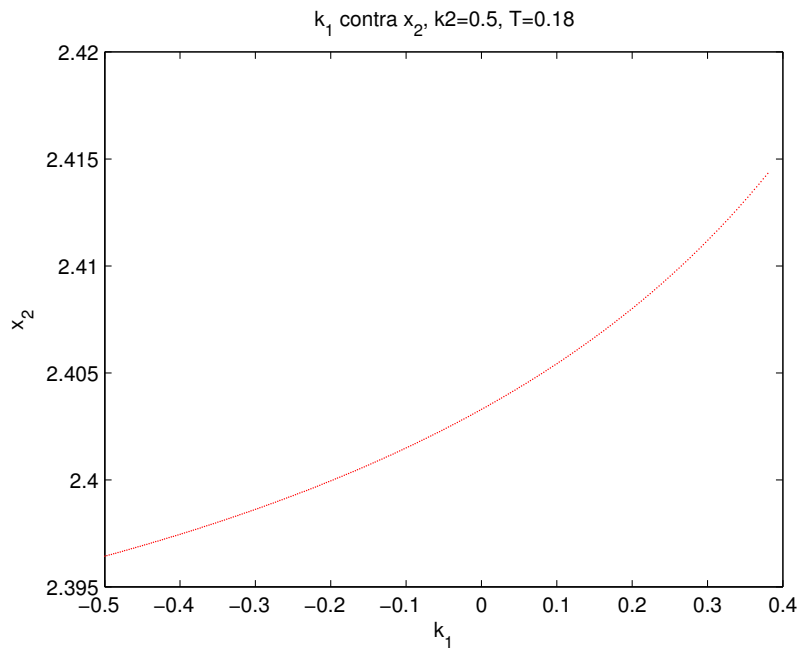


Figura 6-15: Diagrama de bifurcación de la corriente en función de k_1 con $N = 0.1$.

Las figuras 6-16 y 6-17 nos da las cotas en las que la técnica FPIC controla el caos del sistema, la parte de color azul corresponde a la zona donde el caos se controla y la roja a la presencia de caos.

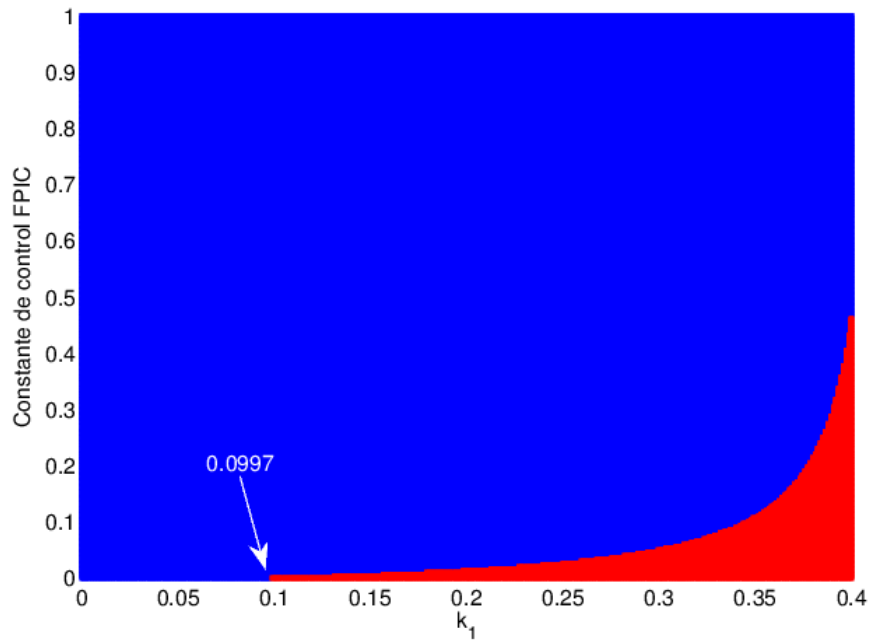


Figura 6-16: Cotas para la constante N de control FPIC

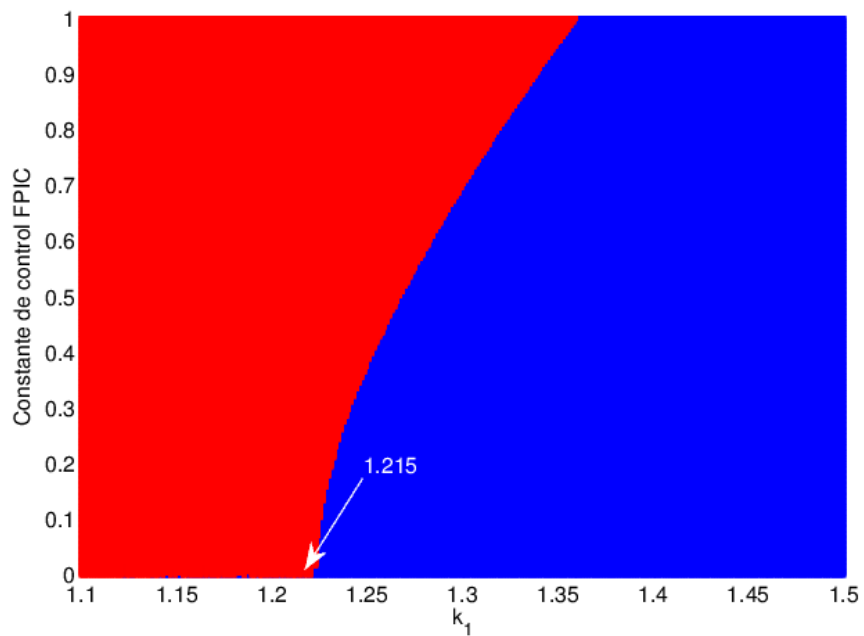


Figura 6-17: Cotas para la constante N de control FPIC

6.3. Técnica de control TDAS

La técnica se basa en aplicar realimentación de la variable retardada en el tiempo [28]. Al aplicar la técnica TDAS podemos escribir

$$d_n = d_T + \eta(d_n - d_{n-1}) \quad (6-3)$$

donde d_n es el ciclo de trabajo que vamos a trabajar, d_T es el ciclo de trabajo dada en la relación (3-6), d_{n-1} es el ciclo de trabajo en la anterior iteración y η es el factor de realimentación.

Definimos una nueva señal de control con un período de retardo

$$d_n = \frac{d_T - \eta d_{n-1}}{1 - \eta} \quad (6-4)$$

Para encontrar analíticamente, aquellos valores de η que estabilizan la órbita 1-periódica, calcularemos el Jacobiano del nuevo sistema. La aplicación de Poincaré del nuevo sistema viene dada por:

$$X(n+1) = P(X(n), d(X(n), X(n-1)))$$

Haciendo

$$Z_1 = X(n) \quad Z_2 = X(n-1)$$

obteniendo así una nueva señal de control dependiente de las variables Z_1 y Z_2 :

$$d(n+1) = \frac{Z_1(n) - \eta d(Z_2(n))}{1 - \eta} \quad (6-5)$$

obteniendo así el siguiente sistema:

$$Z_1(n+1) = P(Z_1(n), d(Z_1(n), Z_2(n))), \quad Z_2(n+1) = Z_1(n) \quad (6-6)$$

El Jacobiano del nuevo sistema (6-6) viene dado por:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial Z_1} + \frac{\partial P}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial Z_1} & \frac{\partial P}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial Z_2} \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (6-7)$$

donde I y O son las matrices identidad y nula de tamaño 2×2 , respectivamente.

Con la expresión 6-7 analizaremos numéricamente la estabilidad de la órbita 1-periódica asociada al sistema cuando es controlada con TDAS.

Las figuras 6-18 y 6-19 nos muestran la evolución del sistema para el ciclo de trabajo y la tensión en función de k_1 , cuando se elige $\eta = 0,01$. Al comparar este resultado con el

obtenido en 5.1(a) y 5.2(a) vemos que la zona de comportamiento caótico es más grande. Esto nos lleva a tomar valores negativos para el factor de realimentación η .

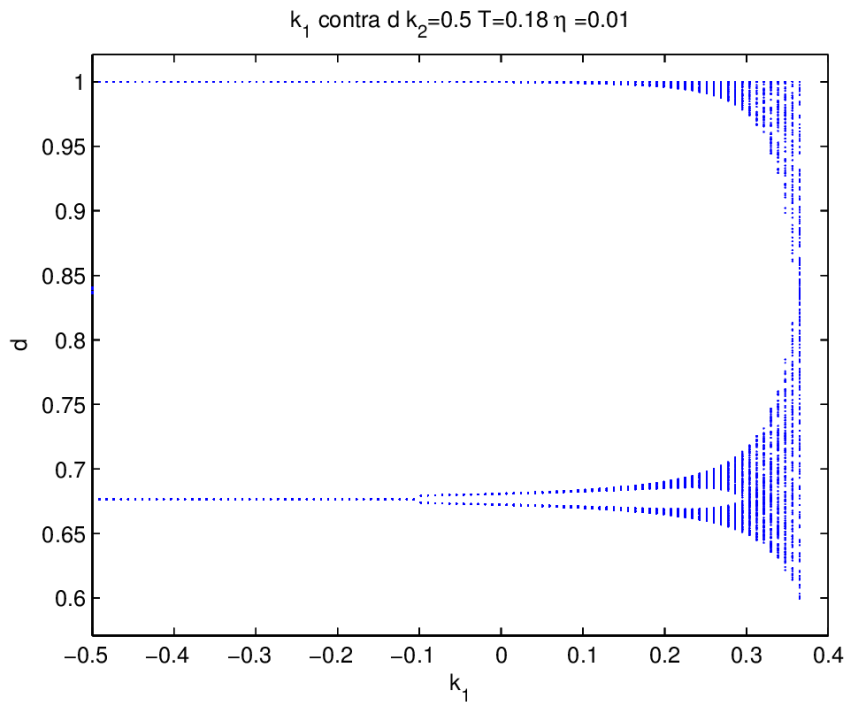


Figura 6-18: Diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo en función de k_1 para $\eta = 0.01$.

