

CONDUCCIÓN TRANSITORIA CON GENERACIÓN

Simetría Plana Unidireccional - Distribución inicial Parabólica

RAMIRO BETANCOURT GRAJALES*

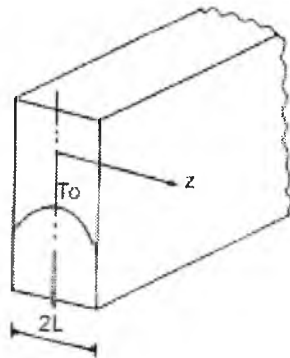
RESUMEN

Se analiza el caso en el período no estable de una placa plana infinita de espesor $2L$ que intercambia calor por convección con un medio a T_∞ con coeficiente convectivo o pelicular h . Su distribución de temperatura inicial es parabólica y se genera calor en su interior de manera uniforme a razón de Φ_{II} W/m^3 . Se evidencia la rápida convergencia de la serie resultante comparando sus resultados, calculados con solo dos términos, con los obtenidos para condiciones estacionarias extremas.

ABSTRACT

The case is analyzed in the non stable period of a plane infinite wall of thickness $2L$ that exchanges heat for convection with the surroundings to T_∞ , with convective or pelicular coefficient h . Their initial temperature is parabolic and heat is generated in its interior in an uniform way to reason of Φ_{II} W/m^3 . The quick convergence of the series resulting is evidenced comparing its results, calculated with single two terms, with those obtained for extreme stationary conditions.

* Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales. Departamento de Ingeniería.
e-mail: ramirob@emtelsa.multi.net.com



Introducción

Los casos en los que se genera calor en un sólido tienen importantes aplicaciones técnicas. El calor puede generarse por (i) el paso de una corriente eléctrica, (ii) Calentamiento dieléctrico o inductivo, (iii) descomposición radioactiva, (iv) absorción de radiación, (v) generación mecánica en flujo viscoso o plástico, (vi) reacción química, incluyéndose aquí situaciones tan diversas como el fraguado del cemento y la maduración de las manzanas. El término de generación puede ser función de la temperatura y/o de la posición, o constante como se presenta en el calentamiento dieléctrico, entre otros.

Planteamiento y Solución del Problema

El balance generalizado para conducción de calor en sólidos es⁽¹⁾

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + \Phi_H$$

Utilizando coordenadas rectangulares y sabiendo que solo existen gradientes de temperatura en la dirección z , colocando el origen coordenado en el plano de simetría se obtiene el modelo matemático que describe esta situación:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\Phi_H}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

donde k : conductividad térmica [W/m.K]; α : difusividad térmica [m²/s].

Condición inicial

$$t = 0 ; T = T_0 = a \left[1 - \left(\frac{z}{L} \right)^2 \right] + T_{s0} = b - a \left(\frac{z}{L} \right)^2 ; 0 \leq z \leq L$$

$b = a + T_{s0}$; T_{s0} es la temperatura inicial en la superficie.

Con las siguientes condiciones límite o de contorno:

$$t > 0 ; \frac{\partial T}{\partial z} = 0 ; z = 0 \text{ plano de simetría o superficie adiabática}$$

$$t > 0 ; -k \frac{\partial T}{\partial z} = h(T - T_\infty) ; z = L \text{ superficie convectiva}$$

Se resuelve la ecuación por el método de superposición para lo cual introducimos el siguiente cambio de variables: $T = \Omega(z,t) + F(z)$. La ecuación (1) y sus condiciones límite toman la forma

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\Phi_H}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Omega}{\partial t}$$

$$t = 0 : 0 \leq z \leq L ; \Omega = T_0 - F$$

$$t > 0 ; z = 0 ; \frac{\partial \Omega}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \text{ que es satisfecha por } \frac{\partial \Omega}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

$$t > 0 ; z = L ; -k \left[\frac{\partial \Omega}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z} \right] = h(\Omega + F - T_{\infty})$$

$$\text{Se puede decir: } -k \frac{\partial \Omega}{\partial z} \Big|_{z=L} = h\Omega \Big|_{z=L} ; \quad -k \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{z=L} = h(F_L - T_{\infty})$$

