UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Acciones propias en grupos topológicos y aplicaciones a espacios cocientes

Adriana Juzga León

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2015

Acciones propias en grupos topológicos y aplicaciones a espacios cocientes

Adriana Juzga León

Trabajo final presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magíster en Ciencias Matemáticas

Director:
Profesor Serafín Bautista Diaz

Línea de Investigación:
Sistemas Dinámicos
Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2015

A mis sobrinos Sofía, Samuel y Miguel.

Agradecimientos

Agradezco a mis padres por cada uno de los esfuerzos realizados en mi educación, su ejemplo me enseñó a alcanzar mis sueños y metas con esfuerzo y dedicación; a mis hermanos por sus numerosas enseñanzas y a Ana María por sus palabras de ánimo cada vez que las necesité.

A Juan Carlos por el apoyo incondicional y motivación para emprender éste y otros proyectos.

Por último agradezco al profesor Serafín Bautista Diaz por la asesoría brindada durante la elaboración de este trabajo y por cada uno de los aportes académicos y personales.

Resumen

Sean X un grupo topológico y G un subgrupo localmente compacto de X. Mostraremos que la acción natural de G sobre X dada por $(g, x) \mapsto xg^{-1}$ es propia en el sentido de Palais, y que dadas las condiciones impuestas esta acción es también propia, Palais - Cartan propia, de Cartan y Bourbaki - propia; resultados que permitirán probar la existencia de un conjunto cerrado $F \subset G$, G - fundamental tal que la restricción de la aplicación cociente $\pi|_F : F \to X/G$ es perfecta (i.e. cerrada con fibras compactas) hecho que posibilitará la transferencia de algunas propiedades topológicas estables bajo aplicaciones perfectas y heredadas por conjuntos cerrados en X al espacio cociente X/G. Finalmente, demostraremos que si X es además paracompacto se establece la relación $dim(X) \leq dim(X/G) + dim(G)$ entre las dimensiones de los G - espacios X, X/G y G.

Palabras clave: Grupo topológico, acción propia, acción de Cartan, acción Palais - propia, espacio cociente, G - fundamental.

Abstract

Let X be a topological group and G a locally compact subgroup of X. We show that the natural action of G on X given by $(g, x) \mapsto xg^{-1}$ is proper in the sense of Palais, and given the conditions this action is itself Palais- Cartan, Cartan and Bourbaki proper; results that will prove the existence of a closed set $F \subset G$, G - fundamental such that the restriction of the quotient map $\pi|_F : F \to X/G$ is perfect (i.e. closed with compact fibers) this will enable the transfer of some stable topological properties under perfect application and inherited by closed sets in X to the quotient space X/G. Finally, we show that if X is also paracompact the inequality $dim(X) \leq dim(X/G) + dim(G)$ relates the dimensions of the G- spaces X, X/G and G.

Keywords: Topological group, proper action, Cartan action, Palais - proper action, quotient space, G - fundamental.

Contenido

Agradecimientos vii

Resumen ix

Introducción 2

1. Preliminares 4
   - 1.1. Grupos topológicos . . . 4
     - 1.1.1. Algunos grupos topológicos clásicos . . . 8
   - 1.2. Acciones de grupo . . . 8
   - 1.3. Funciones equivariantes . . . 12
   - 1.4. Órbitas y espacio cociente . . . 14
   - 1.5. Producto torcido . . . 16

2. Acciones propias 19
   - 2.1. Aplicaciones propias y perfectas . . . 19
   - 2.2. Acciones propias y acciones de Cartan . . . 22
   - 2.3. Acciones de Cartan y propias en el sentido de Palais . . . 26

3. Propiedades topológicas heredadas por el espacio cociente 32

4. Conclusiones 42

A. Apéndice A 43

Bibliografía 44

Índice 45

Introducción

Sean X un espacio topológico de Hausdorff y G un grupo topológico. Por un G - espacio entendemos un espacio X junto con una acción $G \times X \to X$ del grupo topológico G sobre X. La noción de G - espacio propio en el sentido de Palais fue introducida en 1961 por Richard Palais en [12] con el objetivo de generalizar la teoría existente de acciones propias de grupos compactos al caso no compacto.

El presente trabajo tiene como objetivo el estudio detallado de las acciones propias en el sentido de Palais, su equivalencia con otros tipos de acciones propias comúnmente aceptadas en la literatura [5], [11] y [12], y mediante la acción Palais - propia $(g, x) \mapsto xg^{-1}$ se ejemplifica la conjetura (ver [1], [3] y [12]):

Conjetura: *Sea G un grupo localmente compacto. Entonces, el espacio de órbitas X/G de un G - espacio X Palais - propio paracompacto es paracompacto.*

Además se revisan otras implicaciones de interés en el espacio cociente.

Este trabajo se encuentra organizado en forma general del siguiente modo: en el capítulo 1 se presenta una introducción al tema de grupos topológicos y las acciones de grupo con el objetivo de sumergir al lector en el objeto principal de estudio de este trabajo; en el capítulo 2 se definen algunos tipos de acción propia y se establecen las condiciones necesarias para obtener una equivalencia entre éstas, y por último en el capítulo 3 se dan algunas construcciones y resultados que posibilitarán la transferencia de ciertas propiedades topológicas del espacio X al espacio cociente X/G.

A continuación se dará una descripción más detallada de cada capítulo.

El capítulo 1 se divide en cinco partes. En la primera se presenta un breve estudio de los grupos topológicos sus principales definiciones y propiedades. Las otras cuatro partes se dedican a las acciones de grupo, la equivalencia entre G - espacios a partir de las funciones equivariantes se estudia en la sección 1.3, en la sección 1.4 se define el espacio de órbitas o espacio cociente de una acción, y por último buscando establecer homeomorfismos entre subespacios del G - espacio X se define el producto torcido en la sección 1.5.

En el capítulo 2 una vez definidas las aplicaciones perfectas y propias, en la sección 2.2 se definen las acciones propias, acciones de Cartan y Bourbaki - propias. Las definiciones de G - espacio de Cartan y G - espacio propio en el sentido de Palais son estudiadas en la sección 2.3; en el teorema 2.4 se analiza la equivalencia entre las acciones Palais - propias y los demás tipos de acciones propias.

En el capítulo 3 se demuestra que la acción natural de un sugbgrupo localmente compacto G sobre X dada por $(g,x) \mapsto xg^{-1}$ es propia en el sentido de Palais (teorema 3.2). Este resultado permite establecer la proposición 3.5 que determina la transferencia de propiedades topológicas estables bajo aplicaciones perfectas y heredadas por conjuntos cerrados en X al espacio cociente X/G, ejemplificando así la conjetura planteada anteriormente.

En el teorema 3.5 incluido en el capítulo 3 se establece una importante relación entre las dimensiones de los grupos topológicos X y G y la del espacio cociente X/G.

En el apéndice son incluidos algunos teoremas clásicos de la teoría de acciones de grupos que fueron usados en el desarrollo del capítulo 3.

1. Preliminares

En este capítulo son incluidos los conceptos y propiedades básicas de los grupos topológicos, las acciones de grupo y sus principales construcciones necesarias en la caracterización de las acciones propias de grupos y en el estudio de las propiedades topológicas que son heredadas por su espacio cociente.

1.1. Grupos topológicos

Definición 1.1 *Un **grupo topológico** es un espacio topológico de Hausdorff G con estructura de grupo, donde la operación de grupo $G \times G \to G$; $(g, h) \mapsto gh$ y la operación que envía cada $g \in G$ en su inverso $g^{-1} \in G$ son aplicaciones continuas.*

Para cada $g \in G$ definimos la función $L_g : G \to G$ denominada *traslación a izquierda* mediante $L_g(h) = gh$. Si consideramos $g, h \in G$, tenemos que

$$(L_g \circ L_h)(x) = L_g(L_h(x)) = L_g(hx) = gh(x) = L_{gh}(x),$$

así $(L_{g^{-1}} \circ L_g)(x) = L_{g^{-1}g}(x) = L_e(x) = x$ y por lo tanto $L_{g^{-1}} = (L_g)^{-1}$, de lo cual se sigue que L_g es un homeomorfismo de G en si mismo. De modo análogo cada *traslación a derecha* $R_g : G \to G$ definida mediante $R_g(h) = hg^{-1}$ es un homeomorfismo de G en G. En adelante notaremos la composición $L_g \circ R_g$ como λ_g (i.e. $\lambda_g(h) = ghg^{-1}$).

Para subconjuntos U y V de G, mediante UV y U^{-1} notaremos los conjuntos:

$$\begin{aligned} UV &= \{uv : u \in U, v \in V\}, \\ U^{-1} &= \left\{u^{-1} : u \in U\right\}. \end{aligned}$$

Dado que L_g es un homeomorfismo tenemos que gU es una vecindad de g si y sólo si U es una vecindad de e; además, si U es una vecindad de e también lo es U^{-1} y por lo tanto $U \cap U^{-1}$. Una vecindad de e es *simétrica* si $U = U^{-1}$.

Observación 1.1 *En un grupo topológico las vecindades simétricas de e son una base de la topología de G. Además, se cumplen las propiedades:*

i) Si $g \in G$ y $U \subset G$ es una vecindad de g, entonces existe una vecindad V de e tal que $VgV \subset U$.

ii) Si $A \subset G$ y V es una vecindad de e, entonces AV es una vecindad de A.

Para más detalles de estas propiedades y su demostración (ver [6, pág 2]).

Un *subgrupo topológico* de G es un subespacio $H \subset G$ tal que H es un grupo topológico respecto a la operación que define el grupo topológico G restringida a H. Si G y G' son grupos topológicos por un *homomorfismo de grupos topológicos* $\varphi : G \to G'$ entenderemos un homomorfismo de grupos que también es continuo.

Proposición 1.1 *Si H es un subgrupo topológico de G, entonces $\bar{H}$ también es un subgrupo. Si además, H es normal entonces $\bar{H}$ también lo es.*

Demostración. Sea $\mu : G \times G \to G$ definida mediante $\mu(g, h) = gh^{-1}$. Luego $\mu\left(\bar{H} \times \bar{H}\right) = \mu\left(\overline{H \times H}\right) \subseteq \overline{\mu(H \times H)} = \bar{H}$ y por lo tanto $\bar{H}$ también es un subgrupo de G. Observe que $\bar{H}$ es normal ya que $\lambda_g = L_g \circ R_g$ es un homeomorfismo de G en G y $g\bar{H}g^{-1} = \lambda_g\left(\bar{H}\right) = \overline{\lambda_g(H)} = \overline{gHg^{-1}} = \bar{H}$.

□

Proposición 1.2 *Sea H un subgrupo cerrado de G. Entonces, el espacio topológico G/H formado por las clases a izquierda gH de H en G (con la topología cociente inducida por la aplicación canónica $\pi : G \to G/H$) es un espacio de Hausdorff. Además, π es continua y abierta.*

Demostración. La aplicación canónica π es continua y abierta. En efecto, sea U un abierto contenido en G. Entonces $\pi^{-1}(\pi(U)) = UH = \bigcup_{h \in H} Uh$ es la unión de abiertos y por lo tanto es abierta en G. De la topología cociente tenemos que $\pi(U)$ es un abierto en G/H. Además, dado que π es una aplicación cociente se sigue que es continua (ver [10, pág 156]). Para mostrar que G/H es de Hausdorff, supongamos que $g_1H \neq g_2H$ y por lo tanto $g_1^{-1}g_2 \notin H$. Como por hipótesis H es cerrado, entonces existe una vecindad simétrica U de e tal que $Ug_1^{-1}g_2U \subseteq G - H$ y por lo tanto

$$\emptyset = Ug_1^{-1}g_2U \cap H = U^{-1}\left(Ug_1^{-1}g_2U\right) \cap U^{-1}H = \left(g_1^{-1}g_2U\right) \cap UH = (g_2U) \cap (g_1UH).$$

Luego $(g_2UH) \cap (g_1UH) = \emptyset$ y así g_1UH y g_2UH son dos abiertos disyuntos en G/H que contienen a g_1H y g_2H, respectivamente.

□

Proposición 1.3 *Si H es un subgrupo cerrado normal de un grupo topológico G, entonces G/H es un grupo topológico.*

Demostración. Dado que H es un subgrupo normal tenemos que G/H es un grupo lo que implica que la operación $\mu : G/H \times G/H \to G/H$; $(g_1H, g_2H) \mapsto g_1g_2H$ está bien definida. Usando la proposición anterior tenemos que G/H es de Hausdorff. Resta probar que es un grupo topológico. Por hipótesis G es un grupo topológico y por definición la operación $\eta : G \times G \to G$ definida mediante $(g_1, g_2) \mapsto g_1g_2$ es continua. Ya que la aplicación cociente π es abierta y continua tenemos que $\psi = \pi \times \pi$ es abierta. Del diagrama:

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\psi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/H \times G/H \arrow[r, "\mu"] & G/H \end{tikzcd}$$

Tenemos $\mu^{-1} = \psi \circ \eta^{-1} \circ \pi^{-1}$. Sea $W \subseteq G/H$ un abierto, entonces $\mu^{-1}(W) = \psi\left(\eta^{-1}\left(\pi^{-1}(W)\right)\right)$ es un abierto en $G/H \times G/H$ y por lo tanto μ es continua. Análogamente la operación que envía cada elemento de G/H en su inverso es continua.

□

Proposición 1.4 *Sean G un grupo topológico y G_0 la componente conexa de G que contiene la identidad e. Entonces, G_0 es un subgrupo normal cerrado de G.*

Demostración. Las componentes son cerradas y conexas por definición (ver [10, pág 182]). Resta probar que G_0 es normal. Puesto que $G_0 \times G_0$ es producto de conexos, entonces también es conexo y por lo tanto $G_0G_0^{-1}$ es un conexo que contiene a e de donde $G_0G_0^{-1} \subseteq G_0$. Hemos demostrado así que G_0 es un subgrupo de G. Si $\omega : G \to G$ es un automorfismo que es también un homeomorfismo, entonces $\omega(G_0)$ es una componente de G que contiene a e lo que implica que $\omega(G_0) = G_0$. En particular para el automorfismo λ_g se tiene que $\lambda_g(G_0) = gG_0g^{-1} = G_0$ y por lo tanto G_0 es normal.