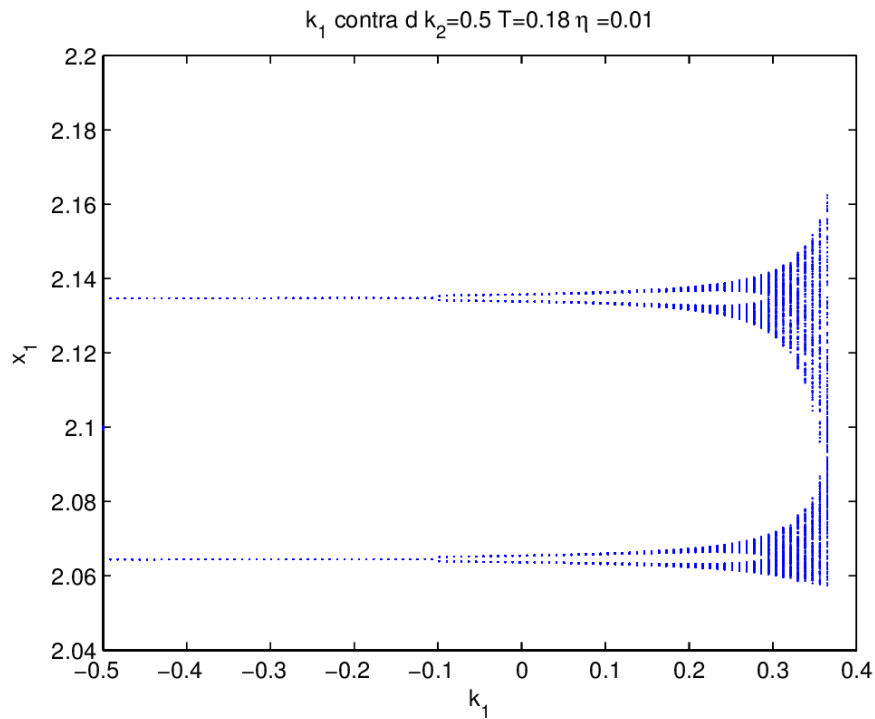


Figura 6-19: Diagrama de bifurcación de la tensión en función de k_1 para $\eta = 0.01$.

En las figuras 6-20 y 6-21 se escogió $\eta = -0,01$ y se tiene una disminución de la región donde hay presencia de caos.

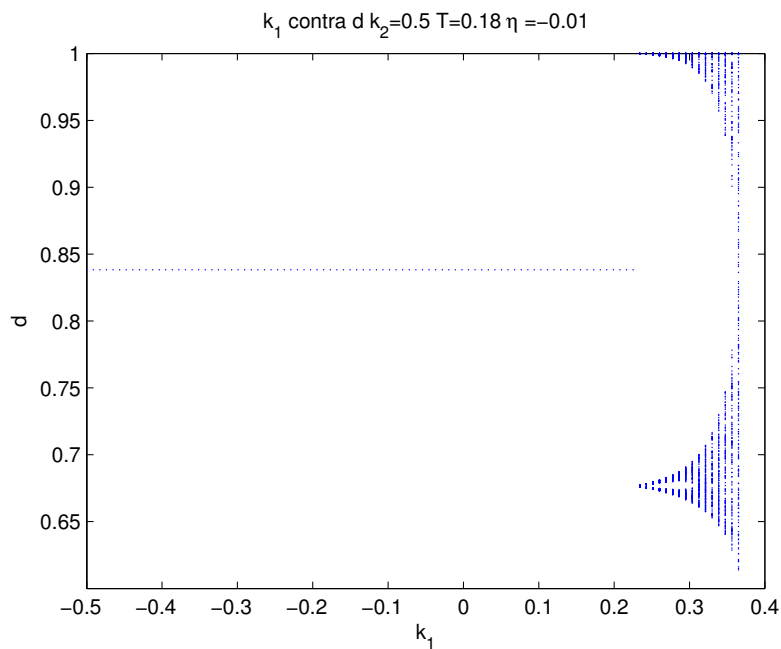


Figura 6-20: Diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo en función de k_1 para $\eta = -0.01$.

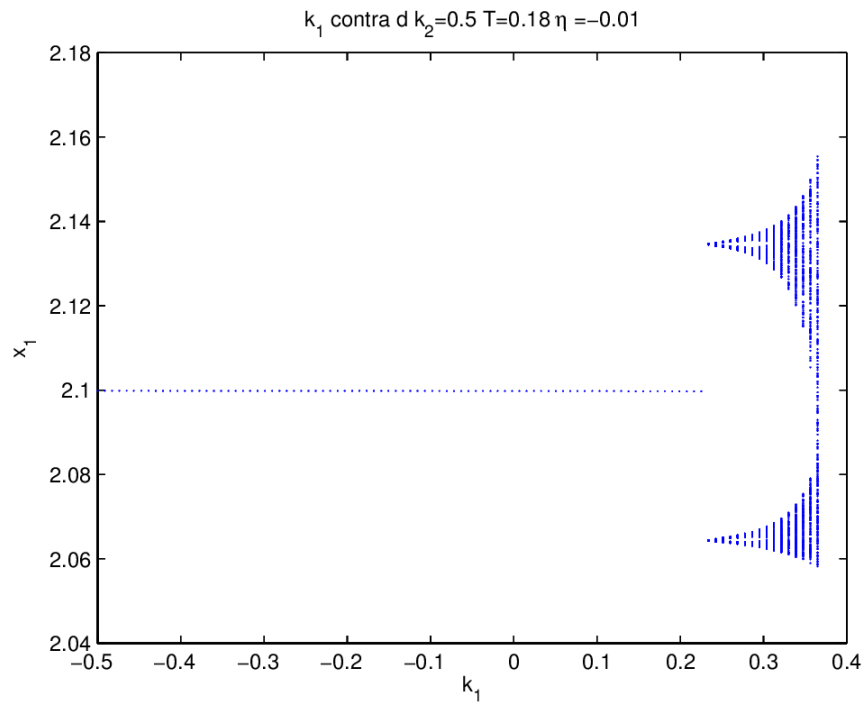


Figura 6-21: Diagrama de bifurcación de la tensión en función de k_1 para $\eta = -0.01$.

En las figuras 6-22 y 6-23 se escogió $\eta = -0,1$ y se tiene una disminución significativa de la región donde hay presencia de caos.

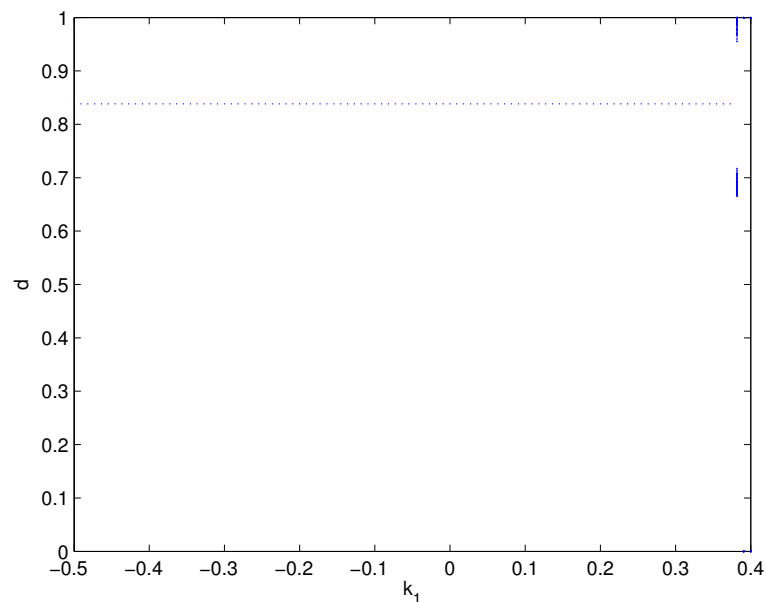


Figura 6-22: Diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo en función de k_1 para $\eta = -0.1$.

