PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE POLÍGONO MEDIANTE EL MÓDULO TORTUGA DE PYTHON

JUAN MANUEL JIMÉNEZ VEGA

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Bogotá, Colombia

2014

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE POLÍGONO MEDIANTE EL MÓDULO TURTLE DE PYTHON

JUAN MANUEL JIMÉNEZ VEGA

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

DIRECTOR
HÉCTOR MANUEL MORA ESCOBAR
Dr. EN MATEMÁTICA APLICADA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
BOGOTÁ, COLOMBIA
2014

Nota de aceptación

Trabajo de grado

Jurado

Jurado

Director

Bogota D.C, Diciembre de 2014

A Dios quien me ha brindado la fé,
la voluntad y fortaleza necesarias para
afrontar todos los retos que me he propuesto en la vida

A mi amada esposa
quien me ha dado su amor, apoyo y comprensión
de manera incondicional en todo momento y situación.

A mi hijo, fuente inagotable
y permanente de felicidad en mi diario vivir

Agradecimientos

Agradezco a la Universidad Nacional por brindarme la oportunidad de participar en la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, a sus docentes y en especial a mi director, el profesor Héctor Manuel Mora Escobar por su paciencia, dedicación, por su invaluable colaboración y sobre todo por su calidad humana.

Contenido

Índice de figuras

Resumen

Esta propuesta didáctica se ha elaborado como una herramienta para la enseñanza del concepto de polígono mediante la aplicación del módulo *turtle* de Python. Está dirigida a estudiantes de ciclo cinco, ya que se plantean ejercicios y actividades que requieren el conocimiento de elementos básicos de geometría, trigonometría y en el mejor de los casos, disposición para aprender rudimentos de programación.

Con el propósito de estudiar las propiedades de los polígonos desde una perspectiva, intuitiva y experimental, se ha organizado el escrito de la siguiente forma: en el primer capítulo se hace un recuento de los orígenes de la geometría y de los aportes que tuvieron mayor incidencia en la solución de los tres problemas clásicos de la geometría griega. En el segundo capítulo se contextualiza la metodología de la propuesta en el construccionismo, con el fin de comprender la filosofía e intencionalidad de la geometría de la tortuga. El tercer capítulo introduce conceptos esenciales de programación en Python mediante ejemplos sencillos, para llegar naturalmente a la construcción de círcunferencias y polígonos. El cuarto capítulo corresponde a los aspectos teóricos más importantes de los triángulos, por ser estos los polígonos mas sencillos y fáciles de estudiar, además de ser la unidad fundamental para la descomposición de los demás polígonos. Finalmente, en la propuesta didáctica se plantean ejercicios, preguntas y problemas sobre la construcción de polígonos, la deducción y generalización de sus propiedades, a través de la elaboración de programas computacionales.

Palabras clave: Polígonos, sistema coordenado, módulo turtle, construccionismo

Abstract

This didactic proposal has been developed as a tool for teaching the concept of polygon by applying the module turtle , Python . It is aimed at students from five cycle because exercises and activities that require the knowledge of basic elements of geometry, trigonometry and the best , willingness to learn programming basics arise. bigskip

In order to study the properties of polygons from an intuitive and experimental perspective, is organized written as follows : in the first chapter recounts the origins of geometry and input with the highest incidence is in solving the three classical problems of Greek geometry. In the second chapter the methodology proposed in constructionism is contextualized , in order to understand the philosophy and intent of the geometry of the turtle. The third chapter introduces basic concepts of programming in Python using simple examples to come naturally to the construction of circles and polygons. The fourth chapter corresponds to the most important theoretical aspects of triangles , because these are the most simple and easy polygons study , besides being fundamental for the decomposition of other polygons unit. Finally, the didactic proposal exercises, questions and problems about building polygons , deduction and generalization properties arise through the development of computer programs.

Keywords: Polygons, coordinate system, turtle module, constructionism

Introducción

La enseñanza del concepto de polígono, sus características y propiedades, hace parte del quehacer de los docentes de matemáticas de todos los niveles. Inclusive, en grado preescolar encontramos que los infantes se aproximan al concepto de polígono mediante el reconocimiento o discriminación de las figuras geométricas, su representación en sistemas bi y tridimensionales, además de las nociones topológicas desarrolladas al interactuar con los objetos e interpretar sus propiedades con ayuda de los sentidos. En grados posteriores se propone en los Estándares del Ministerio de Educación, [9] el profundizar en la identificación de figuras congruentes y semejantes, además de su comparación y clasificación por la regularidad de sus lados y ángulos.

Si la enseñanza de los temas mencionados con anterioridad en la primaria y en la básica secundaria cumple con su cometido, es de esperar, que en el momento en que los estudiantes hagan su arribo a la educación media estén en condiciones de afrontar los retos planteados por la trigonometría y el cálculo. Sin embargo y a pesar de la continuidad y pertinencia de los contenidos, no puede afirmarse categóricamente que exista apropiación del concepto de polígono. Esta situación se ve reflejada en los bajos resultados obtenidos por los estudiantes colombianos en pruebas externas como: PISA y Saber 11.

Evidencias de las dificultades de los estudiantes al resolver problemas matemáticos, se hallan en la síntesis de resultados de la prueba PISA 2009, publicada por el Icfes en su página oficial. En este documento se analizan los niveles de desempeño en todas las áreas, concluyendo que

70,6% de los representantes de nuestro país no alcanzó el puntaje mínimo establecido por PISA en matemáticas. Siendo más precisos, no llegaron ni al nivel dos, de seis posibles y en este sentido “no estarían en capacidad de actuar activamente en la sociedad”. El nivel dos, donde se ha concentrado la mayor parte de los estudiantes en las tres evaluaciones en las que ha participado Colombia: 2006, 2009 y 2012, se caracteriza por un bajo nivel de análisis e interpretación. La descripción del segundo nivel de desempeño es la siguiente:

- Interpretar y reconocer situaciones que no requieren más de una inferencia directa.
- Extraer información relevante de una fuente simple.
- Emplear algoritmos básicos, fórmulas y procedimientos; o manejar convenciones.
- Hacer interpretaciones literales de los resultados.

De la misma forma, en el resumen ejecutivo de resultados para el año 2012 [3]se observa que el porcentaje de estudiantes que no alcanzaron el nivel dos aumentó a 73,8%. A favor de las políticas gubernamentales, la OCDE destaca el compromiso con el acceso al sistema, cobertura y calidad educativa. Sin embargo, los resultados demuestran que no han sido suficientes los esfuerzos del gobierno por mejorar la calidad educativa y al parecer el problema de fondo tiene más que ver con las prácticas pedagógicas en el aula, que sin ser erróneas, no se han concebido específicamente para cumplir con los estándares internacionales. No debe interpretarse por parte del lector que la intención de los docentes sea el preparar a los estudiantes para obtener mejores puntuaciones en las pruebas, sino formalizar y contextualizar los conceptos matemáticos en situaciones más complejas.

Después de este breve análisis, es lógico pensar en los desafíos y oportunidades que tenemos los docentes de matemáticas para contribuir con una educación de mayor calidad. Con este propósito diseñamos una propuesta didáctica que pretende ser un aporte para la enseñanza del concepto de polígono en la educación medía; ya que lo consideramos fundamental para

[3]Ver en [3] tabla 4, Puntajes promedio y porcentajes de estudiantes en niveles 5 y 6, nivel 2 y por debajo del nivel 2 en Colombia. 2006, 2009 y 2012

la comprensión de muchos de los temas de geometría que se enseñan en los diferentes niveles escolares.

Nuestra premisa es dotar al estudiante de herramientas conceptuales que despierten su interés por razonar, conceptualizar y aplicar sus conocimientos en un contexto alternativo, generalizarlo y profundizar en la exploración de la geometría y la trigonometría, mediante módelos matemáticos estructurados en el lenguaje de programación Python y concretamente con la ayuda de su módulo *turtle*. Finalmente esta propuesta establece una metodología para la enseñanza de conceptos matemáticos, asistida por ordenador; que será un referente para iniciar a los estudiantes en la programación, para que alrededor de ella surjan nuevas propuestas.

Capítulo 1

Geometría y polígonos: aspectos históricos y epistemológicos relevantes

1.1 Antiguo Egipto

El nacimiento de la geometría se remonta al siglo XIV a.c durante el reinado de Sesostris, de acuerdo a las palabras consignadas por Heródoto de Halicarnaso en su segundo libro "*Historíai*". Heródoto atribuye este hecho a la construcción de canales para proveer de agua a los Egipcios asentados tierra adentro, es decir, aquellos que habitaban lejos de la orilla del Nilo, evitando así la escasez por desecamiento de los pozos.

Pero fue precisamente la distribución y repartición de los campos y la demarcación de los linderos para fijar el valor de la renta anual en caso de perdida por inundaciones, los que orientaron las necesidades tanto del faraón como de sus vasallos hacia el establecimiento de algunos principios de geometría.

Otras mediciones diferentes a las que conciernen a terrenos, exigieron el uso de algunas nociones de geometría, como la elaboración de los ladrillos de construcción que sugieren el reconocimiento del ángulo recto y la ornamentación de viviendas y joyas con diseños que presentaban algún tipo de simetría.

Es claro el interés que tenían los egipcios por representar los cuerpos celestes y su configuración, por medio de monumentos como los obeliscos y las pirámides; para ello combinaron su conocimiento en astronomía y geometría, redundando sus esfuerzos en construcciones que se basan en formas geométricas bien definidas: triángulos, rectángulos, rombos, cuadrados, trapecios y trapezoides. Se piensa que para determinar el área de estas figuras y el volumen de algunos sólidos como el cubo el cilindro y el paralelepípedo, contaban con representaciones gráficas un tanto confusas, además de reglas o prescripciones, que en algunos casos eran correctas y en otros ofrecían un grado de aproximación suficiente para su empleo en situaciones prácticas.

Sin embargo, no existen referentes históricos que demuestren el conocimiento de las propiedades de los polígonos ni de los poliedros en esta época y todo parece indicar que la principal motivación de esta civilización fue el misticismo (adoración de los astros y protección ante fuerzas sobrenaturales) y que su método de construcción fue netamente empírico.

1.2 Los babilonios

La matemática babilónica se caracterizaba por el razonamiento simbólico y no por la abstracción visual; de esta forma la geometría no era una disciplina diferenciada de la matemática. Los problemas que involucraban áreas y volúmenes se resolvían algebraicamente con ecuaciones lineales y cuadráticas por medio de reglas o fórmulas que involucraban factores 2, 3 y 5 en correspondencia con el sistema sexagesimal, propio de su cultura. De otro lado, sus representaciones gráficas no permitían identificar con claridad una figura plana y en consecuencia un sólido cualquiera.

A pesar de las dificultades relatadas anteriormente, los babilonios estaban familiarizados con la semejanza de triángulos y la proporcionalidad entre lados correspondientes de triángulos semejantes, las ternas pitágoricas, áreas aproximadas de polígonos regulares, volumen de sólidos simples y conceptos relacionados con polígonos circunscritos. Cabe resaltar que el concepto de prueba no existía, no contaban con estructuras lógicas ni con un método matemático formal, sino que recurrían a la prueba y el error para establecer sus reglas, partiendo de situaciones prácticas.

1.3 Los griegos

Calificada como la civilización que propició y vivenció la época de la revolución intelectual, los griegos se destacaron por generar espacios de conocimiento donde los naturalistas o filósofos de la naturaleza, se reunían para discutir y compartir su conocimiento en política, filosofía, arte y ciencia. En cuanto a las matemáticas respecta, sobresale la contribución de la escuela pitagórica.

1.3.1 La escuela pitagórica

La geometría en Grecia durante el periodo clásico fue introducida proveniente de Egipto, según Proclo por Tales de Mileto, fundador de la escuela jónica y considerado como uno de los siete sabios griegos. Uno de sus seguidores fue Pitágoras de Samos, nacido alrededor de 569 a.c quien después de formarse como matemático decidió iniciar su propia escuela en Croton, un asentamiento griego al sur de Italia. [5]

Se sitúa históricamente a la escuela Pitagórica entre los años 600 a.c y 400 ac. Fue considerada como una secta o hermandad, ambientada por el misticismo y que basó su filosofía en el número como elemento primordial para descifrar tanto los objetos materiales como el conocimiento mismo. [18] La máxima *"Todo es número"* que derivó de la relación que los pitagóricos observaron entre el número, la armonía, y la naturaleza, dió lugar a la idea que el universo, incluso el de las ideas, se construye con los números.

De su visión del mundo, resultó ser el 10 el número por excelencia, la representación de la perfección. Para ellos, escondía inherentemente este número la naturaleza de las cosas: los cuatro elementos como la suma de los primeros cuatro dígitos, los cuerpos celestes conocidos, las relaciones entre longitudes y frecuencia en la cuerda de un instrumento musical y un triángulo equilátero a modo de número triangular.

Esta última interpretación, de los números triangulares se extendió al estudio de los números poligonales, es decir, aquellos que se obtienen por conteo de vértices y puntos que aumentan de a uno en cada lado a medida que se agrega un nuevo polígono. Por ejemplo los números poligonales para un pentágono son:

$$1, \quad 1+4, \quad 1+4+7, \quad 1+4+7+10, \quad ... \quad (3n^2-n)/2$$

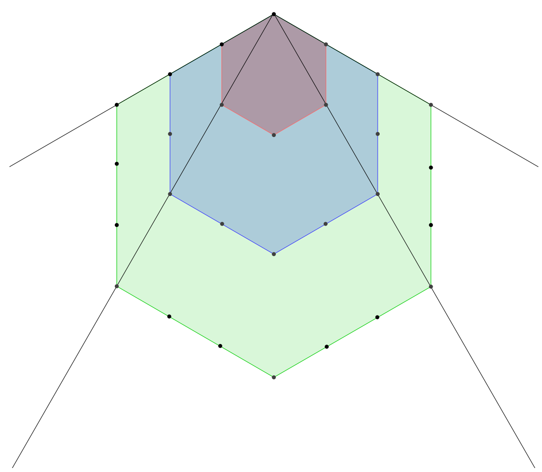


Figura 1.1: Números hexagonales

En la figura se muestran los tres primeros polígonos que generan los números hexagonales:

$$1, \quad 1+5, \quad 1+5+9, \quad 1+5+9+13, \quad ..., \quad (2n^2-n)$$

De la misma forma se pueden representar polígonos de n lados en los cuales los pitagóricos claramente identifican vértices y la congruencia entre los lados; ya que se trata de polígonos equiláteros (en términos de puntos) y los puntos que hacen las veces de longitudes aumentando en progresión aritmética con diferencias iguales a la unidad.

Entre los aportes en geometría más destacados de esta escuela se encuentran la prueba de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ con respecto al segmento unidad por reducción al absurdo, el teorema de Pitágoras (del que no se tiene seguridad sobre su verdadero origen), la cuadratura de polígonos, el teorema que determina la suma igual a 180° de los ángulos internos de un triángulo, teoremas sobre polígonos, esferas y poliedros regulares, además del teselado del plano por triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares.

1.3.2 La escuela sofista

Se destaca la figura de Hipócrates de Quíos, el geómetra más importante del siglo V a.c del que historiadores sugieren que tuvo mayor inclinación hacia la escuela Pitagórica [5] y quien planteó y resolvió problemas partiendo de premisas o verdades conocidas que le permitían formular teoremas que crecían en complejidad a partir de otros más sencillos y finalmente poniendo a prueba esos teoremas por medio de demostraciones de forma similar a como lo haría más adelante Euclides de Alejandría. Su interés se centró en el problema clásico de la cuadratura del círculo, llegando a una solución parcial: la cuadratura de lúnulas de características específicas usando regla y compás.

En la cuadratura de las lúnulas, Hipócrates utilizó la proporcionalidad entre los círculos y los cuadrados de sus diámetros, que probablemente admitió intuitivamente como extensión de la propiedad, sin duda conocida, de la proporcionalidad entre polígonos semejantes y los cuadrados de los lados homólogos. [15]

En esta etapa de la historia de la matemática griega se exigía que las demostraciones se hicieran con regla y compás, además de cumplir con los estándares del método deductivo. Innegable es la trascendencia del estudio de los polígonos y de sus propiedades, en los múltiples intentos por resolver los tres problemas clásicos de la geometría griega: la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo.

Es claro que los múltiples intentos por resolver estos renombrados problemas, tuvieron su mayor obstáculo en la restricción de realizar las construcciones únicamente con regla y compás por que se rechazaban las demostraciones que involucraran números irracionales o con mayor precisión, segmentos inconmensurables, que en definitiva no eran construibles. Sin embargo, a partir de esos intentos se logró profundizar en otros temas como la cuadratura de polígonos, las relaciones de proporcionalidad para calcular áreas y volúmenes, la solución de ecuaciones de segundo y tercer grado y por supuesto la teoría de proporciones que estableció el punto de partida para el estudio de los irracionales.