Haciendo que F cumpla:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\Phi_H}{k} = 0 \quad (2)$$

Esto implica

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Omega}{\partial t} \quad (3)$$

F se obtiene mediante integración repetida de (2) y las constantes de integración se hallan a partir de las condiciones límite ya discutidas. Integrando una vez:

$$\frac{dF}{dz} = -\frac{\Phi_H}{k} z + C_1$$

CL1: $z = 0 ; dF/dz = 0 \Rightarrow C_1 = 0$. Integrando nuevamente

$$F = -\frac{\Phi_H z^2}{2k} + C_2$$

CL2: $z = L ; -k(dF/dz)_{z=L} = h(F_L - T_{\infty})$

donde k : conductividad térmica [W/m.K]; α : difusividad térmica [m^2/s].

Condición inicial

$$t = 0 ; T = T_0 = a \left[1 - \left(\frac{z}{L} \right)^2 \right] + T_{s0} = b - a \left(\frac{z}{L} \right)^2 ; 0 \leq z \leq L$$

$b = a + T_{s0}$; T_{s0} es la temperatura inicial en la superficie.

Con las siguientes condiciones límite o de contorno:

$$t > 0 ; \frac{\partial T}{\partial z} = 0 ; z = 0 \text{ plano de simetría o superficie adiabática}$$

$$t > 0 ; -k \frac{\partial T}{\partial z} = h(T - T_\infty) ; z = L \text{ superficie convectiva}$$

Se resuelve la ecuación por el método de superposición para lo cual introducimos el siguiente cambio de variables: $T = \Omega(z,t) + F(z)$. La ecuación (1) y sus condiciones límite toman la forma

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\Phi_{//}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Omega}{\partial t}$$

$$t = 0 : 0 \leq z \leq L ; \Omega = T_0 - F$$

$$t > 0 ; z = 0 ; \frac{\partial \Omega}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \text{ que es satisfecha por } \frac{\partial \Omega}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

$$t > 0 ; z = L ; -k \left[\frac{\partial \Omega}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z} \right] = h(\Omega + F - T_{\infty})$$

$$\text{Se puede decir: } -k \left. \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right|_{z=L} = h\Omega_{z=L} ; -k \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{z=L} = h(F_L - T_{\infty})$$

Haciendo que F cumpla:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\Phi_{II}}{k} = 0 \quad (2)$$

Esto implica

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Omega}{\partial t} \quad (3)$$

F se obtiene mediante integración repetida de (2) y las constantes de integración se hallan a partir de las condiciones límite ya discutidas. Integrando una vez:

$$\frac{dF}{dz} = -\frac{\Phi_{II}}{k} z + C_1$$

CL1: $z = 0 ; dF/dz = 0 \Rightarrow C_1 = 0$. Integrando nuevamente

$$F = -\frac{\Phi_{II} z^2}{2k} + C_2$$

CL2: $z = L ; -k(dF/dz)_{z=L} = h(F_L - T_{\infty})$

$$-k\left(-\frac{\Phi_H L}{k}\right) = h\left[-\frac{\Phi_H L^2}{2k} + C_2 - T_\infty\right]$$

$$F = \frac{\Phi_H}{2k}(L^2 - z^2) + \frac{\Phi_H L}{h} + T_\infty \quad (4)$$

La función $\Omega(z,t)$ se obtiene resolviendo (3) por separación de variables pues se trata de una ecuación diferencial parcial con condiciones de contorno homogéneas (permanecen idénticas al multiplicar por una constante la variable dependiente Ω). Para ello se supone que existen dos funciones $\Theta(z)$ y $G(t)$, la primera función exclusiva de la posición y la segunda función exclusiva del tiempo, tales que:

$$\Omega(z,t) = \Theta(z) * G(t)$$

Reemplazando en (3) y reorganizando se tiene

$$\frac{1}{\alpha G} \frac{dG}{dt} = \frac{1}{\Theta} \frac{d^2\Theta}{dz^2} = -\gamma^2$$

donde γ es un número real. Se iguala a esta constante pues siendo cada lado función de una variable diferente debe ser una constante. Se puede demostrar que esta constante es un número real y debe ser una cantidad negativa para que no produzca soluciones triviales. De otra parte este valor es lógico pues la temperatura debe tener un valor finito cuando t aumenta indefinidamente. Tenemos entonces dos ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes. La primera, de primer orden se resuelve por separación de variables:

$$\frac{dG}{G} = -\alpha\gamma^2 dt \Rightarrow G = C_1 \exp(-\gamma^2 \alpha t) \quad (5)$$