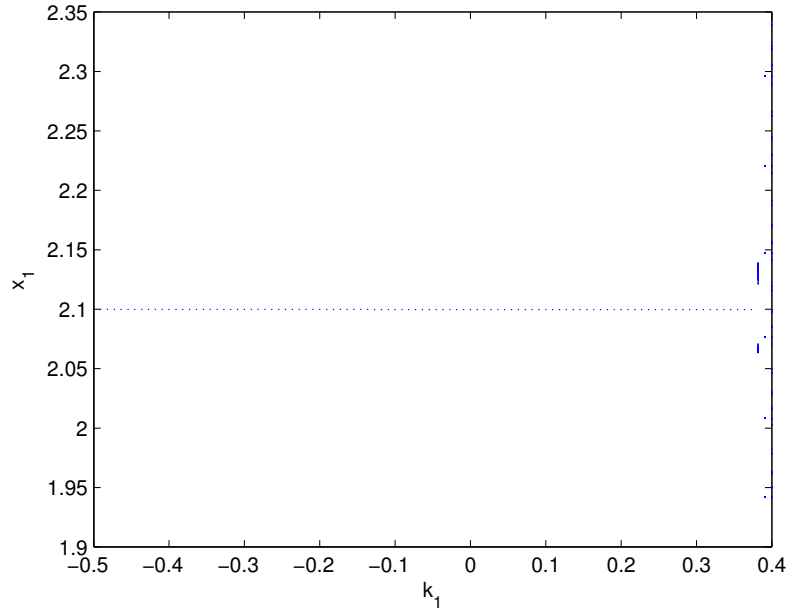


Figura 6-23: Diagrama de bifurcación de la tensión en función de k_1 para $\eta = -0.1$.

La Figura 6-24 nos da cotas para la constante η en la que se obtiene control de caos para un valor aproximado de $\eta = -0.02$

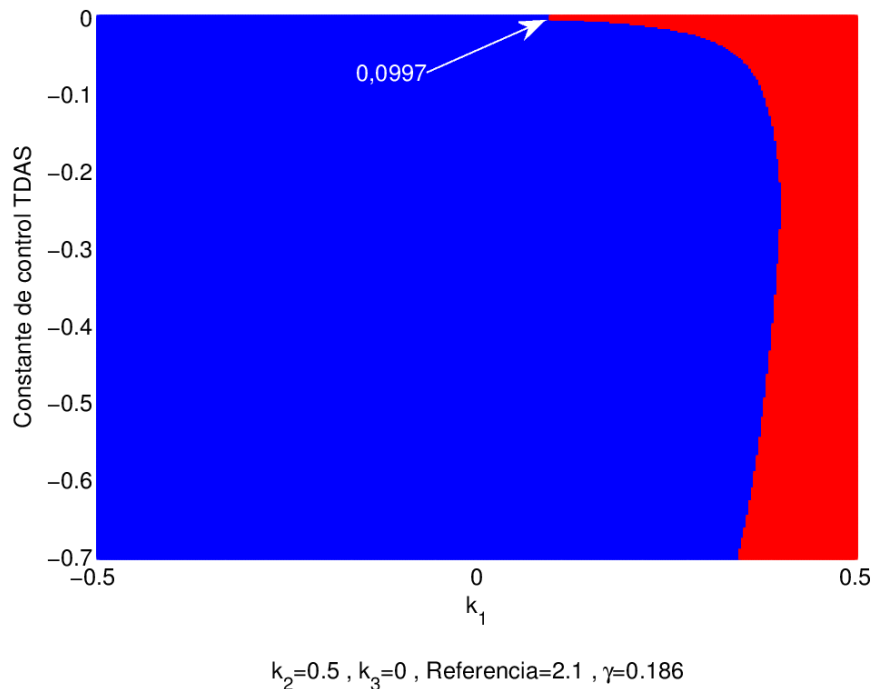


Figura 6-24: Cotas para la constante η de control TDAS.

El control con FPIC puede estabilizar órbitas de periodo uno y superior en sistemas inestables y/o caóticos de una manera simple y sin medición de las variables de estado, como sí requiere la técnica TDAS, la técnica FPIC lo que hace es obligar al sistema a que evolucione al punto fijo. En este sentido se parte del conocimiento previo del punto fijo o el valor de estado estacionario de la señal de control, bien sea de manera analítica o numérica y con base en él se diseña la estrategia de control. [30]

7 Fenómeno de adición de periodo en el boost con resistencias parásitas

Resumen:

En este capítulo se muestra que en el convertidor boost con resistencias parásitas se presenta el fenómeno de adición de periodo. De manera numérica y analítica se muestra que, bajo la variación de un parámetro asociado a la superficie de conmutación, entre dos órbitas periódicas existe una cantidad enumerable de órbitas periódicas.

7.1. Adición de periodo

En esta sección mostraremos el fenómeno de adición de período en el convertidor boost con resistencias parásitas.

En la Figura 7-1 se tomó $k_2 = 0.5$, donde se aprecia que entre una órbita de periodo 5 y una de período 4 hay una de órbita de período 9, lo que muestra que entre una órbita de período n y una órbita de período m existe una órbita de período $n + m$ [9] y (7-2)

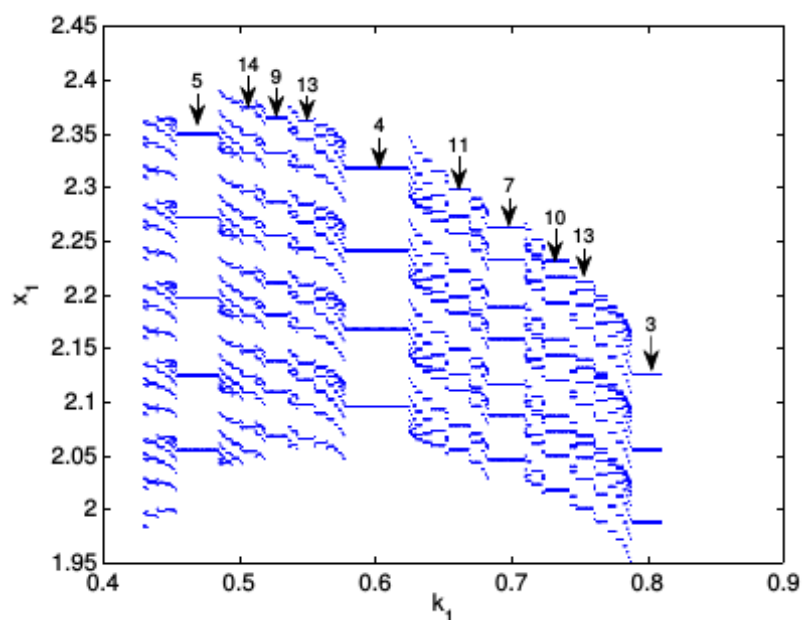


Figura 7-1: Fenómeno de adición de periodo para la tensión.

En el rango de valores del parámetro k_1 de la Figura 7-1, se observa que existe una cantidad enumerable de órbitas, para este caso se resaltaron que entre una órbita de periodo 3 y una órbita de periodo 10, hay una de periodo 5, que entre una órbita de periodo 3 y una de periodo 7 hay una órbita de periodo 10, y así sucesivamente.

Podemos ver las órbitas de periodo 3,4,5,7,10,11,13,14, \dots Vemos así que existe una cantidad enumerable (infinita) de secuencia de órbitas.

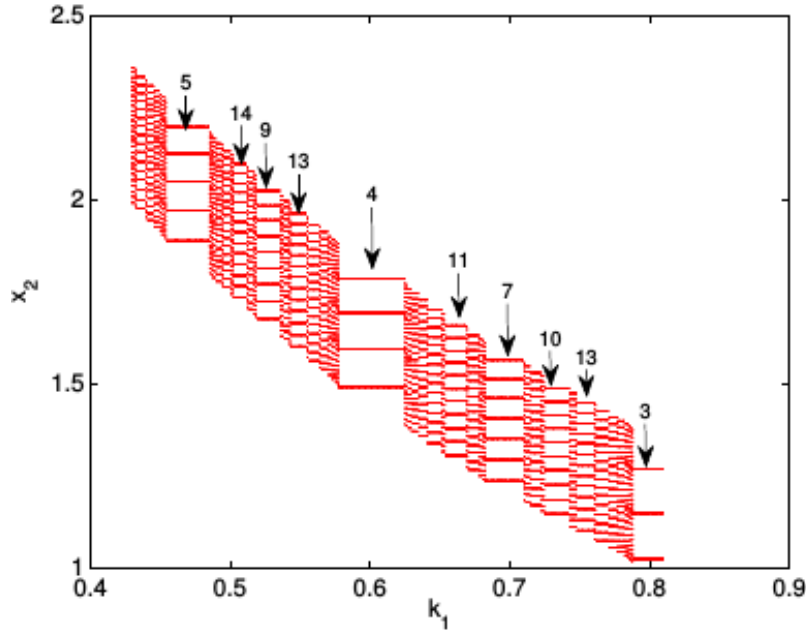


Figura 7-2: Fenómeno de adición de periodo para la corriente.

Para mostrar el fenómeno de adición de periodo, en primer lugar damos la siguiente definición.

Definición Sea $n \in \mathbb{N}$, $I = \{0, 1, \dots, n-1\}$ y $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tales que el conjunto $O_n = \{x_i \in \mathbb{R}^2 : i \in I\}$ es un ciclo limite de periodo n .