1.3.3 La escuela de Eudoxo

Eudoxo de Cnido (ca. 408 a.c - ca. 355 a.c) fue un filósofo, matemático, médico griego y padre de la observación astronómica científica. Se formó en matemáticas bajo la tutela de Arquitas de Tarento y según Arquímedes, probó que el volumen de la pirámide es exactamente un tercio del volumen de un prisma y el del cono un tercio del volumen del cilindro, teniendo bases y alturas congruentes. Se le atribuye la invención del método de exhaución o agotamiento que permite aproximar el valor de *pi*, el área de un círculo y la longitud de circunferencia mediante el aumento del número de lados de un polígono regular inscrito en una circunferencia unitaria hasta que sean congruentes. El método de exhaución fue la base para definir el límite de una función y los principios del cálculo, y para demostrar propiedades comunes a los círculos. Por ejemplo, para probar si se tiene dos círculos en los que: “la razón de sus áreas es la misma que la que existe entre los cuadrados de sus diámetros respectivos”, El método consistía en: aproximar el área de los círculos con polígonos regulares inscritos y circunscritos, [16] demostración que se incluye en el libro XI de *los elementos*.

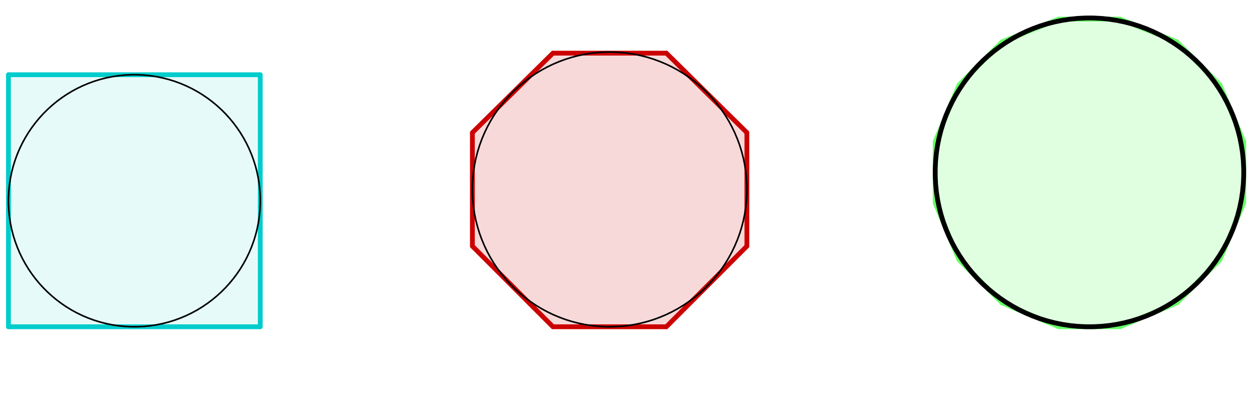


Figura 1.2: Método de exhaución con 4, 8 y 16 lados, para el área de un círculo

1.3.4 Euclides de Alejandría

Poco se conoce sobre la vida de Euclides más allá de saber que nació en Alejandría alrededor del año 300 a.c y que de acuerdo a Proclo perteneció a la academia de Platón. Su figura ha adquirido renombre en la historia de las matemáticas por recopilar buena parte de los resultados más importantes del conocimiento matemático griego de la época y enmarcarlos dentro de un sistema axiomático construido a partir de un conjunto de nociones comunes, definiciones y postulados que resultaban suficientes para demostrar lógica y consistentemente, -no al mismo grado de las demostraciones matemáticas modernas pero si lo suficiente como para ser convincentes y ajustados al método deductivo de Platón y la lógica de Aristóteles- una sucesión de teoremas consignados en su obra "Los Elementos".

Los Elementos de Euclides

Es el texto matemático más famoso de la antigüedad, el más divulgado y el que tiene el mayor tiempo de ser usado de forma continua en la enseñanza de conceptos geométricos y métodos de demostración. Está compuesto por 13 libros en los que se presentan elementos de geometría, teoría de números y proporciones; contiene 467 proposiciones, 23 definiciones, 5 postulados y 5 nociones comunes. Los primeros cuatro libros tratan temas de geometría plana, el quinto, teoría de proporciones aplicado a magnitudes en general, el sexto estudia la geometría de figuras semejantes. Los libros 7 al 9 están dedicados a la teoría de números, el décimo desarrolla la teoría de los inconmensurables y los restantes tratan sobre geometría de los sólidos.

Gran parte de los teoremas que encontramos en los Elementos fueron demostrados por matemáticos que precedieron a Euclides como Teodoro de Cirene, Pitágoras, Hipócrates de Quíos, Teeteto de Atenas y Eudoxo de Cnido entre otros; aunque se reconocen ciertos descubrimientos, construcciones y pruebas realizados por el mismo Euclides. En los Elementos, las demostraciones están restringidas al uso de la regla sin marcar y el compás, prohibiendo el uso de la medición de valores particulares a cambio de la comparación generalizada entre magnitudes.

Este método fue sustituido progresivamente con el uso del álgebra y la trigonometría para dar solución a los problemas en los que no eran suficientes las construcciones geométricas. Con los *Elementos* de Euclides, el método de exhaución y estudio de los sólidos de Arquímedes y el análisis de las secciones cónicas de Apolonio, finalizó prácticamente el auge de la geometría griega

1.3.5 Los hindúes

Las matemáticas védicas se sitúan entre 1500 y 800 a.c. Los vedas eran producciones literarias en los que aparecían resultados geométricos dentro de apéndices llamados Vedangas En estos apéndices se hallaron los Sulbasutras, textos dedicados a la geometría de los altares característicos de los rituales brahmánicos y que eran construidos con restricciones de área para cuadrados, círculos y trapecios. Entre los procedimientos descritos estaban: construir un cuadrado de área equivalente a la suma de otros dos cuadrados, cuadrar el área de un rectángulo y la construcción de 43 triángulos a partir de 6 isósceles para obtener la Sriyantra o "gran objeto", figura usada en la meditación [16].

Durante el periodo clásico que comprende los siglos IV al XV se destaca la figura de Brahmagupta, un matemático que aproximó el valor de π, estudió las propiedades de los cuadriláteros inscriptibles bajo la influencia de los griegos y generalizó la fórmula de Herón para dichos cuadriláteros, además de conocer las expresiones para calcular sus diagonales conociendo la medida de sus lados. [15] Los avances en trigonometría fueron el fruto de las observaciones astronómicas. Los hindúes descubrieron varias relaciones trigonométricas y usaron semicuerdas para obtener valores del seno de diferentes arcos.

Las razones que impulsaron a los hindúes hacia el estudio de las matemáticas y la astronomía fueron de orden sacramental, es decir que la construcción de la ciencia en la India al igual que en Grecia se vió en sus inicios, condicionada por las convicciones religiosas y por su mitología.

1.3.6 Aportes en la edad media y posteriores

Con la invención de la imprenta por Johannes Gutenberg, se facilitó la divulgación masiva de material bibliográfico en Europa, de allí se infiere que fue un factor determinante en el ascenso de la cultura desde la edad media hasta el renacimiento, debido al acceso que tuvieron los europeos a los antiguos documentos griegos después de la caida del imperio bizantino en 1453. Algunos de los avances vinculados al concepto de polígono en esa época fueron:

Jordanius Nemorarius: En el siglo XIII escribió sus obras *"Liber phylotegni De triangulis"* donde presenta relaciones entre las áreas y perímetros de polígonos regulares inscritos, circunscritos y aplicación de fórmulas para el lado de polígonos regulares de 3, 4 y 6 lados y una aproximación para el heptágono [15]. Se le atribuye también la obra: *"De isoperimetris"* que coincide en nombre con la obra de Zenodoro (ca. 200 a.C. - ca. 100 a.c.).

Thomas Bradwardine (c.1290 - 1349): Clérigo católico, en su libro *Geometria Speculativa* explica la construcción de polígonos estrellados de orden inferior por extensión de los lados de los polígonos regulares y determinó la fórmula para la suma de sus ángulos internos [15].

Ghiyath Al-Kashi(c.1380 - 1429): En su libro *Miftah al-hisab* de 1427 mejoró significativamente la aproximación de π hecha por Arquímedes quien obtuvo 3 cifras decimales, logrando expresarlo con 16 cifras decimales, resultado de circunscribir un círculo en un polígono de 3×2^{28} lados.

Leonardo Da Vinci(1452 - 1519): Si bien no es el primer artista en utilizar proporciones geométricas en la pintura, llegó a convertirse en uno de los más representativos y aplicados en este tema. Utilizó en sus obras polígonos regulares aproximados, lúnulas cuadrables, figuras geométricas semejantes, diseñando para ello apáratos similares a pantógrafos.

George Mohr(1640 - 1697): En su compendio *Euclides Curiosi* muestra la solución al problema general a la construcción de un pentágono regular usando únicamente regla y compás. De forma sorprendente muestra en su obra *Euclides Danicus* que las construcciones hechas con regla y compás, pueden obtenerse sólo con el compás [5]. Se conoce hoy en día este resultado como el teorema de Mohr-Mascheroni.

Carl Friedrich Gauss(1777-1855): Conocido con el apelativo de *"Príncipe de las matemáticas"*, es considerado como uno de los más brillantes matemáticos de la historia. Obtuvó importantes resultados en astronomía, matemáticas y física. Construyó el polígono regular de 17 lados usando regla y compás. Después de analizar la división del círculo llegó a la conclusión que un polígono regular con un número primo [1] p de lados puede construirse con regla y compás si y solo si p es un número de la forma:

$$p = 2^{2^n} + 1$$

Con $n \in N$ [5]. Los polígonos regulares que cumplen esta condición tienen 3, 5, 17, 257,... lados.

Pierre Laurent Wantzel(1814-1848): En 1837 publicó un artículo en el *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, [2] con una demostración algebraica rigurosa de la imposibilidad de trisecar un ángulo o duplicar un cubo usando regla y compás. Además demostró el teorema de Gauss sobre polígonos construibles:

"*Los únicos polígonos regulares construibles son aquellos que tienen un número n de lados que es potencia de 2 o producto de una potencia de 2, por uno o más números primos de Fermat*"

Recapitulación

Más que revisar la evolución del concepto de polígono, hemos ilustrado algunos resultados que debido al estudio de sus propiedades y aplicaciones prácticas se han producido. Notamos la inclinación de las antiguas culturas por la geometría aplicada a la construcción de estructuras de carácter religioso y hasta esotérico; y el surgimiento de las primeras afiliaciones sociales de índole académico donde los griegos reflejaron su visión del mundo en la que existe conexión

[1] Números de la forma $p = 2^{2^n} + 1$ se conocen como números de Fermat Euler probó que no todos esos números son primos

[2] Volumen 2 páginas 366-372

entre filosofía y matemáticas.

Luego evidenciamos la necesidad que tuvieron los griegos por extender su matemática hacia otros horizontes, abriendo espacio para nuevas disciplinas; el álgebra, la trigonometría y la teoría de números principalmente. Solo así, sobrepasando los obstáculos epistemológicos y metodológicos que implicaba la geometría restringida a la regla y compás, se lograron avances significativos en la solución de los tres problemas clásicos.

Es así como finaliza este capítulo; con los aportes más sobresalientes que tuvieron lugar desde el siglo XIII hasta el XIX, periodo durante el cual se retomó el trabajo de los griegos y se dió respuesta definitiva a los problemas de los construibles, gracias a los teoremas y demostraciones de Gauss y Wantzel.

Capítulo 2

Del constructivismo al construccionismo

Todos los docentes en algún momento de nuestra vida profesional nos hemos cuestionado sobre el método de enseñanza más eficiente, el que garantice que nuestros estudiantes adquieran conocimiento y que este sea perdurable. Con el tiempo optamos por crear un método propio a partir de nuestras experiencias, por que la enseñanza no es absoluta, no es independiente del sujeto; es totalmente subjetiva, por cuanto no existe un único camino para llegar a ella. De la misma forma ocurre con el aprendizaje, no llegamos a imaginar a todos los individuos aprendiendo al unísono, construyendo el conocimiento por idénticos caminos, con una sola guía y un objetivo común. De ser así no habría consistencia en los procesos de enseñanza - aprendizaje.

No obstante, lo que sí hay en la comunidad educativa, específicamente en las facultades de educación en pregrado o en posgrado, es un consenso sobre las principales teorías cognitivas, de aprendizaje o enfoques pedagógicos que deben ser conocidos por los futuros docentes. Se enseñan entonces los fundamentos epistemológicos del conductismo, de la teoría cognoscitiva social, del constructivismo, del aprendizaje significativo y las inteligencias múltiples, entre otras. De las anteriores, la teoría que tiene mayor renombre por las investigaciones a las que ha dado lugar, a las implicaciones en las prácticas de docentes alrededor del mundo, de las vertientes que han surgido gracias a esta teoría y por supuesto a los resultados que confirman su efectividad en función de sus preceptos; es el constructivismo.

2.1 El constructivismo de Piaget: síntesis

Se afirma que el movimiento constructivista pedagógico [4] surgió en 1967 con la publicación del artículo de Jean Piaget *Lógica y conocimiento científico.* En palabras de [11] el constructivismo "tiene su origen en Piaget y se enfoca en el carácter activo del aprendiz, quien interactúa con el entorno ya sea solo o con otros; el aprendizaje es la construcción y la reorganización cualitativa de las estructuras del conocimiento resultantes". Similar es la perspectiva del MEN, al considerar que el estudiante como sujeto activo amplia, valora y evalúa sus preconceptos descartando aquellos que son calificados por él como inútiles de igual forma "Esta construcción y reconstrucción de sentidos y significados matemáticos, que el estudiante vive en la tensión entre lo que ya sabe o cree saber y lo que se le propone para aprender, genera en él una posición activa y una actitud positiva para enfrentar esos nuevos aprendizajes" [9].

Si bien se enfatiza en los estándares del MEN en el aprendizaje significativo como marco epistemológico para la enseñanza en Colombia, su postura en general apunta a la inclusión de las características distintivas de otras teorías, entre ellas la enseñanza para la comprensión y constructivismo. Por esta razón es conveniente reconocer las características más sobresalientes de esta teoría con miras a entender, como veremos en la siguiente sección, el devenir del construccionismo de Papert.

El constructivismo intenta describir los mecanismos mediante los cuales los individuos llegamos a la adquisición y desarrollo de destrezas y conocimientos, bajo el supuesto de ser aprendices activos que descubren por sí mismos las relaciones que de fondo existen entre conceptos y que llevan a la estructuración del pensamiento. Se sostiene que el aprendizaje esta plenamente condicionado por el ambiente y por la interacción recíproca con otras per-

[4] Las connotaciones del constructivismo son variadas, sobresalen además del pedagógico, el filosófico y el matemático

sonas, es decir, que se requiere de algún tipo de adaptación entre el conocimiento adquirido y el contexto o la realidad de la que hace parte el aprendiz. Pero ¿qué significa aprendizaje? El aprendizaje es un cambio perdurable en la conducta o en la capacidad de comportarse de cierta manera, el cual es resultado de la práctica o de otras formas de experiencia [17]. Para que este cambio comportamental, conductual y cognitivo tenga efecto, interviene otro aspecto: la etapa o estadio cognitivo.

No todas las personas tienen predisposición para el aprendizaje, existen limitantes para que a una determinada edad se adquieran conocimientos con diferentes grados de complejidad, por ejemplo, solo en casos excepcionales un niño de 8 años comprendería el concepto de función o las operaciones entre vectores; en condiciones normales ninguno lo haría. Así, los estadios cognitivos prescriben el comportamiento del individuo y su capacidad para aprender. En el estadio de las operaciones formales, en el que se concentra nuestro interés y al que pertenecen los estudiantes de educación média, los jóvenes estructuran su pensamiento lógico y desarrollan una visión más elaborada del mundo. Es esta la edad indicada para instruirlos en temas "más exigentes", como la introducción a las demostraciones matemáticas, el planteamiento de situaciones hipotéticas y la modelación de problemas complejos en otras palabras, los niños ya no se enfocan exclusivamente en lo tangible, las capacidades de razonamiento mejoran y los niños piensan en múltiples dimensiones y en propiedades abstractas [17].

Ya se ha mencionado que el aprendizaje depende de la edad o madurez biológica que a la vez está directamente asociada a la idea de estadio cognitivo, del contexto ambiental o el espacio físico donde se desenvuelve el individuo y el contexto social en el que confluyen la interacción con los demás y consigo mismo. Adicionalmente hallamos otro aspecto definitivo y sin el cual los otros tres carecerían de sentido, se trata del equilibrio. El proceso de ajuste o adaptación del sujeto a un nuevo conocimiento recibe el nombre de equilibración. Dos factores se combinan para dar pie a la adquisición de conocimientos, de una parte se encuentra la asimilación, entendida como la incorporación de un elemento exterior (información, objeto, acontecimiento, etc.) a un esquema de conocimiento ya desarrollado [13] y de otra, la acomodación que resulta del juicio de valor entre los preconceptos y el nuevo conocimiento del cual se discrimina si resulta pertinente o no, complementario a un esquema o si controvierte uno o más paradigmas por completo.

