SOBRE LA BUENA COLOCACIÓN DEL PROBLEMA DE CAUCHY ASOCIADO A UNA PERTURBACIÓN DE LA ECUACIÓN DE BENJAMÍN-ONO EN ESPACIOS DE SOBOLEV $H^s(\mathbb{R})$ y $H^s(\mathbb{T})$

Oscar Guillermo Riaño Castañeda
Estudiante maestría en ciencias matemáticas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de matemáticas
Bogotá D.C., Colombia
2015

SOBRE LA BUENA COLOCACIÓN DEL PROBLEMA DE CAUCHY ASOCIADO A UNA PERTURBACIÓN DE LA ECUACIÓN DE BENJAMÍN-ONO EN ESPACIOS DE SOBOLEV $H^s(\mathbb{R})$ y $H^s(\mathbb{T})$

Oscar Guillermo Riaño Castañeda
Estudiante maestría en ciencias matemáticas

Trabajo de tesis para optar al título de
Magister en Ciencias-Matemáticas

Director
Ph.D., Ricardo Ariel Pastrán Ramírez.
Doctor en Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de matemáticas
Bogotá D.C., Colombia
2015

Título en español

SOBRE LA BUENA COLOCACIÓN DEL PROBLEMA DE CAUCHY ASOCIADO A UNA PERTURBACIÓN DE LA ECUACIÓN DE BENJAMÍN-ONO EN ESPACIOS DE SOBOLEV $H^s(\mathbb{R})$ y $H^s(\mathbb{T})$

Title in English

ON THE WELL-POSEDNESS OF THE CAUCHY PROBLEM ASSOCIATED TO A PERTURBATION OF THE BENJAMIN-ONO EQUATION IN THE SOBOLEV SPACES $H^s(\mathbb{R})$ AND $H^s(\mathbb{T})$

Resumen: En esta tesis se demuestra que el problema de valor inicial asociado a una perturbación de la ecuación de Benjamin-Ono o ecuación de Chen-Lee

$$u_t + uu_x + \beta\mathcal{H}u_{xx} + \eta(\mathcal{H}u_x - u_{xx}) = 0,$$

donde $x \in \mathbb{T}$ o $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $\beta \geq 0$, $\eta > 0$ y $\mathcal{H}$ denota la transformada de Hilbert, es local y globalmente bien planteado en H^s cuando $s > -1/2$. También se demuestra que el flujo dato solución falla en ser C^2 cuando $s < -1$ en $H^s(\mathbb{T})$ y falla en ser C^3 en $H^s(\mathbb{R})$ cuando $s < -\frac{1}{2}$.

Abstract: In this thesis we prove that the initial value problem associated to a perturbation of the Benjamin-Ono equation or Chen-Lee equation

$$u_t + uu_x + \beta\mathcal{H}u_{xx} + \eta(\mathcal{H}u_x - u_{xx}) = 0,$$

where $x \in \mathbb{T}$, $t > 0$, $\beta, \eta > 0$ and $\mathcal{H}$ denotes the Hilbert transform, is globally well-posed in H^s for $s > -1/2$. We also prove that the flow map data-solution fails to be C^2 when $s < -1$ in $H^s(\mathbb{T})$ and fails to be C^3 in $H^s(\mathbb{R})$ when $s < -\frac{1}{2}$.

Palabras clave: Problema de Cauchy, buen planteamiento local y global, ecuación de Benjamin-Ono

Keywords: Cauchy problem, local and global well-posedness, Benjamin-Ono equation

Nota de aceptación

Trabajo de tesis
Aprobado

Director
Ricardo Ariel Pastrán Ramírez

2015

Dedicado a

a Myriam mi madre quien hizo todo esto posible.

Agradecimientos

Primero agradezco a Dios por ser el guía de mi vida y permitirme alcanzar esta meta.

Al profesor Ricardo Pastrán por su paciencia en la revisión de esta tesis, por sus excelentes consejos matemáticos y personales que me permitieron culminar este escrito.

A mi familia por su increíble apoyo y compañía durante cada una de las etapas de mi vida. En especial a mi madre Myriam y mis hermanos Cesar y Andrea.

A Sindy Castillo por su compañía y consejos durante todos estos años. También a mis profesores, amigos y compañeros durante el transcurso de estos años, en especial a Felipe Ponce por su colaboración en este escrito.

A los integrantes del seminario de Ecuaciones de Evolución por sus ayuda y apoyo en la elaboración de este trabajo.