□

Definición 1.2 *Sean G un grupo topológico localmente compacto y G/G_0 el grupo cociente de G módulo la componente conexa de la identidad G_0. Si G/G_0 es compacto, el grupo topológico G se dice* ***casi conexo****.*

Proposición 1.5 *Si G es un grupo compacto, $g \in G$ y $A = \{g^n : n = 0, 1, ...\}$, entonces $\bar{A}$ es un subgrupo de G.*

Demostración. Sea $g \in G$ y notemos el generado de g como B, esto es, $B = \{g^n : n \in \mathbb{Z}\}$ el cual es un subgrupo. Usando la proposición 1.1 podemos concluir que $\bar{B}$ es también un subgrupo topológico de G. Si $e \in B$ es un punto aislado de $\bar{B}$, existe una vecindad U de e

tal que $U \cap \bar{B} = \{e\}$ y por la observación 1.1 podemos concluir que $\bar{B}$ es discreto. Dado que $\bar{B}$ es un cerrado contenido en el compacto G se tiene que es compacto y al ser discreto es finito. Como $B \subset \bar{B}$, entonces el mismo B es finito de lo cual se sigue que $g^n = e$ para algún $n \geq 0$. Supongamos que $e \in B$ no es un punto aislado de $\bar{B}$, entonces para toda vecindad simétrica U de e existe algún entero $n > 0$ tal que $g^n \in U$ y así $g^{n-1} \in g^{-1}U \cap A$ puesto que $g^{-1}U$ es una vecindad de g^{-1} se sigue que $g^{-1} \in \bar{A}$ y por lo tanto $\bar{A} = \bar{B}$.

□

Si H es un subgrupo de G, entonces el *normalizador de H en G* es el subconjunto dado por

$$N(H) = \left\{g \in G : gHg^{-1} = H\right\},$$

$N(H)$ es un subgrupo de G. En efecto, resulta evidente que $e \in N(H)$ y usando el homeomorfimo λ_g tenemos que $g \in N(H)$ si, y sólo si, $\lambda_g(H) = H$. Dados $g, h \in N(H)$ se cumple:

$$\begin{aligned}
\lambda_{gh}(H) &= (gh)\, H\, (gh)^{-1} \\
&= (gh)\, H \left(h^{-1}g^{-1}\right) \\
&= g\left(hHh^{-1}\right)g^{-1} \\
&= \lambda_g\left(hHh^{-1}\right) \\
&= \lambda_g\left(\lambda_h\left(H\right)\right) \\
&= \lambda_g\left(H\right) = H,
\end{aligned}$$

con lo cual $gh \in N(H)$; si $g \in N(H)$ se tiene $gHg^{-1} = H = g^{-1}Hg$ y por lo tanto $g^{-1} \in N(H)$.

Proposición 1.6 *Sean G un grupo compacto y H un subgrupo cerrado de G. Entonces, $g \in N(H)$ si, y sólo si, $gHg^{-1} \subset H$.*

Demostración. La primera implicación es inmediata y se sigue de la definición de $N(H)$; para la otra implicación consideremos $\lambda : G \times G \to G$ definida mediante $\lambda(g, h) = ghg^{-1}$ y $A = \{g^n : n = 0, 1, ...\}$. De la hipótesis $gHg^{-1} \subset H$ se sigue que $\lambda\,(A \times H) \subset H$ y de la continuidad de λ obtenemos que $\lambda\left(\bar{A} \times H\right) \subset H$. Además, usando la proposición 1.5 tenemos que $g^{-1} \in \bar{A}$ con lo que $g^{-1}Hg \subset H$ y por lo tanto $H \subset gHg^{-1}$.

□

1.1.1. Algunos grupos topológicos clásicos

Consideremos $\mathbb{K}$ como el campo $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$; por $M_n(\mathbb{K})$ denotaremos el $\mathbb{K}$ espacio vectorial de las matrices de tamaño $n \times n$ con entradas en el campo $\mathbb{K}$. Escribiremos A^T y $\bar{A}$ para notar la transpuesta y la conjugada de $A \in M_n(\mathbb{K})$, además $A^* = \left(\bar{A}\right)^T$.

El espacio vectorial $M_n(\mathbb{R})$, que tiene dimensión n^2, es isomorfo a $\mathbb{R}^{n^2}$, y por lo tanto con la operación suma es un grupo topológico cuya topología es la inducida por la biyección de éste en $\mathbb{R}^{n^2}$.

Sea $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : det(A) \neq 0\}$ es decir, el grupo lineal de las matrices invertibles. Puesto que la función determinante es continua la imagen inversa de $\{0\}$ es cerrada y por lo tanto su complemento es abierto. Notemos que dicho complemento es precisamente $GL_n(\mathbb{R})$. Además, puesto que la multiplicación de matrices $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ es una función dada por polinomios obtenidos en cada componente matricial, tenemos que esta es continua. La expresión de A^{-1} en términos del determinante y los cofactores de A nos permiten ver que $A \mapsto A^{-1}$ es continua en $GL_n(\mathbb{R})$ y por lo tanto $GL_n(\mathbb{R})$ es un grupo topológico.

El grupo de las matrices ortogonales $O(n) = \left\{A \in GL_n(\mathbb{R}) : AA^T = A^T A = I_n\right\}$, es un subgrupo topológico de $GL_n(\mathbb{R})$. En efecto, si una matriz es ortogonal sus columnas son conformadas por bases ortonormales lo cual garantiza que sus coeficientes están acotados entre $[-1, 1]$ y por lo tanto el conjunto $O(n)$ es acotado en $GL_n(\mathbb{R})$. Además, dado que la multiplicación de matrices es continua y la aplicación $A \mapsto A^T$ es un homeomorfismo de $M_n(\mathbb{R})$ en $M_n(\mathbb{R})$, la relación $A^T A = I_n$ permite garantizar que $O(n)$ es también cerrado, con lo cual obtenemos la compacidad de $O(n)$ y por lo tanto es un subgrupo de $GL_n(\mathbb{R})$.

El espacio vectorial $M_n(\mathbb{C})$ es isomorfo a $\mathbb{C}^{n^2}$, y por lo tanto con la operación suma es un grupo topológico cuya topología es la inducida por la biyección en $\mathbb{C}^{n^2}$. Sea

$$U(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) : AA^* = A^* A = I_n\},$$

como $A \mapsto A^*$ es continua en $M_n(\mathbb{C})$ la relación $A^* A = I_n$ permite garantizar que $U(n)$ es cerrado, y dado que el módulo de los coeficientes es acotado entre $[-1, 1]$ tenemos que $U(n)$ es acotado y por lo tanto compacto, así $U(n)$ es un subgrupo cerrado de $GL_n(\mathbb{C})$.

1.2. Acciones de grupo

Definición 1.3 *Sean X un espacio topológico de Hausdorff y G un grupo topológico con unidad e. Una **acción** de G sobre X es una función $\Theta : G \times X \to X$, que satisface las* *condiciones:*

i) $\Theta(g, \Theta(h,x)) = \Theta(gh,x)$, *para todo* $g,h \in G$ *y* $x \in X$.

ii) $\Theta(e,x) = x$, *para todo* $x \in X$.

Los siguientes ejemplos facilitarán nuestra tarea de estudiar las acciones de grupos topológicos:

Ejemplo 1.1 *Si* G *es un grupo topológico, éste puede actuar sobre sí mismo mediante la acción* $\Theta : G \times G \to G$ *dada por* $\Theta(g,x) = gxg^{-1}$. *En efecto, para todo* $g,h,x \in G$ *se cumple*

$$\Theta\left(g, \Theta(h,x)\right) = \Theta\left(g, hxh^{-1}\right) = g\left(hxh^{-1}\right)g^{-1} = (gh)\,x\,(gh)^{-1} = \Theta\left(gh,x\right),$$

y la acción del módulo $e \in G$ *sobre cualquier elemento* $x \in G$ *satisface* $\Theta(e,x) = exe^{-1} = x$.

Ejemplo 1.2 *Sean* G *un grupo topológico y* H *un subgrupo cerrado de* G. G *actúa sobre* G/H *mediante la acción* $\Theta : G \times G/H \to G/H$ *dada por* $\Theta\left(g, g'H\right) = \left(gg'\right)H$. *En efecto, sean* $g,h \in G$ *y* $g'H \in G/H$ *así*

$$\Theta\left(g, \Theta\left(h, g'H\right)\right) = \Theta\left(g, \left(hg'\right)H\right) = g\left(hg'\right)H = \left((gh)\,g'\right)H = \Theta\left(gh, g'H\right),$$

además la acción del módulo $e \in G$ *sobre* $g'H$ *satisface* $\Theta\left(e, g'H\right) = \left(eg'\right)H = g'H$.

Ejemplo 1.3 *El grupo topológico* $G = GL_n(\mathbb{R})$ *actúa de modo natural sobre* $X = \mathbb{R}^n$ *mediante la acción* $\Theta : GL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\Theta(A,x) = Ax$; *ya que si* $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ *y* $x \in \mathbb{R}^n$ *se tiene*

$$\Theta\left(A, \Theta\left(B,x\right)\right) = \Theta\left(A, Bx\right) = A\left(Bx\right) = \left(AB\right)x = \Theta\left(AB, x\right),$$

y la acción del módulo del grupo $I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ *sobre cualquier elemento* $x \in \mathbb{R}^n$ *satisface* $\Theta\left(I_n, x\right) = I_n x = x$.

Ejemplo 1.4 *Sean* $G = \mathbb{Z}_n$ *el grupo de los enteros módulo* n *con la adición y* $X = \mathbb{C}$. *Consideremos las raíces* $n-$ *ésimas de la unidad* $w_k = \frac{e^{ki}}{n}$ *con* $0 \leq k \leq n-1$ *y la aplicación* $\Theta : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *dada por* $\Theta(k,z) = w_k z$, *la cual geométricamente rota a* z *sobre una circunferencia de radio* $|z|$ *un ángulo* $\frac{2k\pi}{n}$.

La aplicación Θ *define una acción de* $\mathbb{Z}_n$ *sobre* $\mathbb{C}$. *En efecto,* $\Theta(k_1, \Theta(k_2,z))$ *equivale a rotar* z *un ángulo* $\frac{2k_2\pi}{n}$ *y posteriormente rotar este último punto un ángulo* $\frac{2k_1\pi}{n}$ *proceso que se podría generar en una sola rotación de* z *a un ángulo* $\frac{2(k_1+k_2)\pi}{n}$ *con lo cual* $\Theta(k_1, \Theta(k_2,z)) = \Theta(k_1+k_2, z)$; *además la acción del módulo* $0 \in \mathbb{Z}_n$ *satisface* $\Theta(0,z) = w_0 z = z$. *El caso en que* $G = \mathbb{Z}_2$ *el cual genera una rotación de* z *un ángulo* π *es conocido como acción antípodal.*

Definición 1.4 *El espacio X junto con una acción Θ de G sobre X, es llamado un* ***G - espacio****.*

En adelante se notará $g(x)$ ó gx en vez de $\Theta(g,x)$, con lo cual las condiciones dadas en 1.3 se reescriben como:

i) $g(h(x)) = gh(x)$, para todo $g, h \in G$ y $x \in X$.

ii) $e(x) = x$, para todo $x \in X$.

Si $C \subseteq G$ y $A \subseteq X$, el conjunto $\{g(x) : g \in C, x \in A\}$ se notará $C(A)$ ó CA.

Definición 1.5 *Sea A un subconjunto de X. A se dice* ***invariante*** *si $G(A) = A$.*

Dado $g \in G$ se define la acción puntual de g sobre X mediante la función $\theta_g : X \to X$ dada por $x \mapsto \theta_g(x) = \Theta(g,x) = gx$, claramente θ_g satisface las condiciones $i)$ y $ii)$ y por lo tanto se obtienen las propiedades:

(1) $\theta_g\theta_h = \theta_{gh}$,

(2) $\theta_e = id_X$

(3) $(\theta_g)^{-1} = \theta_{g^{-1}}$,

(4) $\theta_g \in Homeo(X)$.

$\theta : G \to Homeo(X)$ dado por $g \mapsto \theta_g$ es un homeomorfismo (propiedad iv)), luego su núcleo es un subgrupo normal de G (Ver [6, pág 33]). Este conjunto también se llama el *núcleo de la acción* Θ y se nota $ker(\Theta)$.

Ejemplo 1.5 *Para la acción $\Theta(g,x) = gxg^{-1}$ descrita en el ejemplo 1.1 el núcleo de la acción esta dado por*

$$ker(\Theta) = \left\{g \in G : gxg^{-1} = x, \forall x \in G\right\} = \{g \in G : gx = xg, \forall x \in G\},$$

y por lo tanto el núcleo de la acción coincide con el centro del grupo. Notemos que si el grupo G es abeliano $ker(\Theta) = G$.

Ejemplo 1.6 *Consideremos la acción $\Theta(g, g'H) = (gg')H$ descrita en el ejemplo 1.2. Si $g \in G$ se tiene $gHg^{-1}(gH) = gH$ así el núcleo de la acción está dado por $\bigcap\limits_{g\in G} gHg^{-1}$.*

Definición 1.6 *Si $ker(\Theta) = \{e\}$ la acción Θ se dice* ***efectiva*** *; si $ker(\Theta)$ es un subgrupo discreto de G la acción Θ se dice* ***casi efectiva****.*

Ejemplo 1.7 *La acción descrita en el ejemplo 1.3 es efectiva ya que,*

$$ker(\Theta) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : Ax = x, \forall x \in \mathbb{R}^n\} = \{I_n\}.$$

Proposición 1.7 *Sean Θ una acción de G sobre X y $N = ker(\Theta)$. Existe una acción efectiva Θ/N canónicamente inducida de G/N en X.*

Demostración. Definamos $\Theta/N : (G/N) \times X \to X$ dada por $(gN, x) \mapsto gx$ y sea π la proyección de G en G/N. Del diagrama

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "\Theta"] \arrow[d, "\pi \times id"'] & X \\ G/N \times X \arrow[ur, "\Theta/N"'] & \end{tikzcd}$$

Tenemos que $\Theta/N(gN, x) = \Theta\left((\pi \times id)^{-1}(gN, x)\right)$ lo que implica que Θ/N está bien definida y $(\Theta/N)^{-1}(x) = (\pi \times id)(\Theta^{-1}(x))$. Si tomamos un abierto U en X, de la continuidad de la acción tenemos que $\Theta^{-1}(U)$ es un abierto en $G \times X$ y como π es una aplicación abierta tenemos $(\pi \times id)(\Theta^{-1}(U))$ es un abierto en $G/N \times X$, y por lo tanto $\Theta/N : (G/N)\times \to X$ es continua.