2.2 El papel del docente constructivista

Si lo que deseamos es instruir a los estudiantes en un ambiente constructivista debemos en nuestro rol de maestros, hacerlos participes del conocimiento, arquitectos de estructuras mentales sólidas y ante todo despertar su interés por aprender. Para que esta tarea sea exitosa, sugerimos fortalecer la labor docente tomando como referencia los siguientes aspectos:

- Comprender e identificar el nivel de desarrollo cogniscitivo de nuestros estudiantes y ajustar la enseñanza a sus necesidades.
- Plantear actividades prácticas que mantengan activos a los estudiantes, incorporando elementos de la cotidianeidad, con los que estén familiarizados.
- Conformar y renovar constantemente, grupos de trabajo en los que se discutan y resuelvan problemas que generen interés y requieran trabajo en equipo.
- Estructurar clases de forma que los estudiantes se acerquen a situaciones problémicas, mediante la manipulación de objetos, recolección de datos, y la observación de fenómenos que más adelante puedan ser modelados por ellos.
- Generar espacios que acusen un grado de dificultad suficiente para que los estudiantes se cuestionen acerca de lo que creen saber sin llevarlos a la confusión. Así se establece un ejercicio reflexivo en el cual tendrán que contrastar sus hipótesis y presaberes con la nueva información, induciéndolos así a la acomodación y asimilación de conceptos.

Seguramente estas sugerencias encajen con las concepciones de aprendizaje propias de otras corrientes del constructivismo, o acaso con las de otras teorías. Por esto no ser pueden ignorar los trabajos de Vygotski, Ausubel, Novak y Gardner, entre otros, de los que se mencionan como precursores del discurso actual sobre competencias [9]. Sin embargo, optamos por el modelo Piagetiano, por estar estrechamente ligado a los orígenes del construccionismo.

2.3 El construccionismo de Papert

Son evidentes las repercusiones del constructivismo en la formulación y consolidación de los currículos tanto en Europa como en América. Piaget y Vygotski, los mayores representantes del constructivismo, demarcaron durante el siglo pasado el camino que seguiría la educación hasta nuestros días y Colombia sin ser la excepción, adoptó un modelo educativo que se basa en la construcción y el descubrimiento del conocimiento, donde se contempla que el aprendizaje debe ser significativo para el estudiante.

Si revisamos el desarrollo histórico de las teorías del aprendizaje, es claro que Jean Piaget inspiró a muchos otros investigadores interesados por la epistemología de la educación, que vieron en su teoría un terreno fértil para iniciar sus propias investigaciones. Uno de los partidarios del constructivismo que tuvo mayor contacto con Piaget, fue en su momento Seymour Papert, con quien trabajó en la Universidad de Ginebra desde 1959 hasta 1963. Papert, doctorado en matemáticas y fundador del instituto de inteligencia artificial del MIT, [1] creó el lenguaje de programación Logo siguiendo los lineamientos del constructivismo.

2.3.1 El surgimiento de Logo

La enseñanza de conceptos geométricos usando lenguajes interpretados de programación tuvo sus orígenes en Estados Unidos. A finales de la década de los ochenta, se popularizó el uso del programa Logo en las escuelas norteamericanas. Fue tanto el auge suscitado por este programa, que se le consideró como la teoría educacional más prometedora del momento para la enseñanza de conceptos geométricos. Logo fue diseñado por Danny Bobrow, Wally Feurzeig y Seymour Papert, como una herramienta didáctica que contaba con un entorno y lenguaje de programación fácil y atractivo para los jóvenes, que ofrecía la posibilidad de manejar pequeños robots o generar gráficos en pantalla mediante una serie de instrucciones geométricas.

Uno de los intereses de Seymour Papert, fue desarrollar herramientas que le permitieran al

[1] Massachusetts Institute of Technology

estudiante responder de una forma sencilla a retos intelectuales, operaciones y problemas de aritmética y geometría por medio de programas hechos en Logo; de modo que se cumplieran las premisas del enfoque constructivista según la corriente Piaget-Montessori [12]. Actualmente en algunas escuelas norteamericanas se continúa usando Logo bajo la supervisión de la fundación que lleva el mismo nombre y el MIT, y se han creado versiones en otros lenguajes de programación bajo el rótulo de geometría de la tortuga.

2.3.2 Sobre el construccionismo

Al igual que las demás corrientes, el movimiento pedagógico construccionista pretendía complementar o llenar los vacíos que el construtivismo pudiese tener, sin abandonar su esencia. En el construccionismo, Seymour Papert veía una extensión del constructivismo, [8] así que sus ideas no diferían mucho de las premisas de Piaget, su mentor en el ámbito educativo. Papert creía decididamente en el aprendizaje espontáneo y natural que seguía a la interacción del sujeto con los demás y con el ambiente; [12] adicionalmente le preocupaba que los programas de las escuelas fuesen rígidos, excluyentes y tradicionalistas, sin embargo sentía que Piaget lo había marcado profundamente a nivel teórico y filosófico y que su teoría había sido subestimada pues, más alla de estudiar como se aprende una ciencia como las matemáticas, es posible estudiar la matemática misma[12], aspecto que según él no fue tenido en cuenta antes porque no existía un ambiente computacionalmente rico.

En el desarrollo de su nueva postura, Papert considerado como un visionario de la ciencia computacional, agregó al aprendizaje un nuevo componente: el uso de los medios informáticos y tecnológicos en el aula. En la década de los setenta Papert presagió la popularización y la reducción de los costos de los computadores y como influirían en el futuro próximo en la educación; por esto centró su atención en facilitar el aprendizaje, en particular de las matemáticas usando ordenadores. Despúes de reflexionar sobre la naturaleza del aprendizaje asistido por computador, Papert llegó a la conclusión que al igual que para llegar a la comprensión de un concepto recurrimos a nuestro lenguaje natural, nuestras preconcepciones y el contexto; sería necesario comprender el lenguaje de la máquina para programarla y entender como funciona de modo que al interactuar con ella - y no simplemente manipularla - experimentaría algún tipo de metacognición.

2.3.3 Características del construccionismo

La creación de estructuras de mentales es el objetivo tanto del constructivismo como del construccionismo, pero identificar los mecanismos que llevan al conocimiento es esencial para valorar los aportes de cada teoría. Según Papert el ambiente propicio para construir estructuras mentales es aquel en el cual el aprendiz se involucra en proyectos que son personalmente significativos para él [6], que exigen la dedicación conciente del aprendiz a la construcción de un objeto de dominio público, ya sea que se trate de una teoría que justifique el color del cielo, la readacción de un texto o la elaboración de una maqueta. A continuacíon se mencionan otras características que pueden acercar (no definir) al lector a la intencionalidad del construccionismo:

- El aprendizaje es mejor si se adquiere desde la práctica y no por medios tradicionales, pero es aún mejor si se complementa con la interlocución con los demás y la reflexión sobre la forma en que lo hemos hecho.
- La tecnología no representa de ninguna forma una respuesta a la problemática educativa, pero su uso puede ofrecer una amplia gama de contextos a los que los estudiantes no accederían si la enseñanza fuese instruccional.
- La manipulación, experimentación y comprensión del funcionamiento de los objetos físicos son etapas propias de la construcción del conocimiento.
- La enseñanza del conocimiento formal no se debe limitar al verbalismo, de esta forma los estudiantes
- El uso de la inteligencia artificial, entendida como una ciencia cognoscitiva y no como un aparato programado o algún tipo de tecnología para operar con mayor velocidad; permite a los estudiantes pensar personal, informal y concretamente sobre los procesos mentales [12].

- La elaboración de procedimientos o métodos computacionales en el aula es consecuente con la interpretación cada vez menos abstracta del concepto involucrado.
- La matemática se concibe como un solo cuerpo [2] compuesto por estructuras independientes: de orden, topológicas y algebraicas que se aprenden paralelamente bajo el mismo sistema formal.
- El trabajo asociativo es indispensable para que los estudiantes con mayor experiencia en un tema perfeccionen sus destrezas al apoyar a los que no las han desarrollado.
- Como aprendices los niños y jóvenes no están exentos de cometer equivocaciones. En el construccionismo se procura que los errores se transformen en oportunidades y para que la comprensión de un tema sea profunda, estos son indispensables.

Papert discernió con bastante anticipación lo que le depararía al uso de los ordenadores cuando se popularizaran y aceptó que podrían incorporarse naturalmente a la enseñanza escolar; que en el aula serían cada vez más comunes y necesarios para que la labor del docente evolucionara al ritmo de los avances tecnológicos y que los niños se adaptaran tan rápido como fuera posible a los cambios que sufriría la sociedad.

El movimiento de la pedagogía informática o digital como Papert prefería llamarla, se ha posicionado como una prioridad en los currículos encaminados a la transversalidad del conocimiento y por ello no debería descartarse a priori, como una opción para la enseñanza de las matemáticas. De esta forma queda decir que la teoría del construccionismo retoma vigencia por cuanto obedece a las exigencias de la sociedad moderna y sobre todo a la visión de mundo que construyen hoy en día los estudiantes.

[2] Hipótesis que derivó en principio Piaget del trabajo del grupo Bourbaki sobre estructuras madre o fundamentales

Capítulo 3

Breve introducción al módulo turtle de Python

3.1 Acerca de Python

Python es un lenguaje de programación interpretado y multiplataforma; es decir que el código de un programa se ejecuta a través de un interprete, funciona en casi cualquier sistema o-perativo, esta orientado a objetos y su tipado es dinámico. Fue creado a principios de los noventa por el investigador holandés Guido Van Rossum, quien motivado por desarrollar el sistema operativo conocido como *amoeba* optó por crear un lenguaje con menos limitaciones y problemas que el *ABC*, lenguaje que usualmente utilizaba el *Centrum Wiskunde & Informatica* grupo de investigación al que pertenecía. Este programa se distribuye actualmente con licencia GNU (*General public license*) significa los usuarios finales de Python tienen la libertad de usar, estudiar, compartir (copiar) y modificar el software.

3.1.1 Instrucciones de instalación

- Ingresar a la página oficial de python: https://www.python.org/

- Acceder a la pestaña "Downloads" donde se presenta una lista con las diferentes versiones y sistemas operativos disponibles.

– Descargar el instalador más reciente; actualmente es Python 3.4.1 (la descarga no tiene costo)

– Instalar y abrir mediante la ruta de acceso en windows: Inicio, todos los programas, python 3.4.1, IDLE (Python GUI).

3.1.2 Ambiente de desarrollo integrado IDLE

IDLE es un editor predeterminado que ofrece funciones de búsqueda y depuración simbólica. Al ingresar a él se muestra una ventana interactiva encabezada por la versión, fecha y plataforma. Por ejemplo en la versión 3.3.3 para windows, aparece algo como:

```
Python 3.3.3 (v3.3.3:c3896275c0f6, Nov 18 2013, 21:18:40) [MSC v.1600 32 bit
(Intel)] on win32
Type ‘‘copyright", ‘‘credits" or ‘‘license()" for more information.
>>>
```

Después de ingresar al ambiente IDLE, conviene abrir un nuevo espacio de trabajo, seleccionando la opción “New file” en la pestaña File. Al terminar el programa se oprime F5 para ejecutarlo, orden que se cumplirá siempre que se haya guardado el archivo con antelación.

3.2 Geometría de la tortuga

La geometría de la tortuga, fue desarrollada a finales de la década de los sesenta por el grupo Logo de investigación de inteligencia artificial del MIT; como un conjunto de procedimientos que le permitían al usuario controlar a un robot virtual con forma de tortuga que podía dejar o no, un trazo sobre los lugares por los cuales se movía.

Por ejemplo, imagine que desea mover la tortuga de un punto cualquiera a otro. En primer lugar necesitaría un punto de partida o de referencia tal como el origen de un sistema cartesiano. Para llegar al punto deseado se podría indicar el número de unidades (rigurosamente hablando, se trata de pixeles) que debe desplazarse en una dirección determinada por un ángulo. En el módulo turtle ya están predefinidas este tipo de instrucciones y se establece como posición inicial aquella en la que la cabeza de la tortuga apunta hacia el este o la derecha. Si lo que se quiere es mover la tortuga 100 unidades hacia la dirección que apunta su cabeza, utilizando la instrucción `forward()` o abreviadamente `fd()`; se puede escribir:

```
forward(100)
```

Sin embargo, se debe recordar que en el lenguaje de programación Python*, es necesario llamar al módulo turtle como se muestra a continuación:

```
from turtle import*
forward(100)
```

De otra parte, si es necesario introducir un ángulo para cambiar la orientación actual de la tortuga en términos de un ángulo en grados y en el sentido de las manecillas del reloj, se utiliza la instrucción `right()` o `rt()`. Las instrucciones recíprocas a forward y right son respectivamente: `back()- bk()` y `left() - lt()` es decir, moverse en la dirección opuesta a la que apunta la cabeza de la tortuga y rotar en el sentido opuesto a las manecillas del reloj.

3.2.1 Ejemplo 1: construcción de un cuadrado

A continuación se muestran diferentes métodos para construir un cuadrado con lados paralelos a los ejes, de 80 unidades de lado:

```
from turtle import*
```

```
fd(80)
rt(90)
fd(80)
rt(90)
fd(80)
rt(90)
fd(80)
```

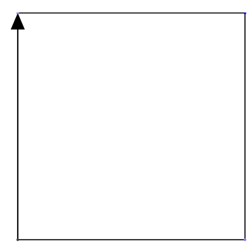


Figura 3.1: Cuadrado en *turtle*

Con este método se traza un cuadrado en el lienzo con la base en la dirección del eje x, si se cambia la instrucción `rt()` por `lt()`, se obtiene un cuadrado simétrico al anterior con respecto al mismo eje.

Cuando un método como el descrito presenta regularidades o instrucciones que se repiten ordenadamente, se puede recurrir a la iteración o a una función para resumir el programa, en otras palabras, se logra aumentar su eficiencia reduciendo el número de ordenes. El código usando iteración con el comando `for` es el siguiente (se omitirá a partir de este punto el encabezado from turtle import*):

```
for i in range (1,5):
    fd(80)
    rt(90)
```

La sangría en la segunda y tercera línea se conoce como "indentado", es imprescindible y equivale a cuatro espacios horizontales o un espacio del tabulador. Otra opción consiste en escribir una función en términos de la longitud del lado:

```
def cuadrado1(x):
    i = 1
    while i <= 4:
        fd(x)
        rt(90)
        i = i+1
#---------------------------
a = 80
cuadrado1(a)
```

Nota: El símbolo # se utiliza para introducir comentarios que sin afectar la ejecución del programa

3.2.2 Ejemplo 2: trazado de círculos

El segmento y el círculo son conceptos que jugaron un papel fundamental en las construcciones y demostraciones geométricas en la antigüedad y aún en nuestros días conservan un alto contenido pedagógico e histórico que rinde bastantes frutos en la enseñanza de la matemática elemental. Con la intención de dotar al usuario de herramientas suficientes para realizar construcciones complejas; el modulo turtle incluye además de la instrucciones de movimiento vistas en el ejemplo 1, instrucciones para trazar arcos y circunferencias. A continuación se muestran dos construcciones sencillas:

Círculo de 50 unidades radio, centrado en el punto (0,25)[1]

[1]La flecha en la gráfica indica la posición inicial y final de la tortuga en el punto (0,0)

```
circle(50)
```

Arco de circunferencia con centro en el punto (0,25), radio 50 unidades y 180 grados de amplitud:

```
speed(0)  #aumenta la velocidad de animación en un rango de 0 a 11
circle(50,180) #Arco de 180° y 50 unidades de radio
```

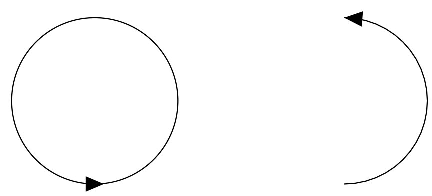


Figura 3.2: Círculo y arco en *turtle*

3.2.3 Ejemplo 3: iteraciones

Python es un programa potente y versátil, en él se pueden generar figuras complejas a partir de la iteración de otras más simples, por cambios en su(s) parámetro(s). Por ejemplo si se quiere dibujar cuatro círculos de radio r con centros separados una distancia de $2r$ se emplea el procedimiento:

```
r=50
speed(0)
for i in range (0,4):
    pu()
    fd(2*r)
    pd()
    circle(r)
```

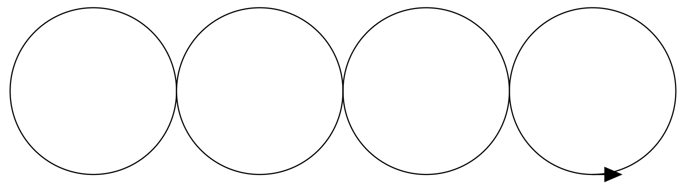


Figura 3.3: Iteración de círculos

En este programa la variable `i` cambia de valor a medida que se ejecuta el programa, haciendo que el proceso se repita 4 veces.

