DETERMINACIÓN DEL TIEMPO NECESARIO PARA QUE UNA PARTÍCULA ESFÉRICA CAYENDO EN UN FLUIDO ALCANCE SU VELOCIDAD TERMINAL.

RAMIRO BETANCOURT GRAJALES

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE MANIZALES
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA, INGENIERIA QUIMICA
e - mail: ramirob@eccel.com; A.A. 127 Manizales, Colombia

INTRODUCCIÓN

Es corriente observar que en los ejercicios planteados con fines didácticos se asuma que se ha alcanzado el estado estable. Con esto generalmente se logran sobresimplificaciones de la realidad física con el fin de hacer más sencillo el manejo matemático. En estos casos las expresiones que permiten hacer el cálculo tienen solo una variable independiente. Para ilustrar esta inquietud analizaremos uno de estos ejercicios típicos (Skelland, pp 281)[1], mostrando la manera de determinar si es o no correcta esta suposición.

Problema

Una esfera de ácido benzoico sólido que tiene un diámetro de 1/2 pulgada (12.7 mm.) cae una distancia de 10 pies (3.048 m) a través de una columna de agua estancada. ¿Cuánto ácido se disuelve durante ésta caída?. El sistema se encuentra a 77 °F (25 °C). Las propiedades físicas pertinentes a esta temperatura son: densidad del ácido benzoico sólido ρ_A= 79.03 lb/pie^3; densidad del agua ρ_B= 62.24 lb/pie^3; viscosidad del agua μ_B=2.16 lb/pie.hr. La difusividad en la fase líquida circundante a la esfera D_{AB} se estima en 4.695x10^{-5} pie^2/hr. La solubilidad o concentración de saturación ρ_{AS} = 0.213 lb de ácido/pie^3 de solución acuosa (3.412 miligramos/cm^3).

Cuestionamientos

El ejercicio está resuelto suponiendo propiedades físicas constantes y velocidad uniforme e igual a la velocidad terminal de una partícula de diámetro constante.

Análisis

La densidad y la viscosidad pueden considerarse constantes dada la baja solubilidad del ácido benzoico en el agua y suponiendo sistema isotérmico. El diámetro y la difusividad también si se disuelve una mínima parte del ácido. La velocidad podrá considerarse constante si la velocidad terminal se alcanza en una fracción de tiempo pequeña comparada con la duración del proceso.

Solución

Comenzamos por determinar el tiempo que se demora la esfera para hacer el recorrido. El movimiento de la partícula se determina haciendo un balance de las fuerzas que actúan sobre ella, a saber la fuerza gravitacional, la fuerza de flotación y la fuerza viscosa. Esta última tiene sentido contrario al movimiento y depende de la velocidad, incrementándose con la misma hasta que la suma neta de las fuerzas se anula, alcanzando la partícula una velocidad constante denominada velocidad terminal (Mc Cabe, pp163)[2]:

$$Re = \frac{\rho v d_P}{\mu}$$

$$v_t = \left[\frac{2g(\rho_P - \rho)m}{A_P \rho_P C_D \rho}\right]^{0.5} \qquad (1)$$

ρ_p : densidad de la partícula; ρ : densidad del medio;
m : masa de la partícula = $(\pi\, d_p^3 \rho_p)/6$;
Ap : área proyectada perpendicular a la dirección del flujo = $(\pi d_p^2)/4$.
C_D : coeficiente de rozamiento. Este cambia con la velocidad y está aproximado por una ecuación diferente dependiendo del rango del número de Reynolds (Re).

Para saber en qué rango está determinamos:

$$K = d_p\left[\frac{g\rho(\rho_p - \rho)}{\mu^2}\right]^{1/3}$$

$$K = \frac{0.5}{12}\left[\frac{32(79.03 - 62.24)62.4(3600)^2}{(2.16)^2}\right] = 189$$

Estando este valor entre 44.0 y 2360, la esfera al final tendrá una velocidad tal que debemos usar la ley de Newton para calcular el coeficiente de rozamiento: $C_D = 0.44$

$$v_t = 1.74\left[\frac{gd_P(\rho_P - \rho)}{\rho}\right]^{0.5} = 1.047 pie/s$$

$$Re_t = \frac{(62.24)(1.047)(3600)\left(\frac{0.5}{12}\right)}{(2.16)} = 4540$$

Partiendo del reposo, la partícula acelerará hasta alcanzar esta velocidad. Debemos tener en cuenta que el flujo obedecerá primero la ley de Stokes, luego la ley intermedia y posteriormente la ley de Newton.