$\square$

Teorema 1.1 *Si $\Theta : G \times X \to X$ es una acción de un grupo compacto G sobre X, entonces Θ es una aplicación cerrada.*

Demostración. Sea $C \subset G \times X$ un cerrado y consideremos un punto x en la adherencia de $\Theta(C)$. Tomemos además una red $\{(g_i, x_i) : i \in I\}$ en C cuya imagen mediante Θ converge a x, por lo tanto

$$\{\Theta(g_i, x_i) : i \in I\} = \{g_i x_i : i \in I\},$$

es una red en X. Notemos también que las redes $\{g_i : i \in I\}$ y $\{x_i : i \in I\}$ están en G y X, respectivamente. Como por hipótesis G es compacto podemos asumir que $\{g_i\}$ converge en G y por lo tanto para cada g_i tenemos que la acción puntual de éste sobre x_i satisface $\Theta_{g_i}(x_i) = g_i x_i$, de donde

$$\left((\Theta_{g_i})^{-1} \circ \Theta_{g_i}\right)(x_i) = \left(\Theta_{g_i^{-1}} \circ \Theta_{g_i}\right)(x_i) = \Theta\left(g_i^{-1}, g_i x_i\right) = x_i,$$

y por lo tanto la red $\{x_i\}$ converge a $\Theta(g^{-1}, x) = g^{-1}x \in X$, hemos demostrado así que la red $\{(g_i, x_i)\}$ converge a $(g, g^{-1}x) \in C$. Usando el hecho que $\Theta(g, g^{-1}x) = x \in \Theta(C)$ podemos concluir que $\Theta(C)$ es cerrado.

$\square$

Como resultado inmediato del anterior teorema tenemos:

Corolario 1.1 *Si G es compacto y X es un G - espacio, entonces $G(A)$ es cerrado en X para cada $A \subset X$ cerrado y $G(A)$ es compacto si A es compacto.*

1.3. Funciones equivariantes

Definición 1.7 *Sean X e Y dos G - espacios. Una función continua $\varphi : X \to Y$ que conmuta con acciones de grupo*

$$\varphi(g(x)) = g(\varphi(x)), \quad \textit{para todo } g \in G \textit{ y } x \in X,$$

*se denomina una **función equivariante** .*

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "\Theta_1"] \arrow[d, "id\times\varphi"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ G \times Y \arrow[r, "\Theta_2"'] & Y \end{tikzcd}$$

Si la función equivariante $\varphi : X \to Y$ es además un homeomorfismo, éste se denomina una *equivalencia de G - espacios*; notemos que en este caso φ^{-1} también es una equivalencia. Dos G - espacios equivalentes son tratados como el mismo G - espacio; bajo el mismo criterio dos acciones son esencialmente la misma si éstas difieren sólo en un automorfismo de G.

Definición 1.8 *Dos G - espacios X e Y, se dirán **débilmente equivalentes** si existen un automorfismo continuo $\alpha : G \to G$ y un homeomorfismo $\varphi : X \to Y$ tales que:*

$$\varphi(g(x)) = \alpha(g)(\varphi(x)), \quad \textit{para todo } g \in G \textit{ y } x \in X.$$

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "\Theta_1"] \arrow[d, "\alpha\times\varphi"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ G \times Y \arrow[r, "\Theta_2"'] & Y \end{tikzcd}$$

Definición 1.9 *Sea $x \in X$ un elemento de un G - espacio. El conjunto*

$$G_x = \{g \in G : g(x) = x\},$$

*se denomina **estabilizador de** x.*

En otras palabras el estabilizador de x está constituido por los elementos de G que dejan fijo a x tras la acción de G sobre el espacio. Es importante notar que G_x es un subgrupo cerrado de G (ver [6, pág 35]), denominado también *subgrupo de isotropía.*

Ejemplo 1.8 *Consideremos nuevamente la acción de G sobre G del ejemplo 1.1 ($\Theta(g,x) = gxg^{-1}$), el estabilizador de $x \in G$*

$$G_x = \left\{g \in G : gxg^{-1} = x\right\} = \{g \in G : gx = xg\},$$

coincide con los conmutadores de x en G. Si G es un grupo topológico abeliano, entonces el estabilizador de x es igual al grupo G.

Ejemplo 1.9 *El estabilizador de $g'H \in G/H$ bajo la acción descrita en el ejemplo 1.2 está dado por $G_{g'H} = \{g \in G : g\,(g'H) = g'H\} = g'H\,(g')^{-1}$.*

Teorema 1.2 *Si X e Y son dos G - espacios y $\varphi : X \to Y$ es una función equivariante, entonces:*

i) Los estabilizadores de x y $g(x)$ son conjugados entre si. Esto es, $G_{g(x)} = gG_xg^{-1}$, para todo $g \in G$ y $x \in X$.

ii) El estabilizador de x es un subgrupo del estabilizador de $\varphi(x)$, $G_x \leq G_{\varphi(x)}$, para todo $x \in X$.

Demostración.

i) Sean $g \in G$ y $x \in X$. Notemos que $(gG_xg^{-1})\,(gx) = gG_xx = gx$ y por lo tanto $gG_xg^{-1} \subset G_{g(x)}$. Análogamente, ya que $g^{-1}G_{g(x)}gx = g^{-1}gx = x$ se tiene $g^{-1}G_{g(x)}g \subset G_x$ lo que implica $G_{g(x)} \subset gG_xg^{-1}$.

ii) Sean $x \in X$, $g \in G_x$ e $y = \varphi(x) \in Y$, debido a que $gy = g\varphi(x) = \varphi(gx) = \varphi(x)$ se tiene $g \in G_{\varphi(x)}$ y por lo tanto $G_x \leq G_{\varphi(x)}$.

□

Definición 1.10 *Una acción de G sobre X se dice **libre** si G_x es trivial para cada $x \in X$; la acción es **semilibre** si para cada $x \in X$, G_x es trivial ó es todo G.*

El término acción libre proviene del hecho que si $G_x = \{e\}$ para todo $x \in X$, para $g \neq e$ se tiene $g(x) \neq x$ con lo cual la acción es libre de puntos fijos.

Algunos autores como Palais (ver [12, pág 296]) usan la expresión *X es un G - fibrado principal en el sentido amplio* para indicar que la acción de G sobre X es libre.

Observación 1.2 *Si una acción es libre entonces es efectiva. No obstante, la recíproca es falsa. Por ejemplo consideremos el grupo* $G = \{[-1],[1]\}$ *con la operación producto y el espacio* $X = \mathbb{R}$ *con la acción dada por el producto usual* $\Theta(g,x) = gx$*. La acción es efectiva ya que* $ker(\Theta) = \{[1]\}$ *pero no es libre ya que para* $x = 0$ *el estabilizador coincide con* G*.*

1.4. Órbitas y espacio cociente

Definición 1.11 *Sean* X *un* G*- espacio y* $x \in X$*. El subespacio*

$$G(x) = \{g(x) \in X : g \in G\},$$

*es llamado **órbita de** x (bajo G) , o G **- órbita de** x.*

Ejemplo 1.10 *Para la acción de* G *sobre* G *dada por* $\Theta(g,x) = gxg^{-1}$ *estudiada en los ejemplos 1.1 y 1.8 la* G *- órbita de* x *estará dada por* $G(x) = \{gxg^{-1} : g \in G\}$ *coincidiendo así con la clase de conjugación de* x *en* G*.*

Sean $x, y \in X$. Si las órbitas de x e y coinciden en algún punto ($g(x) = h(y)$ para algunos $g, h \in G$) entonces son iguales. En efecto, para $g' \in G$ se tiene $g'(x) \in G(x)$ y por lo tanto $g'(x) = g'g^{-1}(g(x)) = g'g^{-1}(h(y)) = (g'g^{-1}h)(y) \in G(y)$ con lo cual $G(x) \subset G(y)$, recíprocamente $G(y) \subset G(x)$. Así, las órbitas $G(x)$ y $G(y)$ de dos elementos $x, y \in X$ son iguales o son disyuntas.

Se define la relación de equivalencia $x \sim y$ si $y \in G(x)$, es decir, si x e y pertenecen a la misma órbita; esta relación de equivalencia induce una partición $X/G = X/\sim$ cuyos elementos son las G- órbitas, la clase de equivalencia de x es decir su G - órbita se notará en adelante $[x]$. La aplicación $\pi : X \to X/G$ que envía x en su clase de equivalencia G - órbita es llamada *aplicación cociente.*

Definición 1.12 *El espacio* X/G *dotado con la topología cociente inducida por* π *(*$U \subset X/G$ *es abierto si, y sólo si,* $\pi^{-1}(U)$ *es abierto en* X*), se denomina **espacio órbita** de* X *o **espacio cociente**.*

Ejemplo 1.11 *Consideremos el grupo* $G = \mathbb{Z}$*, el espacio* $X = \mathbb{R}$ *y la acción* $\Theta : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por traslaciones* $\Theta(g,x) = x + g$*. Cada órbita se encuentra dada por* $\mathbb{Z}(x) = \{x + g : g \in \mathbb{Z}\}$ *y por lo tanto* $y \in \mathbb{Z}(x)$ *si, y sólo si,* $y = x + g$ *para algún* $g \in \mathbb{Z}$*. Por lo tanto el espacio de órbitas* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *está definido por la relación de equivalencia* $x \sim y$ *si y sólo si* $y - x \in \mathbb{Z}$*. El espacio* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *puede ser identificado con el círculo unitario* S^1 *mediante la aplicación*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\longrightarrow S^1 \\ [x] &\longmapsto e^{2\pi x i}. \end{aligned}$$

Definición 1.13 *Sea $A \subseteq X$. El conjunto,*

$$\pi^{-1}\pi(A) = \{g(a) : \ g \in G, \ a \in A\} = G(A),$$

se denomina ***saturación*** *de A.*

Notemos que el conjunto $G(A)$ coincide con la unión de las órbitas de los elementos de A (es decir, $G(A) = \cup_{x \in A} G(x)$).

De modo análogo, si H es un subgrupo de G y $A \subseteq X$, se define la *H- saturación de A* como el conjunto

$$H(A) = \{h(a) : \ h \in H, \ a \in A\}.$$

Si $H(A) = A$ el conjunto A se dice *H-invariante*.

Notemos que la función $\pi : X \to X/G$ es abierta. En efecto, si U es abierto en X, entonces $G(U) = \cup_{x \in U} G(x) = \cup_{g \in G} g(U) = \cup_{g \in G} \Theta_g(U)$, con lo cual $G(U)$ es la unión de abiertos en X y por lo tanto es abierto.

El siguiente teorema exhibe algunos resultados importantes que simplificarán la caracterización de acciones propias para el caso de acciones de grupos compactos (ver [6, pág 38]).

Teorema 1.3 *Si X es un G- espacio con G compacto, entonces:*

i) X/G es de Hausdorff.

ii) $\pi : X \to X/G$ es cerrada.

iii) X es compacto si, y sólo si, X/G es compacto.

iv) X es localmente compacto si, y sólo si, X/G es localmente compacto.

Observación 1.3 *Si G es compacto, como consecuencia de iii), la función canónica $\alpha : G/G_x \to G(x) \subset X/G$ dado por $gG_x \mapsto g(x)$, es un homeomorfismo. En efecto, α es uno a uno y de la compacidad de G se obtiene G/G_x es compacto. Además, $G(x)$ es de Hausdorff y por lo tanto α es un homeomorfismo (ver [6, pág 38]).*

Definición 1.14 *Un acción G sobre X se dice* ***transitiva*** *si existe una única órbita, X. Un G- espacio es* ***transitivo*** *si posee una única órbita.*

Ejemplo 1.12 *La acción $\Theta(g, g'H) = gg'H$ de G sobre G/H posee una única órbita dada por $G(g'H) = \{(gg')\,H : g \in G\}$ y por lo tanto la acción es transitiva.*

Definición 1.15 *Sean G un grupo topológico y X un G- espacio. Una* ***sección local*** *de la proyección canónica $\pi : X \to X/G$ es una función continua $\sigma : U \subset X/G \to X$ definida en un abierto $U \subset X$ tal que $\pi\sigma$ es la identidad en U, esto es $\pi(\sigma(x)) = x$ para todo $x \in U \subset X/G$.*

1.5. Producto torcido

Dado un G - espacio muchas veces nos cuestionamos el método para generar un nuevo G - espacio a partir de éste y la posibilidad de establecer homeomorfismos entre subespacios del espacio original y el nuevo G - espacio. Para dar respuesta a estos interrogantes estudiaremos una operación entre G - espacios conocida como el *producto torcido*.

Para tal fin, sean H un subgrupo de cerrado de un grupo topológico compacto G y X un espacio topológico sobre el cual actúa H, la aplicación

$$\begin{aligned} \Theta : H \times (G \times X) &\to G \times X \\ (h, (g, x)) &\mapsto \left(gh^{-1}, hx\right), \end{aligned}$$

define una acción de H sobre $G \times X$ ya que

i) Si $k, h \in H$ y $(g, x) \in G \times X$ se cumple

$$\begin{aligned} \Theta (k, \Theta (h, (g, x))) &= \Theta \left(k, \left(gh^{-1}, hx\right)\right) \\ &= \left(\left(gh^{-1}\right) k^{-1}, k (hx)\right) \\ &= \left(g (kh)^{-1}, (kh) x\right) \\ &= \Theta (kh, (g, x)) . \end{aligned}$$

ii) La acción del módulo e de H (que es el mismo de G) satisface $\Theta (e, (g, x)) = (ge, ex) = (g, x)$ para todo $(g, x) \in G \times X$.

El espacio de órbitas de esta acción se notará $G \times_H X$ y se denomina *producto torcido de $G \times X$ por H* ó simplemente *producto torcido*. La H- órbita de $(g, x) \in G \times X$ se encuentra dada por

$$H(g, x) = [g, x] = \left\{(gh^{-1}, hx) : h \in H\right\}.$$

Podemos definir una acción de G sobre $G \times_H X$ mediante:

$$\begin{aligned} \Theta' : G \times (G \times_H X) &\to G \times_H X \\ (g', [g, x]) &\mapsto [g'g, x] . \end{aligned}$$

Bajo la acción de Θ' el espacio $G \times_H X$ es un G - espacio con espacio cociente $(G \times_H X)/G$.

