UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Sede Medellín

Sobre la derivación de los invariantes de configuración en geometría diferencial

Juan Sebastián Díaz Arboleda

Facultad de Ciencias- Escuela de Matemáticas
Medellín-Colombia

Enero de 2015

Sobre la derivación de los invariantes de configuración en geometría diferencial

Juan Sebastián Díaz Arboleda

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de
Magíster en Ciencias-Matemáticas

Director:
David Blazquez-Sanz Ph.D.

Línea de Investigación:
Teoría geométrica de funciones
Grupo de Investigación
Interáreas de Álgebra, Geometría y Topología

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias- Escuela de Matemáticas
Medellín-Colombia
Enero de 2015

Dedicado a
mis padres y hermanos, a mi maestro David y a mis amigos, que contribuyeron de una u otra forma al avance de este proyecto.

Índice general

Introducción

La búsqueda y cálculo explícito de los invariantes de una acción es un problema atacado a lo largo de la historia desde distintos puntos de vista y con diversos propósitos en mente. Determinar nuevos invariantes ha sido alentado, entre otras cosas, por las distintas apariciones que hacen las acciones de grupos, no solo en las matemáticas sino también en física mecánica, ingeniería, visión artificial entre otras. Allí, los invariantes desempeñan un papel instrumental en el momento, por ejemplo, de reducir ecuaciones diferenciales, resolver problemas de equivalencia y determinar formas canónicas. Es así como resulta ser de gran utilidad desarrollar métodos para calcular invariantes y describir las relaciones existentes entre los mismos.

Los invariantes relevantes a este trabajo pertenecen al contexto de la geometría suave, en la cual es usual tener un grupo de Lie actuando sobre una variedad. Clásicamente se ha desarrollado el método del referente móvil, el cual se basa en la escogencia de una sección transversal a las órbitas de la acción y que permite definir un proceso de invariantización que a cada función suave sobre la variedad, o usualmente un abierto de la misma, le asocia una función que coincide con la función original sobre la sección y que se extiende a todo el abierto de manera que sea constante sobre las órbitas.

Si bien el método del referente móvil permite calcular en teoría los invariantes, en la práctica viene acompañado de ciertas dificultades. Por ejemplo, es necesario que la acción sea localmente libre. Esta condición, puede lograrse por dos vías principales: primero, es posible extender la acción a un fibrado de jets de orden suficientemente alto, de manera que haya "suficiente espacio" para que la acción sea libre. Sin embargo este método puede ser muy limitado en el caso en que se estén buscando invariantes de grados bajos [HK07].

Por otra parte, la acción puede extenderse diagonalmente a un producto M^k de la variedad, para k suficientemente grande y de esta manera se obtienen los llamados *invariantes de configuración*.

Hay que resaltar que aunque se disponga o se logre construir una acción localmente libre, el método del referente móvil está finalmente sustentado en el teorema de la función implícita lo cual hace que el método no sea constructivo y de hecho en muchas ocasiones el referente no pueda computarse explícitamente.

Por otra parte, cuando ya se tienen ciertos invariantes calculados, surge la cuestión de querer saber si es posible obtener nuevos invariantes a partir de aquellos y cómo se relacionan. En este sentido, existe por ejemplo, el teorema de Lie-Tresse que garantiza la finitud de los invariantes diferenciales de una acción, bajo ciertas condiciones. Y ¿qué sucede en el caso de los invariantes de configuración?

Además como se describe en [OT04] existen ciertas relaciones geométricas entre los invariantes de configuración y los invariantes diferenciales, que sugiere que los primeros pueden derivarse para obtener nuevos invariantes diferenciales. De esta manera, es natural preguntarse ¿cómo conceptulizar la derivación de los invariantes de configuración? Estas preguntas han motivado gran parte del trabajo y se reflejan en el planteamiento de los objetivos de esta tesis, descritos a continuación.

> Primero abordar el problema de obtener invariantes de configuración de n puntos a partir del pullback de invariantes de k puntos para $k \leq n$.
>
> Segundo, desarrollar la teoría y herramientas útiles para formalizar la derivación de los invariantes de configuración, de manera que puedan construirse nuevos invariantes diferenciales partiendo de invariantes de configuración conocidos.

El avance en estas dos líneas se detalla un poco a continuación.

Avances y Resultados Nuevos

Haciendo una presentación de los invariantes en el lenguaje de los sistemas de Pfaff y los haces de integrales primeras, se obtuvo una condición necesaria y suficiente para la dependencia funcional de los invariantes de configuración de distintos órdenes. Más precisamente:

> **Proposición 2.6** *La condición necesaria y suficiente para que todo invariante de $n-$puntos sea funcionalmente dependiente de invariantes de $(n-1)$puntos, dependencia que se escribe como*
>
> $$C^{\infty}_{M^n}(\cdot)^G = \pi_1^*(C^{\infty}_{M^{n-1}}(\cdot)^G) * \cdots * \pi_n^*(C^{\infty}_{M^{n-1}}(\cdot)^G),$$
>
> *es que se cumpla la igualdad* $\bigcap_{j=0}^{n}(\mathcal{L}^{M^n} \oplus \ker d\pi_j) = \mathcal{L}^{M^n}$.

Este resultado a su vez conduce al siguiente problema de álgebra lineal: Dados subespacios vectoriales $V, E_1, \ldots, E_n$ de un espacio vectorial, con $E_i \cap E_j = 0$,

¿cuando se cumple que $\bigcap_{i=1}^{n}(V \oplus E_i) = V$? Al respecto de esto se derivó una condición necesaria para dicha igualdad:

> **Proposición 2.9** *Una condición necesaria para que se cumpla la igualdad* $\cap_{i=1}^{n}(V \oplus E_i) = V$ *es que se verifique la desigualdad, para* $r = \dim V$*:*
> $$(n-2)N \geq r(n-1).$$

Como consecuencia directa de las condiciones encontradas para $\bigcap_{i=1}^{n}(V \oplus E_i) = V$ en el caso $n = 2$ se obtuvo el siguiente resultado:

> **Proposición 2.10** *Si la acción es regular en* M^{n-2} *entonces todo invariante de* n *puntos depende funcionalmente de invariantes de* $n-1$ *puntos.*

Por otra parte, para efectuar la derivación de invariantes se utilizaron conceptos como álgebras de Weil múltiples, la derivada torcida por σ, de manera que para un invariante de configuración I, la derivada $\sigma-$torcida $D_\sigma I : M(A) \to A$ provee un mecanismo para obtener configuraciones no triviales en $M^k(A)$ y de estas producir nuevos invariantes diferenciales:

> **Proposición 3.13** *Sea* G *un grupo de Lie actuando sobre una variedad* M*. Sea* I *un invariante de configuración de* k *puntos. Entonces* $D_\sigma I$ *es un invariante de la acción de* G *en* $M(A)$ *con valores en* A*.*

Finalmente, teniendo presente que algunos invariantes, como la razón afín no están definidos sobre la diagonal de M^k, se ha sugerido un punto de vista nuevo que se puede apreciar en el siguiente enunciado:

> **Proposición 3.18** *Sean* $W \subseteq U$ *abiertos en* M^k *con* W *denso en* U *y tal que* $U \cap \operatorname{diag} M^k \neq \emptyset$*. Sea* $U' = \operatorname{diag}^{-1}(U)$ *donde* $\operatorname{diag} : M \to M^k$ *es la aplicación diagonal.*
>
> *Suponga que* I*,* J *son dos funciones en* M *cuyo cociente* I/J *está definido en* W *y es un invariante de* $k-$*puntos. Suponga además que para cada* $p^A \in U'(A)$ *se cumple*
>
> 1. $D_\sigma I(p^A)$ *está en el ideal* $(D_\sigma J(p^A))$
> 2. $\operatorname{Ann}(D_\sigma J(p^A)) \subseteq \mathfrak{p}$
>
> *entonces* $\frac{D_\sigma I}{D_\sigma J}$ *está bien definido como aplicación con valores en* $A/\mathfrak{p}$ *y es un* $A-$*invariante diferencial local de la acción de* G *en* $M(A)$*.*

Como un ejemplo interesante se tiene que la derivada $\sigma-$torcida de la razón anarmónica permite obtener la derivada schwartziana, el más simple y famoso invariante diferencial proyectivo.

Parte de los resultados originales de la investigación en conjunto con David Blazquez se encuentran resumidos en el artículo [BSA14a].

Capítulo 1

Acciones de Grupos de Lie

La teoría de invariantes de acciones de grupos puede desarrollarse en distintos contextos dependiendo de los objetos concretos que se vayan a considerar. Las variedades algebraicas llevan por ejemplo al estudio de los llamados invariantes algebraicos [BS12] y las variedades suaves y grupos de Lie van de la mano con los invariantes diferenciales [HK07]. En esta tesis se opta por presentar la teoría de invariantes en términos de la acción de un grupo de Lie sobre una variedad suave. Esta perspectiva es suficientemente general para expresar los resultados necesarios a esta tesis, si bien existe la alternativa más general aún de los pseudogrupos de Lie, que recientemente han probado ser de mucho provecho, ver por ejemplo [Olv11].

De acuerdo con lo anterior los objetivos de este capítulo se reflejan en el siguiente programa: Primero se presenta la teoría de acciones necesaria para hablar de invariantes y definir el método del referente móvil. Este último permite hallar invariantes de manera sistemática bajo ciertas condiciones, si bien hay que resaltar que el cómputo en muchos de los casos es muy complicado si no imposible. Luego se presentan algunos ejemplos del cómputo de invariantes que permiten ilustrar el procedimiento general. Finalmente se expone una formulación de la teoría de invariantes haciendo uso de herramientas como distribuciones, haces y sistemas de Pfaff, conceptos que además de proveer un lenguaje elegante y geométrico, ayudan a clarificar algunos puntos de la teoría.

Invariantes de Acciones

Sea M una variedad suave y G un grupo de Lie, con elemento identidad e. Una acción suave por la izquierda de G en M está dada por una aplicación suave $\phi : G \times M \to M$. Es usual denotar esta aplicación por $\phi(g, m) = g \cdot m$ y debe satisfacer las siguientes propiedades:

- ▷ Para cada $p \in M$ se tiene $e \cdot p = p$.
- ▷ Para todo $g, h \in G$ y todo $p \in M$ se cumple que $g \cdot (h \cdot p) = (gh) \cdot p$.

Análogamente se define una acción suave a derecha $\psi : M \times G \to M$. En este caso debe cumplirse que

- ▷ Para cada $p \in M$ se tiene $p \cdot e = p$.
- ▷ para todo $g, h \in G$ y todo $p \in M$ se tiene que $(p \cdot g) \cdot h = p \cdot (gh)$.

Una variedad M sobre la cual actúa un grupo de Lie G también se conoce como una ***G*-variedad**.

Relación Entre las Acciones Izquierdas y Derechas

Es posible determinar cierta relación que existe entre las acciones derechas e izquierdas. Si ϕ es una acción izquierda de G en M, entonces ϕ induce un morfismo de grupos $\overline{\phi} : G \to \operatorname{Diff} M$ de modo que para $g \in G$ el difeomorfismo

$$\overline{\phi}(g) = \overline{\phi}_g : M \to M \text{ es tal que } \overline{\phi}_g(m) = g \cdot m.$$

Recíprocamente, un morfismo $\overline{\phi} : G \to \operatorname{Diff} M$ tiene asociada una acción izquierda de G en M dada por

$$g \cdot m = \overline{\phi}_g(m),$$

la cual no necesariamente tiene que ser suave.

Es posible dotar de una estructura suave a $\operatorname{Diff} M$ que remedie esta situación, pero no se trata esa cuestión aquí. Por otra parte, si ψ es una acción derecha, la aplicación $\overline{\psi} : G \to \operatorname{Diff} M$ tal que $\overline{\psi}_g(m) = m \cdot g$ satisface $\overline{\psi}_{gh} = \overline{\psi}_h \overline{\psi}_g$, esto es que $\overline{\psi}$ es un antimorfismo.

El hecho de que una acción a izquierda induzca un morfismo y una acción derecha induzca un antimorfismo proviene de la convención adoptada para la composición de aplicaciones. En este caso se ha utilizado la convención $f \circ g = f(g(x))$.

Ahora sea $i : G \to G$ la aplicación inversión que a cada $g \in G$ le asocia su inverso. Puede considerarse además la aplicación que esta induce, a saber

$$i^* : \operatorname{Hom}(G, \operatorname{Diff} M) \to \operatorname{Anti} \operatorname{Hom}(G, \operatorname{Diff} M),$$

dada por $i^*\phi = \phi \circ i$. Es fácil verificar que si ϕ es un morfismo entonces $i^*\phi$ es un antimorfismo y viceversa. Además, dado que $i^2 = Id$ se tiene que $i^{*2} = Id$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "i^*\phi"'] & G \arrow[d, "\phi"] \\ & \operatorname{Diff} M \end{tikzcd}$$

De esta manera la aplicación i^* es una correspondencia entre morfismos y antimorfismos, y por tanto una correspondencia entre acciones derechas e izquierdas.

Diremos que una acción izquierda ϕ es **equivalente** a una acción derecha ψ si se cumple $i^*\psi = \phi$. Con esta terminología es posible describir la relación que existe entre acciones derechas e izquierdas: Si ϕ es una acción izquierda y ψ la acción derecha definida por $\psi(m, g) = \phi(g^{-1}, m)$ entonces ϕ y ψ son equivalentes.

$$i^*\overline{\psi}(g)(m) = \overline{\psi}(i(g))(m) = \psi(m, g^{-1}) = \phi(g, m) = \overline{\phi}(g)(m).$$

Conceptos Relacionados con Acciones

En esta sección se presentan brevemente algunas propiedades importantes que van apareciendo al trabajar con acciones de grupos. Sea ϕ una acción de G en M. El **estabilizador** G_p de un elemento p se define como el conjunto de elementos de G que fijan a p, esto es

$$G_p = \{g \in G \mid g \cdot p = p\}.$$

Para cada $p \in M$, su estabilizador G_p es un subgrupo cerrado de G. Para ver esto basta definir la aplicación $f : G \to M$ de modo que $f(g) = g \cdot p$, de donde $G_p = f^{-1}(\{p\})$ es cerrado pues $\{x\}$ es cerrado en M. Es más, por el teorema de Cartan, enunciado a continuación, se sigue que los estabilizadores son subgrupos de Lie.

> **Proposición 1.1 (Teorema de Cartan)** *Si $H \subseteq G$ es un subgrupo de un grupo de Lie que a su vez es topológicamente cerrado entonces H es un grupo de Lie. Además si $H \subseteq G$ es un subgrupo de Lie entonces G/H es de Lie.*

La acción $\phi : G \times M \to M$ se dice **fiel** si el morfismo que induce $\overline{\phi} : G \to \operatorname{Diff} M$ es inyectivo. En otros términos, si la acción es fiel, cada elemento distinto de la identidad mueve al menos un punto del espacio. En el caso de que una acción no sea fiel, es posible sin embargo obtener una acción fiel de $G/\ker\overline{\phi}$ en M declarando $[g] \cdot p = g \cdot p$.