3.2.4 Ejemplo 4: recursividad

Para iterar un evento, se puede manipular el valor de un lado o un ángulo para que aumente o disminuya en función de una variable definida previamente; podemos entonces crear nuevos procedimientos, mediante la variación de los ya existentes empleando una estructura de control recursiva en la que un procedimiento es a la vez un subprocedimiento. Por ejemplo para dibujar una línea quebrada que converja al centro (de forma similar a una espiral), basta con reducir la longitud de cada segmento continuamente:

```
for i in range(0,10):
    fd(50-5*i)
    rt(90)
```

La variable `i` funciona como variable y contador (indica el número de pasos) y más importante aún, permite hacer cambios sustanciales en la forma de la figura, ya sea por cambios en la longitud de los segmentos o en el ángulo en que gira la tortuga.

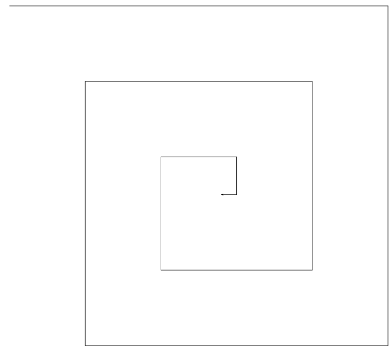


Figura 3.4: Recursividad

3.3 Geometría de la tortuga y plano cartesiano

3.3.1 El plano cartesiano

Desde el surgimiento de las primeras civlizaciones, fue evidente la necesidad del hombre primitivo por establecer un sistema convencional de ubicación que le permitiera conocer su posición relativa o bien, de algún sitio de interés general y comunicarla efectivamente a los demás: lugares para pastar el ganado, santuarios, fuentes de agua para beber y de minerales para forjar armas, campamentos militares y la delimitación de terrenos y territorios, por mencionar algunos ejemplos.

Con el transcurso del tiempo, se paso de la representación mental a la palabra y de la palabra al papel, emergiendo de esta forma los primeros delineantes de construcción y cartografos, quienes rudimentariamente sentaron las bases para la elaboración de planos y mapas basándose en la noción de sistemas de referencia, del concepto de semejanza y de la proporcionalidad entre distancias.

Solo hasta el siglo XVII con la invención del plano cartesiano, llamado así en honor a René Descartés (1596-1650) se logró la unificación de la geometría euclidiana y el álgebra en una sola disciplina: la geometría analítica. Los usos de los sistemas cartesianos no han variado mucho desde su invención. en la actualidad se utilizan los euclidianos como herramientas para la representación de elementos geométricos y funciones y los no euclidianos en sistemas de navegación y GPS.

Características del plano cartesiano

En geometría plana, el sistema coordenado cartesiano o de coordenadas cartesianas, es un sistema bidimensional que se representa por medio de dos rectas perpendiculares o ejes identificados generalmente con las letras x e y que dividen el plano en cuatro regiones denominadas cuadrantes. En la figura —- se observa la posición del origen O con coordenadas $(0,0)$, la numeración de los cuadrantes y los signos de los puntos que pertenecen a ellos.

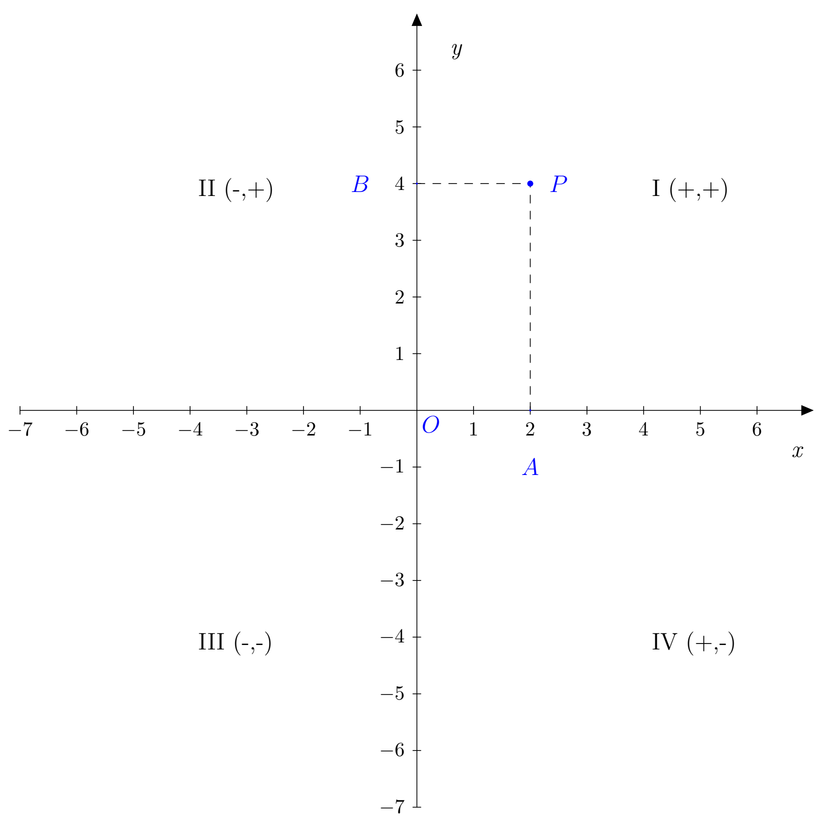


Figura 3.5: Cuadrantes del plano cartesiano

La ubicación de un punto P en el plano, está determinada por un par ordenado de la forma (x, y). En el sistema cartesiano o rectangular, la coordenada en el eje x (primer valor del par ordenado) o de las abscisas indica la longitud del segmento dirigido OA; de forma similar, la coordenada en y o eje de las ordenadas representa la longitud del segmento OB. Así la posición del punto P corresponde a la intersección entre las proyecciones PA y PB que son perpendiculares a las coordenadas x e y respectivamente.

Distancia entre dos puntos

Uno de los conceptos que surge al comparar la posición de dos puntos en el plano es el de distancia. Se interpreta geométricamente la distancia como la longitud del segmento que une dos puntos. En un sistema coordenado rectangular, su valor numérico puede calcularse con el teorema de Pitágoras. Entonces la distancia d entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es:

$$d = \sqrt{\triangle\, x^2 + \triangle\, y^2}$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

3.3.2 Geometría de la tortuga y el sistema coordenado

La noción de sistema cartesiano es equivalente a la del lienzo que se muestra en pantalla cuando ingresamos al módulo *turtle*, de modo que, así como se explicó anteriormente podemos asignar coordenadas tanto en x como en y para establecer la posición de la tortuga con respecto a un origen, dado por el comando `home()` que inclusive podemos modificar. Naturalmente existen, al igual que al momento de representar una figura geométrica en el papel; limitaciones y ventajas en este sistema "cuasicartesiano". El siguiente cuadro comparativo ilustra las principales diferencias entre la geometría cartesiana y de la tortuga [1]:

`Geometría cartesiana`	`Geometría de la tortuga`
Relaciona las propiedades de las figuras geométricas con marcos de referencia definidos, haciéndolas dependientes de ellos	Se enfoca en las propiedades intrínsecas de las figuras sin privilegiar direcciones, así las figuras contienen las "ideas matemáticas" inherentes a ellas
Generaliza las posiciones y permite describir el lugar geométrico de una curva en un espacio global, extendido idealmente al infinito	La posición de la tortuga y los movimientos que realiza son locales, se definen en una parte muy reducida del plano, aunque es posible ajustar el movimiento de la tortuga a una ecuación
Mantiene el formalismo matemático de las ecuaciones y la interpretación de los parámetros numéricos de forma que amplia las posibilidades de cálculo	Describe objetos geométricos en términos de procedimientos a través de mecanismos simples o en ocasiones recursivos e iterativos, permitiendo la modelación creativa

Table 3.1: Geometrías cartesiana y de la tortuga

Cabe resaltar que las dos perspectivas enriquecen el trabajo en el aula y sin ser imprescindibles, cada una a su estilo tiende a favorecer el aprendizaje en uno o más tipos de pensamiento en particular: geométrico, espacial, numérico o variacional. Por esta razón, antes de iniciar cualquier trabajo pedagógico en matemáticas usando el módulo *turtle*, es recomendable analizar si es viable su uso o si es mejor optar por la enseñanza tradicional acompañada por el componente virtual.

3.3.3 Ejemplo 5: polígonos en el plano

El lienzo o espacio de trabajo de *turtle*esta dispuesto de forma que cada paso dado por la tortuga corresponde a un pixel, significa que el número de pasos que la tortuga puede avanzar, dependen de las dimensiones de la pantalla. Por ejemplo en una pantalla de 14 pulgadas las dimensiones son aproximadamente de 1350×750 pixeles. Sin embargo, para efectos prácticos, se puede ampliar o reducir (numéricamente) ese espacio. Las unidades de medida son modificables también.

La representación de un polígono en pantalla, por ejemplo de un triángulo conociendo las coordenadas de los vértices, sigue pasos similares a los que se emplearían al dibujar en el papel:

```
pu()          #levanta el lápiz  para no dejar trazo
goto(10,20)   #Va al punto indicado en parántesis; primer vértice
pd()          #Baja lápiz para reiniciar el trazo
goto(30,0)    #Mueve la tortuga al segundo vértice
goto(40,30)   #Mueve la tortuga al tercer vértice
goto(10,20)   #Cierra el triángulo

# Polígonos con vértice en el origen, se cierran con el comando home()
```

Para polígonos con un número mayor de lados, basta con escribir las coordenadas de los vértices, aunque existe la opción de construirlos con la medida de los lados y los ángulos.

3.3.4 Ejemplo 6: baricentro de un triángulo

En este ejercicio de modelación se muestran elementos básicos de *turtle* para determinar la ubicación del baricentro de un triángulo, esto con el fin de mostrar el análisis matemático que se requiere para concebir un programa de este tipo. Tengase en cuenta que el procedimiento se ha generalizado para cualquier triángulo al declarar las coordenadas de los vértices como variables.

Enunciado del problema

Hallar las coordenadas del baricentro del triángulo ABC que tiene como vértices los puntos $A = (10, 80)$ $B = (50, -35)$ $C = (-60, 65)$ y graficarlo usando el módulo *turtle* de Python.

En el programa adjunto (que servirá como referencia para resolver los ejercicios y problemas de la propuesta) se comentan los principales pasos de la solución del problema propuesto. En primer lugar se definen las coordenadas de los vértices del triángulo, luego se halla el punto medio de dos de los lados y estos se unen a los vértices opuestos u homólogos, obteniendo así las medianas. Finalmente, se hallan las ecuaciones de la recta de las dos medianas y se resuelve el sistema de ecuaciones para determinar el punto donde se intersecan; es decir, el baricentro.

```
a=10
b=80
c=50
d=-35
e=-60
f=65
g=c/2+e/2
h=d/2+f/2
i=a/2+e/2
j=b/2+f/2


Pend1=(h-b)/(g-a)    #Calcula la pendiente de la mediana AD
Pend2=(j-d)/(i-c)    #Calcula la pendiente de la mediana BE
PunC1=b-Pend1*a      #Calcula el punto de corte de la mediana AD
PunC2=d-Pend2*c      #Calcula el punto de corte de la mediana BE
Int_x=(PunC2-PunC1)/(Pend1-Pend2)
```

```
Int_y=(PunC1*Pend2-PunC2*Pend1)/(Pend2-Pend1)
A=(a,b)
B=(c,d)
C=(e,f)
D=(g,h)     #Punto medio del segmento
E=(i,j)     #Punto medio del segmento
pu()
goto(A)    #Mueve la tortuga al vértice A
pd()
goto(B)
goto(C)
goto(A)
goto(D)     #Dibuja la mediana AD
pu()
goto(B)
pd()
goto(E)     #Dibuja la mediana BE
pu()
goto(Int_x,Int_y)                 #Mueve la tortuga al baricentro
dot()   #Deja una marca en el baricentro
pu()
home()     #Vuelve al origen

print("Pendiente AD= ", Pend1)    #Devuelve la pendiente BC
print("Pendiente BE= ", Pend2)
print("Punto de corte AD=", PunC1)#Devuelve punto de corte de la mediana BC
print("Punto de corte BE=", PunC2)
print("Intercepto en x=",Int_x)   #Devuelve la coordenada x del intercepto
print("Intercepto en y=",Int_y)
```

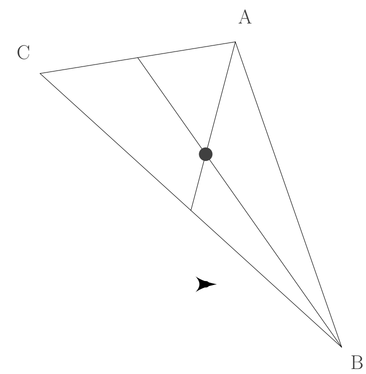


Figura 3.6: Baricentro del triángulo ABC

En las tablas del Anexo 3 figuran los comandos del módulo *turtle* con la descripción sobre sus usos y parámetros. Para obtener mayor información dirigirse a la página oficial de Python (en inglés) https://docs.python.org/3.4/index.html

Capítulo 4

Aspectos disciplinares

En este capítulo revisamos algunas propiedades de los triángulos (sabiendo que son fundamentales para el estudio de otros polígonos) y de los polígonos en general. Consideramos que para comprender mejor el concepto de polígono, se necesita, además de aplicar conocimientos de trigonometría, conocer los criterios de congruencia y semejanza y algunos métodos para calcular áreas y perímetros. Después de esta corta revisión de los aspectos disciplinares, los estudiantes contarán con los fundamentos para resolver los ejercicios planteados en el próximo capítulo.

4.1 Triángulos: generalidades y propiedades

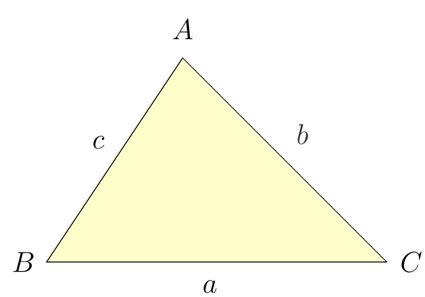


Figura 4.1: Triángulo ABC

Un triángulo es una figura plana formada por 3 puntos no colineales denominados vértices, y tres segmentos o lados que unen a estos puntos de dos en dos. Un triángulo se designa por sus vértices antecedidos por el símbolo $\triangle$

4.1.1 Propiedades de los triángulos

Las propiedades de los triángulos, abajo relacionadas se adscriben a los elementos del triángulo ABC de la figura 4.1

a. La suma de las longitudes de dos de los lados de un triángulo es siempre mayor que la longitud del tercer lado

$$a < b + c \qquad \wedge \qquad a > b - c$$

b. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°[1].

$$\angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ$$

c. El valor de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes.

$$\angle BAC + \angle ACB = \alpha \qquad \wedge \qquad \alpha = 180^\circ \angle ABC$$

d. Si un triángulo tiene dos lados iguales, sus ángulos opuestos también son iguales.

$$Si \qquad a = b \Longrightarrow \angle BAC = \angle ABC$$

e. Para todo triángulo se cumple el teorema del seno.

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

f. Para todo triángulo se cumple el teorema del coseno.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos C$$

g. En un triángulo a mayor lado se opone mayor ángulo.

h. Todos los triángulos son convexos y son los únicos polígonos que no tienen diagonales

[1] La demostración se encuentra en los Elementos de Euclides: proposición I-32

4.1.2 Triángulos congruentes

En geometría si dos figuras tienen el mismo tamaño y forma, se denominan congruentes. Supongase que se dibujan dos triángulos en dos hojas de papel y al colocarse una sobre otra sus vértices coinciden, entonces cada par de lados y ángulos correspondientes son congruentes, por lo tanto los triángulos también lo son.