1. O_n es no saturado si $0 < d(x_i, k_1, k_2) < T$ para todo $i \in I$
2. O_n es semi-saturado si existe $J \subset I$, $J \neq \emptyset$ tal que $0 < d(x_i, k_1, k_2) < T$ para todo $i \in I - J$ y $d(x_j, k_1, k_2) \leq 0$ ó $d(x_j, k_1, k_2) \geq T$ para todo $j \in J$
3. O_n es saturado si $d(x_i, k_1, k_2) \leq 0$ ó $d(x_i, k_1, k_2) \geq T$ para todo $i \in I$

En [9] y [2] se demostró que dado $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ y $O_{Z^{n-1}T^1} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ un ciclo saturado, donde $d(\theta, x_0) \geq T$ y $d(\theta, x_i) \leq 0$ para todo $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n-1$, entonces

$$x_i = \begin{cases} \left(I_2 - \phi_2^{n-1}(T)\phi_1^2(T) \right)^{-1} \left(\phi_2^{n-1} [\phi_1(T)\psi_1(T) + \psi_1(T)] + \sum_{j=0}^{n-2} \phi_2^j(T)\psi_2(T) \right), & i = 0 \\ \phi_1(T)x_0 + \psi_1(T), & i = 1 \\ \phi_2^{i-1}(T)\phi_1^1(T)x_0 + \phi_2^{i-1}(T) [\phi_1(T)\psi_1(T) + \psi_1(T)] + \sum_{j=0}^{i-2} \phi_2^j(T)\psi_2(T), & i = 2, 3, 4, \dots, n-1 \end{cases}$$

(7-1)

donde $\phi_2^0(T) = I_2$.

Continuando con este estudio se presenta el siguiente teorema.

Teorema 7.1.1 Sean $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ y $O_{Z^{n-2}T^2} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ un ciclo saturado, donde $d(\theta, x_j) \geq T$, para todo $j = 0, 1$ y $d(\theta, x_i) \leq 0$ para todo $i = 2, 3, 4, \dots, n-1$, entonces

$$x_i = \begin{cases} (I_2 - \phi_2^{n-2}(T)\phi_1^2(T))^{-1} \left(\phi_2^{n-2} [\phi_1(T)\psi_1(T) + \psi_1(T)] + \sum_{j=0}^{n-3} \phi_2^j(T)\psi_2(T) \right), & i = 0 \\ \phi_1(T)x_0 + \psi_1(T), & i = 1 \\ \phi_1^2(T)x_0 + \phi_1(T)\psi_1(T) + \psi_1(T), & i = 2 \\ \phi_2^{i-2}(T)\phi_1^2(T)x_0 + \phi_2^{i-2}(T) [\phi_1(T)\psi_1(T) + \psi_1(T)] + \sum_{j=0}^{i-3} \phi_2^j(T)\psi_2(T), & i = 3, 4, \dots, n-1 \end{cases} \quad (7-2)$$

donde $\phi_2^0(T) = I_2$

Demostración

$$x_1 = \phi_1(T)x_0 + \psi_1(T)$$

$$x_2 = \phi_1(T)x_1 + \psi_1(T) = \phi_1(T)(\phi_1(T)x_0 + \psi_1(T)) + \psi_1(T)$$

$$x_3 = \phi_2(T)[\phi_1^2(T)x_0 + \sum_{k=0}^1 \phi_1^k(T)\psi_1(T)] + \psi_2(T)$$

$$x_4 = \phi_2^2(T)[\phi_1^2(T)x_0 + \sum_{k=0}^1 \phi_1^k(T)\psi_1(T)] + \sum_{j=0}^1 \phi_2^j(T)\psi_2(T)$$

continuando sucesivamente obtenemos para un valor i :

$$x_i = \phi_2^{i-2}(T)[\phi_1^2(T)x_0 + \sum_{k=0}^1 \phi_1^k(T)\psi_1(T)] + \sum_{j=0}^{i-3} \phi_2^j(T)\psi_2(T) \quad (7-3)$$

Cuando $i = n$ tenemos que $x_i = x_0$ con esto la ecuación (7-3) se puede escribir como:

$$x_0 = \phi_2^{n-2}(T)[\phi_1^2(T)x_0 + \sum_{k=0}^1 \phi_1^k(T)\psi_1(T)] + \sum_{j=0}^{n-3} \phi_2^j(T)\psi_2(T)$$

de donde

$$(I_2 - \phi_2^{n-2}(T)\phi_1^2(T))x_0 = \phi_2^{n-2}(T) \sum_{k=0}^1 \phi_1^k(T)\psi_1(T) + \sum_{j=0}^{n-3} \phi_2^j(T)\psi_2(T)$$

Despejando x_0 obtenemos:

$$x_0 = (I_2 - \phi_2^{n-2}(T)\phi_1^2(T))^{-1} \left(\phi_2^{n-2}(T) \sum_{k=0}^1 \phi_1^k(T)\psi_1(T) + \sum_{j=0}^{n-3} \phi_2^j(T)\psi_2(T) \right)$$

por lo tanto obtenemos la siguiente expresión

$$x_i = \begin{cases} (I_n - \phi_2^{n-2}(T)\phi_1^2(T))^{-1} \left(\phi_2^{n-2} [\phi_1(T)\psi_1(T) + \psi_1(T)] + \sum_{j=0}^{n-3} \phi_2^j(T)\psi_2(T) \right), & i = 0 \\ \phi_1^i(T)x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \phi_1^k(T)\psi_1(T), & i = 1, 2 \\ \phi_2^{i-2}(T)\phi_1^2(T)x_0 + \phi_2^{i-2}(T) [\phi_1(T)\psi_1(T) + \psi_1(T)] + \sum_{j=0}^{i-3} \phi_2^j(T)\psi_2(T), & i = 3, 4, \dots, n-1 \end{cases} \quad (7-4)$$

El valor de x_0 se dá sólo si la matriz $I_2 - \phi_2^{n-2}(T)\phi_1^2(T)$ es no singular.

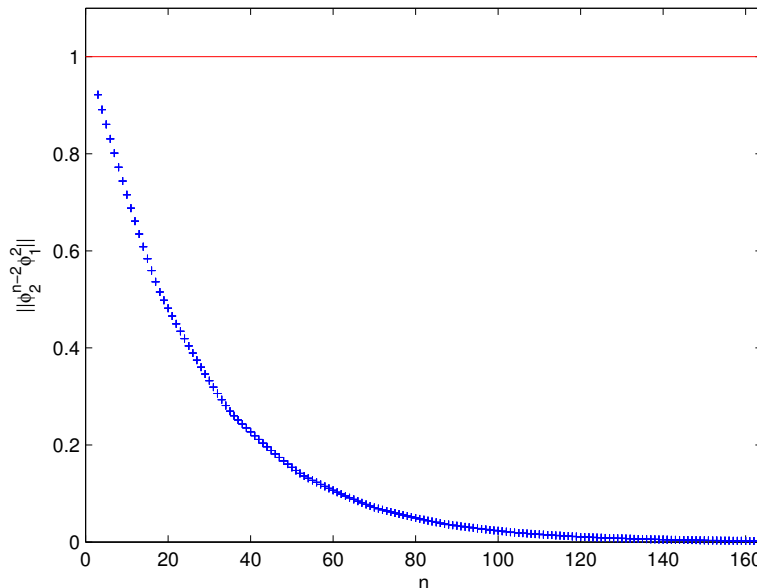


Figura 7-3: No singularidad de la matriz $I_2 - \phi_2^{n-2}(T)\phi_1^2(T)$.

De la Figura 7-3 vemos que la norma de la matriz $\phi_2^{n-2}(T)\phi_1^2(T)$ es menor que 1 y en consecuencia el radio espectral de la matriz $\phi_2^{n-2}(T)\phi_1^2(T)$ es menor que 1, por tanto la matriz $I_2 - \phi_2^{n-2}(T)\phi_1^2(T)$ tiene inversa.

Teorema 7.1.2 Sean $n, m \in \mathbb{N}, m < n, n \geq m+2$ y $O_{Z^{n-m}T^m} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_{n-1}\}$ un ciclo saturado, donde $d(\theta, x_j) \geq T$, para todo $j = 0, 1, 2, m-1$ y $d(\theta, x_i) \leq 0$ para todo $i = m, m+1, \dots, n-1$, Entonces

$$x_i = \begin{cases} (I_2 - \phi_2^{n-m}(T)\phi_1^m(T))^{-1} \left(\phi_2^{n-m}(T) \sum_{k=0}^{m-1} \phi_1^k(T)\psi_1(T) + \sum_{j=0}^{n-(m+1)} \phi_2^j(T)\psi_2(T) \right), & i = 0 \\ \phi_1^i(T)x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \phi_1^k(T)\psi_1(T), & i = 1, 2, \dots, m \\ \phi_2^{i-m}(T) \left(\phi_1^m(T)x_0 + \sum_{k=0}^{m-1} \phi_1^k(T)\psi_1(T) \right) + \sum_{j=0}^{i-(m+1)} \phi_2^j(T)\psi_2(T), & i = m+1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (7-5)$$

Demostración Las expresiones para los x_i se obtienen directamente de las relaciones (3-12) y (3-13). El valor de x_0 se dá sólo si la matriz $I_2 - \phi_2^{n-m}(T)\phi_1^m(T)$ es invertible.