Teorema 1.2 *Si ϕ es una acción suave de G en M y $\overline{\phi} : G \to \operatorname{Diff} M$ su morfismo inducido entonces $\ker \overline{\phi}$ es un subgrupo cerrado y la acción ψ de $G/\ker \overline{\phi}$ sobre M dada por $[x] \cdot p = x \cdot p$ es suave.*

Demostración. Puede verificarse que $\ker \overline{\phi} = \bigcap_{x \in M} G_x$. De esta manera, dado que los estabilizadores son subgrupos cerrados, se sigue que $\ker \overline{\phi}$ es un subgrupo cerrado.

Ahora sea $[g] \in G/\ker \overline{\phi}$ y $\pi : G \to G/\ker \overline{\phi}$ la proyección canónica al cociente. Si U es una vecindad adecuada de $[g]$, como la acción $\ker \overline{\phi}$ en G siempre es regular, entonces existe una sección local $s : U \to G \times M$. Por tanto en dicha vecindad se puede escribir $\psi = \phi \circ (s \times Id_M)$ que es una composición de aplicaciones suaves. $\square$

La **órbita** de un elemento $p \in M$ es el conjunto

$$G \cdot p = \{g \cdot p \mid g \in G\}.$$

Más en general, para un subconjunto $A \subset M$ es costumbre denotar por $G \cdot A = \{g \cdot a \mid g \in G, \quad a \in A\}$ a la colección formada por la unión de las órbitas de los elementos de A.

Se dice que $p \in M$ es un **punto fijo** de la acción si $G \cdot p = \{p\}$. Que p sea un punto fijo es equivalente a que G_p coincida con G. En general, un subconjunto $A \subseteq M$ se dice ***G*-invariante** si $G \cdot A \subseteq A$. Notar que esto implica que $G \cdot A = A$.

Una acción se dice **libre** si cada punto de M tiene estabilizador trivial. Esta condición es equivalente a la siguiente: si $g \in G$ es diferente de la identidad entonces $g \cdot p \neq p$ para cada $p \in M$. En otras palabras, el único elemento que fija todo M es la identidad. Una acción es **localmente libre** si los estabilizadores G_p son discretos para cada $p \in M$. El hecho de ser localmente libre está relacionado con la dimensión de las órbitas. Más precisamente se tiene el siguiente resultado. Los detalles pueden consultarse en [Olv95].

Proposición 1.3 *Un grupo de Lie G actúa localmente libre sobre M si y solo si todas las órbitas tienen la misma dimensión y esta coincide con la dimensión de G.*

Ejemplos.

1. Una acción ϕ del grupo $SO(2)$ sobre $\mathbb{R}^2$ está dada por la rotación alrededor del cero. Explícitamente un elemento de $SO(2)$ puede escribirse como

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Para cierto ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$.

La acción está dada entonces por $\phi(R_\theta, X) = R_\theta X$. El estabilizador de p es trivial si p es distinto del cero y es todo el grupo cuando $p = 0$. Así el único punto fijo de esta acción es el cero. Un punto $p \in \mathbb{R}^2$ tiene como órbita la circunferenica con centro en cero y radio $\|p\|$,

$$\mathcal{O}_p = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|z\| = \|p\|\}.$$

Notar que la acción es fiel. Como órbitas son circunferencias alrededor del origen y el origen mismo, la acción no es transitiva. Además el estabilizador del origen es todo el grupo de manera que la acción no es libre. Sin embargo en este caso la libertad puede obtenerse con facilidad, ya que la acción es libre sobre $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

2. Si G es un grupo de Lie entonces G actúa sobre si mismo por translación izquierda, $g \cdot h = gh$. Esta acción es transitiva, libre y fiel.

3. La acción de $GL(n, \mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}^n$, dada por la multiplicación de una matriz por un vector es fiel, pero no es transitiva ni libre. Se observa que $GL(n, \mathbb{R})$ actúa transitivamente sobre $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

4. Considere el espacio $M = \mathbb{RP}^1$ conocido como la *línea proyectiva.* Si se utilizan coordenadas homogéneas en M entonces un vector (x, y) en $\mathbb{R}^2$ se identifica con todos los vectores sobre la linea que este genera y esta se denota $[x, y]$; Una manera en que el grupo $G = SL(2, \mathbb{R})$ actúa sobre M es declarando

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}.$$

Esta acción no es fiel ya que $-Id$ fija todo el espacio. Tampoco es libre. La acción es transitiva. Para ver esto basta observar que todo punto $[z, w]$ puede llevarse al punto $[0, 1]$ mediante la matriz

$$\begin{pmatrix} z & 0 \\ w & 1/z \end{pmatrix} \text{ si } z \neq 0 \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} w & 0 \\ z & 1/w \end{pmatrix} \text{ si } w \neq 0.$$

Otra manera de escribir la acción anterior es posible al identificar $\mathbb{RP}^1$ con $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ de manera que $[x, y]$ venga a ser x/y cuando $y \neq 0$ y $[1, 0]$ cuando el punto es el infinito. En estos términos la acción es

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Equivarianza e Invarianza

Las G-variedades permiten capturar nociones importantes, sin embargo para explotar toda su estructura se necesitan aplicaciones que se comporten bien respecto a las acciones subyacentes. Esto conduce al concepto de equivarianza. Si M y N son dos G-variedades, un ***G*-morfismo** o **aplicación equivariante** es una aplicación suave $\rho : M \to N$ que verifica

$$\rho(g \cdot p) = g\rho(p)$$

para todo $g \in G$ y todo $p \in M$. Se dice que M y N son G -isomorfas si existe una aplicación G-equivariante entre ellas que además sea un difeomorfismo. La equivarianza se resume en la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "g"] & N \\ M \arrow[u, "\rho"] \arrow[r, "g"'] & M \arrow[u, "\rho"'] \end{tikzcd}$$

También se define la equivarianza de manera local, de modo que una aplicación $\rho : U \to N$ es **localmente equivariante** si la fórmula $\rho(g \cdot p) = g\rho(p)$ se satisface en cierto abierto $G-$invariante U de M. Notar que una aplicación localmente equivariante no levanta necesariamente a una aplicación equivariante global $G \cdot U \to N$.

Si M es una $G-$variedad, automáticamente se obtiene una acción de G sobre el anillo de funciones $C^\infty M$ dada por

$$C^\infty M \times G \to C^\infty M, \qquad \begin{aligned} f \cdot g &: M \to \mathbb{R} \\ (f \cdot g)(p) &= f(g \cdot p). \end{aligned}$$

Notar que cada $g \in G$ induce un automorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras de $C^\infty M$. Ahora se define el objeto principal de trabajo. Una función $f \in C^\infty M$ se dice ***G*-invariante** si posee alguna de las siguientes propiedades equivalentes

1. f es constante sobre las órbitas de G.
2. $f \cdot G = \{f\}$.
3. Los conjuntos $\{x \mid f(x) = c\}$ para c constante son subconjuntos G-invariantes de M.

Ejemplo 1.4 El grupo $O(n, \mathbb{R})$ de matrices ortogonales $n \times n$ con entradas en $\mathbb{R}$ actúa sobre $\mathbb{R}^n$ mediante la multiplicación usual de una matriz por un vector. Sus órbitas son esferas $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = c\}$ para $c \geq 0$. Es claro que la aplicación $\|*\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es constante sobre las órbitas y así es un invariante de dicha acción. La función $\|*\|$ está en $C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$ y no en $C^\infty\mathbb{R}^n$. No obstante, su cuadrado, que también es invariante, es suave en todo $\mathbb{R}^n$, o más brevemente $\|*\|^2 \in C^\infty\mathbb{R}^n$.

Al conjunto de funciones G-invariantes se le denota por $C^\infty M^G$ y es una subálgebra de $C^\infty M$.

Los invariantes que se han definido anteriormente están definidos globalmente en el sentido que involucran el grupo y la variedad en su totalidad. No obstante, estos invariantes no son los que aparecen con mayor frecuencia en las aplicaciones y su determinación puede llegar a ser muy difícil. Esto lleva a considerar los invariantes locales.

Dado un abierto $U \subseteq M$, una función $f \in C^\infty M$ se dice **invariante local** si $f(g \cdot p) = f(p)$ para cada $p \in U$ y cada g en cierto entorno de la identidad, el cual puede depender de p.

Una acción se dice **regular** si la foliación que forman sus órbitas es regular.

Teorema 1.5 *Suponga que G actúa regularmente en M y sus órbitas tienen dimensión r. Para cada $p \in M$ existe un abierto U coordenado por funciones $(y_1, \ldots, y_r, z_1, \ldots, z_{m-r})$ de manera que para cada $q \in U$ $\{z_1 = z_1(q), \ldots, z_{m-r} = z_{m-r}(q)\}$ es la componente conexa de $G \cdot q \cap U$ que contiene a q.*

El teorema anterior dice en otras palabras, que las componentes conexas en el abierto U de las órbitas de la acción intersectan exactamente en un punto a cada rodaja de la forma $\{y = \lambda\}$, ver por ejemplo [FO98].

Dada una G-variedad surge naturalmente el problema de determinar si dos puntos están o no en la misma órbita. Aquí los invariantes pueden ser útiles. Se dice que una función invariante **separa órbitas** si toma valores diferentes en cada una de ellas. En general, se dice que $f_1, \ldots, f_k$ separan las órbitas cuando cada par de órbitas es separado por alguna de las f_i. De esta manera disponer de suficientes invariantes que separen las órbitas permite distinguir las órbitas y los puntos que están en ellas.

Esta es una de tantas razones por las que es importante tener métodos para calcular suficientes invariantes de una acción. La siguiente sección presenta el método de Cartan para hallar invariantes, en términos de aplicaciones equivariantes, como se expone en [FO99].

Referente Móvil Equivariante

El método del referente móvil fue descrito inicialmente por Darboux y luego desarrollado por Cartan. Su presentación moderna mediante aplicaciones equivariantes, introducido por Olver y Fels [FO98], [FO99] es el objeto de esta sección. En términos generales el método consiste en construir un referente móvil haciendo uso de una sección transversal apropiada. Como será aparente más adelante, la elección adecuada de una sección transversal puede facilitar y simplificar enormemente los cálculos involucrados.

Sea M una G-variedad. Un **referente móvil** es una aplicación equivariante $\rho : M \to G$. Notar que hay dos acciones naturales del grupo G en si mismo, a saber, la multiplicación por izquierda y por derecha. De esta manera la equivarianza tiene cuatro expresiones diferentes posibles:

	G actúa por der.		G actúa por izq.
a)	$\rho(p \cdot g) = \rho(p)g$	c)	$\rho(g \cdot p) = \rho(p)g^{-1}$
b)	$\rho(p \cdot g) = g^{-1}\rho(p)$	d)	$\rho(g \cdot p) = g\rho(p)$

Notar que si en c) se escribe $\rho(g \cdot p) = \rho(p)g$ no se cumpliría en general que $\rho((gh) \cdot p) = \rho(g \cdot (h \cdot p))$ mientras que con la expresión usada si se cumple.

Los referentes derechos ofrecen mayor facilidad al realizar cómputos, así que son estos los que se utilizarán en adelante. Sin embargo es bueno tener presente que los referentes derechos e izquierdos se relacionan de manera sencilla: si ρ es un referente derecho entonces $\tilde{\rho}(z) = \rho(z)^{-1}$ define un referente móvil izquierdo y viceversa.

Además de los referentes móviles equivariantes definidos en todo M, es usual tener referentes móviles definidos como $G \cdot U \to G$ en donde todavía se puede hablar de equivarianza y **referentes móviles localmente equivariantes**, que están definidos como $U \to G$ donde U es un abierto y para cada $p \in U$. la fórmula $\rho(g \cdot p) = g\rho(p)$ se verifica en un entorno suficientemente pequeño de la identidad de G. Este entorno dependerá del punto $p \in U$.

El teorema siguiente describe bajo que circunstancias está garantizada la existencia de un referente móvil, ver [Olv11].

Teorema 1.6 *Si M es una G-variedad entonces existe un referente móvil local en una vecindad de un punto $p \in M$ si y sólo si la acción de G en M es localmente libre en un abierto alrededor de p.*

Sea M una variedad de dimensión m y G un grupo de Lie r-dimensional. El teorema 1.6 asegura la existencia de un referente móvil pero deja el problema de su construcción explícita. Dicha construcción se basa en la elección de una sección transversal. Se dice que una subvariedad $S \subseteq M$ es una **sección transversal completa** si S intersecta transversalmente cada una de las órbitas exactamente una vez.

La manera como se utiliza la sección para construir el referente es simple: El referente será la aplicación que a cada elemento $p \in M$ le asocia el único elemento $\rho(p) \in G$ que lleva p hasta la intersección de su órbita con la sección transversal. Esto se recoge en el siguiente teorema, ver [Olv11].

Teorema 1.7 *Si G actúa libre y regularmente sobre M y $S \subseteq M$ es una sección transversal completa entonces para $p \in M$ el elemento $\rho(p)$ tal que $\rho(p) \cdot p \in \mathcal{O}(p) \cap S$ es único y la aplicación que se obtiene $\rho : M \to G$ es un referente móvil.*

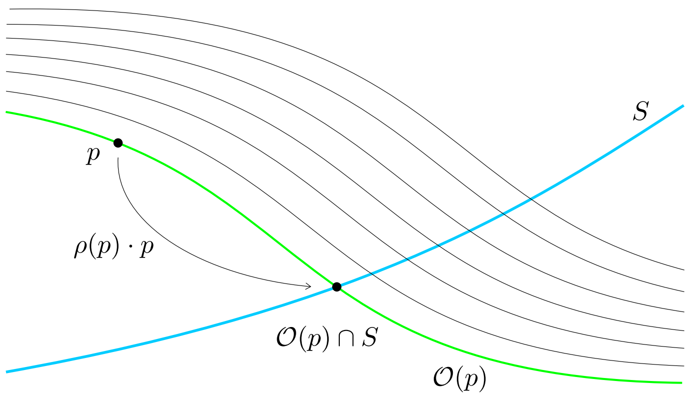

Figura 1.1: Construcción de un referente móvil usando una sección transversal.

Es poco frecuente disponer de una sección transversal que sea completa. Por esta razón suelen eliminarse algunas órbitas, obteniendose de esta manera una sección transversal completa en una sub G-variedad abierta de M.