Consideremos $i_e = X \to G \times_H X$ dada por $i_e(x) = [e, x]$; i_e cumple las siguientes propiedades:

i) Es H - equivariante ya que $i_e(hx) = [e, hx] = [h, x] = [he, x] = h\,[e, x] = hi_e(x)$.

ii) Es inyectiva, en efecto si $i_e(x) = i_e(y)$ entonces $[e, x] = [e, y]$ lo que implica que las clases de equivalencia de (e, x) y (e, y) coinciden y por lo tanto existe $h \in H$ tal que $(eh^{-1}, hx) = (h^{-1}, hx) = (e, y)$ de donde $h^{-1} = e$ y $x = y$.

iii) Es cerrada, ya que es la composición de las funciones cerradas

$$\begin{array}{ccccc} X & \to & G \times X & \to & G \times_H X \\ x & \mapsto & (e, x) & \mapsto & [e, x] \end{array}$$

iv) Por definición es continua, y de las anteriores propiedades podemos concluir que es un embebimiento (i.e. un homeomorfismo sobre su imagen).

Proposición 1.8 *Supongamos que X es un G - espacio y que $f : X \to G/H$ es equivariante (i.e. $f(gx) = gf(x)$ para todo $g \in G$ y $x \in X$), entonces X es invariante por H. Además, si $A = f^{-1}(eH)$, la función $\varphi : G \times_H A \to X$ dada por $[g, a] \mapsto ga$ es un homeomorfismo equivariante.*

Demostración. Consideremos $\psi : G \times A \to X$ dada por $\psi(g, a) = ga$, la aplicación cociente $\pi : G \times A \to G \times_H A$ y el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \times A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"'] & X \\ G \times_H A \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Tenemos que $\varphi\,[g, a] = \psi\,(\pi^{-1}\,[g, a])$, por lo tanto φ está bien definida y es continua. Es equivariante ya que $\varphi\,(g'\,[g, a]) = \varphi\,[g'g, a] = g'ga = g'\,(\varphi\,[g, a])$. Además,

i) φ es uno a uno. Si $\varphi\,[g, a] = \varphi\,[g', a']$, entonces $ga = g'a$ y por lo tanto

$$gH = g\,(f(a)) = f(ga) = f(g'a') = g'\,(f(a')) = g'H,$$

lo que implica $h = g^{-1}g' \in H$ y $ga = g'a' = (gh)a'$. Así, $ga = gha'$ y $a = ha'$ y por consiguiente $[g', a'] = [g'h^{-1}, ha'] = [ghh^{-1}, a] = [g, a]$.

ii) φ es sobre. Si $x \in X$ con $f(x) = gH$, como f es equivariante tenemos

$$f\left(g^{-1}x\right) = g^{-1}f(x) = g^{-1}\,(gH) = eH$$

lo que implica $g^{-1}x \in A$ y por lo tanto $x = g\,(g^{-1}x) = \varphi\,(g, g^{-1}x)$.

iii) φ es cerrada, como consecuencia del teorema 1.1.

Hemos mostrado así que φ es un homeomorfismo equivariante.

$\square$

Proposición 1.9 *El embebimiento i_e induce un homeomorfismo $\Psi : X/H \to (G \times_H X)/G$ del H - espacio de órbitas X/H en el G - espacio de órbitas $(G \times_H X)/G$.*

Demostración. Sea $\Psi : X/H \to (G \times_H X)/G$ dada por $H(x) \mapsto G[e,x]$. Consideremos el embebimiento $i_e : X \to G \times_H X$ (el cual anteriormente mostramos que es H - invariante) y las aplicaciones canónicas de $\pi_1 : X \to X/H$ y $\pi_2 : G \times_H X \to (G \times_H X)/G$ para construir el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_e"] \arrow[d, "\pi_1"'] & G \times_H X \arrow[d, "\pi_2"] \\ X/H \arrow[r, "\Psi"] & (G \times_H X)/G \end{tikzcd}$$

Así, $\Psi(H(x)) = \left(\pi_2 \circ i_e \circ \pi_1^{-1}\right)(H(x))$ y por lo tanto Ψ está bien definida. Ya que $\Psi = \left(\pi_2 \circ i_e \circ \pi_1^{-1}\right)$ es compuesta de continuas es también continua.

Notemos también que la proyección $p_2 : G \times X \to X$, $(g,x) \mapsto x$ es H - equivariante ya que

$$p_2(h(g,x)) = p_2\left(gh^{-1}, hx\right) = hx = hp_2(g,x),$$

además, induce la aplicación continua $\Psi_2 : G \times_H X \to X$ dada por $[g,x] \mapsto H(x)$; con lo cual el diagrama

$$\begin{tikzcd} G \times_H X \arrow[r, "\Psi_2"] \arrow[d, "\pi_2"'] & X/H \\ (G \times_H X)/G \arrow[ur, "\Psi^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo y por lo tanto Ψ^{-1} es continua.

$\square$

Para más detalles sobre el producto torcido y su aplicaciones en el estudio de las acciones de grupo ver [6, Capítulo II, secciones 3 y 4].

2. Acciones propias

En este capítulo se definen las acciones propias y son estudiadas las principales categorías de acción propia (Cartan, Bourbaki - propias, Palais - Cartan y Palais - propias), además se establecen las condiciones necesarias y suficientes para obtener una equivalencia entre éstas.

2.1. Aplicaciones propias y perfectas

Definición 2.1 *Una aplicación $f : X \to Y$ entre espacios topológicos se dice* ***propia*** *si para cada compacto $K \subset Y$, $f^{-1}(K)$ es un compacto de X.*

Definición 2.2 *Una aplicación continua $f : X \to Y$ entre espacios topológicos se dice* ***perfecta*** *si:*

i) Para todo espacio topológico Z, la aplicación $f \times Id_Z : X \times Z \to Y \times Z$ es cerrada, ó equivalentemente,

ii) es cerrada y además la fibra $f^{-1}(\{y\})$ es compacta para todo $y \in Y$.

Entre las propiedades de las aplicaciones perfectas es importante mencionar:

i) La composición de aplicaciones perfectas es perfecta.

ii) El producto de aplicaciones perfectas es perfecto.

iii) Para todo cerrado $C \subset Y$, la restricción $f' : f^{-1}(C) \to C$ de una aplicación perfecta f, es perfecta.

Además, las aplicaciones perfectas preservan algunas propiedades topológicas. Por ejemplo, si $f : X \to Y$ es una aplicación perfecta y el espacio Y es compacto entonces X también lo es (ocurre lo mismo si se cambia compacto por paracompacto); de igual modo si X es de Hausdorff entonces Y también resulta de Hausdorff (puede sustituirse de Hausdorff por regular, localmente compacto o segundo numerable obteniendo los mismos resultados). Para más detalles sobre aplicaciones perfectas y la demostración de estas propiedades ver [7, cap 3- 3.7]).

Proposición 2.1 *Sea $f : X \to Y$ una aplicación cerrada.*

i) Si $y \in Y$ y U es un abierto en X tal que $f^{-1}(y) \subset U$, entonces existe un abierto $W \subset Y$ que contiene a y que satisface $f^{-1}(W) \subset U$.

ii) Si V es algún subconjunto de Y y U un abierto en X tales que $f^{-1}(V) \subset U$, entonces existe un abierto $W \subset Y$ que contiene a V que satisface $f^{-1}(W) \subset U$.

Demostración.

i) Sean $y \in Y$ y U un abierto en X tal que $f^{-1}(y) \subset U$, así $y \notin f(X - U)$. Como por hipótesis f es cerrada se tiene que $f(X - U)$ es un cerrado en Y. Al ser y un punto interior de $f(U)$ existe un abierto $W \subset Y$ que contiene a y, W es además disyunto de $f(X - U)$ y por lo tanto $f^{-1}(W) \subset U$.

ii) Sea V un subconjunto de Y; por i) para cada $y \in V$ existe W_y tal que $f^{-1}(W_y) \subset U$, y por lo tanto la unión $W = \bigcup_{y \in V} W_y$ es un abierto que contiene a V que satisface $f^{-1}(W) \subset U$.

□

Algunos autores como en Ryszard Engelking en su texto de topología general [7, cap 3, pág 182] añaden la condición de ser de Hausdorff al espacio dominio X en la definición de aplicación perfecta. Aunque esto no es necesario, es una definición comúnmente aceptada en especial cuando se desarrollan acciones propias sobre variedades diferenciables (las cuales son espacios de Hausdorff localmente compactos). Una vez realizada esta distinción mostraremos la equivalencia entre las definiciones 2.1 y 2.2.

Proposición 2.2 *Toda aplicación perfecta es propia.*

Demostración. Sean $f : X \to Y$ una aplicación perfecta, C un subconjunto compacto de Y, y consideremos $\{U_i\}$ un cubrimiento por abiertos de $f^{-1}(C)$. Dado $y \in C$, el conjunto $f^{-1}(y)$ puede ser cubierto por una subcolección finita de $\{U_i\}$. De la hipótesis f es cerrada y por lo tanto existe una vecindad W_y de y tal que $f^{-1}(W_y)$ es cubierto por esos mismos elementos; usando la proposición anterior podemos cubrir C por una cantidad finita de tales W_y y por lo tanto sus imágenes inversas cubren a $f^{-1}(C)$.

□

Definición 2.3 *Un espacio X se dice que está* ***compactamente generado*** *si se cumple la condición: un conjunto A es abierto en X si $A \cap C$ es abierto en C, para cada subespacio compacto $C \subset X$.*

Esta condición es equivalente a decir que un subconjunto D es cerrado en X si $D \cap C$ es cerrado en C, para cada subespacio compacto $C \subset X$. Algunos ejemplos de espacios compactamente generados son los espacios localmente compactos y los espacios que satisfacen el primer axioma de enumerabilidad (para la demostración de este hecho ver [10, pág 323]).

Lema 2.1 *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua. Si Y es un espacio de Hausdorff compactamente generado y f es propia, entonces f es una aplicación cerrada.*

Demostración. Sea C un subconjunto cerrado en X. Si f es propia, para cada compacto $K \subset Y$, $f^{-1}(K)$ es compacto en X con lo cual $f^{-1}(K) \cap C$ también es compacto. De la continuidad de f se sigue que $f\left(f^{-1}(K) \cap C\right) = f(C) \cap K$ es compacto en Y y por lo tanto $f(C)$ es cerrado.

□

Teorema 2.1 *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua entre espacios de Hausdorff localmente compactos. Si f es propia, entonces es una aplicación cerrada.*

Demostración. Sea $C \subset X$ un conjunto cerrado, demostraremos que $f(C)$ contiene todos sus puntos adherentes. En efecto, si $y \in Y$ es un punto adherente de $f(C)$ y U una vecindad de y con clausura compacta, entonces $y \in \bar{U}$, y por lo tanto y es un punto adherente de $f(C) \cap \bar{U}$. Si f es propia, el conjunto $f^{-1}\left(\bar{U}\right)$ es compacto y por consiguiente $C \cap f^{-1}\left(\bar{U}\right)$ es compacto. Usando la continuidad de f tenemos que $f\left(C \cap f^{-1}\left(\bar{U}\right)\right) = \bar{U} \cap f(C)$ es compacto y cerrado en Y, así $y \in \bar{U} \cap f(C) \subset f(C)$.

□

Teorema 2.2 *Si $f : X \to Y$ es una aplicación continua y propia, y Y es un espacio de Hausdorff compactamente generado, entonces f es perfecta.*

Demostración. Del lema 2.1 tenemos que f es cerrada y al considerar el compacto $\{y\} \subset Y$ obtenemos que $f^{-1}(y)$ es compacto en X.

□

Como consecuencia del anterior teorema tenemos el corolario:

Corolario 2.1 *Sea $f : X \to Y$ una aplicación propia. Entonces, f es perfecta si, y sólo si, Y es de Hausdorff localmente compacto.*

2.2. Acciones propias y acciones de Cartan

Una vez estudiadas las anteriores definiciones y resultados podemos establecer cuando la acción de un grupo sobre un espacio es propia.

Dado un G - espacio X, consideremos la acción continua $\Theta : G \times X \to X$ y la aplicación $\Phi : G \times X \to X \times X$ dada por $\Phi(g, x) = (gx, x)$ asociada a ésta. El conjunto imagen de Φ se encuentra dado por $P_\pi = \{(x, y) \in X \times X : x = gy, \text{ para algún } g \in G\}$. Notemos que si $x = gy$, entonces x e y están en la misma órbita y por lo tanto el conjunto imagen de Φ puede ser reescrito como $P_\pi = \{(x, y) \in X \times X : [x] = [y]\}$.

Con la aplicación Φ dada definiremos acción propia y acción de Cartan.

Definición 2.4 *Sean G un grupo topológico y X un espacio topológico. La acción $\Theta : G \times X \to X$ se dice **propia** si la aplicación $\Phi : G \times X \to X \times X$ es una aplicación perfecta, es decir, cerrada con fibras compactas. Además, se dirá que es **de Cartan** cuando la restricción de Φ sobre su imagen es perfecta.*

Cuando la acción de un grupo G sobre un espacio topológico X es propia, decimos que X es un G - *espacio propio* ó que G *actúa propiamente* sobre X.

De la definición es inmediato que toda acción propia es de Cartan, la recíproca no se cumple. En los siguientes resultados intentaremos establecer las condiciones necesarias para que una acción de Cartan sea propia.

Proposición 2.3 *Sea X un G - espacio. X/G es de Hausdorff si, y sólo si, P_π es cerrado en $X \times X$.*

Demostración. Tomemos $\pi \times \pi : X \times X \to (X/G) \times (X/G)$. De la continuidad de la aplicación cociente se sigue la continuidad de $\pi \times \pi$ con la topología del producto. Si X/G es de Hausdorff su diagonal $\Delta_{X/G}$ es cerrada (ver criterio de la diagonal [10, pág 115]) y por lo tanto su preimagen $(\pi \times \pi)^{-1}\left(\Delta_{X/G}\right) = P_\pi$ es cerrada en $X \times X$. Recíprocamente, si P_π es cerrado en $X \times X$ usando el hecho que π es abierta tenemos que $(\pi \times \pi)\left((X \times X) - P_\pi\right) = (X/G) \times (X/G) - \Delta_{X/G}$ es un abierto en $(X/G) \times (X/G)$ lo que implica que $\Delta_{X/G}$ es un cerrado; empleando nuevamente el criterio de la diagonal podemos concluir que X/G es de Hausdorff.