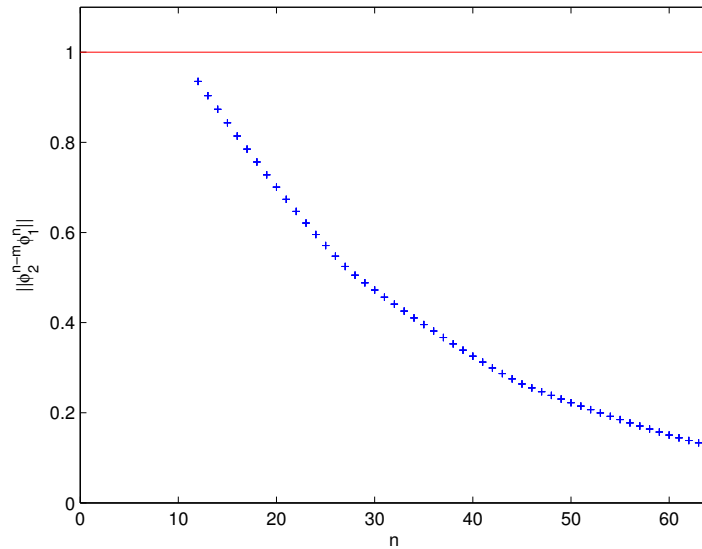


Figura 7-4: No singularidad de la matriz $I_2 - \phi_2^{n-10}(T)\phi_1^{10}(T)$.

De la Figura 7-4 vemos que la norma de la matriz $\phi_2^{n-10}(T)\phi_1^{10}(T)$ es menor que 1 y en consecuencia el radio espectral de la matriz $\phi_2^{n-10}(T)\phi_1^{10}(T)$ es menor que 1, por tanto la matriz $I_2 - \phi_2^{n-10}(T)\phi_1^{10}(T)$ tiene inversa.

8 Convertidor boost modelo ideal vs convertidor boost con resistencias parásitas

Resumen:

En este capítulo se hacen comparaciones del modelo de convertidor boost con resistencias parásitas y el convertidor boost en su modelo ideal.

8.1. Descripción de ambos modelos

El convertidor boost en su forma más simple se muestra en la Figura 8.1(a). Está formado por la fuente E , un inductor L , un interruptor S que realiza la conmutación, un diodo D , el filtro C y la carga a alimentar, que para este caso es una carga resistiva R .

En el convertidor boost con resistencias internas, se incluyen las pérdidas por efecto joule (cuando una corriente eléctrica atraviesa un conductor, se disipa energía en forma de calor[22]), pérdidas resistivas de la fuente (r_S), en el inductor (r_L), la del MOSFET (r_M) y la resistencia para medida de la corriente (r_{Med}), como se muestra en la Figura 8.1(b).

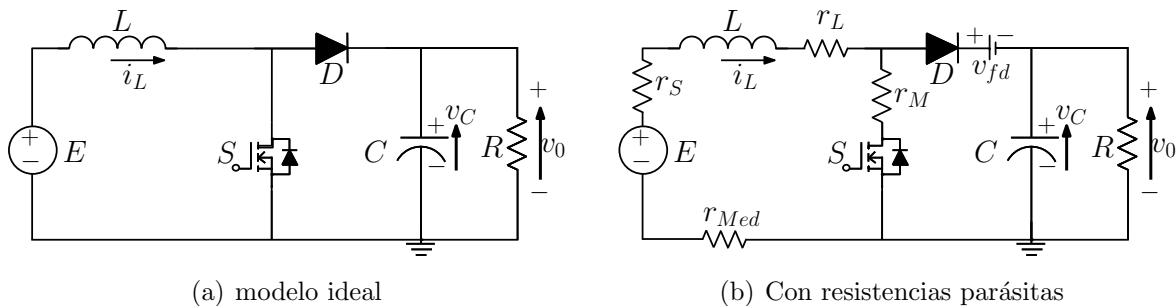


Figura 8-1: Convertidor boost con y sin resistencias parásitas

En el convertidor boost en su forma más simple, la señal de referencia es constante e igual

a $(x_{1ref}, \gamma x_{1ref}^2)^T$, y el ciclo de trabajo en estado estacionario viene dado por:

$$d_E = T \left(1 - \frac{1}{x_{1ref}} \right)$$

Las ecuaciones para el modelo donde se incluyen resistencias parásitas (2-14), señal de referencia y el ciclo de trabajo en estado estacionarios(3-15) ya fueron estudiados en los capítulos 2 y 3 respectivamente.

8.2. Convertidor boost modelo ideal vs boost con resistencias parásitas, con distintos x_{2ref} e igual valor de x_{1ref} .

Cuando $k_2 = -0.5$ tenemos en las figuras 8.2(a) y 8.2(b) muestra la existencia de caos en el convertidor boost con resistencias parásitas y sin ellas.

Para el rango del parámetro k_1 notamos que la presencia de caos es mayor para el convertidor en modo ideal (sin resistencias parásitas) que el rango k_1 para el convertidor con resistencias parásitas. En ambos casos se escogieron las mismas condiciones iniciales, pero el valor de x_{2ref} es diferente.

- Para el convertidor boost en modelo ideal $x_{2ref} = \gamma x_{1ref}^2$
- Para el convertidor boost con resistencias parásitas

También se aprecia que en el convertidor boost de forma simple, hay presencia de caos para valores del parámetro k_1 positivos, mientras que en el otro modelo no.

Para $k_2 = 0.5$ el caos se presenta para valores positivos del parámetro k_1 en el convertidor con resistencias internas como lo muestra la Figura 8.8(b), en el convertidor en la forma más simple se nota la presencia de caos para valores negativos del parámetro k_1 , como lo muestra la Figura 8.3(a).

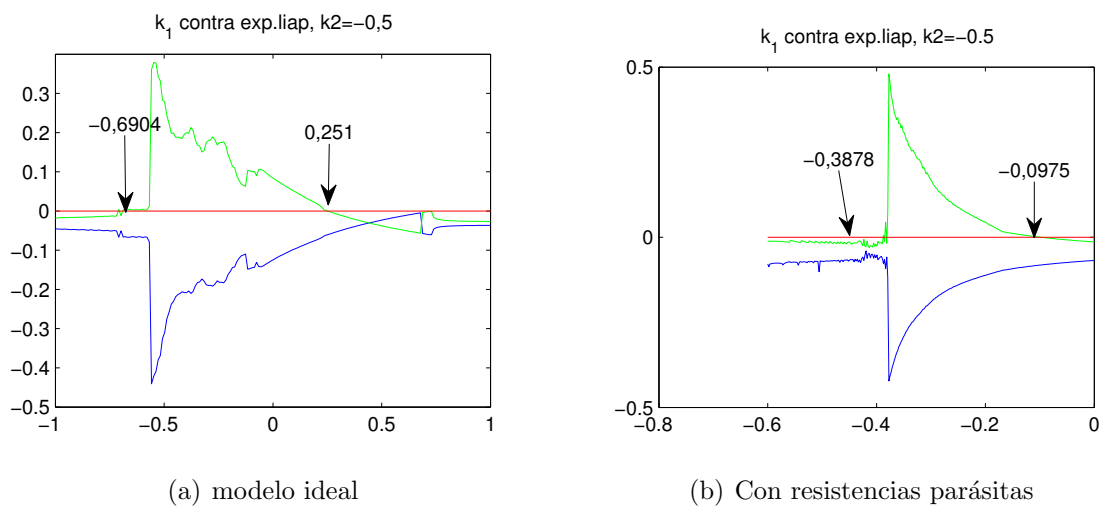


Figura 8-2: Variación de los exponentes de Lyapunov en función de $k_1, k_2 = -0.5$

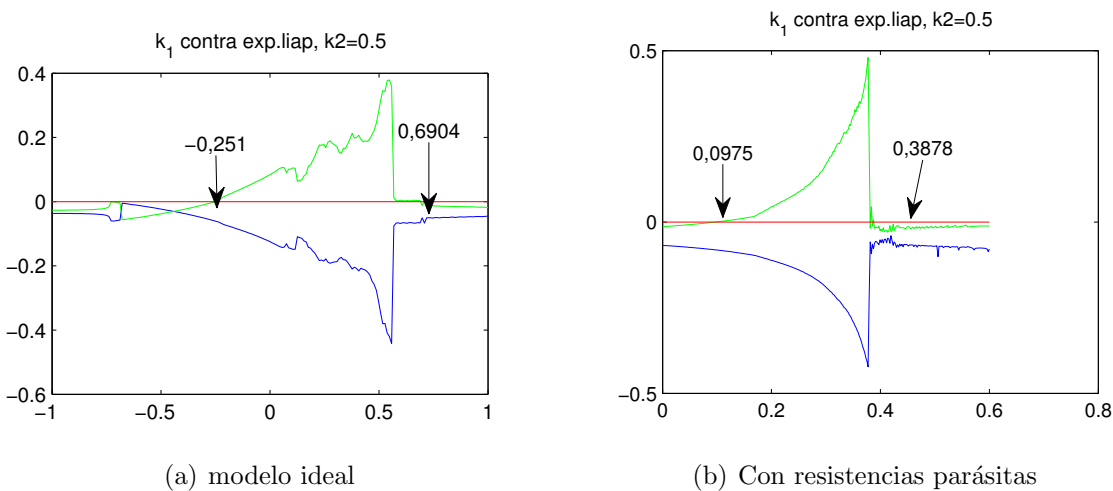


Figura 8-3: Variación de los exponentes de Lyapunov en función de $k_1, k_2 = 0.5$

En la Figura 8-4 se muestra el comportamiento del sistema, con la señal de referencia $x_{1ref} = 2.1$ donde se puede apreciar que los diagramas de bifurcación numéricos para el convertidor boost con resistencias internas es de rango menor para el parámetro k_1 , que el diagrama de bifurcación del convertidor boost en modelo ideal. Esto muestra que incluyendo las pérdidas en el modelo, se obtiene mayor rango de estabilidad en el parámetro k_1 .