Es usual describir una subvariedad $S \subseteq M$ de dimensión $m - r$ escogiendo adecuadamente un sistema de coordenadas para M, a saber, $z_1, \ldots, z_m$ de tal manera que la subvariedad S esté dada por las ecuaciones

$$z_1 = c_1, \ldots, z_r = c_r$$

para ciertas constantes $c_1, \ldots, c_r$. Entonces si se dispone de una sección transversal en las condiciones mencionadas, la construcción de un referente móvil se traduce en la búsqueda de soluciones al sistema de ecuaciones

$$z_1(g \cdot z) = c_1, \ldots, z_r(g \cdot z) = c_r$$

para hallar los elementos del grupo en términos de las coordenadas $z_1, \ldots, z_m$. La solubilidad de este sistema está garantizada por la condición de transversalidad y el teorema de la función implícita.

Acciones propias Una acción $\phi : G \times M \to M$ se dice **propia** si las preimagenes de los puntos de $M \times M$ a través de la aplicación $\phi \times Id : G \times M \to M \times M$ tal que $(g, x) \mapsto (gx, x)$ son compactos y además se cumple que $\phi \times Id$ es cerrada.

Notar que en particular si la acción ϕ es libre y cerrada entonces es propia. El teorema de Palais [Pal61] garantiza entonces que:

Teorema 1.8 *Si ϕ es una acción libre y cerrada, alrededor de cada punto $p \in M$ existe un abierto $G-$invariante U y una sección transversal completa de la acción ϕ de G en U.*

Invariantización

Una vez se ha construido un referente móvil local a partir de la escogencia de una sección transversal local, se tiene a disposición automáticamente, un proceso de invariantización. Este proceso le asocia a cada función en $C^\infty U$, para U abierto en M, un invariante local. En [Olv11] se describe porqué la invariantización y sus implicaciones hacen más poderoso el método del referente móvil equivariante comparado con otras teorías de referentes móviles.

Dada una función $f \in C^\infty U$, su **invariantización** $I(f)$ está dada por la única función invariante que coincide con f en la sección transversal:

$$I(f) = f(\rho(z) \cdot z).$$

En otras palabras, la función invariantizada toma un valor constante sobre cada órbita igual al de la función original en la intersección de la órbita con la sección. Si llega a suceder que $U = M$, el proceso de invariantización permite obtener invariantes globales.

Suponga que localmente la variedad M está coordenada por funciones $z_1, \ldots, z_n$. Al invariantizar dichas se funciones coordenadas se obtienen los llamados **invariantes fundamentales**. Ahora si dichas coordenadas han sido seleccionadas de manera que la sección transversal S esté definida por las ecuaciones

$$z_1 = \lambda_1, \ldots, z_r = \lambda_r$$

para $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ ciertas constantes, entonces es claro que la invariantización de estas r coordenadas es constante. Es mas, al invariantizar las $m - r$ funciones coordenadas restantes se obtienen $m - r$ invariantes funcionalmente independientes, $I(z_{r+1}), \ldots, I(z_m)$, los cuales se conocen como **invariantes básicos**.

El Problema de Ser Libre

La teoría expuesta hasta el momento proporciona un método para el cómputo de invariantes. No obstante se asume que la acción es localmente libre para el cálculo de invariantes locales, o libre y cerrada para hallar invariantes globales. Estas no son propiedades que compartan la mayoría de las acciones que se encuentran por lo general en las aplicaciones [HK07]. Así llega a ser patente la utilidad de procedimientos que permitan obtener acciones libres (localmente) a partir de otras que no lo son.

En este sentido existen dos caminos principales. El primero consiste en extender diagonalmente la acción del grupo al producto cartesiano $M \times \cdots \times M$ tantas veces como sea necesario. Esto usualmente produce una acción libre en un abierto denso del producto cartesiano y desemboca en los llamados invariantes de configuración.

El segundo camino considera la prolongación de la acción a los espacios de Jets asociados a la variedad, produce usualmente acciones libres y va de la mano con los invariantes diferenciales.

Uno de los objetivos principales de esta tesis es encontrar formas de obtener invariantes diferenciales a partir de invariantes de configuración. En los capítulos posteriores se detallan los avances en este sentido. El resto del presente capítulo se dedica a ejemplos y el desarrollo de algunas herramientas geométricas útiles al trabajo.

Ejemplo 1.9

Se presenta aquí un ejemplo sencillo de una acción libre, se muestra uno de los posibles referentes móviles y los invariantes básicos de la acción respecto a este referente.

La acción es del grupo aditivo $G = \mathbb{R}$ sobre la variedad $M = \mathbb{R}^n$ y está dada por

$$t \cdot (z_1, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, z_n) + t(1, \ldots, 1)$$

Es evidente que el único elemento que fija todo M es la identidad de modo que la acción es libre. Además las órbitas forman una foliación regular. Así el teorema 1.6 asegura la existencia de un referente móvil. Para construir uno se elige la sección transversal dada por el hiperplano $z_1 \cdots z_{n-1}$, esto es, $S = \{z_n = 0\}$. Determinar el elemento g del grupo que lleva un $z \in M$ hasta la intersección de su órbita con la sección transversal equivale a resolver para g el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} z_1 + g &= c_1 \\ &\vdots \\ z_{n-1} + g &= c_{n-1} \\ z_n + g &= 0 \end{aligned}$$

Lo cual da $g = -z_n$. Así el referente móvil que se obtiene es $\rho : M \to G$ dado, para $p = (p_1, \dots, p_n)$ por

$$\rho(p) = -p_n.$$

En este momento es posible calcular los invariantes básicos, invariantizando las funciones coordenadas z_i con $1 \le i \le n-1$:

$$I(z_i)(p) = z_i(\rho(p) \cdot p) = z_i(-p_n \cdot p) = p_i - p_n.$$

Cualquier invariante de esta acción será funcionalmente dependiente de este conjunto de invariantes. Notar que el proceso de invariantización puede aplicarse a cualquier función $f \in C^\infty M$. Por ejemplo, en el caso $n = 2$ si se considera la función $f : M \to \mathbb{R}$ tal que $f(z_1, z_2) = 1 - \frac{z_1 + z_2}{z_1^2 + 1}$ su invariantización será

$$If(z) = f(\rho(z) \cdot z) = 1 - \frac{z_1 - z_2}{(z_1 - z_2)^2 + 1}.$$

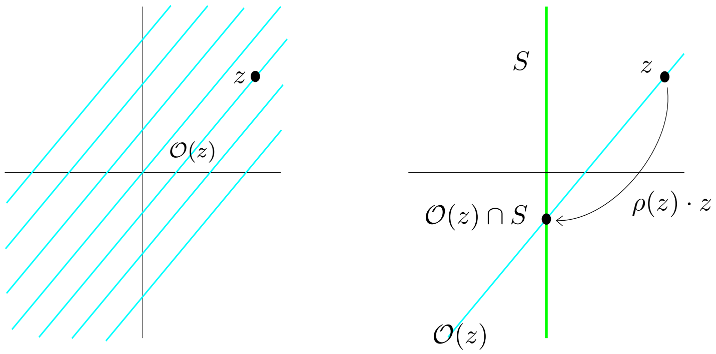

Figura 1.2: Órbitas de la acción del Ejemplo 1.9 para $n = 2$ y una sección transversal.

Generadores Infinitesimales, Distribuciones y Dependencia Funcional

Sea M una $G-$variedad, donde el grupo actúa por la izquierda. Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G. Se tiene una aplicación que a cada elemento del álgebra de Lie le asocia un campo en M, a saber $\operatorname{ginf} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ tal que $A \mapsto \operatorname{ginf}(A)$. El generador infinitesimal ginf está definido por

$$\operatorname{ginf}(A)_p = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tA) \cdot p.$$

Recordar que el álgebra de Lie es isomorfa al espacio tangente a la identidad del grupo G y a su vez isomorfa al espacio de todos los campos invariantes a izquierda.

Si $A \in T_eG$ es un vector tangente, es posible extenderlo a todo G y obtener así un campo, haciendo

$$(A^L)_g = dL_g(A)$$

De esta manera para $A, B \in T_eG$ es posible calcular su paréntesis de Lie usando sus campos extendidos:

$$[A, B] = [A^L, B^L]_e$$

Lema 1.10 *Sea $\alpha : G \times M \to M$ una acción sobreyectiva. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ es invariante por derecha, entonces es proyectable por α.*

Demostración. Supongamos que $(g, p) \mapsto q$ y que $(h, p') \mapsto q$. Veamos que $d\alpha(X_{(g,p)}) = d\alpha(X_{(h,p)})$. Tenemos, para $A = X_e$, que

$$d\alpha(X_{(g,p)}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tA)g \cdot p$$
$$d\alpha(X_{(gh,p)}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tA)h \cdot p'$$

y ambas expresiones en la derecha coinciden con $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tA)q$. □

Corolario 1.11 *Si A y B son vectores en T_eG entonces*

$$\operatorname{ginf}[A, B] = -[\operatorname{ginf} B, \operatorname{ginf} A].$$

Una **distribución regular** $\mathcal{L}$ de rango k en una variedad M es una colección de subespacios k-dimensionales $\mathcal{L}_p \subseteq T_pM$ para cada $p \in M$ de modo que la asignación $p \mapsto \mathcal{L}_p$ sea suave. En este caso la suavidad se refiere a alguna de las condiciones siguientes, que son equivalentes:

1. Localmente la distribución coincide con el espacio generado por k campos vectoriales linealmente independientes.

2. La distribución $\mathcal{L} = \cup_{p \in M} \mathcal{L}_p$ es un fibrado vectorial de rango k sobre M.

Se define la **distribución asociada** a la acción como

$$\mathcal{L}_p = \langle \mathrm{ginf}(A)_p \mid A \in \mathfrak{g} \rangle.$$

Notar que por la misma definición $T_p(G \cdot p) = \mathcal{L}_p$ Si $\dim \mathrm{Est} : M \to \mathbb{N}$ es constante entonces $\mathcal{L}$ es una distribución regular. Es decir, la distribución asociada a una acción regular es una distribución regular. Por el corolario 1.11 se tiene que la distribución asociada es involutiva.

Invariantes y Generadores Infinitesimales

Los invariantes de una acción también pueden describirse en términos de los generadores infinitesimales [HK07].

Proposición 1.12 *Dada $f \in C^\infty U$, para $U \subseteq M$ abierto, se tiene que f es un invariante local si y solo si cumple que $\mathrm{ginf}(X)f = 0$ para todo vector tangente $X \in T_eG$.*

Así, en términos de distribuciones, los invariantes vienen a ser las integrales primeras de la distribución asociada a la acción o su sistema de Pfaff.

Teorema 1.13 *Si $f \in C^\infty M$ es un invariante local y G es un grupo conexo entonces f es un invariante.*

Sistemas de Pfaff Asociados

Existe una noción dual a la de distribución. Un **sistema de Pfaff** regular de rango r es una regla que a cada $p \in M$ le asigna un subespacio r-dimensional $\Omega_p \subseteq T_p^*M$. De nuevo la regla de asignación debe ser suave y las condiciones para que esto se cumpla son análogas.

Se define (Ω), el **ideal generado** por Ω como el ideal del álgebra exterior $\bigoplus_{k=1}^n \Omega^k M$ generado por las formas que contiene Ω y las que se pueden obtener a partir de estas con el producto cuña.

El **ideal diferencial** $\{\Omega\}$ generado por Ω se define como el ideal del álgebra exterior $\bigoplus_{k=1}^n \Omega^k M$ generado por las formas que están en Ω y las que se obtienen de estas al aplicar la diferencial.

Las distribuciones y los sistemas de Pfaff están íntimamente relacionados. A cada distribución le corresponde un sistema de Pfaff y viceversa. Así, dada la distribución $\mathcal{L}$ se define su **sistema de Pfaff asociado** como

$$\mathcal{L}^{\perp} = \{\omega \in \Omega^1 M \mid \omega(x) = 0 \text{ Para todo } X \in \mathcal{L}\}.$$

Una integral primera de una distribución $\mathcal{L}$ es una función $f \in C^{\infty}M$ tal que $Xf = 0$ para cada $X \in \mathcal{L}$. Por otra parte, una **integral primera** de un sistema de Pfaff $\Omega = \mathcal{L}^{\perp}$ es una función que satisfaga una de los siguientes enunciados, que son equivalentes:

1. $df \in \Omega$.
2. f es integral primera de $\mathcal{L}$.
3. Si Ω está generado por $\omega_1, \ldots, \omega_k$ entonces $df \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k = 0$.

Sea Ω un sistema de Pfaff regular. Las integrales primeras de Ω se denotarán por $\mathrm{Int}(\Omega)$. Entonces el sistema Ω se dice **integrable** siempre que se cumpla la igualdad $d(\mathrm{Int}(\Omega)) = \Omega$. El teorema de Frobenius, presentado a continuación, ofrece varias propiedades equivalentes a la integrabilidad de un sistema de Pfaff.

Teorema 1.14 (Frobenius) *Sea Ω un sistema de Pfaff de rango r y sea $\mathcal{L}$ su distribución asociada. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *Ω es integrable.*
2. *Si X y Y son dos campos vectoriales que están en $\mathcal{L}$ entonces $[X, Y] \in \mathcal{L}$. En otras palabras, $\mathcal{L}$ es estable bajo el paréntesis de Lie.*
3. *$\{\Omega\} = (\Omega)$.*
4. *En cada punto $p \in M$ existen r integrales primeras de Ω linealmente independientes en $C^{\infty}_p M$.*

Dependencia Funcional

Dadas k funciones $f_1, \ldots, f_k$ en $C^{\infty}M$, se dice que son **funcionalmente dependientes** si existe una función H definida en un abierto que contenga la imagen de $(f_1, \ldots, f_k)$, de manera que se verifique la relación

$$H(f_1(p), \ldots, f_k(p)) = 0$$

para cada $p \in M$. La relación de dependencia funcional se dice **no trivial** en un punto $p \in M$ cuando $d_{(f(p), \ldots, f_k(p))} H \neq 0$.

Proposición 1.15 *Si las funciones $f_1, \ldots, f_k \in C^\infty M$ son funcionalmente dependientes de manera no trivial alrededor de un punto p entonces sus diferenciales $d_p f_1, \ldots, d_p f_k$ son linealmente dependientes.*

La proposición anterior permite definir lo siguiente. Las funciones $f_1, \ldots, f_k \in C^\infty M$ se dicen **funcionalmente independientes** si sus diferenciales son funcionalmente independientes en cada uno de los puntos de M [BSA14b].