Partimos del balance de ferzas:
fuerza resultante = fuerzas gravitatorias - fuerza resistente o de rozamiento.

$$\frac{dv}{dt} = g\left[\frac{\rho_P - \rho}{\rho_P}\right] - \left[\frac{\rho C_D A_P v^2}{2m}\right] \qquad (2)$$

De la definición del numero de Reynolds[3]:

$$v = \frac{\mu\, Re}{\rho d_P} \qquad (2a)$$

$$\frac{d\,Re}{dt} = \frac{\rho d_P}{2\mu\, m\rho_P}\left[2mg(\rho_P - \rho) - \rho\rho_P C_D A_P\left[\frac{Re^2\mu^2}{\rho^2 d^2}\right]\right]$$

Multiplicando y dividiendo por $\rho_P\, A_P\, \mu^2$:

$$\frac{d\,Re}{dt} = \frac{A_P\mu}{2md_P}\left[\frac{2mg(\rho_P - \rho)\rho d_P^2 - \rho_P C_D A_P\, Re^2\mu^2}{\rho_P A_P \mu^2}\right]$$

también si se disuelve una mínima parte del ácido. La velocidad podrá considerarse constante si la velocidad terminal se alcanza en una fracción de tiempo pequeña comparada con la duración del proceso.

Solución

Comenzamos por determinar el tiempo que se demora la esfera para hacer el recorrido. El movimiento de la partícula se determina haciendo un balance de las fuerzas que actúan sobre ella, a saber la fuerza gravitacional, la fuerza de flotación y la fuerza viscosa. Esta última tiene sentido contrario al movimiento y depende de la velocidad, incrementándose con la misma hasta que la suma neta de las fuerzas se anula, alcanzando la partícula una velocidad constante denominada velocidad terminal (Mc Cabe, pp163)[2]:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v d_P}{\mu}$$

$$v_t = \left[\frac{2g(\rho_P - \rho)m}{A_P \rho_P C_D \rho}\right]^{0.5} \qquad (1)$$

ρ_p : densidad de la partícula; ρ : densidad del medio;
m : masa de la partícula = $(\pi d_p^3 \rho_p)/6$;
A_P : área proyectada perpendicular a la dirección del flujo = $(\pi d_p^2)/4$.
C_D : coeficiente de rozamiento. Este cambia con la velocidad y está aproximado por una ecuación diferente dependiendo del rango del número de Reynolds (Re).

Para saber en qué rango está determinamos:

$$K = d_p\left[\frac{g\rho(\rho_P - \rho)}{\mu^2}\right]^{1/3}$$

$$K = \frac{0.5}{12}\left[\frac{32(79.03 - 62.24)62.4(3600)^2}{(2.16)^2}\right] = 189$$

Estando este valor entre 44.0 y 2360, la esfera al final tendrá una velocidad tal que debemos usar la ley de Newton para calcular el coeficiente de rozamiento: $C_D = 0.44$

$$v_t = 1.74\left[\frac{gd_P(\rho_P - \rho)}{\rho}\right]^{0.5} = 1.047 \text{pie}/\text{s}$$

$$Re_t = \frac{(62.24)(1.047)(3600)\left(\frac{0.5}{12}\right)}{(2.16)} = 4540$$

Partiendo del reposo, la partícula acelerará hasta alcanzar esta velocidad. Debemos tener en cuenta que el flujo obedecerá primero la ley de Stokes, luego la ley intermedia y posteriormente la ley de Newton.

Partimos del balance de ferzas:
fuerza resultante = fuerzas gravitatorias - fuerza resistente o de rozamiento.

$$\frac{dv}{dt} = g\left[\frac{\rho_P - \rho}{\rho_P}\right] - \left[\frac{\rho C_D A_P v^2}{2m}\right] \tag{2}$$

De la definición del numero de Reynolds[3]:

$$v = \frac{\mu \, Re}{\rho d_P} \tag{2a}$$

$$\frac{d\,Re}{dt} = \frac{\rho d_P}{2\mu \, m\rho_P}\left[2mg(\rho_P - \rho) - \rho\rho_P C_D A_P\left[\frac{Re^2 \mu^2}{\rho^2 d^2}\right]\right]$$

Multiplicando y dividiendo por $\rho_P A_P \mu^2$:

$$\frac{d\,Re}{dt} = \frac{A_P\mu}{2md_P}\left[\frac{2mg(\rho_P - \rho)\rho d_P^2 - \rho_P C_D A_P Re^2 \mu^2}{\rho_P A_P \mu^2}\right]$$

Hacemos

$$\phi = \frac{2mg(\rho_P - \rho)\rho d_P^2}{\rho_P A_P \mu^2} \qquad 3)$$

$$\frac{d\,\mathrm{Re}}{\phi - C_D \mathrm{Re}^2} = \frac{A_P \mu}{2md_P} dt \qquad 4)$$

de (1) y $m/\rho_P A_P = 2d_P/3$

$$\mathrm{Re}_t = \frac{\rho v_t d_P}{\mu}; \qquad \phi = C_D . \mathrm{Re}_t^2$$

observamos que ø es el máximo valor de $C_D \cdot \mathrm{Re}^2$ posible para una partícula de tamaño d_p cayendo libremente en un campo gravitatorio de magnitud g.