Postulados de congruencia

- Postulado de la congruencia LAL si dos lados y el ángulo comprendido de un triángulo son respectivamente congruentes con dos lados y el ángulo comprendido de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

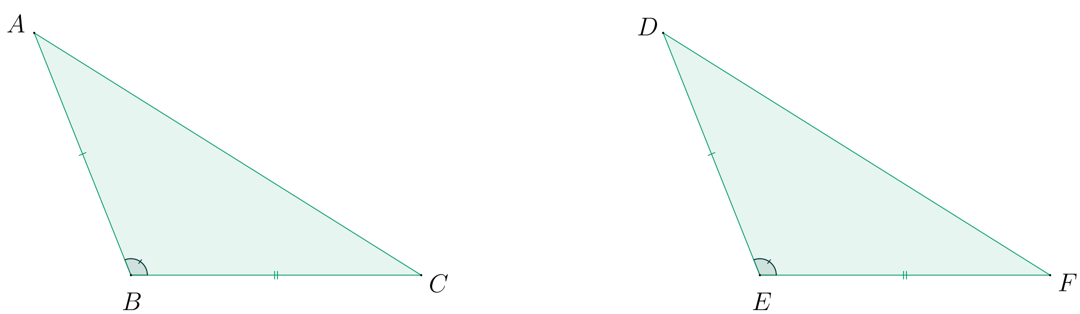


Figura 4.2: Congruencia Lado-ángulo-lado LAL

$$Si \quad \left\{ \begin{array}{l} AB = DE \\ \angle B \cong \angle E \\ BC = EF \end{array} \right. \Longrightarrow \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

- Postulado de la congruencia ALA Si dos ángulos y el lado comprendido de un triángulo son respectivamente congruentes con dos ángulos y el lado comprendido de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

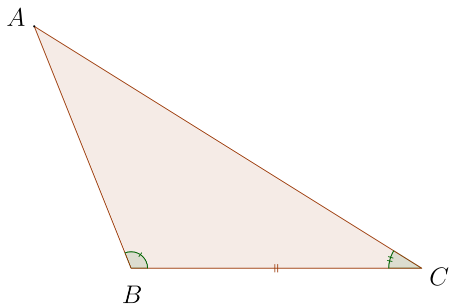


Figura 4.3: Congruencia Lado-ángulo-lado ALA

$$Si \quad \begin{cases} BC = DE \\ \angle B \cong \angle E \\ \angle C \cong \angle F \end{cases} \Longrightarrow \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

- Postulado de la congruencia LLL Si los tres lados de un triángulo son respectivamente congruentes con los tres lados de o tro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

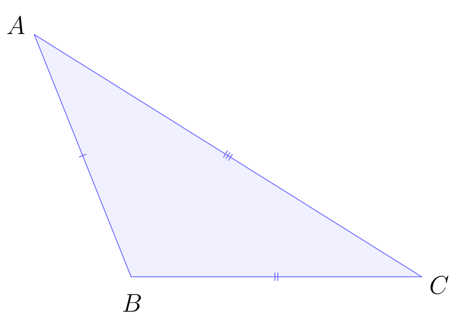


Figura 4.4: Congruencia Lado-ángulo-lado LLL

$$Si \quad \begin{cases} AB = DE \\ BC = EF \\ AC = DF \end{cases} \Longrightarrow \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

4.1.3 Triángulos semejantes

Dos triángulos son semejantes, si las medidas de los lados correspondientes son proporcionales y los ángulos correspondientes congruentes.

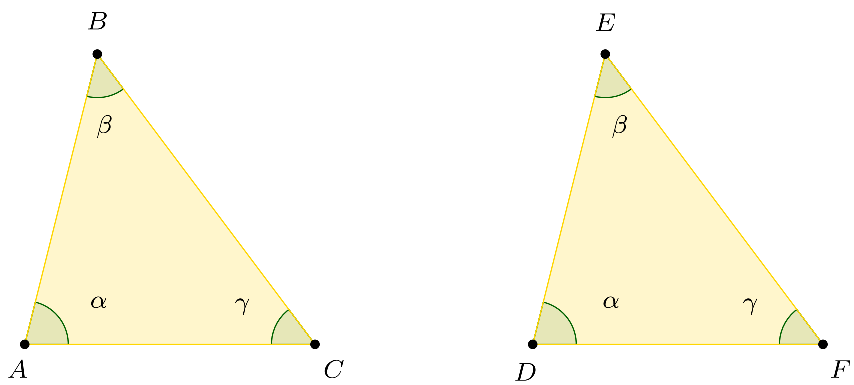


Figura 4.5: Triángulos semejantes

Se cumple para los triángulos ABC y DEF semejantes, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = k$$

Donde k es la razón de semejanza.

Casos de semejanza

Primer caso:

$$Si \quad \begin{cases} \angle A \cong \angle D \\ \angle B \cong \angle E \quad \Longrightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF \end{cases}$$

Segundo caso:

$$Si \quad \begin{cases} \angle A \cong \angle D \\ \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \quad \Longrightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF \end{cases}$$

Tercer caso:

$$Si \qquad \frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF} \qquad \Longrightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

4.1.4 Área de una región triangular

El área de una región triangular puede hallarse de varias formas, en función de los lados, del inradio, exradio, circunradio y con elementos de trigonometría; aquí relacionamos las fórmulas más comunes:

a. En función de la base b y la altura h

$$A=\frac{b\,h}{2}$$

b. En función de los lados a, b, c: fórmula de Herón

$$A=\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

Donde s es el semiperímetro del triángulo:

$$s=\frac{a+b+c}{2}$$

c. Fórmula trigonométrica

$$A=\frac{1}{2}\,a\,b\operatorname{sen}\alpha$$

Donde a, b, c son las medidas de los lados del triángulo y $p=a+b+c$

4.1.5 Líneas y puntos notables

Mediana: Es el segmento que une el punto medio de cada lado con el vértice opuesto. Las tres medianas concurren en un punto llamado *baricentro* o *centroide*.

Bisectriz: Es la recta que pasa por el vértice del triángulo y que divide el ángulo interior en dos partes iguales. Las tres bisectrices de un triángulo concurren en un punto conocido como *incentro*.

Mediatriz: Es una recta perpendicular a un lado que pasa por su punto medio. Las mediatrices de un triángulo concurren en un punto equidistante de los vértices conocido como *circuncentro*.

Altura: Es el segmento que une a un vértice con el lado opuesto o su prolongación, formando un ángulo recto. Las alturas concurren en un punto llamado ortocentro.

4.2 Polígonos

La palabra polígono proviene del griego πολύ *polú* "muchos" y $\gamma\omega\nu o\varsigma$ *gonía* "ángulos". Los polígonos son figuras geométricas planas formadas por segmentos de recta que se unen en n puntos distintos conocidos como vértices. En un polígono tres vértices adyacentes no son colineales.

4.2.1 Elementos de un polígono

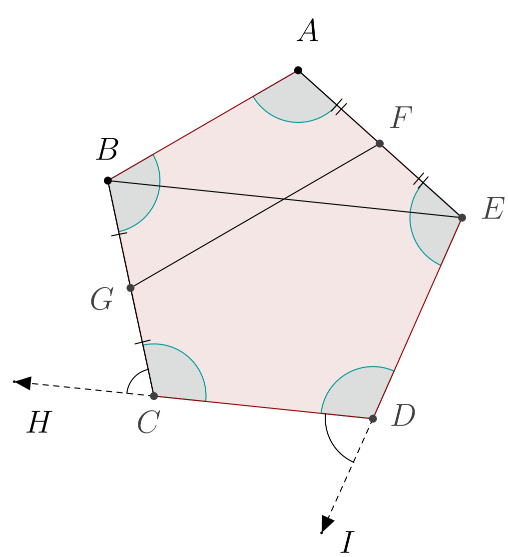


Figura 4.6: Elementos de un polígono

- **Vértices:** *A, B, C, D, E*

- **Lados:** *AB, BC, CD, DE, EF*

- **Ángulos interiores:** $\angle EAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDE$, $\angle DEA$

- **Ángulos exteriores:** $\angle HCB$, $\angle IDC$, ...

- **Diagonal:** $\overline{BE}$. Son los segmentos que unen vértices no consecutivos

- **Diagonal media:** $\overline{FG}$. Son segmentos que unen los puntos medios de dos lados

- **Perímetro:** $AB + BC + CD + DE + EA$

4.2.2 Clasificación de polígonos

De acuerdo a su convexidad:

a. Convexos: Si toda recta que contiene a uno de sus lados lo ubica en un mismo semiplano. En consecuencia sus ángulos interiores miden menos de 180° o π radianes

b. No convexos: Si por lo menos existe una recta que conteniendo a uno de sus lados lo divide en uno y otro semiplano. Entonces, uno o más ángulos interiores miden más de 180°

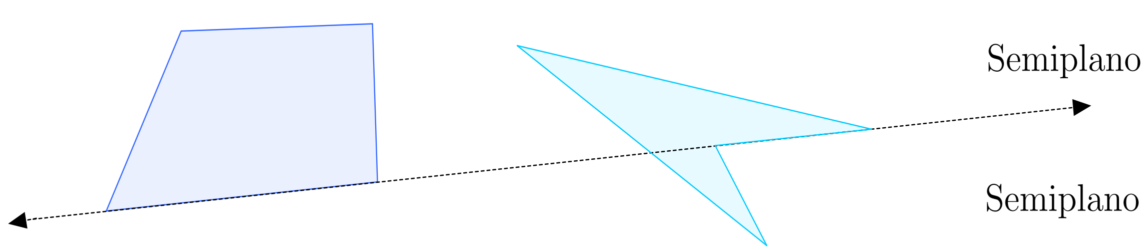


Figura 4.7: Polígonos convexo y no convexo

Clasificación de polígonos según su regularidad

a. Equiángulos: Si sus ángulos interiores tienen la misma medida

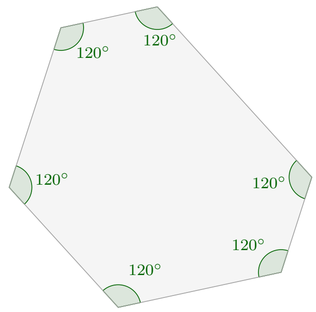


Figura 4.8: Hexágono equiángulo

b. Equiláteros: Tienen sus lados congruentes

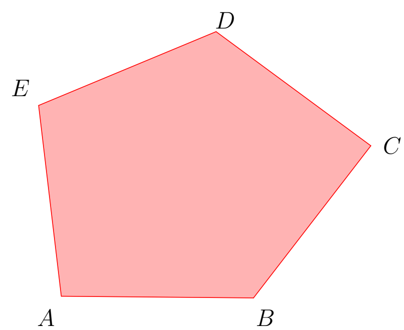


Figura 4.9: Pentágono equilátero

c. Regulares: Son equiángulos y equiláteros a la vez

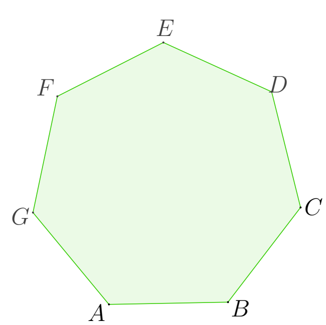


Figura 4.10: Heptágono regular

d. Irregulares: Sus lados o ángulos son desiguales

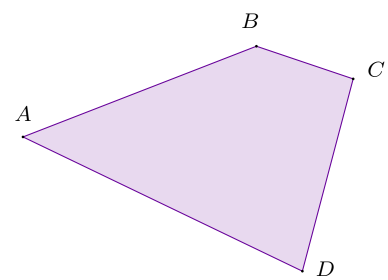


Figura 4.11: Cuadrilátero irregular

4.2.3 Propiedades de los polígonos

Se cumple para todo polígono que:

- El número de lados es igual al número de vértices e igual al número de ángulos interiores. Notamos el número de lados por n
- El número de ángulos exteriores es el doble del número de lados
- El número de diagonales medias que pueden trazarse desde un lado es igual a $n-1$
- El número de diagonales trazadas desde un vértice es igual a $n-3$
- El número de triángulos que se forman al trazar diagonales desde un vértice, es igual a $n-2$
- La suma de los ángulos interiores está dada por la expresión $180(n-2)$
- La suma de los ángulos exteriores es $360°$
- El número total de diagonales N_d es:

$$N_d = \frac{n\,(n-3)}{2}$$

- El número total de diagonales medias N_{dm} es:

$$N_{dm} = \frac{n\,(n-1)}{2}$$

- Los ángulos interiores β se calculan como la diferencia entre dos ángulos rectos y el ángulo central:

$$\beta = \frac{180°\,(n-2)}{n} = \frac{\pi\,(n-2)}{n} = 180° - \alpha$$

- El ángulo exterior γ definido como la amplitud entre un lado y la prolongación del adyacente, tiene la misma medida que el ángulo central:

$$\gamma = \frac{360}{n}$$

- La suma de los ángulos centrales es 360° o $2\,\pi$ radianes

- Todos los polígonos regulares son inscribibles

Propiedades de los polígonos regulares:

- Todos los ángulos α con vértice en el centro del polígono (ángulos centrales) son congruentes y se relacionan con el número de lados n mediante la expresión

$$\alpha = \frac{360°}{n} = \frac{2\pi}{n}$$

- Los ángulos interiores β se calculan como la diferencia entre dos ángulos rectos y el ángulo central:

$$\beta = \frac{180°(n-2)}{n} = \frac{\pi(n-2)}{n} = 180° - \alpha$$

- El ángulo exterior γ definido como la amplitud entre un lado y la prolongación del adyacente, tiene la misma medida que el ángulo central:

$$\gamma = \frac{360}{n}$$

- La suma de los ángulos centrales es 360° o 2π radianes

- Todos los polígonos regulares son inscribibles

4.2.4 Área de un polígono regular

La deducción de las expresiones que definen el área de un polígono en función del número de lados y los restantes parámetros: apotema, longitud de los lados y radio de la circunferencia circunscrita; se presenta en el Anexo 2.

– **En función del perímetro y la apotema:** el área A de un polígono regular de n lados, es igual al producto entre el semiperímetro y la apotema a:

$$A = \frac{Pa}{2} = \frac{Lna}{2}$$

Donde L es la longitud un lado del polígono.

– **En función del número de lados y la apotema:**

$$A = a^2\, n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

– **En función del número de lados y el radio:**

$$A = \frac{n\, r^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}{2}$$

– **En función de la longitud y el número de lados:**

$$A = \frac{n\, L^2}{4 \tan\left(\dfrac{180}{n}\right)}$$

Capítulo 5

Propuesta didáctica

5.1 Identificación del problema

La enseñanza de conceptos geométricos ha recuperado con el tiempo el lugar que llegó a ocupar en el pasado cuando se le consideraba necesaria para que los estudiantes alcanzaran un grado superior de formalización conceptual y se aproximaran a la construcción de la ciencia a través del conocimiento de los métodos y sistemas axiomáticos desarrollados desde la antigüedad. Sin embargo, en la actualidad observamos que no se amplían ni profundizan los contenidos geométricos tanto en primaria como en secundaria, notamos que no existe conciencia por parte de los estudiantes sobre las aplicaciones de la geometría en su diario vivir o de como puede llegar a beneficiarlos en la comprensión de conceptos matemáticos presuntamente divergentes: métrico, numérico y variacional.

Estos aspectos hacen alusión al componente pedagógico de la enseñanza de las matemáticas y obraríamos mal si no contemplamos nuestra responsabilidad como docentes en esta situación, puesto que intentamos ceñirnos a las directrices del MEN en cuanto al cumplimiento del programa y la intensidad horaria, dejando de lado la opinión y la visión de los estudiantes sobre el área.

Si indagamos la percepción que tienen los estudiantes, seguramente escucharemos, sin importar el grado en el que se encuentren, que la mayor dificultad que enfrentan en la escuela es precisamente la matemática y esta condición se acentúa a medida que avanzan en su formación académica. Como consecuencia de los problemas actitudinales: inseguridad, desinterés, prejuicio y la falta de compromiso; su desempeño dentro y fuera del aula no es el mejor. De otro lado, se hace latente que nuestra principal falla es mantener vigente la imagen del docente convencional, que persiste en sus prácticas pedagógicas distantes de las necesidades de los estudiantes y que se caracteriza por la poca creatividad para proponer actividades alternativas, que en lugar de ofrecer respuestas anticipadas o predecibles, despierten en el estudiante el interés por responder a preguntas que ellos mismos formulen.

Es así como los estudiantes tropiezan con obstáculos epistemológicos y afectivos que les dificultan comprender que las matemáticas aparte de ser útiles en la vida real, permiten alcanzar niveles superiores de razonamiento en esta y otras áreas. De ser así, en el caso de la geometría los llevaría más alla de la construcción de figuras para determinar su perímetro, área o volumen; probablemente hasta descubrir e interpretar algunas de sus propiedades y la relación que tienen los objetos geométricos con otras ramas de la matemática, de manera que se conviertan en sujetos activos, no solo en el aula de clase sino también en la sociedad.

Teniendo presente el panorama planteado anteriormente y sabiendo que nuestra motivación como docentes de matemáticas es la divulgación del conocimiento en términos sencillos y precisos, nos remitimos a un concepto que consideramos clave para el desarrollo cognitivo del estudiante de educación media y su desempeño en pruebas escritas tanto internas como externas; se trata del concepto de polígono. Por esta razón nos preguntamos:

¿Cuál estrategia didáctica permitiría a los estudiantes de grados décimo y undécimo y particularmente a los del Colegio Sierra Morena, construir el concepto de polígono mediante el uso de ordenadores?