Teorema 1.16 (Dependencia Funcional) *Sean $f_1, \ldots, f_k$ funcionalmente dependientes y F una función tal que para cada $p \in M$ la diferencial $d_p F$ es combinación lineal de las diferenciales $d_p f_1, \ldots, d_p f_k$. Entonces en un entorno de cada $p \in M$ existe una relación de dependencia funcional entre $f_1, \ldots, f_k, F$, de modo que F puede escribirse como función de $f_1, \ldots, f_k$ en dicho entorno.*

Haces y Pullback de Invariantes

A menudo se encuentra que los invariantes de una acción solo están definidos localmente. Esta naturaleza local hace que sea apropiado introducir la terminología de haces en el estudio de los invariantes.

Un **haz de anillos regulares** de dimensión k en una variedad M es un haz de integrales primeras de un sistema de Pfaff regular integrable de rango k.

Dados subhaces $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ del haz $C^\infty_M(\cdot)$ surge la pregunta ¿cuando toda sección de $\mathcal{C}$ depende funcionalmente de las secciones de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$? Para responder esto se introduce un concepto nuevo, a saber, el haz producto $\boldsymbol{\mathcal{A} * \mathcal{B}}$ tal que a cada abierto U le asigna el anillo

$$\{f \in C^\infty U \mid df \in (d\mathcal{A}(U), d\mathcal{B}(U))\}$$

donde $d\mathcal{A}(U)$ denota el conjunto de diferenciales de elementos de $\mathcal{A}(U)$.

Proposición 1.17 *Si $\mathcal{A}(U)$ consiste de las integrales primeras de $\mathcal{L}_\mathcal{A}$ en el abierto U con $\Omega_\mathcal{A} = d\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}(U)$ las integrales primeras de $\mathcal{L}_\mathcal{B}$, con $\Omega_\mathcal{B} = d\mathcal{B}$ entonces $(\mathcal{A} * \mathcal{B})(U)$ consiste de las integrales primeras de $\mathcal{L}_\mathcal{A} \cap \mathcal{L}_\mathcal{B}$ en U.*

Demostración. Sea $f \in (\mathcal{A} * \mathcal{B})(U)$. Entonces la diferencial df puede escribirse en cada punto $p \in U$ como una combinación lineal de diferenciales de elementos de $\mathcal{A}(U)$ y $\mathcal{B}(U)$:

$$df = \sum_{i=1}^{l} dh_i + \sum_{j=1}^{k} dg_{j+l}$$

en donde $h_i \in \mathcal{A}(U)$ y $g_{j+l} \in \mathcal{B}(U)$ para $i = 1, \ldots, l$ y $j = 1, \ldots, k$. Así, para $X \in \mathcal{L}_A \cap \mathcal{L}_B$ se tiene que

$$df(X) = \sum_{i=1}^{l} Xh_i + \sum_{j=1}^{k} Xg_{j+l} = 0$$

lo cual muestra que f es una integral primera de $\mathcal{L}_A \cap \mathcal{L}_B$. Ahora suponga que f es una integral primera de $\mathcal{L}_A \cap \mathcal{L}_B$. Como consecuencia, f es una integral primera de los sistemas de Pfaff Ω_A y Ω_B simultáneamente Por tanto f es funcionalmente dependiente de elementos de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. De aquí se sigue que $df \in (d\mathcal{A}(U), d\mathcal{B}(U))$. Así se concluye que $f \in (\mathcal{A} * \mathcal{B})(U)$. $\square$

Anillos de Invariantes bajo Aplicaciones Equivariantes

Sea $\phi : M \to N$ una aplicación regular y equivariante entre G-variedades. Si $\mathcal{L}^M$ y $\mathcal{L}^N$ denotan las distribuciones asociadas a M y N mediante G, se observa que la equivarianza implica $d\phi(\mathcal{L}^M) \subseteq \mathcal{L}^N$. Se tiene entonces el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \phi^* C_N^\infty(\cdot) & \longleftarrow & C_N^\infty(\cdot) \\ & & \supset \\ \phi^* C_N^\infty(\cdot)^G & \longleftarrow & C_N^\infty(\cdot)^G \end{array}$$

Esto sugiere la pregunta ¿Cómo puede describirse el anillo $\phi^* C_N^\infty(\cdot)^G$? Si se supone que $\mathcal{L}^M \cap \ker d\phi = 0$ entonces se tiene que $\phi^*(C_N^\infty(\cdot)^G)$ es precisamente el conjunto de integrales primeras de la distribución $\mathcal{L}^M \oplus \ker d\phi$. Notar que la hipótesis $\mathcal{L}^M \cap \ker d\phi = 0$ se cumple en el caso en que los rangos de $\mathcal{L}^M$ y $\mathcal{L}^N$ coinciden.

Proposición 1.18 *Si $\mathcal{L}^M \cap \ker d\phi = 0$ entonces para cada abierto U de N se tiene que $\phi^*(C_N^\infty(U)^G)$ es el conjunto de integrales primeras de $\mathcal{L}^M \oplus \ker d\phi$ en U.*

Demostración. Sea $V = \phi^{-1}(U)$ y sean Ω^M y Ω^N los sistemas de Pfaff asociados a $\mathcal{L}^M$ y $\mathcal{L}^N$ respectivamente. Si $f \in C_N^\infty(U)^G$ entonces $df \in \Omega^N|_U$ puesto que si f invariante, es anulada por todo elemento de $\mathcal{L}^N|_U$. Notar que $d(\phi^* f) \in \Omega^M|_V$, de modo que $(\phi^* df)(X) = 0$ para cada $X \in \mathcal{L}^M|_V$. Además $d\phi^* f|_{\ker d\phi} = 0$. Así $\phi^* f$ es una integral primera de $\mathcal{L}^M \oplus \ker d\phi$ en el abierto U.

Por otra parte si h es una integral primera de $\mathcal{L}^M \oplus \ker d\phi$ en V entonces en particular lo es de $\ker d\phi$. Luego $h = \phi^* g$ para cierta $g \in C_N^\infty(U)$. Se tiene que

$$0 = dh(X) = dg\, d\phi(X) = dg(Z)$$

para $Z \in \mathcal{L}^N$ y $X \in L^M \oplus \ker d\phi$. De aquí se sigue que g es integral primera de $\mathcal{L}^N$ y por tanto $g \in C_N^\infty(\cdot)^G$ $\square$

Capítulo 2

Invariantes de Configuración

Se da aquí una breve introducción a la teoría de los invariantes de configuración. Como se observó en el primer capítulo, existen acciones de grupos que no son libres, a partir de las cuales, sin embargo, pueden obtenerse nuevas acciones que si lo son, utilizando ciertos procedimientos. Uno de estos procedimientos consiste en tomar una acción definida en una variedad M y extenderla diagonalmente al producto $M \times \cdots \times M$ tantas veces como sea necesario [Olv01]. Esto desemboca en los llamados *invariantes de configuración*. La otra alternativa clásica consiste en extender la acción a los espacios de Jets de la variedad y esta se desarrolla en el capítulo 3.

Nociones geométricas como la distancia entre dos puntos, el área de un triángulo determinado por tres puntos no colineales o en general volúmenes, son ejemplos básicos de invariantes de configuración de la geometría euclídea

Primero se estudian algunos ejemplos ilustrativos del cálculo de invariantes de configuración. Luego se plantea el problema de la dependencia funcional de los invariantes de $n-$puntos respecto a los de $k-$puntos, para $k \leq n$.

Se presentan dos casos elementales en donde se han derivado condiciones para que los invariantes en M^n puedan construirse mediante pullback de los anillos de invariantes en productos M^k con un menor número de componentes $k \leq n$. Seguidamente se presenta una condición necesaria para que los invariantes de n puntos puedan obtenerse de la manera descrita anteriormente, usando las proyecciones $\pi_i : M^n \to M^{n-1}$ que "olvidan" el $i-$ésimo factor. Esto es una versión para los invariantes de configuración del teorema de Lie-Tresse para los invariantes diferenciales, el cual, aparentemente no se encuentra en la literatura matemática contemporánea. Finalmente se cierra el capítulo con una condición para que los invariantes de n puntos puedan describirse usando apenas dos de estas proyecciones.

Invariantes de Configuración

Dado un grupo de Lie G actuando sobre una variedad M, es posible considerar la acción de G sobre el producto M^n extendiendo diagonalmente:

$$g \cdot (z_1, \dots z_n) = (g \cdot z, \dots, g \cdot z_n).$$

Un invariante de esta acción se conoce como un **invariante de $n-$puntos** o **invariante de configuración**. A continuación se presentan algunos ejemplos donde se calculan invariantes de configuración haciendo uso del método del referente móvil.

Ejemplo 2.1 Considere el grupo $G = SL(2, \mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R}^2$, de transformaciones que preservan el área, actuando sobre $M = \mathbb{R}^2$. La acción esta dada por $(A, d) \cdot x = Ax + d$. Si se extiende diagonalmente al producto M^3 se tiene, para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ que la acción está dada por

$$(A, d) \cdot (x, y, z) = (Ax + d, Ay + d, Az + d) := (w_1, w_2, w_3)$$

Para determinar los invariantes se utilizará la sección dada por

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix},$$

El número λ se especifica de manera que la matriz del referente tenga determinante igual a 1. Notar que las ecuaciones que definen la sección pueden escribirse de forma compacta como

$$AR = \Lambda \qquad \text{donde} \quad R = (y - x, z - x) \quad \text{y} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \lambda \end{pmatrix}.$$

El invariante que se va a obtener es un múltiplo del área delimitada por los vectores $y - x$ y $z - x$. Por tanto, es natural exigir que estos dos vectores sean linealmente independientes, lo cual además permite solucionar el sistema $AR = \Lambda$.

En el momento de hallar el valor de λ basta notar que la imposición $A \in SL(2, \mathbb{R})$ implica $\det A = \det \Lambda \det Z^{-1} = 1$ de donde se sigue que $\lambda = \det Z$. La primera ecuación que define la sección determina $d = -Ax$. Además se tiene

$$A = \Lambda R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda}(z_2 - x_2) & \frac{1}{\lambda}(x_1 - z_1) \\ x_2 - y_2 & y_1 - x_1\lambda \end{pmatrix}$$

Con todo esto, el referente móvil $\rho : M \to G$ está dado por

$$\rho(x, y, z) = (A, -Ax).$$

Notar que el único invariante no trivial que se tiene aparece al invariantizar la coordenada z_2 y da precisamente $\lambda = \det R$, o en otros términos, $z_2(\rho(x, y, z) \cdot (x, y, z)) = \det R$.

Ejemplo 2.2 Considérese la acción del grupo $ASO(2)$ sobre $\mathbb{R}^2$ y su extensión diagonal a $(\mathbb{R}^2)^2$. Esta acción consiste en una rotación y una traslación, de manera que podemos escribirla como sigue

$$(\phi, a, b) \cdot (x, y) = \left(R_\phi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, R_\phi \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)$$

donde $R_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$.

Tomemos la sección transversal determinada por $x_1 = x_2 = y_1 = 0$. Entonces para hallar el elemento del grupo que lleva un elemento dado a la intersección de su órbita con la sección transversal se resuelven las ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 \cos\phi - x_2 \operatorname{sen}\phi + a &= 0 \\ x_1 \operatorname{sen}\phi + x_2 \cos\phi + b &= 0 \\ y_1 \cos\phi - y_2 \operatorname{sen}\phi + a &= 0. \end{aligned}$$

De la tercera ecuación $a = y_2 \operatorname{sen}\phi - y_1 \cos\phi$ y esto en la primera ecuación produce

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y_1 - x_1}{y_2 - x_2}.$$

Sea $u = \frac{y_1 - x_1}{y_2 - x_2}$. Entonces $u^2 + 1 = 1/\cos^2\phi$ y $\operatorname{sen}^2\phi = u^2/(1 + u^2)$ de donde se obtiene

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} = \frac{y_2 - x_2}{\|y - x\|}, \qquad \operatorname{sen}\phi = \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{y_1 - x_1}{\|y - x\|}$$

De esto se obtienen los valores

$$a = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{\|y - x\|} \qquad b = \frac{x_1^2 + x_2^2 - x_1 y_1 - x_2 y_2}{\|y - x\|}.$$

Entonces al invariantizar la última coordenada se obtiene

$$\begin{aligned} \iota(y_2) &= y_1 \frac{y_1 - x_1}{\|y - x\|} + y_2 \frac{y_2 - x_2}{\|y - x\|} + \frac{x_1^2 + x_2^2 - x_1 y_1 - x_2 y_2}{\|y - x\|} \\ &= \|y - x\|. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3 Considere la acción de $ASO(2)$ sobre $(\mathbb{R}^2)$ y su extensión diagonal a $(\mathbb{R}^2)^3$. Se utilizará la misma sección transversal que en el ejemplo anterior, en este caso sobre tres puntos:

$$(\phi, a, b) \cdot (x, y, z) = \left(R_\phi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, R_\phi \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, R_\phi \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)$$

y se obtienen los mismos parámetros del grupo para el referente móvil. Además de invariantizar la cuarta coordenada, ahora quedan otras dos, a saber,

$$\begin{aligned} \iota(z_1) &= z_1 \frac{y_2 - x_2}{N} - z_2 \frac{y_1 - x_1}{N} + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{N} \\ &= N^{-1} \begin{vmatrix} z_1 & y_1 & x_1 \\ z_2 & y_2 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

donde $N = \|y - x\|$, y también

$$\iota(z_2) = N^{-1}\big(z_1(y_1 - x_1) + z_2(y_2 - x_2) + x_1^2 + x_2^2 - x_1 y_1 - x_2 y_2\big)$$

Ahora si $\pi_1(x, y, z) = (0, y, z)$, $\pi_2(x, y, z) = (x, 0, z)$ y $\pi_3(x, y, z) = (x, y, 0)$ entonces

$$\begin{aligned} \pi_1^* \|y - x\| &= \|z - y\| \\ \pi_2^* \|y - x\| &= \|z - x\| \\ \pi_3^* \|y - x\| &= \|y - x\| . \end{aligned}$$

Ejemplo 2.4 El grupo $\mathrm{Aff}(1, \mathbb{R})$ actúa sobre $\mathbb{R}$ y dicha acción extiende diagonalmente a $\mathbb{R}^3$. Esta extensión está dada explícitamente por $(a, b) \cdot (x, u, v) = (ax + b, au + b, av + b)$.

Se toma la sección $x = 1, u = -1$. Entonces para hallar el referente móvil solucionamos el sistema

$$ax + b = 1, \qquad au + b = -1.$$

La regla de Cramer da que

$$a = \frac{2}{x - u}, \qquad b = \frac{x + u}{u - x}.$$

Notar que la sección $x = 1, u = 1$ produce $a = 0, b = 0$.