□

Como consecuencia inmediata se tienen los siguientes resultados:

Corolario 2.2 *Si X es un G - espacio propio, entonces X/G es de Hausdorff.*

Corolario 2.3 *Sea X un G - espacio de Cartan. X es un G - espacio propio si, y sólo si, X/G es de Hausdorff.*

En el caso de una acción de Cartan obtenida mediante la acción de un grupo G compacto la parte i) del teorema 1.3 nos permite concluir que X/G es de Hausdorff y de acuerdo al anterior corolario la acción es propia.

La tarea de determinar si una acción es propia o de Cartan es aún complicada de realizar. Por esta razón intentaremos ahora dar algunas caracterizaciones alternativas que facilitarán esta tarea.

Definición 2.5 *Sean X un G - espacio y $U, V \subset X$. El conjunto*

$$\langle U, V\rangle = \{g \in G : gU \cap V \neq \emptyset\}$$

*se denomina **transporte de** U **hacia** V.*

Si $U = V$ el conjunto $\langle U, U\rangle$ se acostumbra notar G_U.

Proposición 2.4 *Sean G un grupo topológico localmente compacto y X un G - espacio. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) X es un G - espacio de Cartan.

ii) Para cada $x \in X$ existe una vecindad U_x tal que G_{U_x} tiene clausura compacta en G.

iii) Para cada $x \in X$ existe una vecindad U_x tal que cada punto y en la órbita de x, $y \in G(x)$, tiene una vecindad V_y para la cual $\langle U_x, V_y\rangle$ tiene clausura compacta en G.

Demostración. Para demostrar la equivalencia entre estas afirmaciones emplearemos las implicaciones $i) \to ii) \to iii) \to i)$:

Para $i) \to ii)$, sea X un G - espacio de Haussdorff que es además de Cartan bajo la acción de un grupo topológico G localmente compacto. Consideremos ∞ un punto no perteneciente a G, y sea $G^* = G \cup \{\infty\}$ la compactación de Alexandroff de G por un punto. Ya que X es de Hausdorff y la acción del grupo sobre el espacio es continua su gráfica $\Gamma' = \{(g, x, gx) : g \in G, x \in X\}$ es un conjunto cerrado de $G \times X \times X$; notemos que mediante un cambio de coordenadas ésta es homeomorfa al conjunto $\Gamma = \{(g, gx, x) : g \in G, x \in X\}$ el cual también es cerrado en $G \times X \times X$ y dada su forma es un cerrado de $G \times P_\pi$. De modo análogo, si consideramos la gráfica $D = \{(g, g) : g \in G\}$ de la inclusión de G en G^*, ésta es cerrada en $G^* \times G$.

Como por hipótesis la acción del grupo en el espacio es de Cartan la restricción de Φ sobre su imagen es perfecta, notaremos esta restricción Φ' con lo cual la aplicación

$$Id_{G^*} \times \Phi' : G^* \times G \times X \to G^* \times P_\pi,$$

dada por $(h, g, x) \mapsto (h, \Phi'(g, x)) = (h, gx, x)$ es cerrada (ver definición 2.2) y por lo tanto el conjunto

$$\left(Id_{G^*} \times \Phi'\right)(D \times X) = \{(g, gx, x) : g \in G, x \in X\} = \Gamma,$$

es un cerrado de $G^* \times P_\pi$.

Por otra parte, ya que para todo $x \in X$ se tiene $(\infty, x, x) \notin \Gamma$; existen vecindades U_x de x y V de ∞ tales que $(V \times U_x \times U_x) \cap \Gamma = \emptyset$. Dada la construcción de G^* podemos elegir $V = G^* - K$, donde K es un compacto de G. Ya que $(\{\infty\} \times U_x \times U_x) \cap \Gamma = \emptyset$ tenemos que para todo $g \in G - K$, $gU_x \times U_x = \emptyset$, y por consiguiente

$$G_{U_x} = \{g \in G : gU_x \cap U_x \neq \emptyset\} \subset K.$$

De donde $\overline{G_{U_x}} \subset K$ lo que implica que G_{U_x} tiene clausura compacta en G.

Para la implicación $ii) \to iii)$ consideremos $(x, y) \in P_\pi$. Así, x e y están en la misma órbita y por lo tanto $x = hy$ para algún $h \in G$, equivalentemente $h^{-1}x = y$. Por hipótesis, para cada $x \in X$ existe una vecindad U_x tal que G_{U_x} tiene clausura compacta. Escojamos $V_y = h^{-1}U_x$ y por lo tanto el conjunto

$$gU_x \cap V_y = gU_x \cap h^{-1}U_x = h^{-1}\left(hgU_x \cap U_x\right),$$

es no vacío si $hgU_x \cap U_x \neq \emptyset$ lo que equivale a $hg \in G_{U_x} \subset \overline{G_{U_x}}$. Hemos demostrado así que $g \in \langle U_x, V_y \rangle$ si $g \in h^{-1}\overline{G_{U_x}}$, esto implica $\overline{\langle U_x, V_y \rangle} \subset h^{-1}\overline{G_{U_x}}$. De la hipótesis $\overline{G_{U_x}}$ es compacto y por lo tanto $\langle U_x, V_y \rangle$ tiene clausura compacta.

Por último, para la implicación $iii) \to i)$ consideremos la red $\{(g_i, x_i) : i \in I\}$ en $G \times X$ para la cual la acción $\Phi'(g_i, x_i) = (g_i x_i, x_i)$ converge en P_π. Si existe un punto de acumulación de esta red en $G \times X$ que pertenece al conjunto $(\Phi')^{-1}(x, y)$, por hipótesis existe una vecindad $U_x \times V_y$ de (x, y) tal que $\langle U_x, V_y \rangle$ tiene clausura compacta en G; para esta vecindad existe un i_0 tal que $(g_i x_i, x_i) \in U_x \times V_y$ para todo $i \geq i_0$ y por lo tanto $g_i x_i \in U_x$ y $x_i \in V_y$, lo que implica

$$x_i \in (g_i)^{-1} U_x \cap V_y,$$

así para todo $i \geq i_0$ se tiene

$$g_i \in \langle U_x, V_y \rangle^{-1} \subset \overline{\langle U_x, V_y \rangle}^{-1},$$

luego existe una red $\{g_{i,j}\}$ de $\{g_i : i \geq i_0\}$ la cual converge a un elemento $g \in \overline{\langle U_x, V_y \rangle}^{-1}$, debido a que x_i converge a y tenemos que $g_i x_i$ converge a gy, y como por hipótesis ésta también converge a x podemos concluir $gy = x$, lo anterior implica que (g, y) es un punto de acumulación de la red $\{(g_i, x_i) : i \in I\}$ que pertenece a $(\Phi')^{-1}(x, y) = G \times \{y\}$.

□

La siguiente proposición busca extender estos conceptos a G - espacios propios.

Proposición 2.5 *Sean G un grupo topológico localmente compacto y X un G - espacio, entonces son equivalentes las afirmaciones:*

i) X es un G - espacio propio.

ii) Para cada par de puntos $x, y \in X$ existen vecindades U_x y V_y tales que $\langle U_x, V_y \rangle$ es relativamente compacto en G.

Demostración. Para la implicación $i) \to ii)$, sea G un grupo topológico localmente compacto actuando propiamente sobre un espacio de Hausdorff X, por lo tanto X es también un G - espacio de Cartan. Para $x, y \in X$ consideremos los casos:

Caso 1: Si x, y están en la misma órbita, el resultado es inmediato y se sigue de la parte $iii)$ de la proposición 2.4.

Caso 2: Si x, y no están en la misma órbita (esto es, $y \notin [x]$) por los corolarios 2.2 y 2.3, X/G es un espacio de Hausdorff y por lo tanto existen vecindades disyuntas V, W de $[x]$ y $[y]$ respectivamente, tales que $U_x = \pi^{-1}(V)$ y $V_y = \pi^{-1}(W)$ son vecindades disyuntas y por lo tanto $\langle U_x, V_y \rangle = \{g \in G : gU_x \cap V_y \neq \emptyset\} = \emptyset$, el cual desde luego es relativamente compacto.

Para la implicación $ii) \to i)$, de la proposición 2.4 se sigue que la acción es de Cartan. Probaremos que P_π es cerrado en $X \times X$, si $(x, y) \in \overline{P_\pi}$ existe una red $\{(g_i, x_i) : i \in I\}$ en P_π que converge a $(x, y) \in X \times X$, sean U_x y V_y las vecindades de x e y tales que $\overline{\langle U_x, V_y \rangle}$ es un compacto de G, existe un índice i_0 tal que para todo $i \geq i_0$ se tiene $g_i y_i \in U_x$ con $y_i \in V_y$; puesto que $y_i \in (g_i)^{-1} U_x \cap V_y$ entonces $(g_i)^{-1} \in \overline{\langle U_x, V_y \rangle}^{-1}$, por lo tanto existe una subred g_{i_j} que converge a algún punto $g \in \overline{\langle U_x, V_y \rangle}^{-1}$, así (g_i, y_i) converge a (g, y), al aplicar la acción sobre la red se tiene que esta converge a gy y también a x con lo cual $(x, y) = (gy, y) \in P_\pi$. Ésto nos lleva a conluir que P_π es cerrado en $X \times X$, aplicando la proposición 2.3 y el corolario 2.3 podemos concluir que la acción es propia.

□

Otra categoría ampliamente aceptada de acciones es la Bourbaki - propia [5, definición 1.1, pág 430], ésta es una acción de Cartan cuyo espacio cociente X/G es de Haussdorff. De acuerdo al corolario 2.3 esto garantiza que la acción sea propia.

2.3. Acciones de Cartan y propias en el sentido de Palais

Las definiciones de G - espacio de Cartan y G - espacio propio en el sentido de Palais fueron introducidas en 1961 por Richard Palais y requieren además que el espacio X sea Tychonoff (i.e. completamente regular y de Hausdorff). Para facilitar algunas demostraciones e interpretaciones geométricas asociadas a las acciones propias, Palais introduce también los siguientes conceptos (c.f. [11] y [12]):

Definición 2.6 *Sean U, V subconjuntos de un G - espacio X. U se dice* ***delgado con respecto a*** *V si el transporte de U hacia V, $\langle U, V\rangle = \{g \in G : gU \cap V \neq \emptyset\}$, tiene clausura compacta en G. Si U es delgado con respecto a sí mismo simplemente se dice* ***delgado****.*

Como $gU \cap V = g\left(U \cap g^{-1}V\right) = g\left(g^{-1}V \cap U\right)$ tenemos que si U es delgado con respecto a V, entonces V es delgado con respecto a U y por lo tanto decimos que U y V son *respectivamente delgados*. Ya que $gg_1U \cap g_2V = g_2\left(g_2^{-1}gg_1U \cap V\right)$ tenemos que si U y V son respectivamente delgados, entonces también lo son sus traslaciones a izquierda g_1U y g_2V, en particular si U es delgado entonces todo par de traslaciones de U son respectivamente delgadas.

Si U y V son respectivamente delgados y $U' \subset U$, $V' \subset V$ entonces U' y V' son a su vez respectivamente delgados, así un subconjunto de un conjunto delgado es también delgado; la unión finita de subconjuntos delgados con respecto a V es en sí misma delgada con respecto a V, ya que:

$$\begin{aligned}\left\langle \bigcup_i U_i, V\right\rangle &= \left\{g \in G : g\bigcup_i U_i \cap V \neq \emptyset\right\}\\ &= \left\{g \in G : \bigcup_i \left(gU_i \cap V\right) \neq \emptyset\right\}\\ &= \bigcup_i \langle U_i, V\rangle .\end{aligned}$$

Usando la definición de respectivamente delgados dada anteriormente y la proposición 2.5 podemos reescribir el corolario 2.2 como:

Corolario 2.4 *Si un G - espacio X tiene la propiedad que todo par de puntos $x, y \in X$ tienen vecindades respectivamente delgadas, entonces X/G es de Hausdorff.*

Definición 2.7 *Un G - espacio X es un* ***espacio de Cartan en el sentido de Palais (o Palais - Cartan)*** *si todo punto de X tiene una vecindad delgada .*

Notemos que en el caso en que G sea compacto, todo G - espacio es de Cartan en el sentido de Palais.

Sea X un G - fibrado principal en el sentido amplio (ver definición 1.10), y consideremos el subconjunto $P_\pi = \{(x_1, x_2) \in X \times X : [x_1] = [x_2]\} \subset X \times X$ formado por las parejas (x_1, x_2) para las cuales x_1 y x_2 están en la misma órbita, del hecho que X es principal se sigue que para todo $(x_1, x_2) \in P_\pi$ existe un único elemento $f(x_1, x_2) \in G$ talque $x_2 = f(x_1, x_2)x_1$. En efecto, si existiera otro elemento $\hat{f}(x_1, x_2) \in G$ para el cual $x_2 = \hat{f}(x_1, x_2)x_1$ tendríamos $f(x_1, x_2)x_1 = \hat{f}(x_1, x_2)x_1$ y por lo tanto $\hat{f}^{-1}(x_1, x_2)f(x_1, x_2)x_1 = x_1$. Como X es principal tenemos $\hat{f}^{-1}(x_1, x_2)f(x_1, x_2) = e$ y por lo tanto $\hat{f}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$. Henri Cartan restingió el término fibrado principal a los fibrados principales en el sentido amplio para los cuales la aplicación $f : P_\pi \to G$ es continua, para evitar confusiones en adelante los llamaremos *fibrados principales de Cartan.*

Teorema 2.3 *Un G - fibrado principal X es un fibrado principal de Cartan si, y sólo si, es un G - espacio de Cartan en el sentido de Palais.*

Demostración. Supongamos que X es un fibrado principal de Cartan y sea $x \in X$ por lo tanto $f(x, x) = e$. Si $K \subset G$ es una vecindad compacta de e, entonces existe una vecindad U de x en X tal que $f((U \times U) \cap P_\pi) \subseteq K$, así $G_U = \langle U, U \rangle \subseteq K$ y por lo tanto U es delgado, dada la escogencia arbitraria de $x \in X$ se sigue que X es un G - espacio de Cartan. Recíprocamente, supongamos que X es un G - espacio de Cartan y sea $(x_\alpha, g_\alpha x_\alpha) \to (x, gx)$, debemos probar que $g_\alpha \to g$. Para tal fin, sea U una vecindad delgada de X y supongamos que $x_\alpha \in U$ y $g_\alpha x_\alpha \in gU$ de donde $g_\alpha x_\alpha \in g_\alpha U$ y por lo tanto $g_\alpha U \cap gU \neq \emptyset$ así $g_\alpha \in \langle U, gU \rangle$, observe que éste último conjunto tiene clausura compacta ya que U es delgada. Supongamos que $g_\alpha \to g' \neq g$, como $x_\alpha \to x$ entonces $gx = \lim_\alpha g_\alpha x_\alpha = g'x$ así $gx = g'x$ y dado que la acción es libre tenemos que $g = g'$.