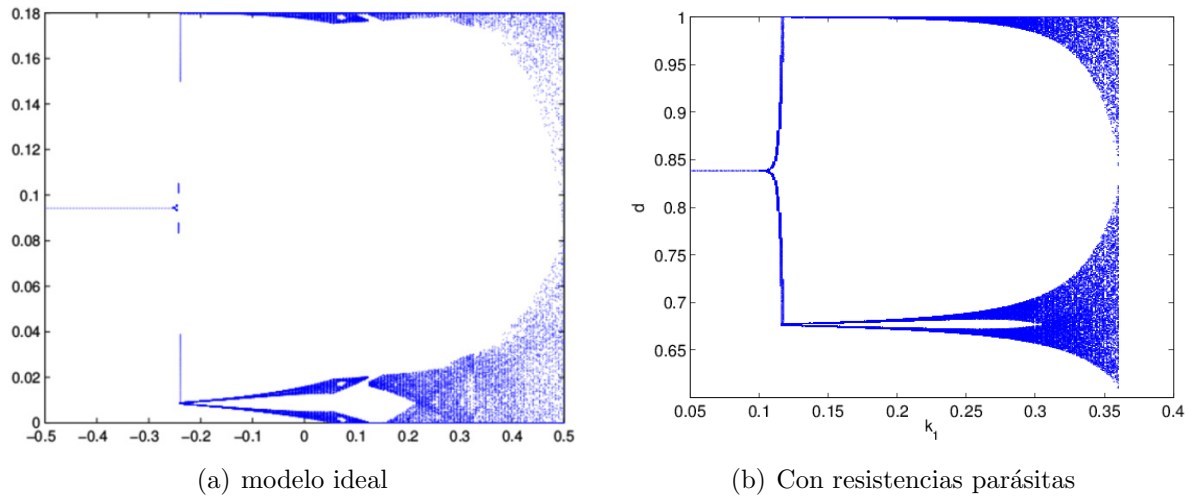


Figura 8-4: Diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo en función de $k_1, k_2 = 0.5$

Las Figura 8-5 muestran los diagramas de bifurcación del paraámetro k_1 vs la tensión, donde se aprecia que el convertidor boost con la inclusión de resistencias parásitas es más estable que el convertidor en su forma simple.

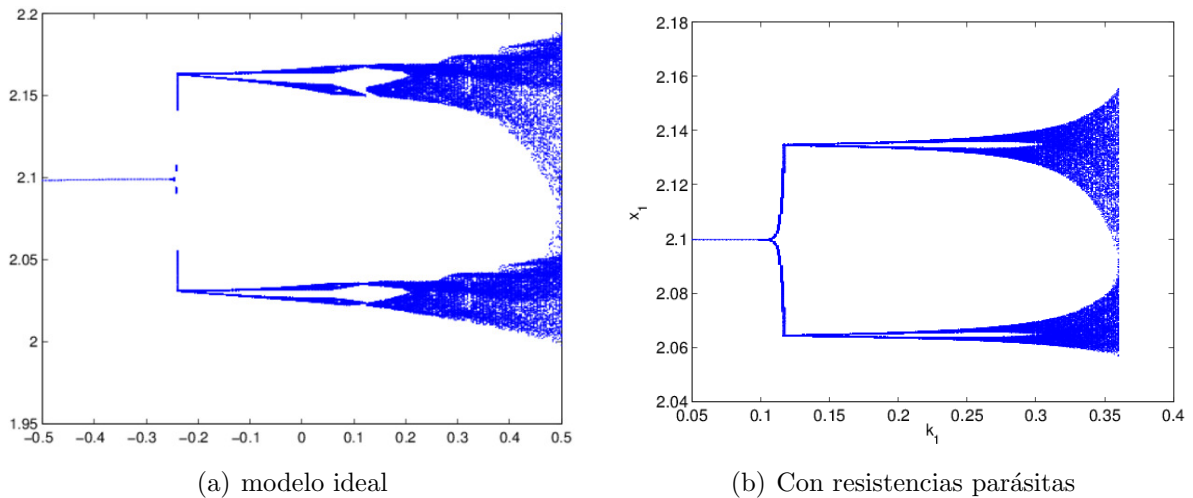


Figura 8-5: Diagrama de bifurcación de la tensión en función de $k_1, k_2 = 0.5$

La Figura 8-6 muestran los diagramas de bifurcación del parámetro k_1 vs la corriente, donde se aprecia que el convertidor boost con la inclusión de resistencias parásitas es más estable que el convertidor en modelo ideal.

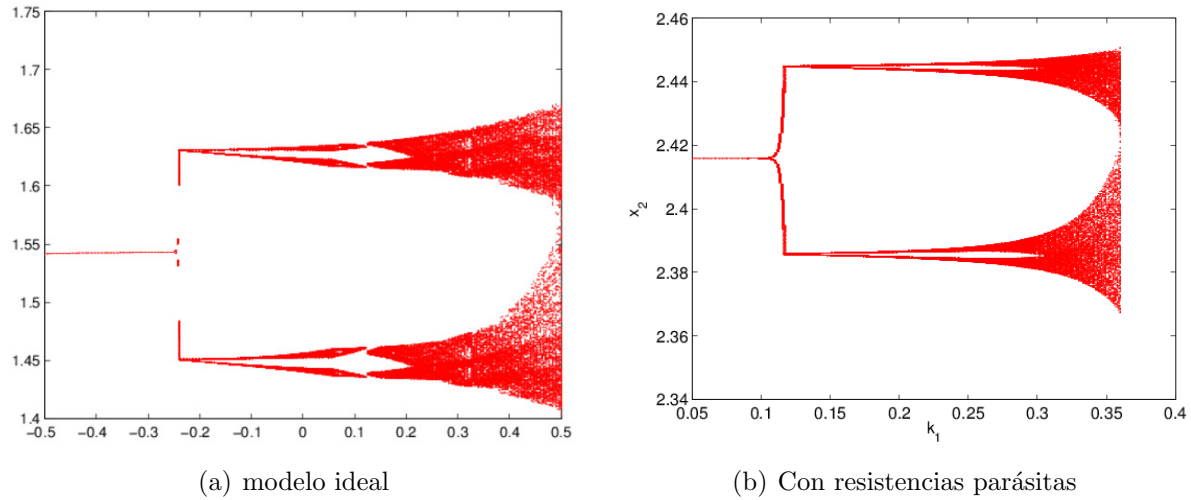


Figura 8-6: Diagrama de bifurcación de la corriente en función de $k_1, k_2 = 0.5$

8.3. Convertidor boost modelo ideal vs boost con resistencias parásitas, con igual punto de equilibrio

A continuación se hace el estudio tomando el mismo punto de equilibrio $(x_{1ref}, \gamma x_{1ref}^2)^T$.

Cuando $k_2 = -0.5$ tenemos en las figuras 8.7(a) y 8.7(b) la existencia de caos en el convertidor boost con resistencias parásitas y en el convertidor boost de modelo ideal.

Para igual rango del parámetro k_1 en ambos convertidores se puede ver que la presencia de caos es mayor en modo ideal que el estudiado en esta tesis.

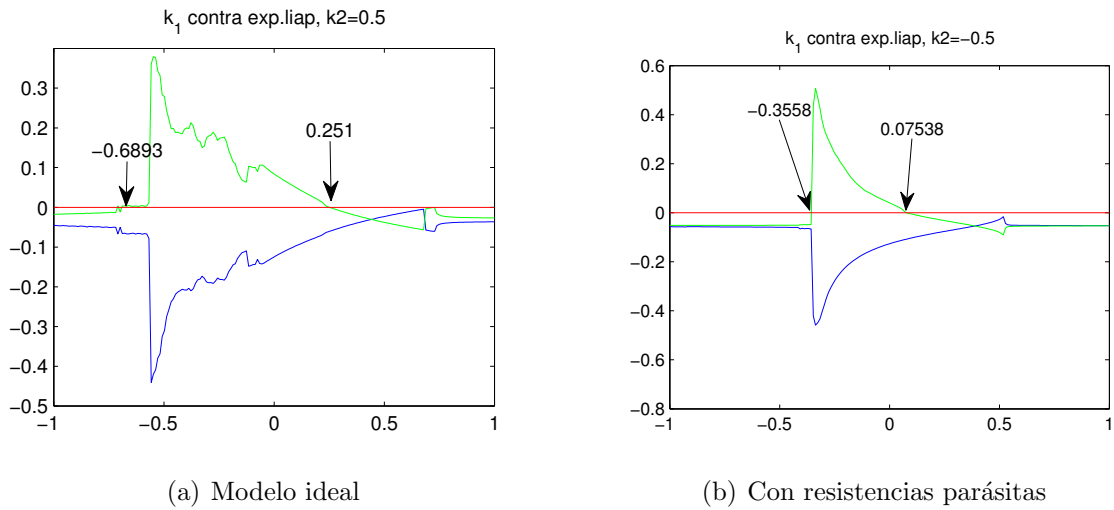


Figura 8-7: Variación de los exponentes de Lyapunov en función de $k_1, k_2 = -0, 5$

Para $k_2 = 0.5$ se presenta el mismo caso, donde la presencia de caos es mayor en el convertidor boost dado en el modelo ideal que el convertidor boost con la inclusión de las resistencias parásitas.