5.1.1 El porqué de la enseñanza asistida por computador

En una sociedad como la nuestra, caracterizada por vivir en constante transformación, resulta evidente para cualquier persona que el progreso tanto individual como colectivo se encuentra estrechamente relacionado con los avances tecnológicos y sus aplicaciones en la cotidianeidad. Sin embargo, lo que no parece obvio es que para crear herramientas tecnológicas se requiere una gran cantidad de conocimientos específicos de ciencias como matemáticas, física, electrónica, etc. en otras palabras, es indispensable la transición desde el sentido común al conocimiento científico. Es por esta razón que los organismos internacionales que evalúan la calidad de la educación, han centrado su atención en la implementación de las tecnologías de la información y la comunicación para favorecer a los estudiantes en su intención por comprender los conceptos que se les enseñan habitualmente durante su formación académica.

Uno de los propósitos de estos organismos es analizar la situación actual de las TIC, haciendo hincapié en que su evolución en la escuela debe continuar para cambiar el paradigma metodológico, en el cual se prescinde de las fuentes de información únicas y del aprendizaje aislado de modo que el intercambio de la información es ahora una norma que se debe cumplir para que las TIC converjan como una red unificada en torno a la computadora . Se ha visto entonces, que el interés por globalizar la información ha llevado a los docentes a usar con mayor frecuencia el computador como recurso pedagógico y didáctico en el aula y así llamar la atención del estudiante sobre las diversas aplicaciones que tienen sus objetos de aprendizaje en la realidad. Los estudiantes prefieren modelar que teorizar y en lo que se refiere a matemáticas, ya sea aritmética, algebra, trigonometría, estadística o geometría, siempre responderán que es más clara la información si se complementa con otras representaciones, especialmente aquellas que estimulan sus sentidos.

Es así como esta propuesta didáctica pretende aprovechar recursos tan importantes y conocidos como el computador y los programas informáticos, para que el estudiante inicie su camino por las sendas del orden, el rigor y formalismo que se hallan implícitos en los algoritmos aplicados en matemáticas.

5.1.2 Estándares del MEN: pensamiento geométrico

El MEN, en los *Estándares de Competencias en Matemáticas*, plantea que la educación de calidad es el objetivo hacia el cual apuntan las políticas públicas del gobierno. Para obtener mejores resultados en cuanto a calidad educativa, se conciben entre otros aspectos, la eficiencia del sistema educactivo y las habilidades sociales desarrolladas por el individuo para desenvolverse en la vida cotidiana: formación en valores, resolución de conflictos, productividad y convivencia. En este sentido se fijan parámetros de calidad que de hecho no se limitan a la simple evaluación del rendimiento académico de los estudiantes. Al referirse a las matemáticas el MEN hace latente esta visión humanista y pragmática de la educación:

> *"La educación matemática debe responder a nuevas demandas globales y nacionales, como las relacionadas con una educación para todos, la atención a la diversidad y a la interculturalidad y la formación de ciudadanos y ciudadanas con las competencias necesarias para el ejercicio de sus derechos y deberes democráticos"*

Población objetivo

La propuesta didáctica está dirigida a estudiantes de grados décimo y undécimo del Colegio Sierra Morena IED, localizado en Ciudad Bolívar, aunque queda abierta a su aplicación en otras instituciones. Las edades de los estudiantes están entre los 14 y 18 años, caracterizados por presentar dificultades socio-afectivas, vivir en una zona deprimida, con poco desarrollo urbanístico y que ofrece escasas oportunidades académicas y laborales. El énfasis del colegio es el área de artes y su PEI: ?Por una institución viva, activa y proyectada al siglo XIX?. De acuerdo a los Estándares de Competencias en Matemáticas del MEN los estudiantes del ciclo cinco están en capacidad de:

- Identificar en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas.
- Identificar características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana.
- Usar argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticas y en otras ciencias.
- Conjeturar y verificar propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.

- Aplicar y justificar criterios de congruencia y semejanza entre triángulos en la resolucióy formulación de problemas.
- Usar represntaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y otras disciplinas.

Perspectivas

Actualmente el interés por los polígonos gira en torno a su uso en el dibujo técnico y a las aplicaciones computacionales como la modelación en 2 y 3D, que generalmente se basan en la triángulación de polígonos (o randerización) cuyos vértices representan datos topográficos. Este nuevo campo de exploración matemática ha recibido el nombre de geometría computacional y podría ser una alternativa para conjugar la enseñanza de la geometría poligonal y la programación.

COLEGIO SIERRA MORENA IED

GUIA DE APRENDIZAJE No 1

PUNTOS Y REGIONES EN EL PLANO CARTESIANO

MATEMÁTICAS GRADO DÉCIMO - UNDÉCIMO

Objetivos

- Reconocer regiones del plano determinadas por intervalos
- Identificar las características del plano cartesiano y asociarlas con el sistema coordenado virtual del modulo *turtle*
- Reconstruir figuras a partir de las coordenadas de los vértices de polígonos
- Calcular distancia entre puntos
- Trasladar figuras geométricas en el plano

Actividades

Preguntas exploratorias

Después de consultar información acerca de los antecedentes de la formulación del sistema coordenado rectangular por parte de René Descartes, se organizan grupos de tres a cuatro estudiantes para que realicen una exposición en la que se respondan por concenso las siguientes preguntas

¿Qué es geometría? ¿Qué tipos de geometría conocen y cuáles son sus características?

¿Existe un sistema coordenado diferente al cartesiano? ¿Cuál? ¿En qué se diferencían?

¿Cuáles son las aplicaciones del plano cartesiano en la vida cotidiana?

¿Cómo se calculan las distancias en el plano cartesiano y que unidades de medición de distancias conocen?

¿Cuál es el criterio utilizado para ubicar un punto o una recta en el plano?

¿A qué tipo de movimientos en el plano, puede someterse un punto, un segmento o una figura geométrica?

Posterior a la fase exploratoria, se sugiere que el docente retroalimente la información, asegurándose de surtir de fuentes a los estudiantes para cotejar las información socializada en clase. La extensión de esta actividad y las demás que se proponen dependerán de la prioridad que se dé a los aspectos epistemológicos, teóricos y didácticos.

Ejercicios propuestos

Los ejercicios que se plantean en esta guía, deben resolverse y luego modelarse en el módulo turtle de Python, individualmente

1. Marcar la posición y determinar el cuadrante al que pertenecen los puntos:
   - (45,78)
   - (205,-24)
   - (-190,-171)
   - (5,93)
   - (-54,184)
2. Dibujar cuadrados con lados paralelos a los ejes x e y de 50 unidades de lado con vértice inferior izquierdo ubicado en los puntos:
   - (0,0)
   - (10,20)
   - (-20,80)
3. Dibujar cuadrados con lados paralelos a los ejes x e y de 50 unidades de lado con vértice inferior derecho ubicado en los puntos:
   - (105,-78)

- (-92,-210)
- (-92,-210)

Determinar las coordenadas de los vértices restantes y luego verificarlas con los resultados en pantalla

4. Sombrear la región determinada por los intervalos:

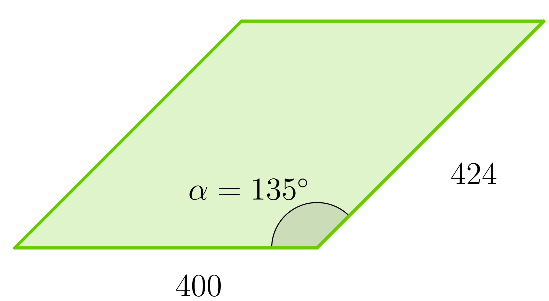
   - $10 \leq x \leq 80$ y $40 \leq y \leq 110$
   - $-50 \leq x \leq 0$ y $-80 \leq y \leq -20$
   - $-250 \leq x \leq 250$ y $-100 \leq y \leq 100$

   Responder: ¿Qué figura se obtiene en cada caso? ¿Cuáles son su área y perímetro?

5. Escribir las instrucciones necesarias para trasladar las figuras del punto anterior 50 unidades a la izquierda y 60 unidades hacia arriba:

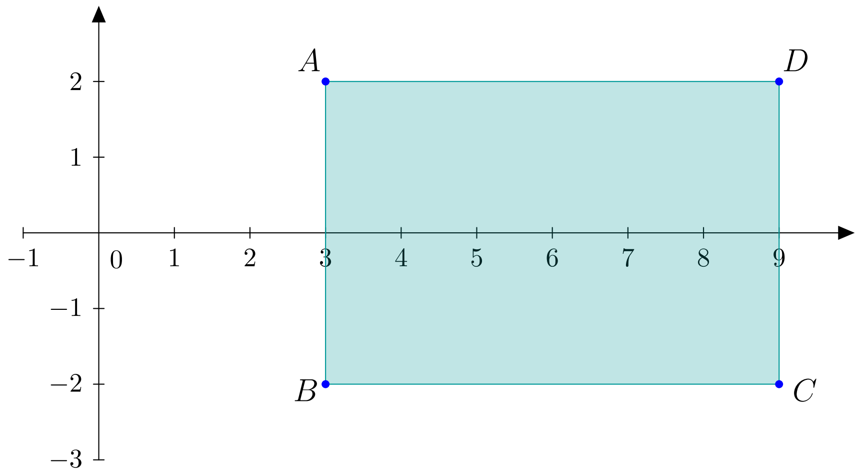
6. Trazar dos segmentos de 100 unidades que formen un ángulo de 60°

7. Reconstruir el paralelogramo que se muestra a continuación e indicar los pasos empleados para hacerlo:



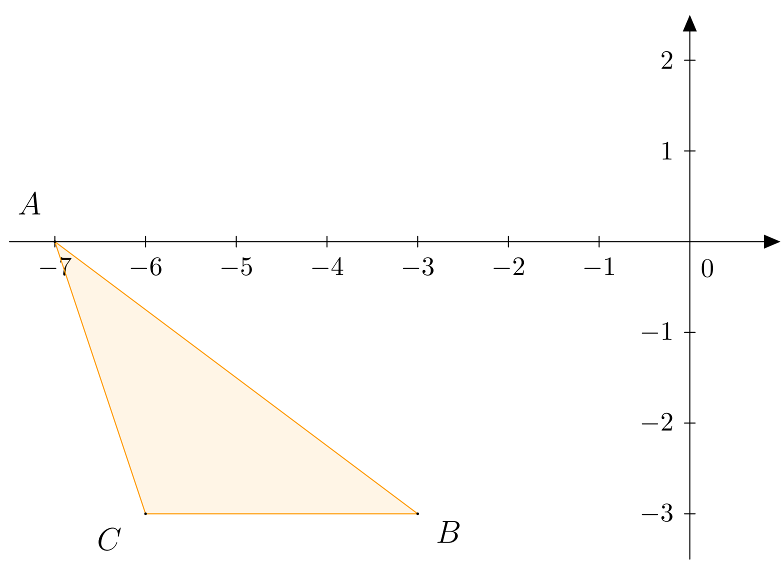
8. Determinar las coordenadas del vértice que unido a los extremos del segmento trazado desde el origen hasta el punto (75,120) forma un triángulo equilátero y ubicarlo en el plano cartesiano

9. Determine los intervalos en los ejes x e y para los cuales se define la siguiente región del plano



Responder: ¿Cuáles serán los intervalos que definen a la región anterior, si se desplaza 5 unidades a la derecha y 7 hacia abajo? ¿Cuáles deben ser los desplazamientos para que el vértice C coincida con el origen?

10. Escribir las coordenadas de los vértices del triángulo ABC y determinar el conjunto de puntos que pertenecen a esa región del espacio.



Representar la figura anterior en *turtle* determinar la distancia entre cada par de puntos y escribir el código o procedimiento necesario para trasladarla 20 unidades a la izquierda y 15 arriba.

11. Realizar un esbozo de la figura que se obtiene al ejecutar el siguiente procedimiento en *turtle*:

```
fd(100)
rt(90)
fd(100)
rt(90)
fd(50)
rt(90)
fd(50)
rt(90)
fd(100)
rt(90)
fd(25)
rt(90)
fd(25)
rt(90)
fd(50)
lt(45)
fd(100)
```

¿Qué sucede si se agrega la instrucción `for i in range(1,10):` antes de la primera instrucción?

COLEGIO SIERRA MORENA IED

GUIA DE APRENDIZAJE No 2

CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS Y REVISIÓN DE ALGUNAS DE SUS PROPIEDADES

MATEMÁTICAS GRADO DÉCIMO - UNDÉCIMO

Objetivos

- Analizar e interpretar las propiedades de los triángulos
- Construir y clasificar triángulos con características definidas en sistemas coordenados cartesianos
- Aplicar conocimientos de geometría y trigonometría en la resolución de triángulos
- Descubrir métodos para determinar la posición de puntos o líneas notables
- Reconocer relaciones entre los triángulos y otros polígonos más complejos

Preguntas exploratorias

Se plantea esta actividad para que de manera participativa los estudiantes respondan las siguientes preguntas bajo el rótulo de "lluvia de ideas" esto con el fin de explorar sus preconcepciones a través de la oralidad.

¿Cuáles son las características de los triángulos?

¿Cómo se clasifican los triángulos?

¿Que métodos matemáticos conocen para resolver triángulos y de que depende su uso?

¿Qué y cuáles son las líneas notables de un triángulo? ¿Que procedimiento se emplea para construirlas con regla y compás?

Ejercicios propuestos

Los ejercicios que se plantean en esta guía, deben resolverse y luego modelarse en el módulo *turtle de Python, individualmente*

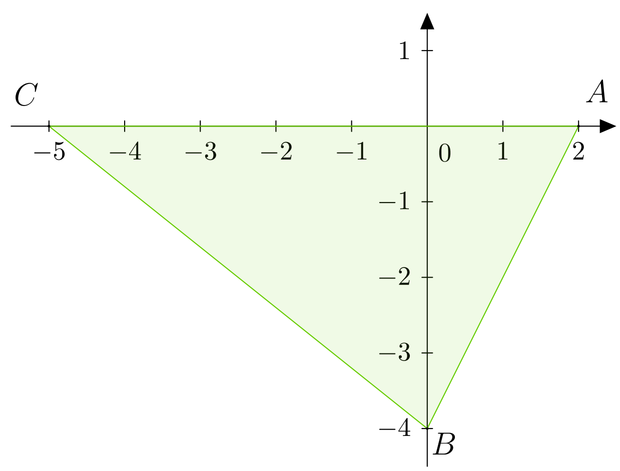
1. Construir y clasificar los triángulos que tienen vértices en los puntos:

   - $A = (12, 58)$ $B = (-30, 20)$ y $C = (-60, 37)$
   - $D = (-30, 22)$ $E = (85, -53)$ y $F = (0, 25)$
   - $G = (12, 58)$ $H = (-30, 20)$ y $I = (-60, 37)$
   - $J = (12, 58)$ $K = (-30, 20)$ y $L = (-60, 37)$

2. Calcular el perímetro de los triángulos del primer punto. Hallar la medida de los lados en cada caso y el área de cada triángulo con la fórmula de Herón.

3. Usar el programa del ejemplo 6 de este escrito para hallar el baricentro de los triángulos del primer punto, utilizando las tres posibles combinaciones de las medianas (alternar pares de vértices).

4. Para el triángulo de la figura adjunta:

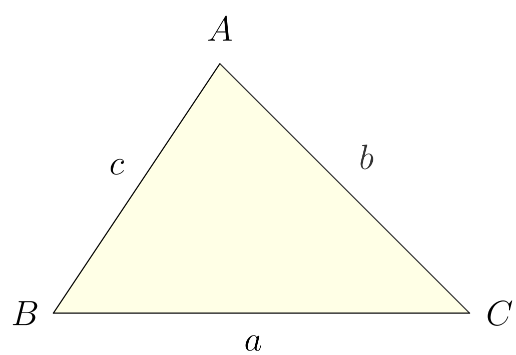


   Hallar

   - Su perímetro y área
   - La ecuación de la recta de las bisectrices
   - La medida de los ángulos internos

- Construir un triángulo con igual perímetro pero diferente área
- Construir un triángulo de área equivalente y diferente perímetro

5. Construir si es posible triángulos que tengan las siguientes medidas (las longitudes están dadas en pixeles y los ánguloos en grados), en caso contrario explicar porqué no es se puede hacer.