Siendo las partículas esféricas:

$$\phi = \mathrm{Re}_t^2 C_D = \frac{4\rho g(\rho_P - \rho) d_P^3}{3\mu^2} \qquad (5)$$

Integrando (4) entre Re_0 y Re, y t = 0 y t:

$$\frac{\mu A_P t}{2d_P m} = \int_{\mathrm{Re}_o}^{\mathrm{Re}} \frac{d\,\mathrm{Re}}{\phi - C_D \mathrm{Re}^2} \qquad (6)$$

Si la partícula parte del reposo, o sea si en t = 0 $v_0 = 0$, entonces $\mathrm{Re}_0 = 0$.

Para la zona donde es válida la ley de Stokes $C_D \cdot \mathrm{Re}$ es constante y la ecuación (6) puede integrarse directamente:

$$\frac{\mu A_P t}{2d_P m} = \frac{1}{F} \ln\left[\frac{\phi - F\,\mathrm{Re}_o}{\phi - F\,\mathrm{Re}}\right] \qquad (7)$$

$\mathrm{Re} < 1.9 \qquad F = C_D \cdot \mathrm{Re}$

Eliminando Re y ø por medio de las ecuaciones (3) y (2 a), podemos expresar el tiempo en función de la velocidad directamente:

$$t = \frac{2d_P m}{\mu F A_P} \ln\left[\frac{v_t - v_o}{v_t - v}\right] \tag{8}$$

En este caso

$$v_t = \frac{2g(\rho_P - \rho)\rho d_P m}{F \rho_P \mu A_P} \qquad \text{Re<1.9}$$

Para partículas esféricas F = Re C_D= 24

$$t = \frac{\rho_P d_P^2}{18\mu} \ln\left[\frac{v_t - v_o}{v_t - v}\right] \qquad \text{Re<1.9} \tag{8.a}$$

$$v_t = \frac{g(\rho_P - \rho)\rho d_P^2}{18\,\mu} \tag{9}$$

$$v = v_t - \frac{v_t - v_0}{\exp\left(\dfrac{18\mu t}{\rho_P d_P^2}\right)} \tag{9.a}$$

Para 500 < Re < 200000, C_D es constante y la ecuación (6) puede integrarse directamente:

$$\frac{\mu A_P t}{2 D_P m} = (4C_D \phi)^{-0.5} \ln\left|\frac{\left(\sqrt{\phi} + \text{Re}\sqrt{C_D}\right)\left(\sqrt{\phi} - \text{Re}\sqrt{C_D}\right)}{\left(\sqrt{\phi} - \text{Re}\sqrt{C_D}\right)\left(\sqrt{\phi} + \text{Re}\sqrt{C_D}\right)}\right| \tag{10}$$

Esta ecuación se usa para Re y Re_0 positivos, o sea movimiento hacia abajo, que es, en términos de velocidad:

$$\frac{\mu A_P t}{2D_P m} = (4C_D \phi)^{-0.5} \ln\left[\frac{(v_t + v)(v_t - v_o)}{(v_t - v)(v_t + v_o)}\right] \tag{11}$$

Apliquemos ahora las ecuaciones anteriores a nuestro caso numérico.

Zona de la ley de Stokes

$$Re_O = 0 \,;\, v_O = 0 \,;\, Re_f = 1.9 = (\rho v d_P)/\mu$$

$$v_f = \frac{(2.16)(1.9)}{(62.24)\left(\frac{0.5}{12}\right)(3600)} = 4.396 * 10^{-4} \quad pie/s$$

o sea 0.042 % de la velocidad terminal

De (7) y (5): $\phi = 9.015\text{x}10^6$

$$t = \frac{(79.03)\left(\frac{0.5}{12}\right)^2 (3600)}{(18)(2.16)} \ln\left[\frac{9.015 * 10^6}{9.015 * 10^6 - 24 * 1.9}\right] = 6.43 * 10^{-5} \quad s$$