□

La siguiente proposición establece una importante propiedad de las acciones de Cartan en el sentido de Palais que posteriormente nos dará las condiciones necesarias y suficientes para la equivalencia entre los diferentes tipos de acción propia, para ésta emplearemos el subgrupo de isotropía definido en 1.9.

Proposición 2.6 *Si X es un G - espacio de Cartan en el sentido de Palais, entonces cada órbita de X es cerrada en X y cada grupo de isotropía de X es compacto.*

Demostración. Sean $x \in X$, y un punto adherente a la G - órbita de x y U una vecindad delgada de y. Tomemos una red $\{g_\alpha x\}$ en U que converge a y, fijando α_0 tenemos $g_\alpha x = \left(g_\alpha g_{\alpha_0}^{-1}\right)(g_{\alpha_0} x)$ y por lo tanto $g_\alpha g_{\alpha_0}^{-1} \in \langle U, U\rangle$, podemos suponer que la subred $\left\{g_\alpha g_{\alpha_0}^{-1}\right\}$ converge y por lo tanto g_α converge a un elemento g; así $y = \lim g_\alpha x = gx \in [x]$ y por lo tanto $[x]$ es cerrada. Por otra parte, si $x \in X$ y V es una vecindad delgada de x; el estabilizador de x, $G_x = \{g \in G : gx = x\}$, es un cerrado que se encuentra contenido en el compacto $\langle V, V\rangle$ y por lo tanto es compacto.

□

Definición 2.8 *Sean X un G - espacio y $U \subset X$. U se dice un **subconjunto pequeño** o simplemente **pequeño** si todo punto de X tiene una vecindad que es delgada con respecto a U.*

Definición 2.9 *Sea X un G - espacio. X se denomina un espacio **propio en el sentido de Palais (ó simplemente Palais - propio)** si todo punto de X tiene una vecindad pequeña.*

Algunas propiedades importantes de los conjuntos pequeños y de los G - espacios propios en el sentido de Palais son:

i) Un subconjunto de un conjunto pequeño es pequeño.

ii) La unión finita de subconjuntos pequeños es pequeña.

iii) Si S es un subconjunto pequeño de X y $K \subseteq X$ es un compacto, entonces K es delgado con respecto a S y de hecho K tiene una vecindad que es delgada con respecto a S.

iv) Si X es un G - espacio propio, entonces todo subconjunto compacto de X es pequeño y tiene una vecindad pequeña.

v) Si X es un G - espacio propio, entonces todo subconjunto compacto de X es delgado y tiene una vecindad delgada.

vi) Si X es un G - espacio propio y K es un subconjunto compacto de X, entonces $\langle K, K\rangle$ es un subconjunto compacto de G.

vii) Si G es compacto, entonces todo G - espacio es propio.

Para más detalle y otras propiedades ver [12, pág 300].

Proposición 2.7 *Si X es un G - espacio Palais - propio, entonces X es un G - espacio Palais - Cartan.*

Demostración. Sean X un G - espacio Palais - propio, $x \in X$, S una vecindad pequeña de x y V una vecindad de x que es delgada con respecto a S, entonces $V \cap S$ es una vecindad delgada de x y por lo tanto X es un G - espacio Palais - Cartan.

□

Debido a que todo par de traslaciones g_1U y g_2U de un conjunto U delgado son respectivamente delgadas, se tiene el siguiente resultado:

Corolario 2.5 *Si U es conjunto abierto delgado en un G - espacio X, entonces $G(U)$ es un G - espacio propio en el sentido de Palais.*

Proposición 2.8 *Si X es un G - espacio Palais - Cartan y X/G es regular. Entonces, X es un G - espacio Palais - propio.*

Demostración. Sean $x \in X$ y U una vecindad abierta delgada de x, entonces $G(U)$ es una vecindad de $[x]$. Como por hipótesis, X/G es regular podemos encontrar una vecindad W de $[x]$ la cual es invariante (i.e. $G(W) = W$) y está incluida en $G(U)$. Sea $O = W \cap U$, probaremos que O es una vecindad pequeña de x. Para tal fin consideremos los casos:

i) Si $y \in G(U)$, entonces $y \in gU$ lo cual implica que gU es una vecindad de y. Dado que las traslaciones de U son respectivamente delgadas, tenemos que gU es delgada con respecto a U y por lo tanto delgada con respecto a O.

ii) Si $y \notin G(U)$, entonces $X - W$ es una vecindad de y. Del hecho que W es invariante tenemos que el transporte de $X - W$ hacia O es vacío (esto es, $\langle X - W, O\rangle = \emptyset$) y por lo tanto $X - W$ es delgado con respecto a O.

□

Para continuar con nuestra caracterización de acciones propias emplearemos el siguiente resultado conocido de teoría de la medida:

Lema 2.2 *Sean K un espacio compacto, M un espacio métrico y denotamos por M^K el espacio métrico de las funciones continuas de K en M cuya métrica se encuentra dada por $\rho(f_1, f_2) = sup\{\rho(f_1(k), f_2(k))\,; k \in K\}$; si X es un espacio arbitrario, $f : X \times K \to M$ es continua y definimos $f_x : K \to M$ mediante $f_x(k) = f(x, k)$, entonces $x \to f_x$ es una función continua de X en M^K. Además, si M es un espacio Banach y μ es la medida de Haar en K, entonces $x \to \int f_x(k)d\mu(k)$ es continua.*

Proposición 2.9 *Sean X un G - espacio, V un G - espacio lineal y f una función continua de X en V cuyo soporte notaremos S. Si S es un subconjunto pequeño de X, entonces*

$$F(x) = \int g^{-1} f(gx) d\mu(g),$$

donde μ es la medida de Haar en G, es una función equivariante de X en V. Además, $F(x) = 0$ si $x \notin G(S)$.

Demostración. Sean $x_0 \in X$ y U una vecindad de x_0 que es delgada con respeco a S, luego $W = \overline{\langle U, S\rangle}$ es compacto. Si $x \in U$ y $g \notin W$, entonces $g \notin \langle U, S\rangle$ lo que implica $gx \notin S$ y $f(gx) = 0$; y por lo tanto

$$F|_{U(x)} = \int_W g^{-1} f(gx) d\mu(g).$$

Como $(g, x) \to g^{-1} f(gx)$ es una función continua de $U \times W$ en V del lema 2.2 se sigue que $F|_U$ es continua en x_0. Además si $x \notin G(S)$, entonces $f(gx) = 0$ para todo $g \in G$ y por lo tanto $F(x) = 0$. Resta demostrar que F es equivariante, para tal fin sean $g, h \in G$ y $x \in X$ usando la linealidad del G - espacio V tenemos:

$$\begin{aligned} F(hx) &= \int g^{-1} f(ghx) d\mu(g) \\ &= \int hg^{-1} f(gx) d\mu(g) \\ &= h \int g^{-1} f(gx) d\mu(g) \\ &= hF(x). \end{aligned}$$

□

Proposición 2.10 *Si X es un G - espacio Palais - propio, entonces X/G es completamente regular.*

Demostración. De las proposiciones 2.6 y 2.7 se sigue que X/G es T_1. Sean $[x_0] \in X/G$, $F \subset X/G$ un conjunto que no contiene a $[x_0]$, S una vecindad pequeña de x_0 tal que $S \cap \pi^{-1}(F) = \emptyset$ y f una función a valor real con soporte en S tal que $f(x_0) > 0$. De la proposición 2.9 tenemos que $f^*(x) = \int f(gx) d\mu(g)$ es una función a valor real equivariante y continua en X con $f^*(x_0) > 0$ y soporte en $G(S)$ y por lo tanto disjunto a $\pi^{-1}(F)$. Como f^* es equivariante, entonces la función f definida mediante el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f^*"] & \mathbb{R} \\ X/G \arrow[u, "\pi^{-1}"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

está bien definida y satisface $f([x_0]) = f^*(\pi^{-1}([x_0])) = f^*(x_0) > 0$ y $f|_F = 0$, del hecho que f es compuesta de continuas se sigue que es continua.

□

Como consecuencia inmediata de las proposiciones 2.6, 2.7, 2.8 y 2.10 obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 2.6 *Un G - espacio X es Palais - propio si, y sólo si, X es de Palais - Cartan y X/G es regular.*

El siguiente teorema resume algunos de los principales resultados incluidos en esta capítulo

Teorema 2.4 *Sea X un G - espacio Tychonoff definido mediante la acción de un grupo topológico G localmente compacto, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *Dados $x, y \in X$ entonces existen dos vecindades U y V, respectivamente delgadas, de x e y.*

ii) *X es G - espacio Palais - Cartan y X/G es de Hausdorff.*

iii) *X es un G - espacio Palais - propio.*

iv) *X es un G - espacio de Cartan.*

v) *X es un G - espacio Propio.*

Demostración. Para demostrar la equivalencia entre estas afirmaciones emplearemos las siguientes implicaciones $i) \to ii) \to iii) \to iv) \to v) \to i)$:

Veamos que $i) \to ii)$. En efecto, usando el corolario 2.4 tenemos que X/G es de Hausdorff y por definición es Palais - Cartan. La implicación $ii) \to iii)$ se cumple ya que la aplicación cociente π es abierta y por lo tanto X/G es localmente compacto, en este caso Hausdorff implica regular y del corolario 2.6 se sigue que X es un G - espacio Palais - propio. Para $iii) \to iv)$, al ser un G - espacio Palais - propio nuevamente por el corolario 2.6 se tiene que es un G - espacio Palais - Cartan y X/G es de Hausdorff, de la proposición 2.4 se tiene que es de Cartan. El corolario 2.3 garantiza que si la acción es de Cartan y X/G es de Hausdorff, entonces X es un G - espacio propio con lo cual $iv) \to v)$ se cumple. Finalmente la proposición 2.5 garantiza que $v) \to i)$.

□

Observación 2.1 *Si se cumple la condición $i)$ del anterior teorema, el corolario 2.4 garantiza que el espacio X/G es de Hausdorff y en este sentido las acciones Palais - propias son Bourbaki - propias y las Bourbaki - propias por definición son de Cartan.*

Para un estudio más detallado de las acciones propias y sus diferentes caracterizaciones véase [5], [12] y [11].

3. Propiedades topológicas heredadas por el espacio cociente

En este capítulo se desarrollan los conceptos y construcciones necesarias en el estudio de las propiedades topológicas que un G - espacio X, el cual consideraremos Tychonoff (i.e. completamente regular y de Hausdorff), conserva en su espacio cociente X/G. Además, mediante la acción Palais - propia dada por $(g, x) \mapsto xg^{-1}$ se ejemplifica la conjetura:

Si G es un grupo localmente compacto, entonces el espacio de órbitas X/G de un G - espacio X Palais propio paracompacto es paracompacto

Por último se establece una relación entre las dimensiones de los espacios X, X/G y el grupo topológico G.

Definición 3.1 *Sean G un grupo topológico y X un G - espacio. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se dice G **- uniforme** si para todo $\epsilon > 0$ existe una vecindad U de $e \in G$ tal que*

$$|f(gx) - f(x)| < \epsilon, \qquad \textit{para todo } g \in U, x \in X.$$

Notaremos mediante $\mathcal{B}(X)$ al espacio Banach de todas las funciones acotadas $f : X \to \mathbb{R}$ con la norma del supremo y por $\mathcal{U}(X)$ al subespacio de $\mathcal{B}(X)$ de todas las funciones G - uniformes.

Teorema 3.1 *Sean X un G - espacio y $\mathcal{U}(X)$ el espacio de las funciones acotadas G - uniformes. Entonces, la operación $(g, f) \mapsto gf$ de $G \times \mathcal{U}(X)$ definida por $(gf)(x) = f(g^{-1}x)$ para todo $x \in X$, es una acción continua e isométrica de G sobre $\mathcal{U}(X)$.*

Demostración.

i) Si $g \in G$ y $f(x) \in \mathcal{U}(X)$, entonces $gf \in \mathcal{U}(X)$. En efecto, $(gf)(x) = f(g^{-1}x)$ es acotada ya que por hipótesis $f : X \to \mathbb{R}$ es acotada, la G - uniformidad de f garantiza que dado $\epsilon > 0$ podemos escoger una vecindad V de $e \in G$ tal que

$$|f(hx) - f(x)| < \epsilon, \qquad \text{para todo } h \in V, x \in X. \tag{3.0.1}$$

El subconjunto $U = gV^{-1}g^{-1} \subset G$ también es vecindad de e, por tanto si escogemos $t \in U$ y $z \in X$ tales que $t = gh^{-1}g^{-1} \in U$ y $x = g^{-1}tz \in X$ tenemos que $h = g^{-1}t^{-1}g$ y $hx = g^{-1}z$; usando 3.0.1 para todo $t \in U$ se cumple:

$$\begin{aligned} |(gf)(tz) - (gf)(z)| &= |(gf)(z) - (gf)(tz)| \\ &= \left|f\left(g^{-1}z\right) - f\left(g^{-1}tz\right)\right| \\ &= |f(hx) - f(x)| < \epsilon, \end{aligned}$$

con lo cual (gf) es G - uniforme.

ii) Veamos ahora que la operación es una acción de G sobre $\mathcal{U}(X)$. En efecto, para todo $g, h \in G$ y $f \in \mathcal{U}(X)$ se cumple:

$$((gh)f)(x) = f\left((gh)^{-1}x\right) = f\left(h^{-1}g^{-1}x\right) = (hf)\left(g^{-1}x\right) = g\left((hf)(x)\right),$$

y la acción del módulo $e \in G$ sobre cualquier elemento $f \in \mathcal{U}(X)$ satisface $(ef)(x) = f(ex) = f(x)$.

iii) La acción es isométrica, ya que para todo $g \in G$, $f, f_0 \in \mathcal{U}(X)$ se tiene

$$\|gf - gf_0\| = \sup_{x \in X} |(gf)(x) - (gf_0)(x)| = \sup_{x \in X} \left|f(g^{-1}x) - f_0(g^{-1}x)\right| = \|f - f_0\|.$$

iv) La acción es continua; si $(g_0, f_0) \in G \times \mathcal{U}(X)$ tenemos que dado $\frac{\epsilon}{2} > 0$ podemos escoger una vecindad V de $e \in G$ tal que

$$|f_0(hx) - f_0(x)| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \text{para todo } h \in V, x \in X.$$

Tomemos la vecindad de g_0 dada por g_0V^{-1} y por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\|gf_0 - g_0f_0\| &= \sup_{x\in X} |(gf_0)(x) - (g_0f_0)(x)| \\
&= \sup_{x\in X} \left|f_0(g^{-1}x) - f_0((g_0)^{-1}x)\right| \\
&= \sup_{y\in Y} |f_0(hy) - f_0(y)| < \frac{\epsilon}{2},
\end{aligned}
$$

con $(g_0)^{-1}x = y \in X$ y $h = g^{-1}g_0 \in V$; así:

$$
\begin{aligned}
\|gf - g_0f_0\| &\leq \|gf - gf_0\| + \|gf_0 - g_0f_0\| \\
&= \|f - f_0\| + \|gf_0 - g_0f_0\| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2},
\end{aligned}
$$

siempre que $\|f - f_0\| \leq \frac{\epsilon}{2}$ para todo $f \in \mathcal{U}(X)$ y $g \in G$.