- $a = 50 \quad B = 23° \quad y \quad C = 75°$
- $a = 75 \quad b = 40 \quad y \quad c = 28$
- $A = 80° \quad B = 110° \quad y \quad c = 100$
- $b = 50 \quad B = 70° \quad y \quad C = 85°$
- $a = 50 \quad b = 36 \quad y \quad B = 54°$
- $a = 60 \quad b = 31 \quad y \quad c = 59$

6. Escribir en una hoja los pasos que se deben seguir para hallar el incentro de un triángulo cualquiera, conociendo sus vértices y luego escribir el código de *turtle* correspondiente.

7. Construir dos triángulos semejantes y uno congruente a los triángulos del punto anterior que sean construibles y representarlos en un mismo lienzo del módulo *turtle*.

COLEGIO SIERRA MORENA IED

GUIA DE APRENDIZAJE No 3

CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS REGULARES E IRREGULARES

MATEMÁTICAS GRADO DÉCIMO - UNDÉCIMO

Objetivos

- Interpretar, representar y crear figuras geométricas con características definidas
- Clasificar polígonos de acuerdo a la medida de sus lados y ángulos
- Calcular perímetros y áreas de polígonos regulares e irregulares
- Aplicar propiedades de los polígonos para resolver problemas geométricos
- Reconocer, representar e identificar los elementos geométricos que caracterizan a diferentes polígonos

Preguntas exploratorias

La lectura del primer capítulo en clase servirá de guía a los estudiantes que deseen profundizar sus conocimientos en los contextos histórico y cultural, que determinaron el desarrollo de la geometría. Como actividad complementaria se debe solicitar la consulta de nuevas fuentes bibliográficas y el programar una presentación sobre este tema, incluyendo un análisis superficial de las demostraciones que dieron solución a los problemas clásicos. A continuación se formulas algunas preguntas orientadoras.

¿Cuáles polígonos son construibles con regla y compás?

¿Cómo se calcula el perímetro y el área de un polígono regular ¿Se puede hacer sin conocer la longitud de los lados?

¿Cuáles fueron los principales obstáculos que se presentaron para la construcción de polígonos regulares con regla y compás?

¿Que propiedades de los polígonos regulares conocen y como podrían demostrarse matemáticamente?

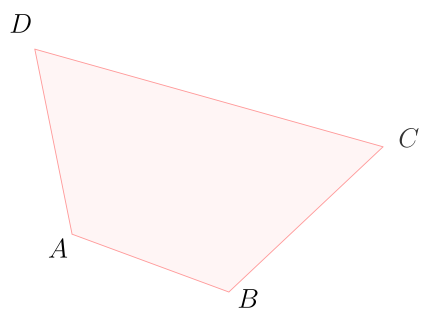
Describa la relación entre ciencia y filosofía que caracterizó a las antiguas comunidades científicas.

¿Cómo puede calcularse el área de un polígono irregular?

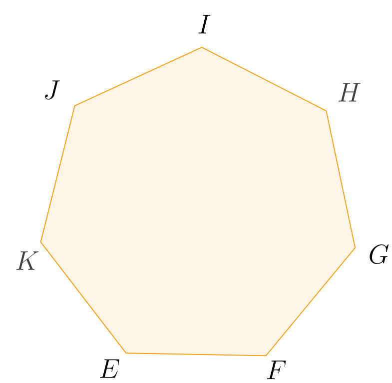
Las construcciones que se plantean en esta guía deben realizarse en el módulo turtle de Python.

1. Medir los lados y ángulos de los siguientes polígonos usando la regla y el transportador, luego construirlos y Clasificarlos:

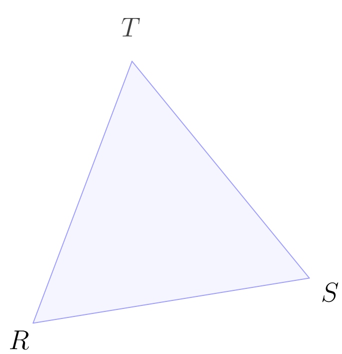
a)



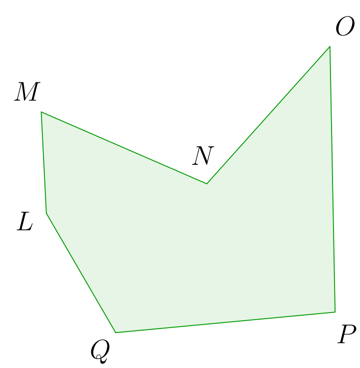
b)



c)



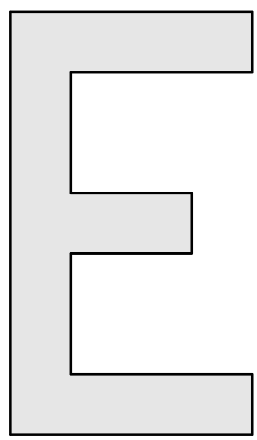
d)



2. Para los polígonos del punto anterior determinar el número de diagonales y diagonales medias. En el módulo turtle construir además el cuadrilátero $ABCD$ y el heptágno $EFGHIJK$ con sus diagonales y determinar la longitud de las mismas.

3. Construir un pentágono regular de 150 unidades de lado, trazar su apotema, calcular su longitud y determinar las coordenadas de su centro y vértices y hallar su área en función de la apotema y el número de lados.

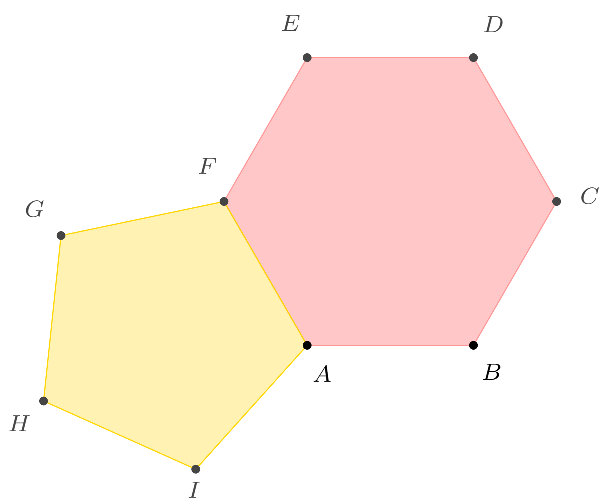
4. La siguiente figura corresponde a la letra "E" escrita como un polígono. Escribir los pasos empleados en la construcción de las letras I, L, F, E y H en el modulo turtle con una altura de 200 unidades, ancho de 150 unidades y 28 unidades de grosor. Intentar escribir el procedimiento previamente en el papel.



5. Para cada una de las figuras requeridas en el punto anterior, calcular su área y perímetro. Responder: ¿Es posible obtener un cuadrado de la misma área en cada caso? ¿Cómo?

6. La figura adjunta representa un sector de Bogotá visto en google maps. Suponiendo que se trata de un trapecio y que la medida de los lados esta en decámetros, determinar el perímetro del polígono, calcular su área y la longitud de sus diagonales.

7. A continuación se representan dos polígonos regulares; un pentágono y un hexágono con igual longitud de lado.

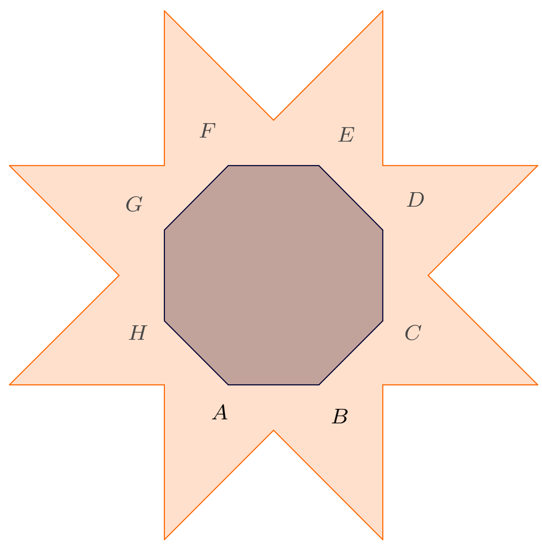


Con respecto a la figura anterior:

- Calcular el perímetro y el área de cada polígono y el valor del ángulo AIB.
- Escribir el procedimiento general para construir un polígono regular de lado conocido y reconstruir las dos figuras si $\overline{AB} = 95$.
- Calcular el número y la longitud de las diagonales y diagonales medias del hexágono.

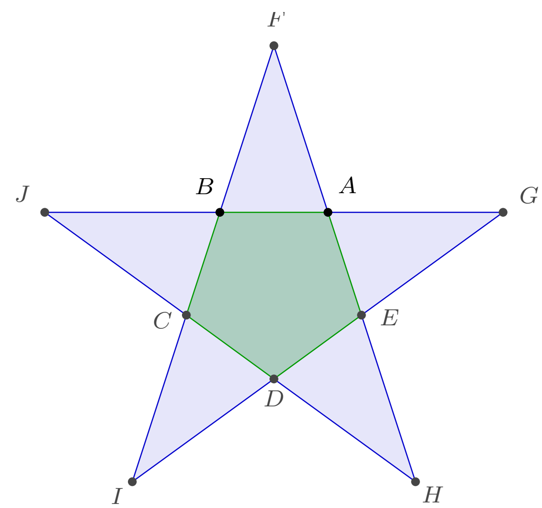
- Construir el hexágono que tiene como lados los segmentos $AIyAB$. Responder: ¿es posible recubrir el plano con estas dos tipos de polígono?

La construcción de polígonos estrellados se obtienen por la extensión de los lados de un polígono convexo o por la combinación de triángulos congruentes rotando secuencialmente a un mismo ángulo. En *turtle*se puede reproducir fácilmente la regularidad de un polígono estrellado, usando iteraciones. Veamos un ejemplo

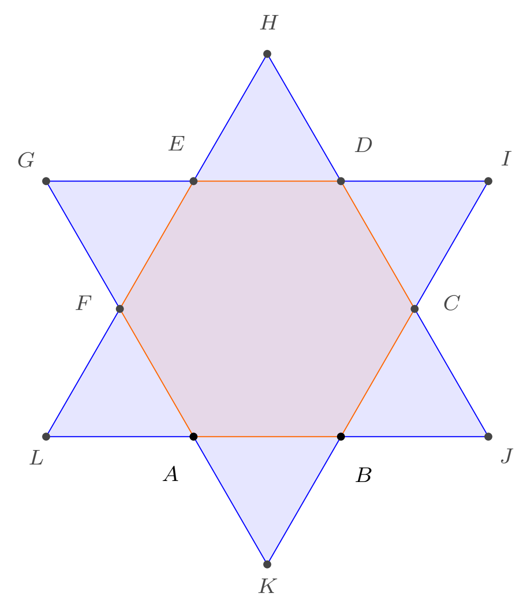


- Describir con sus palabras el movimiento que debe hacer la tortuga del lenguaje Python para delinear el polígono estrellado que resulta de la extensión de dos lados no consecutivos de la figura.
- Intentar construir el polígono estrellado con sus diagonales y formule una hipótesis o un teorema que establezca las condiciones necesarias para dibujar polígonos estrellados. (Se sugiere la lectura del primer capítulo de [12])
- Calcular el perímetro y las áreas tanto del polígono exterior como del interior si $\overline{AB} = 40$

8. Para el siguiente polígono, símbolo de la escuela Pitagórica, verificar si se cumplen las propiedades de los polígonos de la sección 4.2.3. Identificar las regularidades del polígono estrellado y deducir propiedades de este tipo de polígonos.



9. Construir el polígono adjunto, calcular la diferencia entre las áreas del hexágono regular y el hxágono estrellado, si $\overline{AK} = 70$. Luego inscribir un hexágono estrellado en el regular e intentar deducir el algoritmo de iteración.



10. Revisar en el Anexo 3 la función que cumplen los comandos del siguiente código ye intentar reproducir las instrucciones en el papel, usando regla y transportador. Despúes explicar los cambios que sufre la figura resultante al modificar el númro de lados.

```
from turtle import*

from math import*
```

```
speed(12)
n=8
a=360.0/n
l=50
fillcolor("purple")
begin_fill()
for i in range (0,n):
    fd(l)
    rt(a)
end_fill()
fd(l)
for j in range (0,n):
    fillcolor("yellow")
    begin_fill()
    fd(0.5*l/cos(a*pi/180))
    rt(2*a)
    fd(0.5*l/cos(a*pi/180))
    rt(-a)
    end_fill()
mainloop()
```

Conclusiones y recomendaciones

Conclusiones

La descripción histórica y epistemológica del desarrollo del concepto de polígono del primer capítulo, ilustra los principales obstáculos que enfrentaron los matemáticos desde la antigüedad hasta nuestros días por tratar de conciliar su visión del mundo con resultados que para ellos eran inconsistentes. De esta forma, el primer capítulo puede usarse a modo de introducción para la enseñanza de la constructibilidad de figuras en el plano y la irracionalidad tanto geométrica como numérica, que representaron tantas dificultades para la resolución de los tres problemas clásicos. En este sentido, los estudiantes serán concientes de la complejidad que subyace a la construcción del conocimiento científico y de cómo sus propios errores pueden trascender al momento de consolidar, concretar o formalizar sus esquemas mentales.

La implementación de herramientas tecnológicas e informáticas como el módulo turtle de python en la enseñanza de conceptos matemáticos, abre nuevas posibilidades a los docentes para diseñar actividades en las que los estudiantes reconstruyen consciente y reflexivamente el conocimiento; es decir que se convierten en sujetos activos en la dinámica del proceso de enseñanza-aprendizaje, además de ver en los ordenadores herramientas que pueden llegar a mediar entre sus nociones y preconcepciones y la adquisición de nuevos conocimientos.

Los estudiantes pueden alcanzar niveles de aprendizaje significativos cuando se suman elementos didácticos a la enseñanza tradicional; en otras palabras, cuando se enriquece el aspecto teórico del currículo con la aplicación y ejecución de actividades prácticas que se caracterizan por exigir otros tipos de representaciones (gráficas, algorítmicas, funcionales, etc.) que les permitan apropiarse del conocimiento. Entonces al emplear herramientas informáticas como el módulo *turtle*de Python para la enseñanza del concepto de polígono, se puede esperar que el estudiante comprenda cuáles son sus regularidades, características y propiedades, que demuestre interés por aprender, se encuentre motivado para hacerlo y esté en capacidad de proponer soluciones a los problemas planteados desde diferentes perspectivas.

La metodología propuesta en este trabajo puede facilitar la incorporación de temáticas de diferente índole a las clases de matemáticas, debido a la versatilidad del programa Python. Pueden fácilmente enseñarse conceptos aritméticos, algebraicos y trigonométricos, si se hace un trabajo conciente, reflexivo y colaborativo entre las dos partes; estudiantes y maestros. No olvidemos que estamos en la era de la información y por consiguiente debemos adaptar nuestras prácticas a los recursos y necesidades tecnológicas propios de nuestro contexto; de la misma forma como en el pasado se aceptaron nuevos paradigmas que permitieron enfrentar con éxito los obstáculos epistemológicos que limitaron el progreso de la Ciencia.

Recomendaciones

Las actividades que se plantean en esta propuesta se pueden aplicar en grados inferiores omitiendo conceptos con los que el estudiante no se encuentra familiarizado. En los grados de básica primaria pueden construirse figuras geométricas sencillas, ya sean cuadrados, rectángulos o círculos que lleven al estudiante a identificar sus propiedades intrínsecas: ángulos internos, longitud de los lados y equidistancia, sin importar su posición en el plano. En educación básica secundaria conviene profundizar en la lógica de los algoritmos o códigos, la proposición de funciones sencillas, la construcción de polígonos regulares y el uso de coordenadas cartesianas para calcular distancias.

La revisión de los programas que se incluyen en la carpeta Turtledemo del programa Python, que por defecto se encuentra en la carpeta python del disco local C en Windows, servirá para reconocer los alcances y potencialidades del programa. Entre los ejemplos incluidos en esa carpeta, se encuentran la modelación de movimiento planetario mediante ecuaciones, la iteración de rotaciones y traslaciones en el plano que definen a los fractales y teselados y la modelación de sólidos en perspectiva, entre muchos otros.

Anexos

El siguiente código permite manipular la tortuga con el mouse al ejecutarse el evento click para dejar trazos en el lienzo.

Anexo 1: Movimiento de la tortuga con el mouse

```
import turtle
turtle.setup(400,500)      #Define el tamaño de la ventana
wn = turtle.Screen()
wn.title("Movimiento de la tortuga con el mouse")
wn.bgcolor("lightgreen")   #Color de la ventana
Tortuga = turtle.Turtle()  #Se asigna un nombre a la tortuga
Tortuga.color("purple")
Tortuga.pensize(3)
Tortuga.shape("circle")

def h1(x, y):
   Tortuga.goto(x, y)

wn.onclick(h1)  # Se asocia la función h1 con el click del mouse
wn.mainloop()
```

Anexo 2: Área de un polígono regular

– **En función del perímetro y la apotema:** el área A de un polígono regular de n lados, es igual al producto entre el semiperímetro y la apotema a:

$$A = \frac{Pa}{2} = \frac{Lna}{2}$$

Donde L es la longitud de uno de los lados del polígono.