Entonces al invariantizar la coordenada v se tiene

$$\iota(v) = \frac{2}{x - u} v + \frac{x + u}{u - x} = \frac{-2v + x + u}{u - x}.$$

Si se considera la acción de $\text{Aff}(1,\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}^{\times 4}$, en variables x, u, v, w, se puede tomar la misma sección transversal que se usó antes, y se tienen los mismos valores para a y b, de manera que aparece un invariante adicional:

$$\iota(w) = \frac{-2w + x + u}{u - x}.$$

Ejemplo 2.5 Considere la acción de $\text{Aff}(2,\mathbb{R}) = GL(2,\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}^2$. Un elemento (A, b) del grupo $\text{Aff}(2,\mathbb{R})$ actúa sobre una tupla $(x, y, z, w) \in (\mathbb{R}^2)^{\times 4}$ como sigue

$$(A, b)(x, y, z, w) = (Ax + b, \ldots, Aw + b).$$

Si se toma la sección transversal dada por $x_1 = 1, x_2 = 0, y_1 = 0, y_2 = 1, z_1 = z_2 = 0$ entonces para determinar los elementos del grupo que llevan una tupla a la sección transversal se tiene que resolver las ecuaciones

$$\begin{array}{rr}
a_1x_1 + a_2x_2 + b_1 = 1 & a_3x_1 + a_4x_2 + b_2 = 0 \\
a_1y_1 + a_2y_2 + b_1 = 0 & a_3y_1 + a_4y_2 + b_2 = 1 \\
a_1z_1 + a_2z_2 + b_1 = 0 & a_3z_1 + a_4z_2 + b_2 = 0
\end{array}$$

Si se utiliza la regla de Cramer para resolver el sistema formado por la primera, tercera y quinta ecuaciones, se obtiene, para $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ x_1 & x_2 & 1 \\ x_1 & x_2 & 1 \end{vmatrix}$

$$a = \frac{y_2 - z_2}{\Delta}, \quad a_2 = \frac{y_1 - z_1}{\Delta}, \quad b_1 = \frac{y_1z_2 - z_1y_2}{\Delta}.$$

Además resolviendo la segunda, cuarta y sexta ecuaciones se tiene

$$a_3 = \frac{x_2 - z_2}{\Delta}, \quad a_4 = \frac{x_1 - z_1}{\Delta} \quad b_2 = \frac{x_1z_2 - z_1x_2}{\Delta}$$

Ahora al invariantizar la séptima y octava coordenada:

$$\begin{aligned}
\iota(w_1) &= a_1w_1 + a_2w_2 + b_1|_{a_1=\cdots, a_2=\cdots} \\
&= \frac{y_2 - z_2}{\Delta}w_1 + \frac{y_1 - z_1}{\Delta}w_2 + \frac{y_1z_2 - z_1y_2}{\Delta} \\
&= \Delta^{-1} \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

similarmente se obtiene que

$$\iota(w_2) = \Delta^{-1} \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & 1 \\ x_1 & x_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Pullback de Invariantes Mediante Proyecciones

Sea G un grupo de Lie conexo. En el capítulo 1 se estudió en general el caso de una aplicación suave entre $G-$variedades $\phi : M \to N$ con distribuciones asociadas $\mathcal{L}^M$ y $\mathcal{L}^N$ respectivamente. En la proposición 1.18 se mostró como, asumiendo que $\mathcal{L}^M \cap \ker d\phi = 0$ se tiene para cada abierto U de N que $\phi^*(C^\infty_N U^G)$ coincide precisamente con el conjunto de integrales primeras de $\mathcal{L}^M \oplus \ker d\phi$ en U.

En esta sección se estudia un caso particular de la situación descrita en el párrafo anterior, en donde se tiene un producto M^n y aplicaciones proyección $\pi_i : M^n \to M^{n-1}$ tales que

$$\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n).$$

La distribución $\mathcal{L}$ en M asociada a la acción puede extenderse al producto M^n de manera que si $p = (p_1, \ldots, p_n) \in M^n$ se tenga

$$\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_{p_1} \times \cdots \times \mathcal{L}_{p_n} \subseteq T_p(M^n).$$

Al considerar las aplicaciones π_i para $i = 1, \ldots, n$ y los correspondientes núcleos de sus diferenciales $\ker d\pi_i$ los cuales son distribuciones en M^n, se plantea la siguiente cuestión:

Las integrales primeras de $d(\pi_i^*(C^\infty M^{n-1})^G)$ se componen de $C^\infty(M^n)^G$ junto con las funciones que son anuladas por los elementos de $\ker d\pi_i$. En otras palabras, $d(\pi_i^*(C^\infty M^{n-1})^G)$ viene a ser el conjunto de integrales primeras de $\mathcal{L}_p + \ker d\pi_i$. Vease la proposición 1.18.

Así, teniendo a disposición los haces $\pi_i^*(C^\infty M^{n-1^G})$ es natural preguntarse si su producto

$$W = \pi_1^*(C^\infty_{M^{n-1}}(\cdot)^G) * \cdots * \pi_n^*(C^\infty_{M^{n-1}}(\cdot)^G)$$

coincide con el haz de invariantes $C^\infty_{M^n}(\cdot)^G$. Según la proposición 1.17 las integrales primeras de W son exactamente las integrales primeras de

$$\mathcal{L}_p \oplus \ker d\pi_1 \cap \cdots \cap \mathcal{L}_p \oplus \ker d\pi_n.$$

De este modo, una forma de saber cuando W coincide con $C^\infty M^{n^G}$ se presenta en la siguiente proposición.

Proposición 2.6 *La condición necesaria y suficiente para que todo invariante de $n-$puntos sea funcionalmente dependiente de invariantes de $n - 1$puntos, dependencia que puede escribirse como*

$$C^\infty_{M^n}(\cdot)^G = \pi_1^*(C^\infty_{M^{n-1}}(\cdot)^G) * \cdots * \pi_n^*(C^\infty_{M^{n-1}}(\cdot)^G)$$

es que se cumpla la igualdad

$$\bigcap_{j=0}^{n}(\mathcal{L}^{M^n} \oplus \ker d\pi_j) = \mathcal{L}^{M^n}.$$

Dado que esta es una igualdad de espacios vectoriales, se ha logrado reducir el problema del pullback de invariantes a un problema de álgebra lineal. En este caso la intersección de los núcleos es trivial, sin embargo, en general puede plantearse el siguiente problema.

Un Problema de Álgebra Lineal

Sean V, $E_1, \ldots, E_n$ subespacios vectoriales de algún espacio vectorial. Supongase que $V \cap E_i = 0$ para cada i. Notar que se tiene la inclusión

$$\bigcap_{i=1}^{n}(V \oplus E_i) \supseteq V \oplus (\bigcap_{i=1}^{n} E_i) \quad (\dagger)$$

La pregunta es entonces cuando se tiene una igualdad en la expresión (†). Tener una igualdad en (†) equivale a que sea posible distribuir la suma sobre la intersección en el conjunto de espacios $\{V, E_1, \ldots, E_n\}$.

El caso concreto de interés para esta tesis, en el cual $E_i = \ker d\pi_i$ y $V = \mathcal{L}_p$, usando la notación de la sección anterior, tiene la particularidad de que $E_i \cap E_j = 0$ para cada $i \neq j$. Por lo tanto el objetivo se convierte en hallar condiciones que garantizen la igualdad

$$\bigcap_{i=1}^{n}(V \oplus E_i) = V.$$

Casos $n = 2$ y $n = 3$

Para estos dos casos, el autor de esta tesis y el profesor David Blazquez han encontrado condiciones sobre los subespacios bajo las cuales se cumple la igualdad en (†).

Proposición 2.7 *Si se tienen subespacios V, E_1 y E_2 tales que $V \cap (E_1 \oplus E_2) = 0$ entonces $(V \oplus E_1) \cap (V \oplus E_2) = V$.*

Demostración. Para probar esto sea $a \in (V \oplus E_1) \cap (V \oplus E_2)$. Entonces $a = v_1 + e_1 = v_2 + e_2$, con $v_i \in V$ y $e_i \in E_i$. Como $v_1 - v_2 = e_2 - e_1 \in V \cap (E_1 \oplus E_2) = 0$ se sigue que $e_1 = e_2$ y por tanto $e_1 = 0$. □

Para el caso de tres subespacios es conveniente utilizar la siguiente notación: $V_{ij} = V \cap (E_i \oplus E_j)$. De esta manera, si se tienen espacios V, E_1, E_2, E_3:

Proposición 2.8 *Una condición suficiente para que se cumpla la igualdad* $\bigcap_{i=1}^{3}(V \oplus E_i) = V$ *es que para cierta escogencia de* $i \neq j \neq k$ *se verifique* $V_{ij} \cap (V_{ik} + V_{kj}) = 0$.

Notar que es posible concluir similarmente si se cumple alguna de las igualdades

$$V_{12} \cap (V_{31} + V_{23}) = 0 \quad \text{o} \quad V_{31} \cap (V_{12} + V_{23}) = 0.$$

□

Los casos anteriores describen condiciones suficientes sencillas para que el pullback mediante las proyecciones permita construir todos los invariantes. A continuación se presenta una condición necesaria en general para que se cumpla la igualdad (†).

Sea $E = \oplus_{i=1}^{n} E_i$ donde cada E_i tiene dimensión n_i. Sea $N = \dim E = \sum n_i$ y sea $r = \dim V$. Notar que $V \oplus E_i$ está determinado por $N - r - n_i$ ecuaciones linealmente independientes, o en otras palabras, el espacio $(V \oplus E_i)^{\perp}$ tiene dimensión $N - r - n_i$.

Teorema 2.9 *Una condición necesaria para que se cumpla la igualdad* $\bigcap_{i=1}^{n}(V \oplus E_i) = V$ *es que se verifique la desigualdad*

$$(n-2)N \geq r(n-1).$$

Demostración. Si se parte del hecho de que $\bigcap_{i=1}^{n}(V \oplus E_i) \subseteq V$ entonces como $A^{\perp} + B^{\perp} = (A \cap B)^{\perp}$ se sigue que

$$\sum_{i=1}^{n}(V \oplus E_i)^{\perp} \supseteq V^{\perp}.$$

En general se sabe que $(A + B)^{\perp} \subseteq A^{\perp} + B^{\perp}$ y que $A \subseteq B$ implica $A^{\perp} \supseteq B^{\perp}$ de modo que

$$\sum_{i=1}^{n}(V \oplus E_i)^{\perp} \supseteq \left(\sum_{i=1}^{n} V \oplus E_i\right)^{\perp} \supseteq V^{\perp}.$$

Para que esto se cumpla ha de ser que $\sum_{i=1}^{n}(N - r - n_i) \geq N - r$ de donde se sigue que

$$\begin{array}{rcl}
n(N-r) - \sum n_i & \geq & N - r \\
n(N-r) - N & \geq & N - r \\
nN - nr & \geq & 2N - r \\
(n-2)N & \geq & r(n-1).
\end{array}$$

□

Se enuncia a continuación el teorema de la finitud de invariantes de configuración, el análogo al teorema de Lie-Tresse de los invariantes diferenciales.

Teorema 2.10 *Si la acción es regular en M^{n-2} entonces todo invariante de n puntos depende funcionalmente de invariantes de $n-1$ puntos.*

$$\begin{tikzcd} T_x M^n \arrow[r, "d\pi_i"] \arrow[d, "d\pi_j"] \arrow[dr, "d\pi_{ij}"] & T_{x(-i)} M^{n-1} \arrow[d, "d\pi_j"] \\ T_{x(-j)} M^{n-1} \arrow[r, "d\pi_i"] & T_{x(-i-j)} M^{n-2} \end{tikzcd}$$

Demostración. Esta prueba utiliza el caso $n = 2$. Sea $E_i = \ker d\pi_i$, $E_j = \ker d\pi_j$ con $\pi_j : M^n \to M^{n-1}$. Puede comprobarse con facilidad que $E_i \oplus E_j = \ker d\pi_{ij}$.

Dado que la acción es regular en M^{n-2} se sigue que $\mathcal{L}^{m^{n-2}} \cap \ker d\pi_{ij} = 0$ y por tanto $\mathcal{L}^{M^{n-2}} \cap (E_1 \oplus E_2) = 0$. Esto gracias a que una acción regular en M^k lo será en M^s para $s \geq k$. De esta manera $\mathcal{L}^{M^{n-1}} \cap (E_1 \oplus E_2) = 0$ y por la proposición 2.7 se sigue que $\pi_i^*(M^{n-1^G}) = M^{n^G}$. □

Ejemplo 2.11

Considere el grupo de las rotaciones y traslaciones actuando diagonalmente sobre tres copias del plano $\mathbb{R}^2$. El generador infinitesimal de esta acción está dado por

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix} \right\rangle := \langle A, B, C \rangle$$

En este caso se tienen proyecciones $\pi_i : \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ y los núcleos de sus correspondientes diferenciales:

$$E_1 = \ker d\pi_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$E_2 = \ker d\pi_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$E_3 = \ker d\pi_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Además se tienen las siguientes intersecciones

$$(E_1 \oplus E_2) \cap V = \left\langle \begin{pmatrix} b_3 - b_1 & b_3 - b_2 & 0 \\ a_1 - a_3 & a_2 - a_3 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$(E_1 \oplus E_3) \cap V = \left\langle \begin{pmatrix} b_2 - b_1 & 0 & b_2 - b_3 \\ a_1 - a_2 & 0 & a_3 - a_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$(E_2 \oplus E_3) \cap V = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & b_1 - b_2 & b_1 - b_3 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Entonces la pregunta es, por ejemplo, cuando se cumple $V_{23} \cap (V_{12} + V_{13}) = 0$. Esto lleva a considerar la ecuación

$$\lambda \begin{pmatrix} b_3 - b_1 & b_3 - b_2 & 0 \\ a_1 - a_3 & a_2 - a_3 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_2 - b_1 & 0 & b_2 - b_3 \\ a_1 - a_2 & 0 & a_3 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 - b_2 & b_1 - b_3 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \end{pmatrix}$$

Esta ecuación se satisface cuando

$$\lambda = \frac{b_1 - b_2}{b_3 - b_2} = \frac{a_2 - a_1}{a_2 - a_3}$$
$$\beta = \frac{b_1 - b_3}{b_2 - b_3} = \frac{a_3 - a_1}{a_3 - a_2}.$$

De esta manera, por las proposiciones 2.7 y 2.6, localmente, alrededor de un punto $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ para el cual $b_3 \neq b_2$ y $a_3 \neq a_2$ existe un abierto en el cual los invariantes de tres puntos pueden obtenerse mediante pullback del invariante de dos puntos, la distancia.

Por ejemplo, la fórmula de Herón, que establece la manera como el área de un triángulo es función de la longitud de sus lados es un caso particular de esta dependencia funcional.