□

Teorema 3.2 *Sean X un grupo topológico y G un subgrupo de X localmente compacto. Entonces, $\Theta: \; G \times X \to X$ dada por $(g, x) \mapsto xg^{-1}$, para todo $g \in G, x \in X$, es una acción propia en el sentido de Palais.*

Demostración. La aplicación $\Theta: \; G \times X \to X$ dada por $(g, x) \mapsto xg^{-1}$, es una acción de G sobre X. En efecto, para todo $g, h \in G$ y $x \in X$ se cumple

$$
\Theta(h, \Theta(g, x)) = \Theta\left(h, xg^{-1}\right) = \left(xg^{-1}h^{-1}\right) = \left(x\,(hg)^{-1}\right) = \Theta(hg, x),
$$

y la acción del módulo e de G (que es el mismo de X) satisface $\Theta(e, x) = x$ para todo $x \in X$. Sea U una vecindad simétrica de $e \in X$, por lo tanto $U^3 \cap G$ tiene clausura compacta en G. Probaremos que si $x \in X$ la vecindad xU es pequeña.

Si $y \in X$ se tienen los casos:

i) Si $y \in xU^2G$ se tiene $y = xu_1u_2h$ para algún $u_1, u_2 \in U$ y $h \in G$. Si $g \in \langle xU, xU^2h\rangle$, entonces $g(xU) \cap xU^2h \neq \emptyset$ y usando la acción definida esto es equivalente a

$$
\emptyset \neq xUg^{-1} \cap xU^2h = g^{-1} \cap U^3h,
$$

por lo tanto $g^{-1}h^{-1} \in U^3 \cap G$ de donde se sigue que $g^{-1} \in (U^3 \cap G)\,h$ y $g \in ((U^3 \cap G)\,h)^{-1} = h^{-1}(U^3 \cap G)^{-1}$. Hemos probado así que $\langle xU, xU^2h\rangle \subset h^{-1}(U^3 \cap G)^{-1}$.

Notemos que éste último conjunto tiene clausura compacta y por lo tanto $\langle xU, xU^2h\rangle$ tiene clausura compacta, lo que implica que xU^2h es delgado con respecto a xU.

ii) Si $y \notin xU^2G$, entonces $y \notin \overline{xUG}$. En efecto, si $y \in \overline{xUG}$ se tiene $xUx^{-1}y \cap xUG \neq \emptyset$ y por lo tanto $xux^{-1}y = xvh$ para adecuados $u, v \in U$ y $h \in G$. Debido a que

$$\begin{aligned} xux^{-1}y &= xvh \\ ux^{-1}y &= vh \\ x^{-1}y &= u^{-1}vh \\ y &= xu^{-1}vh, \end{aligned}$$

se tiene $y \in xU^2G$. En este caso, el conjunto $V = X - \overline{xUG}$ es una vecindad G - invariante de y, esto es $G(V) = V$, que es delgada con respecto a xU ya que el transporte $\langle xU, V\rangle = \emptyset$ tiene clausura compacta.

□

Del teorema 2.4 tenemos que la acción descrita anteriormente es también propia, de Cartan, Bourbaki - propia y Palais - Cartan.

En adelante consideraremos el G - espacio X con esta acción y por lo tanto la definición 3.1 se reescribe como:

Definición 3.2 *Sean X un grupo topológico y G un subgrupo de X localmente compacto, actuando sobre X mediante $(g, x) \mapsto xg^{-1}$. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se dice G* ***- uniforme*** *si para todo $\epsilon > 0$ existe una vecindad U de $e \in G$ tal que*

$$|f(y) - f(x)| < \epsilon, \qquad \textit{para todo } yx^{-1} \in U.$$

Usando la acción Palais - propia del teorema 3.2 es posible reescribir el teorema 3.1 como:

Corolario 3.1 *Sean X un grupo topológico y G un subgrupo de X localmente compacto, actuando sobre X mediante $(g, x) \mapsto xg^{-1}$ y $\mathcal{U}(X)$ el espacio de las funciones acotadas G - uniformes. Entonces, la aplicación $(g, f) \mapsto gf$ de $G \times \mathcal{U}(X)$ definida por $(gf)(x) = f(xg)$, para todo $x \in X$, es una acción continua e isométrica de G sobre $\mathcal{U}(X)$.*

Proposición 3.1 *Sea G un grupo topológico actuando sobre sí mismo mediante la acción $(g, x) \mapsto xg^{-1}$, para todo $g, x \in G$. Entonces, si $f \in \mathcal{U}(G)$, la función $f_x : G \to \mathcal{U}(G)$ dada por $f_x(g) = f(xg^{-1})$, es equivariante y G - uniforme.*

Demostración. $f_x(g) = f(xg^{-1})$ es G - uniforme ya que se define en términos de $f \in \mathcal{U}(G)$. Veamos que es equivariante, para tal fin sean $g, h \in G$ y $x \in X$ por lo tanto:

$$\begin{array}{rcccccc} f_x(h(g)) & = & f_x(gh^{-1}) & = & f(x(gh^{-1})^{-1}) & = & f(x(hg^{-1})) \\ & = & f((xh)g^{-1}) & = & (g^{-1}f)(xh) & = & (h(g^{-1}f))(x) \\ & = & h(f(xg^{-1})) & = & (hf_x)(g). & & \end{array}$$

□

Definición 3.3 *Sea X un G - espacio dotado de una métrica $\rho : X \times X \to \mathbb{R}^+$. La métrica ρ se dirá G* ***- invariante*** *si $\rho(gx, gy) = \rho(x, y)$, para todo $g \in G$ y $x, y \in X$.*

Tal como se demostró en la parte *iii*) del teorema 3.1 la acción $(gf)(x) = f\,(xg)$ es isométrica y por lo tanto la métrica del supremo definida en el G - espacio $\mathcal{U}(X)$ es G - invariante.

Proposición 3.2 *Sea X un G - espacio metrizable con métrica ρ. Si ρ es G - invariante, entonces $\tilde{\rho}([x],[y]) = \text{ínf}\,\{\rho(a,b) : a \in [x], b \in [y]\}$ es una pseudométrica para el espacio cociente X/G.*

Demostración. Sea $[x], [y], [z] \in X/G$, entonces:

i)

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\rho}([x],[x]) & = & \text{ínf}\,\{\rho(a,b) : a, b \in [x]\} \\ & = & \text{ínf}\,\{\rho(gx,gx) : g \in G\} \\ & = & \text{ínf}\,\{\rho(x,x) : x \in X\} \\ & = & 0. \end{array}$$

ii)

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\rho}([x],[y]) & = & \text{ínf}\,\{\rho(a,b) : a \in [x], b \in [y]\} \\ & = & \text{ínf}\,\{\rho(b,a) : b \in [y], a \in [x]\} \\ & = & \tilde{\rho}([y],[x]). \end{array}$$

iii)

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\rho}([x],[z]) & = & \text{ínf}\,\{\rho(a,b) : a \in [x], b \in [z]\} \\ & = & \text{ínf}\,\{\rho(gx,hz) : g, h \in G\} \\ & \leq & \text{ínf}\,\{\rho(gx,iy) + \rho(iy,hz) : g, h, i \in G\} \\ & \leq & \text{ínf}\,\{\rho(gx,iy) : g, i \in G\} + \text{ínf}\,\{\rho(iy,hz) : h, i \in G\} \\ & \leq & \tilde{\rho}([x],[y]) + \tilde{\rho}([y],[z]). \end{array}$$

□

Proposición 3.3 *Sean X un grupo topológico y G un subgrupo de X localmente compacto. Entonces, existe un cubrimiento localmente finito de X que consiste de conjuntos G - invariantes de la forma S_iG, donde cada S_i es un subconjunto abierto pequeño de X.*

Demostración. Usando el teorema 3.2 tenemos que X es un G - espacio propio (en el sentido de Palais) con la acción de G sobre X dada por $(g,x) \mapsto xg^{-1}$, al ser propio para cada $x \in X$ existe una vecindad pequeña, en particular para $e \in X$ tomemos la vecindad pequeña U.

Usando el teorema de Markov (ver apéndice A.1), existe una función G - uniforme $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(e) = 0$ y $f^{-1}([0,1)) \subset U$ y debido a la proposición 3.1 tenemos que ésta induce una función equivariante $f_x : G \to \mathcal{U}(X)$ dada por $f_x(g) = f(xg^{-1})$, para todo $g, x \in X$. Notaremos mediante Z la imagen de $f_x(X)$, observemos que $gf_x(e) = gf(xe) = gf(x)$ y por lo tanto Z coincide la órbita de $f_x(e)$ en el X - espacio $\mathcal{U}(X)$. Además, por la proposición 3.2, la métrica de $\mathcal{U}(X)$ induce una pseudométrica X- invariante en Z.

Sea $V = [0,1)$ y definamos el subconjunto abierto

$$\Gamma_{x,V} = \{\varphi \in \mathcal{U}(X) : \varphi(x) \in V\} \subset U$$

notemos que $\Gamma_{x,V} = x^{-1}\Gamma_{e,V}$, en efecto

$$\begin{aligned}
\varphi \in x^{-1}\Gamma_{e,V} &\leftrightarrow (x^{-1}\varphi)(e) \in V \\
&\leftrightarrow \varphi(e(x^{-1})^{-1}) \\
&\leftrightarrow \varphi(x) \in V \\
&\leftrightarrow \varphi \in \Gamma_{x,V}.
\end{aligned}$$

además $f_x^{-1}(\Gamma_{e,V}) \subset f^{-1}(V) \subset U$, y por lo tanto $f_x^{-1}(x\Gamma_{x,V}) \subset U$ de donde $xf_x^{-1}(\Gamma_{x,V}) \subset U$. Dado que f_x es una función X - equivariante tenemos:

$$f_x^{-1}(\Gamma_{x,V}) \subset x^{-1}U, \qquad \text{para todo } x \in X. \tag{3.0.2}$$

Como $f_x(g) \in \Gamma_{x,V}$ para todo $x \in X$, éstos contituyen un cubrimiento por abiertos de Z.

Nos restringimos ahora a las acciones inducidas por el subgrupo G, de donde consideraremos Z como un G - espacio, de 3.0.2 se sigue que

$$f_x^{-1}(G\Gamma_{x,V}) \subset x^{-1}UG, \qquad \text{para todo } x \in X. \tag{3.0.3}$$

Como $f_x : X \to Z$ es G - equivariante, ésta induce una función continua $\tilde{f}_x$ del espacio de G - órbitas X/G en el espacio de G - órbitas Z/G, de acuerdo al diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_x} & Z \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ X/G & \xrightarrow{\tilde{f}_x} & Z/G \end{array}$$

donde π_1 y π_2 son las aplicaciones cociente de cada G - espacio en su espacio cociente. De 3.0.3 se sigue que

$$\tilde{f}_x^{-1}\left(\pi_2\left(\Gamma_{x,V}\right)\right) \subset \pi_1\left(x^{-1}U\right), \qquad \text{para todo } x \in X.$$

Así, el cubrimiento por abiertos $\{\pi_1\left(x^{-1}U\right) : x \in X\}$ del espacio cociente X/G es refinado por $\left\{\tilde{f}_x^{-1}\left(\pi_2\left(\Gamma_{x,V}\right)\right) : x \in X\right\}$. Como la métrica de Z es G - invariante; por la proposición 3.2 el espacio de órbitas es pseudometrizable y por lo tanto el cubrimiento por abiertos $\{\pi_2\left(\Gamma_{x,V}\right) : x \in X\}$ de Z/G admite un refinamiento abierto localmente finito $\{W_i : i \in I\}$, así $\left\{\pi_1^{-1}\left(\tilde{f}_x^{-1}\left(W_i\right)\right) : i \in I\right\}$ es un refinamiento de $\{x^{-1}UG : x \in X\}$ que consta de conjuntos G - invariantes. Cada conjunto $\pi_1^{-1}\left(\tilde{f}_x^{-1}\left(W_i\right)\right)$ es contenido en algún xUG, $x \in X$, y por lo tanto

$$\pi_1^{-1}\left(\tilde{f}_x^{-1}\left(W_i\right)\right) = S_iG,$$

donde $S_i = \pi_1^{-1}\left(\tilde{f}_x^{-1}\left(W_i\right)\right) \cap xU$. Debido a que S_i es un subconjunto de un conjunto G - pequeño, es también pequeño y por lo tanto $\{S_iG : i \in I\}$ es el cubrimiento deseado.

□

En un G - espacio Palais - propio, un subconjunto $S \subset X$ es llamado G - *fundamental* si S es pequeño y su saturación $G(S) = \{gs : g \in G, s \in S\}$ coincide con X.