– **En función del número de lados y la apotema:**

Partiendo de

$$A = \frac{Lna}{2}$$

Y dado α ángulo central y $\delta = \frac{\alpha}{2} = \frac{Pi}{n}$. Se deduce que

$$L = 2\,a \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Sustituyendo en la ec...

$$A = \frac{2\,a \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) n\,a}{2}$$

Simplificando tenemos:

$$A = a^2\,n\,\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

– **En función del número de lados y el radio:** Si r es el radió de la circunferencia circunscrita y a la apotema, tenemos que

$$L = 2\,r\,\mathrm{sen}\,\delta \qquad \wedge \qquad a = r\,\cos\delta$$

Donde $\alpha = 2\delta$ es el ángulo central. Sabiendo que el área de un polígono regular es

$$A = \frac{Lna}{2}$$

Sustituyendo el valor del lado y la apotema calculados anteriormente:

$$A = \frac{2\,n\,r\,\text{sen}\,\delta r\;\cos\delta}{2}$$

Se sustituye la identidad del ángulo doble $2\,\text{sen}\,\delta\cos\delta = \text{sen}\,(2\,\delta)$ y obtenemos:

$$A = \frac{n\,r^2\,\text{sen}\,(2\,\delta)}{2}$$

Expresión equivalente a:

$$A = \frac{n\,r^2\,\text{sen}\left(\dfrac{2\,\pi}{n}\right)}{2}$$

– **En función de la longitud y el número de lados:**

Sea φ el ángulo formado entre uno de los lados del polígono y el r radio de la circunferencia circunscrita

$$\varphi = \frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{\pi - \dfrac{\pi}{n}}{2} = \frac{\pi\,(n-2)}{2\,n}$$

Por la definición de tangente tenemos:

$$\tan\alpha = \frac{a}{\dfrac{L}{2}} = \frac{2\,a}{L}$$

Entonces el valor de la apotema en función del lado es

$$a = \frac{L\;\tan\varphi}{2}$$

Sustituimos la apotema en el área del polígono:

$$A = \frac{Lna}{2}$$

Obteniendo

$$A = \frac{L^2\,n\;\tan\varphi}{4}$$

Con el valor conocido de φ dado al inicio

$$A = \frac{L^2\, n \tan\left(\dfrac{\pi(n-2)}{2n}\right)}{4}$$

Finalmente se deduce de la gráfica que $\tan\delta = \dfrac{1}{\tan\varphi}$

$$A = \frac{n\, L^2}{4\ \tan\left(\dfrac{180}{n}\right)}$$

Anexo 3: Comandos del módulo tortuga

En las tablas adjuntas se relacionan los principales comandos del módulo Turtle y en forma concisa, la función que cumple cada uno de ellos:

Dibujo y movimiento

`forward()|fd()`	Mueve la tortuga en línea recta hacia donde apunta la tortuga tantas unidades como se indique.
`back() bk()`	Mueve la tortuga en línea recta hacia la dirección opuesta a la cabeza de la tortuga (o punta de flecha)tantas unidades como se indique.
`right()|rt()`	Gira a la tortuga a la derecha (en el sentido de las manecillas del reloj) tantas unidades angulares como se indique. Se puede establecer la medida en grados o radianes.
`left()|lt()`	Gira la tortuga en el sentido opuesto a las manecillas del reloj, tantas unidades angulares como se indique.
`penup()|pu()|up()`	Levanta el lápiz (no dibuja cuando se mueve).
`down()`	Ubica el lápiz sobre el "lienzo" para continuar con el dibujo.

`speed()`	Determina la velocidad de la tortuga. Su parámetro es un entero en el rango de 0 a 10.
`goto() setpos() setposition()`	Mueve la tortuga a una posición absoluta. Si el lápiz esta abajo, traza la línea pero no cambia su orientación.
`home()`	Mueve la tortuga al origen; es decir, a las coordenadas (0,0).
`setx()`	Establece la coordenada en x manteniendo la coordenada en y invariable.
`sety()`	Establece la coordenada en y manteniendo la coordenada en x invariable.
`setheading() seth()`	Define la orientación de la tortuga según el ángulo, en el modo *standard* los valores predeterminados son 0=este, 90=norte, 180 oeste y 270=sur.
`circle()`	Dibuja un círculo con un radio determinado. También dibuja arcos de circunferencia teniendo como parámetros el radio y el ángulo que por defecto esta dado en grados.
`dot()`	Dibuja un círculo con un diámetro definido como un entero mayor o igual a 1.
`stamp()`	Estampa una copia de la forma de tortuga en el lienzo en la posición actual de la tortuga.
`clearstamps()`	Elimina la estampa de la tortuga en el lienzo.
`undo()`	Deshace la última acción (puede usarse repetidamente).

Conocer el estado de la tortuga

`towards()`	Devuelve el ángulo entre la línea desde la posición de la tortuga hasta la posición definida por un vector u otra tortuga. Esto depende de la orientación inicial de la tortuga, en otras palabras del modo en el que se encuentre (*standard, world o logo*).
`position() pos()`	Devuelve la posición actual de la tortuga como un par ordenado.
`xcor()`	Devuelve la coordenada x de la tortuga.
`ycor()`	Devuelve la coordenada y de la tortuga.
`heading()`	Devuelve el valor del ángulo actual de la tortuga con respecto al eje x.
`distance()`	Devuelve la distancia desde la tortuga hasta las coordenadas (x,y), el vector o la tortuga dados; en "pasos de tortuga".

Otros

`help()`	Despliega la ventana de ayuda del módulo que incluye un índice de temas. Su argumento puede ser un tema determinado del tipo *string*.

Sistema de medición angular

`degrees()`	Establece las unidades de medida angular en radianes. Equivale al comando degrees(2*math.pi).

`radians()`	Establece las unidades de medida angular en grados. Se puede establecer el sistema de medida con el argumento 360 o 400 grados.

Estado del lápiz

`pendown() | pd() | down`	Coloca el lápiz abajo, es decir sobre el lienzo. De esta forma dibuja cuando se mueve el lápiz.
`penup() | pu() | up ()`	Retira el lápiz del lienzo, entonces al moverse el lápiz no dibuja.
`pensize() | width()`	Define el ancho del trazo o devuelve el valor correspondiente. Su parámetro es un número positivo.
`pen()`	Define o devuelve los atributos del lápiz (*shown*: True/False, *pendown*: True/False, *pencolor*: color-string or color-tuple, *fillcolor*: color-string or color-tuple, *pensize*: positive number, *speed*: number in range 0..10, *resizemode*: auto, user or noresize, *stretchfactor*: (positive number, positive number), *outline*: positive number, *tilt*: number.
`isdown()`	Responde *True* o *False* si el lápiz está abajo o arriba respectivamente.

Control de color

`color()`	Devuelve o define el color del lápiz y del relleno.

`pencolor()`	Devuelve o define el color del lápiz. Su argumento se escribe de la forma "color", tal como "red", "yellow"... o como una tupla de la forma (r, g, b).
`fillcolor()`	Devuelve o define el color de relleno. Su argumento es tiene la misma forma del argumento del comando *pencolor*.
`fill()`	Devuelve o define el color del lápiz y del relleno.
`begin_fill()`	Se utiliza antes de dibujar una forma.
`end_fill()`	Colorea una forma después de ser dibujada.

Otros controles de dibujo

`reset()`	Borra lo dibujado en la pantalla hasta el momento y la tortuga se sitúa de nuevo en el origen.
`clear()`	Elimina de la pantalla los dibujos hechos por la tortuga. No mueve la tortuga. No se ven afectados el estado, la posición de la tortuga ni los dibujos de otras tortugas.
`write()`	Escribe el texto como la representación de una cadena tipo arg en la posición actual de la tortuga con la alineación y fuente determinadas.

Visibilidad de la tortuga

`showturtle() | st()`	Hace visible a la tortuga.
`hideturtle() | ht()`	Hace invisible a la tortuga. Es útil para elaborar dibujos complejos, además de acelerar el dibujo observable.

`isvisible()`	Regresa los valores verdadero o falso, dependiendo de sí la tortuga es visible o no, respectivamente.

Apariencia de la tortuga

`shape()`	Establece la forma de la tortuga: "flecha", "tortuga", "círculo", "cuadrado", "triángulo", "clásico".
`resizemode()`	Redimensiona la tortuga a uno de los valores: *Auto*: Adapta la apariencia de la tortuga al valor de pensize. *Usuario*: adapta la apariencia de la tortuga de acuerdo a los valores del factor de extensión (stretchFactor) y esquema (outlinewidth), que son fijados mediante el comando `shapesize ()` *Noresize*: No se altera la apariencia de la tortuga.
`shapesize() | turtlesize()`	Define el tamaño de la forma de la tortuga.
`settiltangle()`	Gira la forma de la tortuga de manera que apunte en la dirección especificada por el ángulo, independientemente de su ángulo de inclinación actual. No cambia dirección del movimiento de la tortuga.
`tiltangle()`	Establece o devuelve la inclinación actual. Es decir que funciona como contra-instrucción del comando `tilt`.
`tilt()`	Gira o inclina la forma de la tortuga de acuerdo al ángulo indicado, sin cambiar la dirección del movimiento de la tortuga.

Ajustar a un evento

`onclick() | onscreenclick`	Permite definir una actividad o evento para la tortuga al dar click sobre ella. Por ejemplo girar (Usando como parámetro `turn`) o cambiar su color.
`onrelease()`	Inhabilita la instrucción `oneclick`.
`ondrag()`	Establece un evento de movimiento para la tortuga.

Métodos especiales de la tortuga

`begin_poly()`	Inicia el trazado de un polígono tomando como primer vértice el origen.
`end_poly()`	Traza el último segmento del polígono.
`get_poly()`	Devuelve el último polígono registrado.
`clone()`	Crea y devuelve un clon de la tortuga con la misma posición encabezado y propiedades de la tortuga.
`getturtle()  getpen()`	Devuelve las propiedades de tortuga como objeto para ser usado como una función que devuelve una "tortuga anonima".
`getscreen()`	Devuelve los atributos de la pantalla sobre la cual se está dibujando.
`setundobuffer()`	Su parámetro es el tamaño (*size*). Establece las propiedades de contral de la acción deshacer.
`undobufferentries()`	Devuelve el número de entradas en el control de la acción deshacer.
`window_width()`	Devuelve el ancho de la ventana del modulo turtle.
`window_height()`	Devuelve la altura de la ventana del modulo turtle.

Control de ventana

`bgcolor()`	Define el color de fondo de la ventana del la pantalla del modulo. Su argumento es un color (tipo string)o tres números en el rango 0... o una 3-tupla de tales números.
`bgpic()`	Coloca una imagen de fondo o devuelve el nombre de la actual. Se puede usar la ubicación de la imagen como (picname=ubicación) o si picname se define como "nopic" borra la imagen de fondo.
`clear() | clearscreen()`	Borra todos los dibujos y todas las tortugas de la pantalla. Resetea la pantalla a sus ajustes originales.
`reset() | resetscreen()`	Resetea todas las tortugas en la pantalla a su posición inicial.
`screensize()`	Redimensiona el lienzo con los argumentos que definen el ancho y alto del lienzo en pixeles canvwidth=entero positivo, canvheight=Entero positivo y bg=color tipo string.
`setworldcoordinates()`	Modifica el sistema de coordenadas al igual que los dibujos que aparecen en pantalla.
`mode()`	Establece el sistema coordenado como: *standard* que es usado por defecto (la punta de la flecha apunta hacia la derecha y los ángulos positivos van en contra del movimiento de las manecillas del reloj); *logo* (la punta de flecha apunta hacia arriba y los ángulos positivos van en el sentido de las manecillas del reloj) y world, que es el definido por el usuario.

`colormode()`	Fija el modo en 1.0 o 255. Posteriormente las tripletas de colores *r, g, b* se definiran en el rango definido por esos valores.
`getcanvas()`	Se utiliza normalmente en combinación con el modulo Tkinter para obtner un lienzo.
`getshapes()`	Devuelve una lista de las formas que actualmente se encuentran disponibles.
`register_shape()|addshape()`	Permite agregar una forma desde la ubicación indicada. Sus argumentos son: nombre de un archivo tipo gif y *shape* = None. Para registrar la forma: `screen.register_shape`(nombre y tupla con pares de coordenadas que definan el polígono).
`turtles()`	Devuelve la lista de tortugas en pantalla.
`window_height()`	Devuelve la altura de la ventana del modulo.
`window_width()`	Devuelve el ancho de la ventana del modulo.

Control de animaciones

`delay()`	Coloca o devuelve el retraso del trazo en milisegundos (Este es aproximadamente el intervalo de tiempo entre 2 actualizaciones consecutivas del lienzo).
`tracer()`	Activa o inactiva la animación de la tortuga y retrasa la actualización de los gráficos. Puede ser usado para acelerar el trazado de gráficas complejas. Su primer argumento es un entero positivo que define la actualización de la n-ésima pantalla, mientras que el segundo argumento (delay) asigna el valor de retraso.

`update()`	Actualiza la pantalla del modulo. Se usa cuando el comando *tracer* se encuentra en off.

Eventos en pantalla

`listen()`	Establece el orden de enlace entre eventos.
`onkey()`	Enlaza funciones a una clave de liberación. Si la función (*fun*) es *none* los eventos enlazados son removidos.
`onclick() | onscreenclick()`	Enlaza una función (*fun*) a la acción click en la pantalla. Parámetros: Una función que será llamada con las coordenadas del punto en el lienzo; número del botón del mouse (por defecto se asigna el número 1 al izquierdo) y agregar (*add*) que genera nuevos enlaces que pueden reemplazar a los precedentes (usando *True/False*).
`ontimer()`	Instala un temporizador que llama a una función (*fun*) después de t milisegundos.

Métodos específicos para la pantalla

`bye()`	Cierra la ventana de gráficos del modulo turtle.
`exitonclick()`	Asigna el comando `bye()` a la acción click.
`setup()`	Establece el tamaño y posición de la ventana principal.
`title()`	Muestra el texto definido como parámetro, en la pantalla del modulo tortuga.

Bibliografía

[1] Abelson, H. y Disessa, A.A., (1984). *Turtle Geometry The Computer as a Medium for Exploring Mathematics*, Massachestts, EUA, Adison Wesley Longman.

[2] Clemens, S.R., O´Daffer, P.G. y Cooney, T.J., (1984). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas*, Massachusetts, EUA, The MIT Press.

[3] Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación, (2006). *Resumen ejecutivo Resultados Colombia en PISA 2012.*

[4] Kindle, H.J, (1980). *Teoría y problemas de Geometría Analítica Plana y del Espacio, Serie Schaum*, EUA, McGraw-Hill.

[5] Klien, M., (1972). *Mathematical Thought From Ancient to Modern TImes*, New York, EUA, Oxford University Press.

[6] Kritt, D.W. y Winegar L.T, (2007). *Educación and Tecnology Critical Perspectives, Possible Futures*, Plymouth, Reino Unido, Lexinton Books.

[7] Lehmann, C.H., (1980). *Geometría Analítica*, New York, EUA, Editorial Limusa.

[8] McPherson, T., (2008). *Digital Youth, Innovation, and the Unexpected*, EUA, MIT Press.

[9] Ministerio de Educación Nacional, (2006). *Estándares básicos de competencias en Matemáticas*, Colombia.

[10] Mora, H.M, (2014). *Rudimentos de Turtle Módulo Python*, disponible en: www.hectormora.info/rudi_turtle.pdf.

[11] Packer, M.J. y Goicochea J., (2000). *Sociocultural and Constructivist Theories of Learning: Ontology, Not Just Epistemology*, Pennsylvania, EUA, Duquesne University.

[12] Papert, S, 2. ed, (1982). *Desafio a la mente, Computadoras y Educación, trad.*, Buenos Aires, Argentina, Ediciones Galápago.

[13] Pérez, R.A, Vol. 5, (2009). *El Constructivismo en los Espacios Educativos*, San José C.R, Coordinación Educativa y Cultural de Centroamérica.

[14] Quispe, E. y Caballero, L.U, (2000). *Problemas de Geometría y Como Resolverlos*, Perú, Racso Editores.

[15] Rey, P. y Rey, P., (1985). *Historia de la matemática*, Barcelona, España, Gedisa S.A.

[16] Ruiz, A., (2003). *Historia y Filosofía de las Matemáticas*, Costa Rica, Editorial Universidad Estatal a Distancia.

[17] Schunk, D.H, sexta edición, (2012). *Teorías del aprendizaje, una perspectiva educativa*, University of North Carolina, EUA, Pearson.

[18] Stewart, I., (2007). *Historia de las matemáticas en los últimos 10000 años*, Barcelona, España, Crítica.