La segunda, de segundo orden

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d^2\Theta}{dz^2} + \gamma^2 = 0$$

Representando $D = d\Theta/dz$, tendrá por ecuación auxiliar $D^2 + \gamma^2 = 0$ con solución $D = \pm i\gamma$, i la unidad imaginaria $(-1)^{1/2}$. Entonces

$$\Theta = Ae^{i\gamma z} + Be^{-i\gamma z} = C_2 \operatorname{sen}(\gamma z) + C_3 \operatorname{cos}(\gamma z) \quad (6)$$

CL1: $t > 0$; $z = 0$; $d\Omega/dz = 0 \Rightarrow d\Theta/dz = 0$ para solución no trivial.

$$\left. \frac{d\Theta}{dz} \right|_{z=0} = C_2 \gamma \operatorname{cos}(\gamma z) - C_3 \operatorname{sen}(\gamma z) \Big|_{z=0} = \gamma C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Condición límite 2:

$$-k \left. \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right|_{z=L} = h\Omega \Big|_{z=L} \Rightarrow -k \left. \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right|_{z=L} = h\Theta \Big|_{z=L} \text{ ya que } \Omega \text{ no depende de } z.$$

$$\text{Reemplazando } -kC_3 [-\gamma \operatorname{sen}(\gamma z)] \Big|_{z=L} = h\Theta \Big|_{z=L} \Rightarrow C_3 = \frac{h\Theta_L}{k\gamma \operatorname{sen}(\gamma L)}$$

Calculando la ecuación para Θ en $z = L$ con los valores hallados para C_2 y C_3 :

$$\Theta_L = \frac{h\Theta_L \operatorname{cos}(\gamma L)}{k\gamma \operatorname{sen}(\gamma L)} \Rightarrow \gamma \operatorname{tan}(\gamma L) = h/k \Rightarrow (\gamma L) \operatorname{tan}(\gamma L) = Bi \quad (7)$$

Todos los valores de γ que satisfagan la ecuación trascendental (7) constituyen solución particular de (6). La solución más general se obtiene por superposición de las soluciones particulares, a saber:

$$\Omega_{(z,t)} = \sum_1^{\infty} A_n \cos\left(\frac{\lambda_n z}{L}\right) \exp\left(\frac{-\lambda_n^2 \alpha t}{L^2}\right) \quad (8)$$

donde los valores propios $\lambda_n = \gamma_n$ son las raíces de la ecuación trascendental $\lambda_n \tan \lambda_n = Bi$, con $Bi = hL/k$. La función propia de este problema de valor propio es la función $\cos(\lambda_n z/L)$. $A_n = C_1 C_3$, engloba las dos constantes de integración a determinar.

Aplicando la condición inicial ($t = 0$) y utilizando las propiedades de ortogonalidad que presentan las funciones propias, multiplicamos ambos lados de $\Omega_{(z,0)}$ por $\cos(\lambda_n z/L)$ e integrando:

$$\int_0^L (T_0 - F) \cos\left(\frac{\lambda_n z}{L}\right) dz = A_n \int_0^L \cos^2\left(\frac{\lambda_n z}{L}\right) dz \quad (9)$$

reemplazando los valores de T_0 y F , la integral de la izquierda es

$$\begin{aligned} \int_0^L (T_0 - F) \cos\left(\frac{\lambda_n z}{L}\right) dz &= \int_0^L \left(b - \frac{az^2}{L^2} - \frac{\Phi_{H1} L^2}{2k} + \frac{\Phi_{H1} z^2}{2k} - \frac{\Phi_{H1} L}{h} - T_{-} \right) \cos\left(\frac{\lambda_n z}{L}\right) dz \\ &= \left(b - \frac{\Phi_{H1} L^2}{2k} - \frac{\Phi_{H1} L}{h} - T_{-} \right) \int_0^L \cos\left(\frac{\lambda_n z}{L}\right) dz + \left(\frac{\Phi_{H1}}{2k} - \frac{a}{L^2} \right) \int_0^L z^2 \cos\left(\frac{\lambda_n z}{L}\right) dz \end{aligned}$$