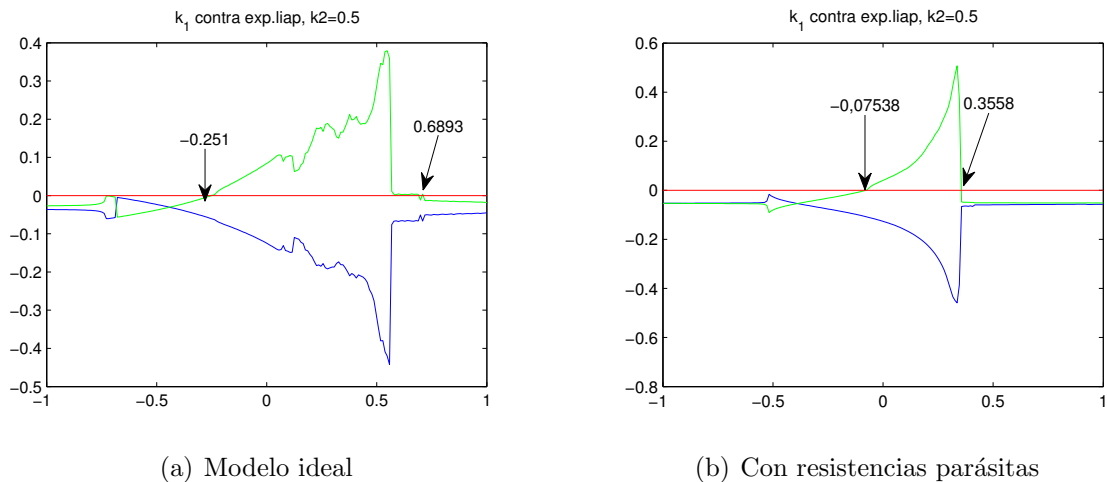


Figura 8-8: Variación de los exponentes de Lyapunov en función de $k_1, k_2 = -0, 5$

En las figuras 8.9(a) y 8.9(b) se muestra el comportamiento simulado, con la señal de referencia $x_{1ref} = 2.5$ donde se puede apreciar que los diagramas de bifurcación numéricos para el convertidor boost con resistencias internas es de rango menor para el parámetro k_1 , que el diagrama de bifurcación del convertidor boost en su forma simple. Esto muestra que

incluyendo las pérdidas en el modelo, se obtiene mayor estabilidad.

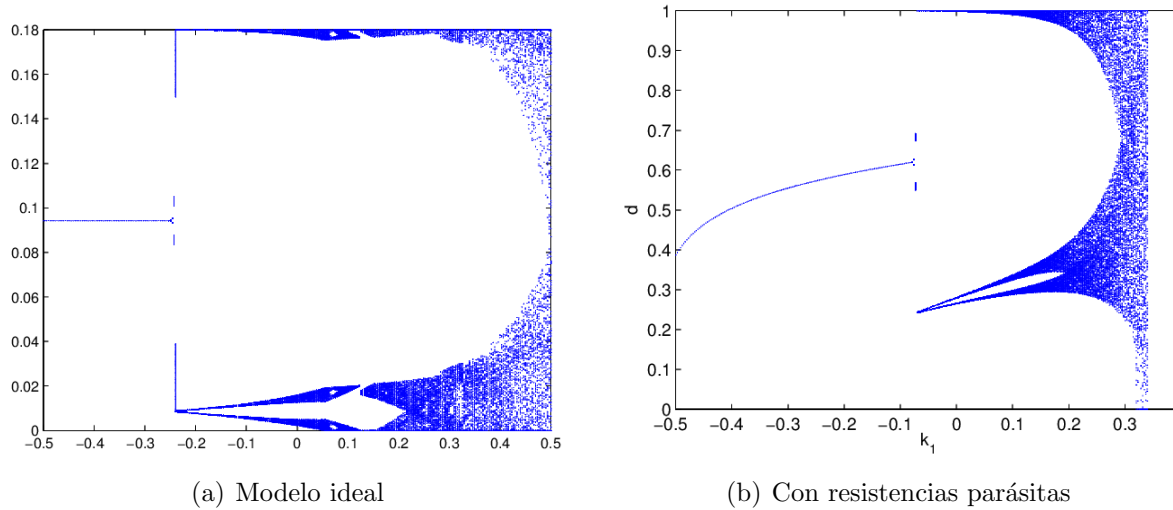


Figura 8-9: Diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo en función de $k_1, k_2 = 0.5$

Las figuras 8.10(a) y 8.10(b) muestran los diagramas de bifurcación del parámetro k_1 vs la tensión, donde se aprecia que el convertidor boost con la inclusión de resistencias internas es más estable que el convertidor en su forma simple.

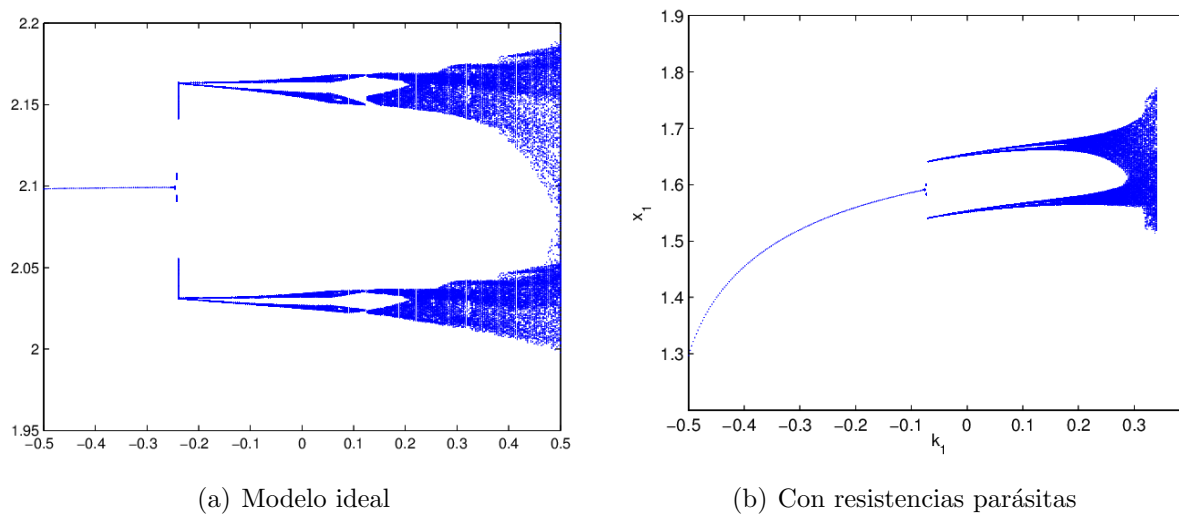


Figura 8-10: Diagrama de bifurcación de la tensión en función de $k_1, k_2 = 0.5$

Las figuras 8.11(a) y 8.11(b) muestran los diagramas de bifurcación del parámetro k_1 vs la

corriente, donde se aprecia que el convertidor boost con la inclusión de resistencias internas es más estable que el convertidor en su forma simple.

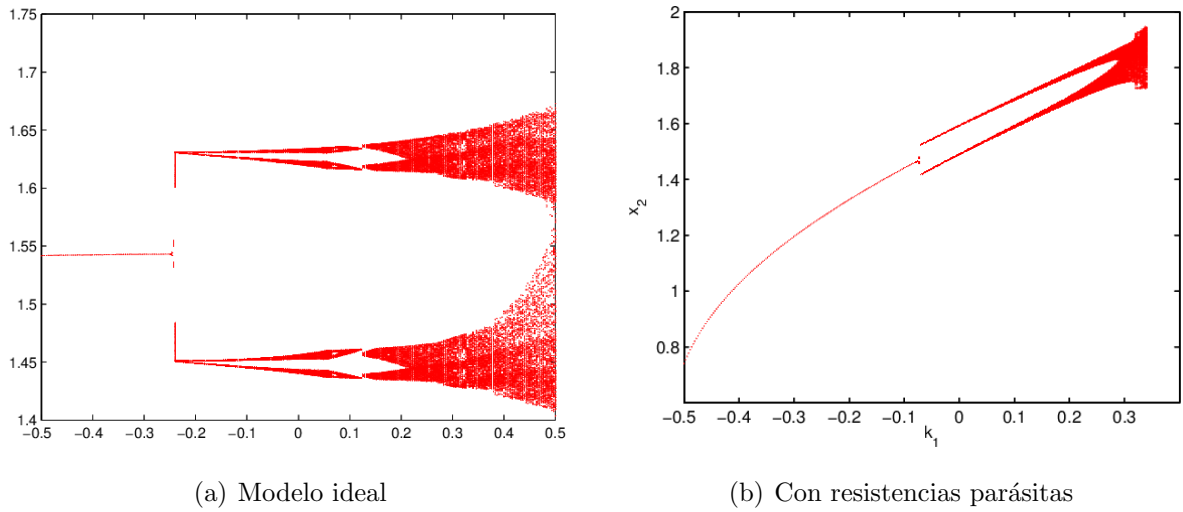


Figura 8-11: Diagrama de bifurcación de la corriente en función de k_1 , $k_2 = 0.5$

9 Conclusiones, trabajos futuros y difusión de resultados

Resumen:

En este capítulo se presentan los principales resultados obtenidos en este estudio de tesis de maestría y se plantean posibles estudios futuros utilizando la técnica ZAD y el convertidor boost con distintas superficies de conmutación y otras pérdidas.