partiendo de (8.a) y (9.a), el espacio recorrido será

$$e = \int_0^t v\,dt = v_t\, t - (v_t - v_o)\left[\frac{\rho_P\, d_P^2}{18\mu}\right]\left[1 - \exp\left[-\frac{18\mu\, t}{\rho_P\, d_P^2}\right]\right] \tag{12}$$

$$e_1 = (1.05)(6.43*10^{-5}) - (1.05)\left[\frac{(79.03)(3600)}{(24)^2(18)(2.16)}\right]\left[1-\exp\left[\frac{(-18)(2.16)(6.43*10^{-5})}{(3600)(79.03)\left(\frac{1}{24}\right)^2}\right]\right]$$

$$e_1 = 4.8964*10^{-10}\,pie = 1.4924*10^{-7}\,mm$$

(Lo único seguro es que tiende a cero)

Para la región intermedia (en el rango de Reynolds entre 1.9 y 500), la integración gráfica de la ecuación (6) permite la solución numérica directa:

$$C_D = 18.5/Re^{0.6}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\mu A_p t}{2 D_p m} = \int_{Re_o}^{Re}\left[\frac{d\,Re}{\phi - 18.5\,Re^{1.4}}\right] \tag{13}$$

Re	v (pie/s)	$1/(\phi - 18.5Re^{1.4})$	t (s)
1.9	$4.40*10^{-4}$	$1.109*10^{-7}$	0.00
100.0	$2.31*10^{-2}$	$1.110*10^{-7}$	$3.32*10^{-3}$
200.0	$4.63*10^{-2}$	$1.113*10^{-7}$	$6.72*10^{-3}$
300.0	$6.94*10^{-2}$	$1.115*10^{-7}$	$1.01*10^{-2}$
400.0	$9.26*10^{-2}$	$1.120*10^{-7}$	$1.36*10^{-2}$
500.0	$1.16*10^{-1}$	$1.123*10^{-7}$	$1.705*10^{-2}$

Una gráfica de v contra t muestra variación lineal en este rango. El área bajo la curva nos da el espacio recorrido en este lapso

$$e_2 = \frac{(17.05*10^{-3})(11.6*10^{-2})}{2} = 9.9*10^{-4}\quad pie \quad = \quad 0.30\,mm$$

Al fin de este período se ha alcanzado el 11.08 % de la velocidad terminal.

Para Reynolds entre 500 y 200000 podemos usar la ecuación (11)

$$t = \left[\frac{\rho_P d_P}{0.66\rho v_t}\right] \ln\left[\left[\frac{v_t + v}{v_t - v}\right]\left[\frac{v_t - v_o}{v_t + v_o}\right]\right]$$

$$t = \left[\frac{(79.03)}{(24)(0.66)(62.24)(1.05)}\right] \ln\left[\left[\frac{1.05 + (1.05)(0.99)}{1.05 - (1.05)(0.99)}\right]\left[\frac{1.05 - 0.116}{1.05 + 0.116}\right]\right] = 0.3872 \quad s$$

Este es el tiempo necesario para alcanzar el 99.0 % de la velocidad terminal.

El espacio recorrido bajo éste régimen es:

$$e_3 = \frac{\rho_P d_P}{0.33\rho} \ln\left[\frac{(v_t + v_o)\exp\left[\frac{0.66\rho v_t t}{\rho_P d_P}\right] + (v_t - v_o)}{2v_t}\right] - v_t t$$

$$e_3 = \frac{79.03}{0.66 - 62.24} \ln\left[\frac{1.05 + 0.116}{2.1}\left[\exp\left[\frac{0.66 - 62.24 * 0.39 * 1.05}{79.03 * \frac{1}{24}}\right] + 1\right]\right] - 1.05 * 0.39 * 12$$

$$e_3 = 3.79 \, pulgadas = 9.63 cm$$

El espacio total recorrido es entonces 9.66 cm. o 3.80 pulgadas en un tiempo de 0.404 segundos.

Los diez pies se atraviesan en:

$$\frac{10 - \frac{3.8}{12}}{1.05} + 0.4 = 9.22 + 0.4 = 9.62 segundos$$

Ahora, aplicamos el criterio de Garner y Keey[4] para saber si son importantes los efectos de la convección natural en este caso.

Los efectos de convección natural están prácticamente ausentes cuando el número de Sherwood obtenido por convección forzada iguala al obtenido por convección libre o natural. Esto se ajusta a valores de Reynolds que satisfagan la siguiente condición

$$\mathrm{Re} \geq 0.4\,\mathrm{Gr}^{0.5}\mathrm{Sc}^{-\frac{1}{6}} \tag{14}$$

Gr numero de Grashoff, relación entre fuerzas gravitatorias y viscosas.