Se estiman a continuación las diferentes integrales involucradas en (9)

$$\begin{aligned} \int_0^L \cos^2\left(\frac{\lambda_n z}{L}\right) dz &= (L/\lambda_n) \int_0^{\lambda_n} \cos^2 u du = (L/\lambda_n) \int_0^{\lambda_n} \frac{\cos(2u) + 1}{2} du = \left(\frac{L}{\lambda_n} \right) \left[\frac{\sin(2u)}{4} + \frac{u}{2} \right]_0^{\lambda_n} \\ &= \left(\frac{L}{\lambda_n} \right) \left[\frac{\sin(2\lambda_n)}{4} + \frac{\lambda_n}{2} \right] = \frac{\sin \lambda_n \cos \lambda_n + \lambda_n}{2(\lambda_n / L)} \end{aligned}$$

La integral de $\cos(cz)$ es $(1/c)\text{sen}(cz)$. La integral restante deberá hacerse por partes y de manera recurrente:

$$\int_0^L z^2 \cos(cz) dz = \left(\frac{z^2}{c}\right) \text{sen}(cz) - \int_0^L \left(\frac{2}{c}\right) z \text{sen}(cz) dz$$

$$\int_0^L z \text{sen}(cz) dz = -\left(\frac{z}{a}\right) \cos(cz) + \int_0^L \left(\frac{1}{a}\right) \cos(cz) dz$$

Se obtiene entonces que:

$$\begin{aligned} \int_0^L z^2 \cos\left(\frac{\lambda_n z}{L}\right) dz &= \left(\frac{L^3}{\lambda_n}\right) \text{sen } \lambda_n + \left(\frac{2L^3}{\lambda_n^2}\right) \cos \lambda_n - \left(\frac{2L^3}{\lambda_n^3}\right) \text{sen } \lambda_n \\ &= \left(\frac{2L^3}{\lambda_n^2}\right) \cos \lambda_n + \left[\frac{L^3}{\lambda_n} - \frac{2L^3}{\lambda_n^3}\right] \text{sen } \lambda_n \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta los valores de las integrales anteriores, las constantes A_n son:

$$A_n = \frac{2 \left[(T_{s0} - T_\infty) - \frac{\Phi_{II} L}{h} - \frac{\Phi_{II} L^2}{k \lambda_n^2} + \frac{2a}{\lambda_n^2} \right] \text{sen}(\lambda_n) + \frac{4L^2}{\lambda_n} \left[\frac{\Phi_{II}}{2k} - \frac{a}{L^2} \right] \cos(\lambda_n)}{\text{sen}(\lambda_n) \cos(\lambda_n) + \lambda_n}$$

Finalmente la expresión para el perfil de temperaturas es

$$T_{(z,t)} = \sum_1^{\infty} A_n \cos\left(\frac{\lambda_n z}{L}\right) \exp\left(\frac{-\lambda_n^2 \alpha t}{L^2}\right) + \frac{\Theta_{II}}{2k} (L^2 - z^2) + \frac{\Theta_{II} L}{h} + T_\infty \quad (10)$$

Aplicación numérica: ^[2] Un elemento combustible de un reactor nuclear tiene la forma de una placa plana de espesor $2L = 20$ mm y está enfriado desde sus dos superficies con coeficiente convectivo 1100 W/m².K, y $T_{\infty} = 250$ °C. En operación normal genera $\Phi_{H1} = 10^7$ W/m³. Si repentinamente esta potencia aumenta a $\Phi_{H2} = 2 \times 10^7$ W/m³, determine la nueva distribución de temperaturas en la placa después de alcanzar nuevamente el estado estable. Las propiedades térmicas del elemento de combustible nuclear son $k = 30$ W/m.K y $\alpha = 5 \times 10^{-6}$ m²/s.