9.1. Conclusiones

- Se hizo un estudio de la dinámica del convertidor boost cuando se le incluyen resistencias parásitas, usando la superficie de conmutación

$$s(x(t)) = k_1(x_1(t) - x_{1ref}) + k_2(x_2(t) - x_{2ref})$$

- Se determinó la estabilidad de la órbita $1T$ -periódica para el convertidor boost cuando se le incluyen resistencias internas mediante los exponentes de Lyapunov.
- Se implementaron las técnicas de FPIC y TDAS en el esquema de pulso al centro.
- Se mostró la presencia del fenómeno de adición de periodo en el convertidor boost con resistencias internas cuando es controlado con ZAD.
- Se mostró que al incluir las resistencias internas r_S , r_L , r_M y r_{Med} el sistema se hace más estable.

9.2. Trabajos Futuros

- Implementar experimentalmente la técnica ZAD en el convertidor boost con resistencias internas y comparar los resultados experimentales con los obtenidos mediante simulación.
- Realizar un estudio al convertidor boost teniendo en cuenta la pérdida en el filtro.

- Realizar el estudio del convertidor boost con resistencias internas utilizando la superficie de conmutación.

$$s(x(t)) = (x_1(t) - x_{1ref}) + k_1(x_2(t) - x_{2ref}) + k_2 \int_{KT}^{(K+1)T} (x_1(t) - x_{1ref}) dt$$

para determinar si el sistema es robusto ante perturbaciones de entrada.

9.3. Difusión de resultados

[1] D. Vergara, S. Casanova, F. Hoyos, **Dinámica de un Convertidor Boost con Inclusión de Resistencias Parásitas Controlado con ZAD**, Revista Ingeniería Energética (sometido a publicación).

[2] D. Vergara, S. Casanova, F. Hoyos, **Dinámica no Lineal y Fenómeno de Adición de Periodo en un Convertidor Boost Controlado con ZAD** (en preparación).

[3] D. Vergara, S. Casanova, F. Hoyos, **Nuevo Modelo de un Convertidor Boost Controlado con Control No-lineal Deslizante ZAD**, IEEE Colombian Workshop on Circuits And Systems, Bogotá, Colombia, Octubre 16-17 de 2014. Consultado el: 13 de marzo de 2015. Disponible en: <http://ieeexplore.ieee.org/xpl/login.jsp?tp=&arnumber=6994604>

Bibliografía

- [1] AMADOR, A. ; CASANOVA, S. ; HURTADO, J. ; OLIVAR, G.: ZAD strategy with lateral PWM applied to a Boost converter. En: *Matemáticas:Enseñanza Universitaria* ©Escuela Regional de Matemáticas Universidad del Valle - Colombia 20 (2012), p. 3–19
- [2] AMADOR, A. ; CASANOVA, S. ; OLIVAR, G. ; GRANADA, H. ; HURTADO, J.: Codimension-Two Big Bang Bifurcation in a ZAD-CONTROLLED Boost DC-DC Converter. En: *International Journal of Bifurcation and Chaos* (2012), p. 10
- [3] AMADOR, Andrés: *Técnica ZAD Aplicada Al Convertidor Boost: Análisis De Estabilidad Y Comportamiento Caótico*, Universidad Nacional de Colombia, Tesis de Maestría, 2008
- [4] ANGULO, F.: *Análisis de la dinámica de convertidores electrónicos de potencia usando PWM basado en promediado cero de la dinámica del error (ZAD)*. España, Universidad Politécnica de Cataluña, Tesis Doctoral, Mayo 2004
- [5] ANGULO, F. ; FOSSAS, E. ; OLIVAR, G.: Técnica ZAD aplicada a un convertidor Buck: análisis de estabilidad y de transición al caos. En: *R.I.A.I* 2 (2005), octubre, Nr. 4
- [6] AROUDI, A. E. ; DEBBAT, Mohamed ; SALAMERO, Luis M.: Poincaré maps modeling and local orbital stability analysis of discontinuous piecewise affine periodically driven systems Nonlinear Dyn. En: *IEEE Trans. on Power Elect.* (2007), p. 431–445
- [7] BIEL, D. ; FOSSAS, E. ; RAMOS, R. ; GUINJOAN, F.: Implementación de controles pseudo-sliding en sistemas conmutados. En: *Congreso Latinoamericano de Control Automático* (2002)
- [8] CALVENTE, F.: *Control en modo deslizante aplicado a sistemas de acondicionamiento de potencia de satélites*. España, Universidad Politécnica de Cataluña, Tesis Doctoral, Julio 2001
- [9] CASANOVA, S.: *Análisis de la Dinámica de un Convertidor Boost Controlado con ZAD*. Colombia, UN, Tesis Doctoral, 2011

-
- [10] CASTRO, C.: *Implementación De Un Controlador Universal Para Convertidores De Alta Frecuencia De Conmutación*. Mexico, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Tesis Doctoral, 2008
- [11] DOERING, Claus I. ; LOPEZ, Artur O.: *Equações Diferenciais Ordinárias., Coleção Matematica Universitária..* Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2005
- [12] EDMINISTER, Joseph A. ; NAHVI, Mahmood: *Schaum Circuitos Eléctricos*. España : McGraw-Hill, 1997
- [13] ERICKSON, Robert ; MAKSIMOVIC, Dragan: *Fundamentals of Power Electronics Second Edition*. University of Colorado, Boulder : Kluwer Academic, 2001
- [14] FOSSAS, E. ; BIEL, D. ; RAMOS, R. ; SUDRIA, A.: Programmable logic device applied to the quasi- sliding control implementation based on zero averaged dynamics. En: *In proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control* (2001)
- [15] FOSSAS, E. ; GRIÑO, R. ; BIEL, D.: Quasi-sliding control based on pulse width modulation, zero average and the L_2 norm. In *Advances in Variable Structure System, Analysis, Integration and Applications*. En: *Ed. World Scientific* (2001)
- [16] FOSSAS, E. ; NÓ, R. G. ; BIEL, D.: Quasi-Sliding Control based on Pulse Width Modulation. Zero Averaged Dynamics and the L_2 Norm. En: *Advances in Variable Structure Systems. Analysis. Integration and Applications (6th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS'2000)* (2000), p. 335–344
- [17] FOSSAS, E. ; ZINOBER, A.: Adaptive Tracking Control of Nonlinear Power Converters. En: *Proceedings IFAC Workshop on Adaptation in Control and Signal Processing, Connobio, Italia* (2001), p. 264–266
- [18] GIRAL, R.: *Síntesis de estructuras multiplicadoras de tensión basadas en células convertidoras continua-continua de tipo conmutado*. España, Universidad Politécnica de Cataluña, Tesis Doctoral, 1999
- [19] HERNÁNDEZ, C.: *Control Inteligente de Sistemas Dinámicos Caóticos*. Madrid, Universidad Politécnica De Madrid, Tesis Doctoral, 2004
- [20] HOYOS, F. ; BURBANO, D. ; ANGULO, F. ; OLIVAR, G. ; TORO, N.: Effects of Quantization, Delay and Internal Resistances in Digitally ZAD-Controlled Buck Converter. En: *International Journal of Bifurcation and Chaos* 22 (2012), March, Nr. 10, p. 9
- [21] KUZNETSOV, A. Y.: *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, New York, 2004
- [22] LÓPEZ, Luis.: *Temas de física*. Editorial Club Universitario, 2010

-
- [23] MUÑOZ, Juan: *Convertidor Boost en Modo de Corrección del Factor de Potencia Usando la Técnica ZAD*. Colombia, Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales, Tesis de Maestría, 2012
- [24] NARANJO, F. *Sistemas de Control de Estructura Variable con Modo de Deslizamiento*. 1991
- [25] NED, Mohan ; TORE, Undeland ; WILLIAM, Robbins: *Power Electronics: Converters, Applications, and Design*. John Wiley & Sons, 1995
- [26] PÉREZ, M. F. ; PÉREZ, M.: Chaotic and steady state behaviour of a nonlinear controlled gyro subjected to harmonic disturbances. En: *Chaos, Solitons & Fractals* 33 (2007), July, p. 623–641
- [27] PÉREZ, M. F. ; PÉREZ, M.: A generalized mathematical model to analyze the nonlinear behavior of a controlled gyroscope in gimbals. En: *Nonlinear Dynamics* 48 48 (2007), April, p. 129–152
- [28] PYRAGAS, K.: Continuous Control of Chaos by self-Controlling feedback. En: *Physics Letters A* (1992), Nr. 170, p. 421–428
- [29] RAMOS, R. ; BIEL, D. ; FOSSAS, E. ; GUINJOAN, F.: A fixed-frequency quasi-sliding control algorithm: Application to power inverters design by means of FPGA implementation. En: *IEEE Trans. on Power Elect.* (2003), p. 18
- [30] TABORDA, John: *Análisis de Bifurcaciones en Sistemas de Segundo Orden Usando PWM y Promediado Cero de la Dinámica del Error*, Universidad Nacional de Colombia-Sede Manizales, Tesis de Maestría, 2006
- [31] TORRES, Ludwing: *Análisis de Diversas Extensiones de la Técnica de Control ZAD Aplicada a Convertidores Electrónicos*, Universidad Nacional de Colombia, Tesis de Maestría, 2011