Comentarios Adicionales

El teorema 2.9 puede aplicarse en el caso de un grupo actuando en M y diagonalmente en M^n, de modo que la distribución asociada a G sea $\mathcal{L} = V$ y $E_i = \ker d\pi_i$ para $i = 1, \ldots, n$, haciendo uso de la notación de la sección anterior. En dicha situación se obtiene la desigualdad $n(nm) \geq N$, ya que cada $\ker d\pi_i$ está contenido en $T_p(M^n)$ y la distribución tiene dimensión nr en cada punto. Teniendo esto presente, la desigualdad $N(n-2) \geq r(n-1)$ implica

$$n^2 m - (2m + r)n + r \geq 0.$$

Una primera consecuencia de esta desigualdad es la posibilidad de verificar para que números n no es posible que los elementos de $C^\infty(M^n)^G$ dependan funcionalmente del pullback mediante proyecciones de los invariantes $C^\infty(M^{n-1})^G$.

Una segunda aplicación de esta desigualdad es poder calcular el menor n para el cual exista la posibilidad de que $C^\infty(M^n)^G$ si pueda obtenerse usando pullback de invariantes en M^{n-1}. Este n mínimo está dado por

$$n_{\text{min}} = 1 + \frac{r + \sqrt{4m^2 + r^2}}{2m}.$$

A continuación se presentan algunas acciones con sus n_{min} respectivos.

Por ejemplo en el caso de $ASO(2, \mathbb{R})$ actuando sobre $\mathbb{R}^2$, se obtiene un $n_{\text{min}} = 3$, esto refleja el hecho de que al extender la acción a dos copias de $\mathbb{R}^2$, los invariantes que se obtienen no pueden depender de un número de puntos menor que 2. De hecho, como ya se observó, la acción no es libre sobre $\mathbb{R}^2$ y no hay manera de calcular invariantes en este caso.

Grupo	$\dim G$	Espacio	dim Espacio	n_{min}
$ASO(2, \mathbb{R})$	3	$\mathbb{R}^2$	2	3
$ASO(3, \mathbb{R})$	5	$\mathbb{R}^3$	3	4
$\text{Aff}(1, \mathbb{R})$	2	$\mathbb{R}$	1	4
$\text{Aff}(2, \mathbb{R})$	6	$\mathbb{R}^2$	2	5
$SL(2, \mathbb{C})$	$3_\mathbb{C}$	$\mathbb{CP}^1$	$1_\mathbb{C}$	5
$SL(3, \mathbb{C})$	$8_\mathbb{C}$	$\mathbb{CP}^2$	$2_\mathbb{C}$	6

Capítulo 3

Invariantes Diferenciales

Se comienza con una breve introducción a los jets y se presenta su formalización en el lenguaje de los puntos próximos, las álgebras de Weil y las álgebras de Weil de tipo múltiple, estas últimas una herramientas introducidas por David Blazquez y J. Díaz, ver [BSA14a]. Finalmente se define la derivada torcida por un morfismo de álgebras y se prueba como esta derivada provee una manera de obtener invariantes diferenciales a partir de invariantes de configuración.

Jets de Funciones

El concepto de jet de una función en un punto busca capturar la información local contenida no solo en el valor de la función en un punto sino también la información que aportan todas sus derivadas hasta cierto orden en dicho punto.

Sea M una variedad suave y $p \in M$. El conjunto

$$\mathfrak{m}_p = \{f \in C^\infty M \mid f(p) = 0\}$$

de todas las funciones nulas en p es un ideal maximal del anillo $C^\infty M$. Se dice que dos funciones $f, g \in C^\infty M$ tienen contacto de orden 0 en p si $f(p) = g(p)$, lo cual puede expresarse también escribiendo $f - g \in \mathfrak{m}_p$. En general, se dice que f y g tienen contacto de orden r en p si $f - g \in \mathfrak{m}_p^r$. Observar que dos funciones tendrán contacto de orden r en un punto cuando sus derivadas parciales hasta dicho orden coincidan en el punto.

El contacto de orden r en un punto es una relación de equivalencia en $C^\infty M$. A la clase de equivalencia de una función f se le denota por $j_p^r f$ y se dice que $j_p^r f$ es el jet de f en p de orden r. Se observa que el contacto de orden r en un punto p es de carácter puramente local, pues depende solo del valor de la función en un entorno tan pequeño como se quiera del punto y, de manera que es posible considerar un nuevo espacio donde las coordenadas sean las coordenadas de M, a saber, $x_1, \cdots, x_n$ junto con una variable dependiente y y sus derivadas repecto a $x_1, \cdots, x_n$ hasta el orden r, escritas como $\partial^{|\alpha|}y/\partial x^\alpha$ para α un multiíndice con $|\alpha| \leq r$. Puede comprobarse que este nuevo espacio tiene estructura canónica de variedad suave. Cada punto de esta variedad puede considerarse entonces como portador de las coordenadas de cierto jet. Para más detalles se puede consultar [Olv95].

Jets de Aplicaciones

Una función suave $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se desvanece hasta el orden r en un punto si todas sus derivadas hasta el orden r se anulan en dicho punto.

Dadas dos curvas $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to M$ se dice que α y β tienen contacto de orden r en el cero si $f \circ \alpha - f \circ \beta$ se desvanece hasta el orden r en $0 \in \mathbb{R}$. Notar que este contacto también es una relación de equivalencia.

Dos aplicaciones $f, g : M \to N$ entre variedades determinan el mismo $\boldsymbol{r}$**−jet** en un punto $p \in M$ si para cada curva $\alpha : \mathbb{R} \to M$ tal que $\alpha(0) = p$ se cumple que $f \circ \alpha$ y $g \circ \alpha$ tienen contacto de orden r en cero. Una clase de equivalencia de esta relación se conoce como un r-jet de M en N.

Ejemplo 3.1 Si se tiene un vector X_p tangente a M en un punto p entonces X_p define un jet de orden 1 en p. Este jet esta dado por la clase $j_p^1 X_p$ de todas las aplicaciones $\theta : J \to M$, con J una vecindad del cero en $\mathbb{R}$, tales que $\phi(0) = p$ y su vector tangente en p coincida con X_p:

$$j_p^1 X_p = \left\{ \theta : J \to M \;\middle|\; \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \theta = X_p \right\}.$$

Prolongación de una Acción al Espacio de Jets

Dada una acción de un grupo de Lie G en M, esta extiende de manera natural a todo $C^\infty M$ y también puede extenderse a las derivadas de las funciones o en general a sus jets. La idea es que la acción de $g \in G$ en la derivada en un punto esté dada por la derivada de la función transformada $g \cdot f$ evaluada en el punto transformado $g \cdot p$.

Por ejemplo si se tiene una aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ escrita como $y = f(x)$ y se escribe $\overline{x} = g \cdot x$ y $\overline{f} = g \cdot f$ entonces se define

$$g \cdot \left.\frac{df}{dx}\right|_p = \left.\frac{d\overline{f}}{d\overline{x}}\right|_{\overline{p}}$$

y utilizando la regla de la cadena se llega a la expresión

$$\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = \frac{d\overline{y}}{dx}\left(\frac{d\overline{x}}{dx}\right)^{-1}.$$

Variedades como Conjuntos de Morfismos

Una variedad M puede describirse como un conjunto de puntos con una topología y una estructura diferencial que permita decir cuales son las funciones suaves sobre ella. Esta estructura hace que cada punto tenga un entorno que pueda representarse como un abierto de $\mathbb{R}^n$ y si el punto está en dos entornos, el cambio entre las representaciones correspondientes sea suave. Sin embargo puede observarse que el anillo $C^\infty M$ de funciones suaves de M contiene suficiente información sobre la estructura suave y permite recuperar a M de la siguiente manera. Dado que $C^\infty M$ es una $\mathbb{R}-$álgebra, se realiza la identificación

$$M \longleftrightarrow \mathrm{Hom}(C^\infty M, \mathbb{R}) \longleftrightarrow \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}} C^\infty M$$

en donde Hom denota el conjunto de morfismos de $\mathbb{R}-$álgebras y $\mathrm{Spec}\, C^\infty M$ es el conjunto de todos los ideales reales del anillo $C^\infty M$. Por ejemplo, cada $p \in M$ puede verse como un morfismo de álgebras $p : C^\infty M \to \mathbb{R}$ definiendo $p(f) = f(p)$. Y a cada aplicación $p : C^\infty M \to \mathbb{R}$ le corresponde un ideal maximal de $C^\infty M$ que es precisamente su núcleo $\ker p$. Para los detalles completos de estás identificaciones, consultar [MRM00], [Wei53]. Siguiendo una linea de ideas análoga se tiene la identificación

$$C^\infty(M, N) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}(C^\infty N, C^\infty M)$$

en donde a $f \in C^\infty(M, N)$ se le asocia la aplicación f^* tal que $f^*(g) = g \circ f$, ver por ejemplo [KSM99].

Es a partir de esta caracterización de las variedades, como conjuntos de morfismos, que se lleva a cabo la construcción de puntos más generales. Estos, llamados puntos próximos, contienen información adicional sobre lo que sucede en un entorno infinitamente próximo del punto. Más adelante se desarrollará esto con detalle.

Álgebras de Weil

Un álgebra de Weil es una $\mathbb{R}-$álgebra finito dimensional, local y tal que $A/\mathfrak{m}_A \cong \mathbb{R}$, donde $\mathfrak{m}_A$ es el ideal maximal de A. El morfismo proyección $\omega_A : A \to A/\mathfrak{m}_A$ se conoce como el punto racional de A. Para cada álgebra de Weil A existe un mínimo l tal que $\mathfrak{m}_A^l \neq 0$ y $\mathfrak{m}_A^{l+1} = 0$, y se dice entonces que A tiene orden l, ver [BS09]. Notar que toda álgebra de Weil puede descomponerse como $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{m}_A$. El cociente $\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2$ tiene estructura de espacio vectorial y es costumbre referirse a su dimensión como el **ancho** de A.

Las álgebras de Weil más usuales son de la forma siguiente. Si $\mathbb{R}[[x_1, \ldots, x_k]]$ denota el anillo de series de potencias formales en las variables $x_1, \ldots, x_k$ entonces

$$\mathbb{R}_k^r = \mathbb{R}[[x_1, \ldots, x_k]]/(x_1, \ldots, x_k)^{r+1}$$

es un álgebra de Weil.

En cierto sentido no es una restricción dramática trabajar con este tipo de álgebras, ya que como muestra la siguiente proposición en realidad todas las álgebras de Weil pueden verse en términos de estas:

Proposición 3.2 *Toda álgebra de Weil de orden menor o igual a r y ancho k es isomorfa a un cociente de $\mathbb{R}_k^r$.*

Dadas dos álgebras de Weil entonces es posible obtener nuevas álgebras de Weil mediante productos tensoriales y cocientes:

Proposición 3.3 *Sean A y B álgebras de Weil y sea I un ideal de A. Entonces el producto $A \otimes B$ y el cociente A/I son álgebras de Weil.*

Puntos Próximos

Al comienzo del capítulo se expuso la relación de contacto hasta cierto orden de funciones suaves en una variedad. Las álgebras de Weil permiten hacer una presentación sistemática de la relación de contacto haciendo uso de puntos más generales o puntos próximos.

Como se expuso anteriormente, una variedad M puede verse como el conjunto de morfismos de $\mathbb{R}-$álgebras entre $C^\infty M$ y $\mathbb{R}$.

$$M \cong \mathrm{Hom}(C^\infty M, \mathbb{R}) \qquad (*)$$

Es posible, llevando la analogía un paso adelante, definir puntos infinitamente próximos a los puntos de M, considerando un álgebra de Weil A y morfismos del anillo de funciones con valores en A.

Un **punto próximo de tipo A** es entonces un morfismo de álgebras

$$p^A : C^\infty M \to A.$$

Cada punto p^A esta sobre un punto de M, que es precisamente el punto $\omega_A \circ p^A$. Bajo la identificación (*) el morfismo $\omega_A \circ p^A$ corresponde a un punto de M que será denotado por p. Se dice entonces que p^A es próximo a p.

El conjunto de todos los puntos próximos de tipo A a una variedad M se denota por $M(A)$. Otras notaciones para este espacio son M^A o $T^A M$.

Teorema 3.4 *Sea A un álgebra de Weil de orden l. El conjunto de los puntos próximos a $p \in M$ de tipo A coincide con*

$$\mathrm{Hom}(C^\infty/\mathfrak{m}_A^{l+1}, A).$$

La regla que a cada abierto de una variedad le hace corresponder el conjunto de puntos próximos a elementos de dicho abierto es una asignación funtorial. De esta manera puede verificarse que el conjunto $M(A)$ tiene estructura de variedad suave. Además, $M(A)$ viene equipado con una proyección natural π_A sobre M, a saber, la que a cada punto de tipo A le hace corresponder el punto en M del cual es próximo.

Teorema 3.5 *El conjunto de puntos próximos $M(A)$ tiene estructura canónica de variedad suave y $\pi_A : M(A) \to M$ es un fibrado suave cuya fibra en p esta dada por* $\mathrm{Hom}(C^\infty/\mathfrak{m}_A^{l+1}, A)$.

La relación entre los espacios $M(A)$ de puntos próximos y los jets es la siguiente: El espacio $M(\mathbb{R}_k^r)$ se identifica con el espacio de los jets en $0 \in \mathbb{R}^k$ de aplicaciones suaves $\mathbb{R}^k \to M$. Por ejemplo $M(\mathbb{R}_1^1) = TM$; esto se presenta más adelante en el ejemplo 3.6.

Componentes Reales

Dada una base $\mathcal{B} = \{a_1, \ldots, a_s\}$ para un álgebra de Weil A, y $\mathcal{B}^* = \{w_1, \ldots, w_s\}$ su base dual, entonces para cada $f \in C^\infty M$ y cada w_i se tiene por composición una función $f_{wi} : M(A) \to \mathbb{R}$ dada por $f_{wi}(p^A) = w_i(p^A(f))$. De esta manera los elementos del conjunto

$$\{f_{wi} \mid f \in C^\infty M,\ w_i \in \mathcal{B}^*\}$$

se conocen como las **componentes reales** de $M(A)$.

En particular cuando se trabaja con el álgebra $A = \mathbb{R}_m^l$ y se escoge para A la base

$$\left\{\frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha!}\right\}$$

con $0 \leq |\alpha| \leq l$, se puede escribir un punto próximo aplicado a una función $f \in C^\infty M$ como

$$p^A(f) = \sum f_\alpha(p^A)\frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha!}$$

la suma realizada sobre $0 \leq |\alpha| \leq l$ y por definición para un multiíndice $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_k!$

En este caso particular $p^A(f)$ contiene exactamente la información sobre el desarrollo en serie de Taylor de la función f hasta el orden l. En otros términos puede considerarse que el punto p^A le asigna a cada f las coordenadas de su jet de orden l en p.