En estado estable la ecuación (1) se reduce a

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\Phi_H}{k} = 0$$

Con las condiciones límite

$$\text{CL1: } \frac{\partial T}{\partial z} = 0 ; z = 0 \text{ plano de simetría o superficie adiabática}$$

$$\text{CL2: } -k \frac{\partial T}{\partial z} = h(T - T_{\infty}) \text{ } z = L \text{ superficie convectiva}$$

Integrando una vez

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{\Phi_H}{k} z + C_1$$

aplicando la primera condición límite $C_1 = 0$. Integrando nuevamente

$$T = -\frac{\Phi_H z^2}{2k} + C_2$$

$$\text{CL2: } -k \left(-\frac{\Phi_H L}{k} \right) = h \left(-\frac{\Phi_H L^2}{2k} + C_2 - T_{\infty} \right)$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{\Phi_H L}{h} + \frac{\Phi_H L^2}{2k} + T_\infty$$

$$T = \frac{\Phi_H L^2}{2k} \left[1 - \left(\frac{z}{L} \right)^2 \right] + \frac{\Phi_H L}{h} + T_\infty$$

Se observa que cuando h tiende a infinito, T_s la temperatura de la superficie, tiende a T_∞ la temperatura del medio.

Para el caso presente, reemplazando los valores numéricos, en la situación inicial la distribución de temperaturas es:

$$T_1 = 16.667 \left[1 - \left(\frac{z}{0.01} \right)^2 \right] + 340.91 \text{ °C}$$

Y cuando nuevamente se alcanza la condición de estado estable:

$$T_2 = 33.334 \left[1 - \left(\frac{z}{0.01} \right)^2 \right] + 431.82 \text{ °C}$$

Se observa que el origen coordenado se toma en el plano de simetría por lo cual la longitud característica L es el semiespesor (10 mm).

Reemplazando los valores numéricos anteriores, la expresión (10) toma la forma

$$T(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left(\frac{\lambda_n z}{0.01} \right) \exp(-0.05 \lambda_n^2 t) - 3.333 \times 10^5 z^2 + 465.15$$

$$\text{con } A_n = \frac{[(66.66 \cos \lambda_n) / \lambda_n] - [181.82 + (66.66 / \lambda_n^2)]}{\text{sen } \lambda_n \cos \lambda_n + \lambda_n}$$

Para apreciar la rápida convergencia de esta serie haremos evaluaciones en diferentes posiciones y tiempos. El estado estable T_1 corresponderá a $t = 0$ y el T_2 a $t = \infty$. Evaluamos Biot:

$$Bi = \frac{hL}{k} = \frac{(1100)(0.01)}{30} = 0.367 \Rightarrow \tan \lambda_n = \frac{0.367}{\lambda_n}$$

Utilizando el método de Newton de convergencia obtenemos

$\lambda_1 = 0.5711$; $\lambda_2 = 3.2539$; $\lambda_3 = 6.3410$; $\lambda_4 = 9.4635$, y respectivamente

$A_1 = -107.79$; $A_2 = 0.216$; $A_3 = -0.0167$; $A_4 = 0.00304$.

Tomando solo los dos primeros términos de la sumatoria obtenemos:

$z = 0$	$T_1 = 357.58$	$T(0,0) = 357.58$	$T_2 = 465.15$	$T(0,\infty) = 465.15$
$z = L/2$	$T_1 = 353.41$	$T(0.005,0) = 353.38$	$T_2 = 456.82$	$T(0.005,\infty) = 456.82$
$z = L$	$T_1 = 340.91$	$T(0.01,0) = 340.92$	$T_2 = 431.82$	$T(0.01,\infty) = 431.82$

En la tabla anterior las longitudes están en metros y las temperaturas en °C.

Es de anotarse que para este sistema, después de 300 s, la temperatura en el centro $T(0.005,300)$ difiere menos de un grado centígrado respecto a la de estado estable T_2 , y después de 500 s difiere en menos de 0.1 °C.

REFERENCIAS

[1] - Betancourt G. Ramiro: "Fenómenos de Transporte: Un curso Introductorio" p 70 Centro Publicaciones Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales, 1991.

[2] Incropera y Dewitt: Fundamentals of Heat and mass Transfer p.253. 4ª ed. John Wiley e Sons. 1996.