Teorema 3.3 *Sean X un grupo topológico y G un subgrupo de X localmente compacto. Entonces, existe un conjunto cerrado G - fundamental en X.*

Demostración. De la proposición 3.3 se tiene que $\{S_iG : i \in I\}$, es un cubrimiento abierto localmente finito de X que consta de conjuntos G - invariantes, donde cada S_i es un subconjunto abierto pequeño de X. Dado que la unión de conjuntos pequeños es a su vez pequeña tenemos que $S = \bigcup_{i\in I} S_i$ es un conjunto abierto G - pequeño (ver [2, pág 145]), así

$$G(S) = \left\{sg^{-1} : g \in G, s \in S\right\} = \left(\bigcup_{i\in I} S_i\right) G = \bigcup_{i\in I} S_iG = X,$$

lo que implica que S es G - fundamental. Ya que la clausura de un conjunto pequeño es pequeña, el conjunto $\bar{S}$ es el conjunto cerrado G - fundamental deseado.

□

Proposición 3.4 *Sean G un grupo topológico localmente compacto que actúa propiamente en el sentido de Palais sobre un espacio topológico X y A un subconjunto pequeño de X. Entonces, la restricción $\theta|_A : G \times A \to X$ es perfecta (i.e. cerrada con fibras compactas).*

Demostración. Sean B un subconjunto cerrado en $G \times A$ y (g_i, a_i) una red en B tal que $g_i a_i$ converge a $x \in X$. A es pequeño y por lo tanto existe una vecindad U de x tal que $\langle U, A \rangle$ tiene clausura compacta, asumamos que $g_i \in \langle A, U \rangle = \langle U, A \rangle^{-1}$ y que converge a algún $g \in G$. Así, la red $\left\{ a_i = g_i^{-1} g_i a_i \right\}$ converge a $g^{-1}x$ lo que implica $(g, a) \in B$ y $\theta(g, a) = ga = x \in \theta(B)$. El hecho de tener fibras compactas es inmediato de la definición de pequeño.

□

Corolario 3.2 *Sean G un grupo topológico localmente compacto que actúa propiamente en el sentido de Palais sobre un espacio topológico X y A un subconjunto pequeño de X. Entonces, la restricción $\theta|_{\bar{A}} : G \times \bar{A} \to X$ es perfecta.*

Proposición 3.5 *Sean G un grupo topológico localmente compacto que actúa propiamente en el sentido de Palais sobre un espacio topológico X y A un subconjunto pequeño de X. Entonces, la restricción de la aplicación cociente $\pi|_A : A \to X/G$ es perfecta.*

Demostración. Sea B un subconjunto cerrado de A por la proposición 3.4 se tiene que $\theta(G \times B) = G(B)$ es cerrado en X y por lo tanto $\pi(B)$ es cerrado en X/G. La imagen inversa de $\pi|_A(x) \in X/G$ está dada por

$$\pi^{-1}(\pi(x)) \cap A = G(x) \cap A = \langle x, A \rangle x,$$

la cual es compacta ya que $\langle x, A \rangle$ es la proyección de la primer componente de $\theta^{-1}|_A(x) \in G \times A$, usando nuevamente la proposición 3.4 ésta es compacta.

□

Corolario 3.3 *Sean G un grupo topológico localmente compacto que actúa propiamente en el sentido de Palais sobre un espacio topológico X y A un subconjunto pequeño de X. Entonces, la restricción de la aplicación cociente $\pi|_{\bar{A}} : \bar{A} \to X/G$ es perfecta.*

El teorema 3.3 en combinación con el corolario 3.3 permiten plantear el siguiente resultado:

Corolario 3.4 *Sean X un grupo topológico, G un subgrupo de X localmente compacto y X/G el espacio de órbitas de la acción $(g, x) \mapsto xg^{-1}$ de G sobre X. Entonces, existe un subconjunto cerrado G - fundamental, $F \subset X$, tal que la restricción $\pi|_F : F \to X/G$ es perfecta.*

En el anterior capítulo se hizo referencia al hecho que si una aplicación $f : X \to Y$ es perfecta, ésta preserva algunas propiedades topológicas, este hecho acompañado del anterior corolario genera el siguiente resultado referente a la transferencia de propiedades topológicas del espacio X al espacio cociente X/G:

Corolario 3.5 *Sea $\mathcal{P}$ una propiedad topológica estable bajo aplicaciones perfectas y heredada por subconjuntos cerrados. Si X es un grupo topológico con la propiedad $\mathcal{P}$ y G un subgrupo localmente compacto, entonces el espacio cociente X/G tiene la propiedad $\mathcal{P}$.*

Entre las propiedades topológicas estables bajo aplicaciones perfectas que son heredadas por cerrados se encuentran: paracompacidad, normalidad, regularidad, compacidad local y segundo numerabilidad. Para el caso particular de la acción $(g, x) \mapsto xg^{-1}$ los anteriores resultados nos llevan a que ésta ejemplifica la conjetura (ver [1] y [3]):

Conjetura 3.1 *Sea G un grupo localmente compacto. Entonces, el espacio de órbitas X/G de un G - espacio X propio paracompacto es paracompacto.*

Definición 3.4 *Sean X un G - espacio y H un subgrupo cerrado de G. Un subconjunto $S \subset X$, H - invariante se dice un H* ***- núcleo*** *si existe una función $f : G(S) \to G/H$, G - equivariante tal que $S = f^{-1}(eH)$. La saturación $G(S)$ se denomina conjunto tubular y el subgrupo H será denominado* ***grupo rebanador****. Además, si $G(S)$ es abierto en X, S se llamará una H* ***- rebanada*** *en X; si $G(S) = X$, entonces S es una H* ***- rebanada global*** *de X.*

Como consecuencia inmediata de la proposición 1.8 tenemos que una vecindad tubular $G(S)$ es G - homeomorfa al producto torcido $G \times_H S$.

Con el objetivo de establecer una relación entre la dimensiones de X y la de su espacio cociente emplearemos el siguiente resultado conocido de las acciones Palais - propias (ver, [1] para los detalles de su demostración).

Teorema 3.4 (Teorema de Rebanada global) *Sean G un grupo topológico casi conexo, H un subgrupo maximal compacto de G, y X un G - espacio propio en el sentido de Palais con espacio cociente X/G paracompacto. Entonces, X admite una H - rebanada global.*

Teorema 3.5 *Sean X un grupo topológico paracompacto y G un subgrupo casi conexo de X, entonces*

$$dim\,(X) \leq dim\,(X/G) + dim\,(G)\,.$$

En la demostración de este teorema emplearemos el siguiente resultado (ver detalles en [13]):

Observación 3.1 *Si en el anterior teorema X es además localmente compacto, entonces se cumple la igualdad*

$$dim\,(X) = dim\,(X/G) + dim\,(G)$$

Demostración. Si G es un subgrupo casi conexo de X, éste admite un subgrupo maximal H y del corolario 3.5 se sigue que si X es paracompacto y G es localmente compacto, entonces el espacio cociente X/G es también paracompacto. Usando el teorema de rebanada global tenemos que X admite una H - rebanada global, digamos S y por lo tanto X es homeomorfo al producto torcido $G \times_H S$, de las proposiciones 1.8 y 1.9 tenemos que $G \times_H S$ es homeomorfo a $G/H \times S$ y por lo tanto $X \cong G/H \times S$.

Como G es localmente compacto y paracompacto la aplicación $G \to G/H$ es abierta y cerrada lo cual implica que G/H es también localmente compacto y paracompacto; usando el teorema de Morita (ver apéndice A.2) se tiene:

$$dim\,(G/H \times S) \leq dim\,(G/H) + dim\,(S)\,.$$

Como H es compacto usando el teorema de Filippov (ver apéndice A.3) tenemos la desigualdad:

$$dim\,(S) \leq dim\,(S/H) + dim\,(q)\,,$$

donde $q : S \to S/H$ es la proyección canónica de S en su espacio de H - órbitas y

$$dim(q) = \sup\left\{dim\left(g^{-1}a\right) : a \in S/H\right\},$$

ya que H actúa libremente sobre S (en caso contrario las H - órbitas no serían disjuntas) tenemos $dim(q) = dim(H)$ y por lo tanto

$$dim\,(G/H \times S) \leq dim\,(G/H) + dim(H) + dim\,(S/H)\,,$$

como G es localmente compacto de la observación 3.1 se sigue que $dim(G) = dim\,(G/H) + dim(H)$. Debido a que $X/G \cong (G \times_H S) \cong S/H$ obtenemos

$$dim\,(G/H \times S) \leq dim\,(X/G) + dim(G).$$

$\square$

4. Conclusiones

Aunque la tarea de clasificar una acción como propia, de Cartan, Bourbaki - propia, Palais - Cartan y Palais - propia es aún complicada de realizar el teorema 2.4 establece las condiciones necesarias para obtener una equivalencia entre los diferentes tipos de acciones.

Si X es un grupo topológico y G un subgrupo localmente compacto en el teorema 3.2 se demostró que la acción natural de G sobre X dada por $(g, x) \mapsto xg^{-1}$ es propia en el sentido de Palais y por lo tanto la restricción de la proyección canónica ($\pi_F : F \to X/G$) a cualquier conjunto F cerrado G - fundamental, es perfecta tal como fue demostrado en la proposición 3.4 y el corolario 3.4, hecho que permite establecer una transferencia de propiedades topológicas estables bajo aplicaciones perfectas y heredadas por conjuntos cerrados en X al espacio cociente X/G, obteniendo así un ejemplo que satisface la conjetura 3.1.

Si en la acción $(g, x) \mapsto xg^{-1}$ el grupo topológico X es paracompacto, G es un subgrupo casi conexo de X y H es un subgrupo maximal compacto de G, el teorema de *rebanada global* 3.4 garantiza la existencia de una H - rebanada global, resultado fundamental en la demostración del teorema 3.5 en el cual se estableció la relación que tienen las dimensiones de los grupos topológicos X y G y la del espacio cociente X/G.

Quedan trabajos futuros referentes al estudio de los G - espacios propios determinados bajo la acción de $G = \mathbb{R}$ (los cuales coinciden con los sistemas dinámicos dispersivos) y las consecuencias que generan la proposición 2.10 en éstos.

A. Apéndice A

A continuación se dan algunos resultados importantes de las acciones que fueron útiles durante la elaboración de este trabajo:

Definición A.1 *[4, Sección 3.3, pág 151]. Sean G un grupo topológico con módulo e y N una función a valor real definida en G. Diremos que N es una* ***prenorma*** *en G, si las siguientes condiciones se satisfacen para todo $x, y \in G$:*

(PN1) $N(e) = 0$.

(PN2) $N(xy) \leq N(x) + N(y)$.

(PN3) $N(x^{-1}) = N(x)$.

Teorema A.1 (Teorema de Markov) *[4, Teorema 3.3.9, pág 152]. Para cada vecindad abierta U del módulo e de un grupo topológico G, existe una prenorma continua en G tal que la bola unitaria B_N está contenida en U.*

Teorema A.2 (Teorema de Morita) *[9, Teorema 1, pág 205]. Sean X e Y espacios normales paracompactos, con X la unión contable de subconjuntos cerrados localmente compactos, entonces*

$$dim\,(X \times Y) \leq dim(X) + dim(Y).$$

Teorema A.3 (Teorema de Filippov) *[8, Teorema 1, pág 171]. Sean G un grupo bicompacto actuando sobre un espacio completamente regular X y $\pi : X \to Y$ la aplicación canónica de X en su espacio de órbitas Y con respecto a la acción de G. Entonces,*

$$dim(X) \leq dim(X/G) + dim(\pi).$$

Bibliografía

[1] Abels, H.: Parallelizability of proper actions, global k- slices and maximal compact subgrops. En: *Math. Ann.* 212 (1974), p. 1–19

[2] Abels, H.: A universal proper G - space. En: *Mathematische Zeitschrift* 159 (1978), p. 143–158

[3] Antonian, S.: Proper actions on topological groups: applications to quotient spaces. En: *American Mathematical Society* 138 (2010), p. 3707–3716

[4] Arhangel'skii, A.V. ; Tkachenko, M.: *Topological groups and related structures*. Amsterdam - Paris : Atlantic Press / World Scientific, 2008

[5] Biller, H.: Characterizations of proper actions. En: *Mathematical Proceedings of The Cambridge Philosophical Society* 136 (2004), p. 429–439

[6] Bredon, G: *Introduction to compact transformation groups Volume 46*. New York and London : Academic Press, 1972

[7] Engelking, R.: *General Topology*. New York and London : Heldermann, 1989

[8] Filippov, V..V.: Dimensionality of spaces with the action of a bicompact group. En: *Math. Notes.* 75-2 (1979), p. 171–174

[9] Morita, K.: On the dimension of product spaces. En: *American Journal of mathematics* 75-2 (1953), p. 205–223

[10] Munkres, J.R.: *Topología*. Madrid : Prentice Hall, 2002

[11] Palais, R..: The classification of G-spaces. En: *Memoirs of the AMS* 36 (1960)

[12] Palais, R.: On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups. En: *The Annals of Mathematics* 73 (1961), p. 295–323

[13] Skaljarenko, E.G: On the topological structure of locally bicompact groups and their quotient spaces. En: *Amer. Math. Soc. Transl.* 2,39 (1964), p. 57–82

Índice alfabético

Órbita, 14

Acción
    Bourbaki - propia, 26
    Cartan, 22
    Casi efectiva, 10
    de grupo, 8
    Efectiva, 10
    Libre, 13
    Palais - propia, 28
    Palais- Cartan, 27
    Propia, 22
    Semilibre, 13
    Transitiva, 15
Aplicación
    G - uniforme, 32
    Cociente, 14
    Perfecta, 19
    Propia, 19

Casi Conexo, 6
Conjunto
    Delgado, 26
    Fundamental, 38
    Invariante, 15
    Pequeño, 28
    Tubular, 40

Delgado
    Respectivamente delgados, 26

Espacio
    Cociente, 14
Estabilizador, 12

Función
    Equivariante, 12

Grupo
    Rebanador, 40
    Topológico, 4

Homomorfismos, 5

Métrica
    G - Invariante, 36

Núcleo, 10
Normalizador, 7

Producto torcido, 16

Rebanada
    Global, 40

Saturación, 15
Subgrupo
    de isotropía, 13
    Topológico, 5

Transporte, 23
Traslación
    A derecha, 4
    A izquierda, 4