Ejemplo 3.6 Considere el álgebra $A = \mathbb{R}[[\varepsilon]]/(\varepsilon)^2$. Los elementos de A suelen llamarse los **números duales**. Haciendo uso de los números duales es posible realizar la siguiente identificación: a un vector tangente a M en un punto p, denotado por v_p le corresponde un punto próximo $\phi_v : C^\infty M \to A$ de tal manera que

$$\phi_v(f) = f(p) + \varepsilon v_p f.$$

Puede verificarse que si f y g están en $C^\infty M$ entonces $\phi_v(fg) = \phi_v(f)\phi_v(g)$ y de esta forma ϕ_v define un morfismo de álgebras.

Por otro lado, si se tiene un punto próximo $p^A \in A$ entonces la aplicación

$$p^A - p : C^\infty M \to A$$

tal que $(p^A - p)(f) = p^A(f) - f(p)$ satisface que

$$(p^A - p)(fg) = f(p)(p^A - p)(g) + g(p)(p^A - p)(f)$$

y por tanto es una derivación del álgebra $C^\infty M$ en p.

Bajo esta identificación se tiene que $M(A) \to M$ coincide con el fibrado tangente $TM \to M$.

Ejemplo 3.7 En el caso donde $A = \mathbb{R}[[\varepsilon]]/(\varepsilon)^r$, un punto próximo de tipo A puede verse como una aplicación que a una curva $\gamma : \mathbb{R} \to M$ le asigna su desarrollo en serie de potencias hasta el orden l en cada una de sus componentes: Si $x_1, \ldots, x_n$ forman un sistema de coordenadas en M entonces la curva puede escribirse como $\gamma(\varepsilon) = (x_1(\varepsilon), \ldots, x_n(\varepsilon))$. Cada componente puede desarrollarse como

$$x_i(\varepsilon) = \gamma_i + \gamma_i'\varepsilon + \cdots + \gamma_i^{(r)}\frac{\varepsilon^r}{r!} + o(\varepsilon^{r+1})$$

donde $\gamma_i(p) = x_i(p)$. Entonces a la curva γ se le asocia el punto próximo p^A definido por $p^A(x_i) = x_i(\varepsilon) \bmod(\varepsilon)^{l+1}$.

Por otra parte, a un punto próximo $p^A : C^\infty M \to A$ escrito para ciertos coeficientes como $p^A(x_i) = c_0 + c_1\varepsilon + \cdots + c_r\varepsilon^r/r!$ le corresponde una clase de aplicaciones, $[\gamma : \mathbb{R} \to M]$ para las cuales los coeficiente c_j son precisamente la derivadas de γ_i, esto es $c_j = \gamma_i^{(j)}$.

Prolongación de Funciones y Acciones

Si $f : M \to \mathbb{R}$ es suave entonces puede prolongarse de manera natural a una aplicación

$$f^A : M(A) \to A$$

que se define mediante la fórmula $f^A(p^A) = p^A(f)$.

Ahora si se tiene una acción de un grupo de Lie G en M, esta se extiende a $C^\infty M$ haciendo $g \cdot f(p) = f(g \cdot p)$. Pero no solo la acción extiende al anillo de funciones sino a otras estructuras asignadas de manera funtorial a M. En este caso la acción de G prolonga hasta $M(A)$ declarando

$$(g \cdot p^A)(f) = p^A(g \cdot f).$$

Notar que si $I : M \to \mathbb{R}$ es un función $G-$invariante, entonces localmente su prolongación I^A será un invariante definido en $M(A)$ con valores en A.

Componentes reales de una prolongación Si $\{a_1, \cdots, a_s\}$ es una base de A entonces una prolongación f^A puede escribirse como $f^A = \sum f_i a_i$ en donde cada cada $f_i : M(A) \to \mathbb{R}$. A las funciones f_i se les conoce como las **componentes reales de** f^A.

Ejemplo 3.8 Considere de nuevo el álgebra $A = \mathbb{R}[[\varepsilon]]/(\varepsilon)^{r+1}$ y la base $\mathcal{B} = \{1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^r/r!\}$. Como se vió anteriormente un punto próximo de tipo A puede verse como la clase de una aplicación $\gamma : \mathbb{R} \to M$ y dicha clase se denota por $j_p^r\gamma$. Si se tiene $f : M \to \mathbb{R}$ y se prolonga, al evaluar esta prolongación en el punto $p^A = j_p^r$ se tiene:

$$f^A(j_p^r\gamma) = f(\gamma(0)) + \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\gamma(t))\varepsilon + \cdots + \left.\frac{d^r}{dt}\right|_{t=0} f(\gamma(t))\varepsilon^r/r!.$$

Entonces en la base escogida las componentes reales de la prolongación de f son precisamente las derivadas hasta orden r de f en el punto p, en la dirección del jet $j_p^r\gamma$.

Puntos Próximos de Tipo Múltiple

En lo sucesivo, se hace necesario trabajar no solo con un álgebra de Weil en particular, sino también con productos finitos de álgebras de Weil. Así, un **álgebra de weil de tipo múltiple** o una multi-álgebra de Weil es un producto directo de álgebras de Weil. Por analogía con los puntos próximos, si A es una multi-álgebra de Weil entonces los elementos del conjunto $\mathrm{Hom}(C^\infty M, A)$ se llaman **puntos próximos múltiples** de tipo A.

Como la asignación tomar puntos próximos es funtorial, se tiene que

$$M(A_1 \times \cdots \times A_k) = M(A_1) \times \cdots \times M(A_k).$$

Esta igualdad, en el caso de aplicaciones $M \to \mathbb{R}^k$, viene a ser el hecho bien conocido de que dichas aplicaciones están determinadas por sus componentes $M \to \mathbb{R}$ y viceversa: Dadas k funciones $f_i : M \to \mathbb{R}$ ellas determinan una única aplicación $f : M \to \mathbb{R}^k$. Dicho de otra manera $M(\mathbb{R}^k) = M^k$.

El teorema de multi-Weil. El teorema de Weil [Wei53] establece que la extensión sucesiva $M(A)(B)$ puede identificarse con una sola extensión de M al producto $A \otimes B$, esto es, que $M(A)(B) = M(A \otimes B)$. Este resultado, originalmente probado para álgebras de Weil, puede extenderse a multi-álgebras de Weil.

Teorema 3.9 *Si M es una variedad suave y A, B son multi-álgebras de Weil entonces existen difeomorfismos canónicos*

$$M(A)(B) \cong M(A \otimes B) \cong M(B)(A).$$

Lema 3.10 *Sean $A = A_1 \times \cdots \times A_k$ y $B = B_1 \times \cdots \times B_s$ dos multi-álgebras de Weil y sea $\phi : A \to B$ un morfismo de $\mathbb{R}-$álgebras. La aplicación inducida $\phi_* : M(A) \to M(B)$ tal que $\phi_*(p^A) = \phi \circ p^A$ es suave y es un morfismo de fibrados en el siguiente sentido: Existe una aplicación $\sigma : \{1, \ldots, s\} \to \{1, \ldots, k\}$ tal que para cada $p^A \in M(A)$ se cumple que*

$$\pi_B(p^A) = (\pi_{A\sigma 1}(p^A), \cdots, \pi_{A\sigma s}(p^A))$$

donde $\pi_B : M(B) \to M$ y $\pi_{Ai} : M(A_i) \to M$ son las proyecciones canónicas.

Corolario 3.11 *Existen difeomorfismos canónicos*

$$M(A) \cong M(A^k) \cong M^k(A).$$

Derivación de los Invariantes de Configuración

Sea G un grupo Lie que actúa en una variedad M. Si A es un álgebra de Weil entonces un **invariante diferencial** local de tipo A es un invariante local de la acción de G prolongada a $M(A)$.

En esta sección se desarrolla un procedimiento que permite derivar invariantes de configuración mediante la llamada derivada $\sigma-$torcida para obtener invariantes diferenciales de tipo A. Adicionalmente, las componentes reales de los invariantes obtenidos a partir de la derivada $\sigma-$torcida vienen a ser invariantes diferenciales real valuados.

La Derivada Torcida por σ

Si se tiene un morfismo de álgebras $\sigma : A \to A^k$, se sabe que σ está determinado por k morfismos $\sigma_i : A \to A$ de manera tal que es posible escribir para $a \in A$

$$\sigma(a) = (\sigma_1(a), \ldots, \sigma_k(a)).$$

Notar que el morfismo inducido $\sigma_* : M(A) \to M(A^k)$ viene a ser, bajo la luz del corolario 3.11 un morfismo $\sigma_* : M(A) \to M^k(A)$. Entonces haciendo uso de un morfismo como este, se puede deformar un punto y obtener una configuración no trivial de puntos en $M^k(A)$. Esto conduce a la derivada torcida por σ.

Si U es un abierto de M^k e I es una función definida en U, entonces la **derivada $\boldsymbol{\sigma}-$torcida** de I se define como la aplicación $D_\sigma I : M(A) \to A$ tal que

$$p^A \mapsto D_\sigma I(p^A) = I^A \circ \sigma_*(p^A)$$

La idea que motiva introducir la derivada D_σ es la siguiente: Se quiere aplicar un invariante de configuración dado, no solo a los punto de M^k sino también a puntos próximos de tipo A obtenidos a partir de un solo punto próximo p^A, que son los puntos torcidos $\sigma_1 p^A, \ldots, \sigma_k p^A$. Con esto se pretende que el invariante sea evaluado en los puntos $\sigma_1 p^A, \ldots, \sigma_k p^A$ ya que sobre la diagonal de $M^k(A)$ es una constante, puesto que no hay configuración propiamente dicha. Como se verá a continuación, la derivada D_σ aplicada a invariantes produce nuevos invariantes.

Lema 3.12 *Sea $\sigma : A \to A^k$ un morfismo de álgebras. Entonces el morfismo inducido $\sigma_* : M(A) \to M^k(A)$ es equivariante.*

Demostración. Basta notar que para $f \in C^\infty M$, $p^A \in M(A)$ y cada $i = 1, \ldots, k$ se tiene que

$$g \cdot (\sigma_i \circ p^A)(f) = \sigma_i \circ (g \cdot p^A(f)) = (\sigma_i \circ p^A)(g \cdot f)$$

□

Teorema 3.13 *Sea G un grupo de Lie actuando sobre una variedad M. Sea I un invariante de configuración de k puntos. Entonces $D_\sigma I$ es un invariante de la acción de G en $M(A)$ con valores en A.*

Demostración. Si p^A es un punto próximo entonces

$$\begin{aligned} D_\sigma I(g \cdot p^A) &= (I^A \circ \sigma_*)(g \cdot p^A) \\ &= (I^A \circ g \cdot \sigma_*)(p^A) \\ &= (g \cdot I^A \circ \sigma_*)(p^A) \\ &= (I^A \circ \sigma_*)(p^A) \\ &= D_\sigma I(p^A) \end{aligned}$$

□

Se sabe que es posible escribir la aplicación $D_\sigma I : M(A) \to A$ como

$$D_\sigma I(p^A) = \sum_{j=1}^{s} c_j(p^A) a_j$$

para cierta base $\{a_j\}_{j=1}^{s}$ de A y los coeficientes son las componentes reales $c_j : M(A) \to \mathbb{R}$. Entonces la invarianza de $D_\sigma I$ se ve reflejada en sus componentes reales de modo que estos resultan ser invariantes diferenciales.

A continuación se presentan algunos ejemplos del uso de la derivada $\sigma-$torcida para calcular invariantes diferenciales a partir de invariantes de configuración.

Ejemplo 3.14 Considere el grupo de los movimientos euclídeos $ASO(2)$ actuando en el plano $\mathbb{R}^2$. Como se sabe, la función I dada por el cuadrado de la distancia entre dos puntos en el plano es un invariante de ésta acción.

Ahora sea $A = \mathbb{R}_3^1$. Un punto en el plano dado por coordenadas x e y puede desarrollarse hasta orden 4 como

$$\begin{pmatrix} x(\epsilon) \\ y(\epsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \dot{x}\epsilon + \cdots + x^{(4)}\epsilon^4/4! \\ y + \dot{y}\epsilon + \cdots + y^{(4)}\epsilon^4/4! \end{pmatrix}$$

Si se usa el morfismo de álgebras $\sigma : A \to A^2$ cuyas componentes $\sigma_i : A \to A$ están determinadas por

$$\sigma_1(\epsilon) = 0 \quad \text{y} \quad \sigma_2(\epsilon) = \epsilon$$

entonces se calcula la derivada torcida por σ como sigue

$$\begin{aligned} D_\sigma I &= \left\| \begin{array}{c} x(\sigma_1\epsilon) - x(\sigma_2\epsilon) \\ y(\sigma_1\epsilon) - y(\sigma_2\epsilon) \end{array} \right\|^2 \\ &= (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\epsilon^2 + (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})\epsilon^3 + (2(\dot{x}\dddot{x} + \dot{y}\dddot{y}) + \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2)\epsilon^4/3! \end{aligned}$$

De esta manera se ha obtenido un invariante diferencial definido en $\mathbb{R}^2(A)$ con valores en A. Como se comentó anteriormente, las componentes reales de este invariante también son invariantes y es posible obtener más invariantes desarrollando hasta ordenes superiores.

Ejemplo 3.15 El ejemplo anterior puede extenderse con facilidad a $\mathbb{R}^n$ y el álgebra $A = \mathbb{R}_1^3$. La distancia entre dos puntos de $\mathbb{R}^n$ es un invariante del grupo de los movimientos euclídeos en n dimensiones:

$$d^2(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2.$$

Un punto $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ prolonga a $\mathbb{R}^n(A)$ como

$$x(\varepsilon) = \begin{pmatrix} x_1 + x_1'\varepsilon + x_1''\varepsilon^2/2 + x_1^{(3)}\varepsilon^3/3! \\ \vdots \\ x_n + x_n'\varepsilon + x_n''\varepsilon^2/2 + x_n^{(3)}\varepsilon^3/3! \end{pmatrix}$$

Ahora tomando el morfismo de álgebras $\sigma : A \to A^2$ de componentes $\sigma_i : A \to A$ determinadas por $\sigma_1(\epsilon) = 0$ y $\sigma_2(\epsilon) = \epsilon$ se puede computar la $\sigma-$derivada de d^2:

$$\begin{aligned} D_\sigma(d^2) &= \|x(\sigma_2(\varepsilon)) - x(\sigma_1(\varepsilon))\|^2 \\ &= \varepsilon^2 \sum_{i=1}^n (x_i')^2 + \varepsilon^3 \sum_{i=1}^n (x_i' x_i''). \end{aligned}$$

Los coeficientes $\sum_{i=1}^n (x_i')^2$ y $\sum_{i=1}^n (x_i' x_i'')$ son invariante diferenciales de orden 1. Notar que primero es la expresión infinitesimal de la métrica euclídea, que es la velocidad al cuadrado o energía cinética. La expresión $\sum_{i=1}^n (x_i' x_i'')$ es la velocidad por la aceleración tangencial.