La diferencia entre las densidades de una solución acuosa saturada de ácido benzoico y agua pura a 77 °F es 0.025 lb/pie^3

$$Gr_D = \frac{g d_p^3}{\nu^2}\left[\frac{\rho_\infty}{\rho_S} - 1\right] = \frac{g d_p^3 |\Delta\rho| \rho_\infty^2}{\mu^2 \rho_s}$$

$$Gr_D = \frac{\left(\frac{0.5}{12.4}\right)(4.17 * 10^8)(0.025)(62.24)^2}{(62.265)(2.16)^2} = 1.008 * 10^4$$

$$Sc = \frac{\mu}{\rho D_{AB}} = \frac{2.16}{(62.24)(4.695 * 10^{-5})} = 740$$

Reemplazando en (15):

$$0.4\,\mathrm{Gr}^{0.5}\mathrm{Sc}^{-\frac{1}{6}} = \frac{(0.4)\sqrt{1.008 * 10^4}}{(740)^{\frac{1}{6}}} = 13.4$$

Esta cantidad es mucho menor que Reynolds (4540), lo que indica que los efectos de la convección natural son despreciables.

Para determinar el coeficiente de transferencia se puede escoger entre una gran cantidad de expresiones dadas en la literatura.

Usando la expresión recomendada por Steinberger y Treybal, debemos determinar primero

$$Gr_D Sc = \left(1.008 * 10^4\right)(740) = 7.46 * 10^6 < 10^8 \tag{15}$$

Por lo tanto

$$Sh_o = 2.0 + 0.569\left(Gr_D\, Sc\right)^{0.250} = 31.736$$

$$Sh = Sh_o + 0.347\left(Re\, Sc^{0.5}\right)^{0.62} = 529.66$$

La expresión más sencilla dada por Ramz y Marshall para casos en que la convección natural es despreciable y que según Sherwood se ajusta bien a datos tomados para el sistema ácido benzoico - agua:

$$Sh = 2.0 + 0.60\, Re^{0.5}\, Sc^{\frac{1}{3}} = 367.7 \tag{16}$$

Al hacer cálculos con otras expresiones se hallan valores que oscilan entre 332 y 580. Sería importante que en las experiencias se pudiera informar la intensidad de la turbulencia.

Sherwood también informa que la expresión de Williams, dada en McAdams para transferencia de calor en aire a esferas, correlaciona adecuadamente los datos de transferencia de masa:

$$Sh = 0.43\, Re^{0.56}\, Sc^{-1/3} = 434.34$$

Este valor se aproxima al promedio de los tres calculados que es 444.0 Sin embargo, por la información de Sherwood y por ser un valor más conservador adoptamos para el presente cálculo Sh = 368.0

$$Sh = \frac{k \rho_\rho d_p}{D_{AB}};\, k_\rho = 0.415\, pie/hr$$

$$n_{AS} = k_\rho\left(\rho_{As} - \rho_{A\infty}\right) = (0.415)(0.213 - 0.0) = 0.088\, lbA/hr.pie^2$$

La esfera cae 10 pies en 9.62 segundos, o sea que la cantidad disuelta durante la caída es:

$$m_A = \frac{(0.088)(\pi)\left(\frac{1}{24}\right)^2 (9.62)}{(3600)} = 1.3 * 10^{-6} \text{ lb de ácido.}$$

La esfera pesa inicialmente

$$\left[\frac{\pi\, d_P^3}{6}\right]\rho_P = (\pi)\left(\frac{1}{24}\right)^3\left(\frac{79.03}{6}\right) = 3.0 * 10^{-3} \quad \text{lb}$$

Conclusión

Observamos que la esfera pierde el 0.043 % de su masa, con lo que su diámetro disminuye en 0.0143 %, de tal forma que es correcto suponer d_p constante al igual que v_t constante. En este caso los efectos de aceleración iniciales son realmente despreciables (ocupan el 4.16 % del tiempo total). Sin embargo, a medida que la diferencia de densidades entre partícula y fluido disminuyen, este efecto aumenta.

REFERENCIAS

1. SKELLAND, A. H. P. «Diffusional Mass Transfer» Joh Wiley Sons Inc. 1974.

2. McCABE, W. L., J. C. Smith y P. Harriott «Operaciones básicas de Ingeniería Química» McGraw Hill 1991.

3. TREYBAL, R. E. «Operaciones de Transferencia de Masa», Tercera Edición (segunda en español). McGraw Hill Inc. 1980

4. LAPPLE, C. E., and C. B. Shepherd. «Calculation of Particle Trayectories» Ind. Eng. Chem. 32 : 5, 605 - 617 (1940).