Ejemplo 3.16 Considere de nuevo el grupo de los movimientos actuando sobre el plano y esta vez el invariante de tres puntos v, w, $z \in \mathbb{R}^2$ dado por

$$I(v, w, z) = \begin{vmatrix} w_1 - v_1 & z_1 - v_1 \\ w_2 - v_2 & z_2 - v_2 \end{vmatrix}$$

Sea $A = \mathbb{R}_1^3$. Si se considera el morfismo de álgebras $\sigma : A \to A^3$ de componentes $\sigma_i : A \to A$ determinadas por $\sigma_0(\epsilon) = 0$, $\sigma_1(\epsilon) = \epsilon$ y $\sigma_2(\epsilon) = 2\epsilon$ entonces se obtiene el siguiente invariante al aplicar D_σ:

$$\begin{aligned} D_\sigma I &= I \circ \sigma_* \begin{pmatrix} x(\varepsilon) \\ y(\varepsilon) \end{pmatrix} \\ &= I \begin{pmatrix} x(\sigma_0\epsilon) & x(\sigma_1\epsilon) & x(\sigma_2\epsilon) \\ y(\sigma_0\epsilon) & y(\sigma_1\epsilon) & y(\sigma_2\epsilon) \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x(\epsilon) - x(0) & x(2\epsilon) - x(0) \\ y(\epsilon) - y(0) & y(2\epsilon) - y(0) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix} \varepsilon^3 + \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \dddot{x} & \dddot{y} \end{vmatrix} \varepsilon^4. \end{aligned}$$

El ejemplo anterior puede generalizarse al grupo de los movimientos en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 3.17 Considere la acción de $\mathrm{Mov}(n,\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^n$. Esta tiene un invariante dado por

$$V_n(p_1,\ldots,p_{n-1}) = \det(p_2-p_1,p_3-p_1,\ldots,p_{n+1}-p_1),$$

Considere el morfismo de álgebras $\mathbb{R}_1^1 \to \mathbb{R}_1^{n+1}$

$$\sigma = (\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$$

donde $\sigma_i : \mathbb{R}_1^1 \to \mathbb{R}_1^1$ es tal que $\sigma_i(\varepsilon) = i\varepsilon$. Entonces en $M((\mathbb{R}_1^{n+1})^n)$ considere el punto próximo

$$p(\varepsilon) = \left(x_1 + \varepsilon x_1' + \ldots + \frac{\varepsilon^{n+1}}{(n+1)!}x_1^{(n+1)}, \ldots . x_n + \varepsilon x_n' + \ldots + \frac{\varepsilon^{n+1}}{(n+1)!}x_n^{(n+1)}\right)$$

Al computar la derivada torcida por σ, haciendo uso de un computador se observa que

$$D_\sigma V = V(p(0),p(\varepsilon),p(2\varepsilon),\ldots,p(n\varepsilon)) = \varepsilon^{n+1}\Lambda_n\mathcal{W}(x_1',\ldots,x_n')$$

donde Λ_n es una constante que depende de n y su valor es precisamente

$$\Lambda_n = \frac{1}{1!2!\cdots n!}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & \ldots & 2^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ n & n^2 & n^3 & \ldots & n^n \end{vmatrix}.$$

Además $\mathcal{W}$ es el determinante Wronskiano

$$\mathcal{W}(x_1',\ldots,x_n') = \begin{vmatrix} x_1' & x_1'' & \ldots & x_n^{(n)} \\ x_2' & x_2'' & \ldots & x_2^{(n)} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_n' & x_n'' & \ldots & x_n^{(n)} \end{vmatrix},$$

De esta manera, el coeficiente de ε^{n+1}, dado por

$$(n+1)!\Lambda_n\mathcal{W}(x_1',\ldots,x_n')$$

es un invariante de rango 1 y orden n de la acción del grupo de los movientos.

Invariantes de Configuración que Degeneran sobre la Diagonal

En el capítulo 2 se presentaron algunos invariantes de configuración que están definidos por un cociente de funciones, como por ejemplo la razón afín y el cross ratio. Estos invariantes no están definidos sobre la diagonal en M^k ya que el denominador se anula allí. Sin embargo es posible usar la derivada $\sigma-$torcida en estos casos para obtener nuevos invariantes diferenciales, siempre que se cumplan algunas condiciones. Presentar estos resultados es el objetivo de esta sección.

Una primera observación importante es la siguiente. Si I, J son dos funciones definidas en M entonces sus prolongaciones a $M(A)$ satisfacen

$$(IJ)^A = I^A J^A.$$

En esta igualdad se interpreta el primer término como la prolongación del producto usual de funciones, mientras que el lado izquierdo es el producto de elementos del álgebra A. Además es claro que si J no se anula entonces se cumple que $J(p^A) \notin \mathfrak{m}_A$ y el cociente tiene la siguiente propiedad

$$(I/J)^A = I^A/J^A.$$

En el caso en que J se anule, aún es posible darle sentido al cociente I/J. Para hacer esto considere la ecuación

$$QJ = I \qquad\qquad (*)$$

Notar que si se encuentra una solución Q_0 a esta ecuación entonces para cada $Z \in \operatorname{Ann}(J)$ se tiene que $Q_0 + Z$ también es solución de $(*)$. De esta manera el cociente I/J puede verse como una clase en $A/\operatorname{Ann}(J)$. Teniendo esto en mente y con motivación en los ejemplos que se presentan más adelante, se ha obtenido el siguiente resultado:

Teorema 3.18 *Sean $W \subseteq U$ abiertos en M^k con W denso en U y tal que $U \cap \operatorname{diag} M^k \neq \emptyset$. Sea $U' = \operatorname{diag}^{-1}(U)$ donde $\operatorname{diag} : M \to M^k$ es la aplicación diagonal.*

Suponga que I, J son dos funciones en M cuyo cociente I/J está definido en W y es un invariante de $k-$puntos. Suponga además que para cada $p^A \in U'(A)$ se cumple

1. *$D_\sigma I(p^A)$ está en el ideal $(D_\sigma J(p^A))$*
2. *$\operatorname{Ann}(D_\sigma J(p^A)) \subseteq \mathfrak{p}$*

entonces $\frac{D_\sigma I}{D_\sigma J}$ está bien definido como aplicación con valores en $A/\mathfrak{p}$ y es un $A-$invariante diferencial local de la acción de G en $M(A)$.

Demostración. El hecho de que $D_\sigma I(p^A) \in (D_\sigma J(p^A))$ implica que la ecuación $QD_\sigma J(p^A) = D_\sigma I(p^A)$ tiene solución. Sin embargo, las soluciones de la ecuación $QD_\sigma J(p^A) = 0$ aportan otras soluciones, de manera que en principio el conciente no es único. Esta ambigüedad desaparece cuando el cociente $\frac{D_\sigma I}{D_\sigma J}$ se considera en el cociente $A/\operatorname{Ann}(D_\sigma J)$. Así se garantiza la buena definición de $\frac{D_\sigma I}{D_\sigma J}$.

Por otra parte, teniendo presente el hecho $(I/J)^A = I^A/J^A$ se tiene que

$$D_\sigma\left(\frac{I}{J}\right)(p^A) = \frac{D_\sigma I}{D_\sigma J}(p^A).$$

De esto se sigue que $D_\sigma I/D_\sigma J$ es un $A-$invariante. □

Ejemplo 3.19 En el primer capítulo se observó que la acción del grupo $\operatorname{Aff}(1,\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$ extiende a $\mathbb{R}^3$ y tiene como invariante a la llamada *razón afín*:

$$R(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{I}{J}.$$

Sea $A = \mathbb{R}_1^2$. Considere $\sigma = (\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ como se definió en el ejemplo anterior. Tome un punto próximo de tipo de A

$$x(\varepsilon) = x + \varepsilon x' + \frac{\varepsilon^2}{2}x''.$$

Las derivadas $\sigma-$torcidas se calculan con facilidad:

$$\begin{aligned} D_\sigma I &= 2\varepsilon(x' + \varepsilon x'' + \frac{2}{3}\varepsilon^2 x^{(3)}) \\ D_\sigma J &= \varepsilon(x' + \frac{\varepsilon}{2}x'' + \frac{1}{6}\varepsilon^2 x^{(3)}). \end{aligned}$$

Las hipótesis del teorema se cumplen y puede calcularse el cociente, que está bien definido en $\mathbb{R}_1^2/\operatorname{Ann}(\varepsilon) = \mathbb{R}_1^1$

$$\frac{D_\sigma I}{D_\sigma J}(p^A) = 2\frac{x' + \varepsilon x''}{x' + \frac{\varepsilon}{2}x''} = 2(x' + \varepsilon x'')\left(\frac{1}{x'} - \frac{\varepsilon x''}{2x'^2}\right) = 2 + \frac{x''}{x'}\varepsilon$$

y con esto se ha obtenido un nuevo invariante diferencial, x''/x', que es la derivada logarítmica de la velocidad.

Ejemplo 3.20 Considere la acción de $\operatorname{PGL}(2,\mathbb{R})$ en $M = \mathbb{RP}^1$, ver por ejemplo [OT04]. Esta acción tiene un invariante conocido como la razón anarmónica:

$$R(x_1,x_2,x_3) = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)} = \frac{I(x_1,x_3,x_3,x_4)}{J(x_1,x_2,x_3,x_4)}$$

Sea $\sigma = (\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_4)$ una tupla de morfismos del álgebra $\mathbb{R}_1^4$ en sí misma, donde $\sigma_i(\varepsilon) = i\varepsilon$.

Considere $x(\varepsilon)$ un punto próximo en $M(\mathbb{R}_1^4)$, que en coordenadas afines se escribe como

$$x(\varepsilon) = x + \varepsilon x' + \frac{\varepsilon^2}{2}x'' + \frac{\varepsilon^3}{6}x''' + \frac{\varepsilon^4}{24}x^{(4)}.$$

Al aplicar la derivada torcida por σ se obtiene

$$D_\sigma I(x(\varepsilon)) = I(x(0), x(\varepsilon), x(2\varepsilon), x(3\varepsilon)) =$$

$$= \varepsilon^2 \left(4x'^2 + 12x'x''\varepsilon + \frac{24x''^2 + 34x'x'''}{3}\varepsilon^2 + o_1\varepsilon^3\right)$$

$$D_{\bar{\tau}} J(x(\varepsilon)) = J(x(0), x(\varepsilon), x(2\varepsilon), x(3\varepsilon)) =$$

$$= \varepsilon^2 \left(x'^2 + 3x'x''\varepsilon + \frac{15x''^2 + 40x'x'''}{12}\varepsilon^2 + o_2\epsilon^3\right)$$

Los términos o_1 y o_2 involucran exponentes de ε que no aportan nada a los cómputos. Por el teorema 3.18 el cociente anterior está bien definido en $\mathbb{R}_1^4/Ann(\varepsilon^2) = \mathbb{R}_1^2$. En esta álgebra se tiene

$$\frac{D_{\bar{\tau}} I}{D_{\bar{\tau}} J} = \frac{4x'^2 + 12x'x''\varepsilon + \frac{24x''^2+34x'x'''}{3}\varepsilon^2}{x'^2 + 3x'x''\varepsilon + \frac{15x''^2+40x'x'''}{12}\varepsilon^2} =$$

$$= 4 + \frac{3x''^2 - 2x'''x'}{x'^2}\varepsilon^2.$$

De manera que el coeficiente de ε^2

$$\frac{3x''^2 - 2x'''x'}{x'^2},$$

que es la derivada Schwartziana, que, como ya se sabia, es un invariante diferencial.

Conclusiones y Perspectivas

Los resultados de esta tesis son de carácter local y tratan sobre la dependencia funcional en el sentido suave. Un ejemplo muy ilustrativo de lo que sucede en el caso de los invariantes de configuración es la fórmula de Herón. Ésta expresa que el área es una función algebraica de grado 2 de la distancia entre puntos. De esta manera, es posible tener invariantes racionales de configuración de n puntos que, si bien son funcionalmente dependientes de invariantes de $n-1$ puntos, no pueden expresarse como función racional sino como función algebraica. Entender este fenómeno es un paso importante.

Se ha desarrollado un mecanismo para derivar los invariantes de configuración y así obtener invariantes diferenciales. Sin embargo, no se sabe si es posible obtener sistemas completos de invariantes a través de dicho mecanismo.

Bibliografía

[BS09] David Blázquez-Sanz. Affine structures on jet and weil bundles. *Colloquium mathematicum*, 114(2):291–301, 2009.

[BS12] David Blázquez-Sanz. Algebraic and rational differential invariants. *Boletín de matematicas, Universidad Nacional de Colombia*, 19(192):133–188, 2012.

[BSA14a] David Blázquez-Sanz and Juan Sebastián Díaz Arboleda. A note on the relation between joint and differential invariants. *arXiv preprint arXiv:1410.7878*, 2014.

[BSA14b] David Blázquez-Sanz and Juan Sebastián Díaz Arboleda. *Un curso de geometría diferencial.* En proceso de publicación, 2014.

[FO98] Mark Fels and Peter J Olver. Moving coframes: I. a practical algorithm. *Acta Applicandae Mathematica*, 51(2):161–213, 1998.

[FO99] Mark Fels and Peter J Olver. Moving coframes: Ii. regularization and theoretical foundations. *Acta Applicandae Mathematica*, 55(2):127–208, 1999.

[HK07] Evelyne Hubert and Irina A Kogan. Smooth and algebraic invariants of a group action: local and global constructions. *Foundations of Computational Mathematics*, 7(4):455–493, 2007.

[KSM99] Ivan Kolar, Jan Slovak, and Peter W Michor. *Natural operations in differential geometry.* Springer-Verlag, 1999.

[MRM00] J Muñoz, Josemar Rodríguez, and FJ Muriel. Weil bundles and jet spaces. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 50(4):721–748, 2000.

[Olv95] Peter J Olver. *Equivalence, invariance and symmetry.* Cambridge Univ. Press, 1995.

[Olv01] Peter J Olver. Joint invariant signatures. *Foundations of Computational Mathematics*, 1(1):3–68, 2001.

[Olv11] Peter J Olver. Differential invariant algebras, symmetries and related topics in differential and difference equations. *Contemp. Math*, 549:95–121, 2011.

[OT04] Valentin Ovsienko and Serge Tabachnikov. *Projective differential geometry old and new: from the Schwarzian derivative to the cohomology of diffeomorphism groups*, volume 165. Cambridge University Press, 2004.

[Pal61] Richard S Palais. On the existence of slices for actions of non-compact lie groups. *Annals of Mathematics*, 73(2):295–323, 1961.

[Wei53] A Weil. Theorie des points proches sur les variétés differentiables. *Colloque de Geometrie Differentiable, CNRS*, pages 111–117, 1953.

Índice alfabético