Índice general

Introducción

En este trabajo se estudia el problema de Cauchy asociado a la ecuación de Chen-Lee

$$CL\begin{cases} u_t + uu_x + \beta\mathcal{H}u_{xx} + \eta(\mathcal{H}u_x - u_{xx}) = 0, \, x \in \mathbb{T} \text{ o } x \in \mathbb{R}, \, t \geq 0, \\ u(x,0) = \phi(x), \end{cases} \tag{1}$$

donde $\beta, \eta > 0$. En la ecuación, $\mathcal{H}$ denota la transformada de Hilbert periódica dada por

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_0^{2\pi} f(y) \cot\left(\frac{y-x}{2}\right) dy,$$

o de manera equivalente, $\widehat{\mathcal{H}f}(k) = i\,\mathrm{sgn}(k)\widehat{f}(k)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $f \in \mathcal{P}$. En el caso de la recta real, $\mathcal{H}$ denota la transformada de Hilbert,

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{\pi} v.p. \int_{\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{y-x} dy,$$

o equivalentemente, $\widehat{\mathcal{H}f}(\xi) = i\,\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi)$, para todo $\xi \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

La ecuación (1) fue introducida por primera vez por H.H. Chen y Y.C. Lee en [5] para describir fluidos y turbulencia en plasmas. Se resalta que el cuarto y quinto término de la ecuación representan inestabilidad y disipación, respectivamente. El parámetro η representan la importancia de la inestabilidad y la disipación relativa a la dispersión y no linealidad. Muchos autores han estudiado la ecuación (1) desde un punto de vista numérico. Por ejemplo, H.H. Chen, Y. Lee y S.Qian en [6, 7], y B.-F. Feng y T. Kawahara en [15], investigaron el problema de valor inicial, junto con las ondas solitarias y periódicas estacionarias de la ecuación.

Más recientemente R. Pastrán demostró en [25] utilizando el método de restricción de norma de Fourier, buen planteamiento local de la ecuación de Cheen-Lee (1) en los espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ para $s > -1/2$ y buen planteamiento global cuando $s \geq 0$. Además, para $s < -1$, demostró que no es posible implementar el método iterativo de Picard en la formulación integral de la ecuación. En particular, los métodos introducidos por Bourgain [4] y Kenig, Ponce y Vega en [20], no pueden ser usados en la ecuación (1) cuando el dato inicial está en el espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ para $s < -1$.

Esta tesis está dividida de la siguiente manera: En el primer capítulo se presentan definiciones y resultados teóricos necesarios para el desarrollo de este trabajo. Después, en el segundo capítulo se presenta el estudio de la teoría local en $H^s(\mathbb{T})$ para $s > 1/2$ y la teoría global para $s \geq 1$. En el tercer capítulo, inicialmente se demuestra la buena colocación local del problema de Cauchy (1) en $H^s(\mathbb{T})$ para $s > -1/2$ y se estudian resultados concernientes al buen planteamiento global. Notemos que con estos hechos se complementan los resultados dados en el segundo capítulo. También, siguiendo las ideas dadas por Pilod en [27], se estudia la convergencia de las soluciones de la ecuación de Chen-Lee cuando la dispersión β tiende a cero. Además, se muestra que la aplicación dato inicial solución de la ecuación (1) falla en ser C^2 en $H^s(\mathbb{T})$ para todo $s < -1$. En el cuarto capítulo, verificamos que los resultados dados en el tercer capítulo son válidos para la ecuación de Chen-Lee en $H^s(\mathbb{R})$, en particular, concluimos el buen planteamiento local en $H^s(\mathbb{R})$ cuando $s > -\frac{1}{2}$. De esta manera, siguiendo los resultados dados por Vento en [32], mostramos que este resultado es óptimo en el sentido que la aplicación dato inicial solución falla en ser C^3 en $H^s(\mathbb{R})$ para $s < -\frac{1}{2}$.

Resaltamos que los resultados de buen planteamiento local son los mismos obtenidos por R. Pastrán en [25] para la ecuación de Cheen-Lee (1) en el caso real, pero en esta tesis fueron obtenidos sin utilizar el método de restricción de norma de Fourier.

Notación

- $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
- $\mathcal{P} = C^\infty(\mathbb{T})$ es el espacio de las funciones infinitamente diferenciales sobre $\mathbb{T}$ con valores complejos. $\mathcal{P}'$, denota el espacio de las distribuciones periódicas.
- $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es el espacio de Schwartz y $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ es el espacio de las distribuciones temperadas.
- $\widehat{\cdot}$, denota la transformada de Fourier.
- $\{\cdot\}^\vee$, denota la trasformada inversa de Fourier.
- $(\cdot,\cdot)_X$, denota el Producto interno en el espacio de Hilbert X.
- $\langle \cdot,\cdot \rangle$, denota el producto escalar para la dualidad de X', X, es decir, $\langle f, x\rangle = f(x)$, para cada $f \in X'$ y $x \in X$.
- Para X y Y espacios de Banach, $X \hookrightarrow Y$ significa que el espacio X está continua y densamente inmerso en Y.
- $l^p(\mathbb{Z}) = \{\alpha = (\alpha(k))_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C} \mid \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha(k)|^p < \infty\}$. La norma de esta espacio se denota como $\|\alpha\|_{l^p(\mathbb{Z})} = \|\alpha(k)\|_{l^p(\mathbb{Z})} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha(k)|^p$.
- $l^\infty(\mathbb{Z}) = \{\alpha = (\alpha(k))_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C} \mid \sup_{k\in\mathbb{Z}} \{|\alpha(k)|\} < \infty\}$. La norma de esta espacio se denota como $\|\alpha\|_{l^\infty(\mathbb{Z})} = \|\alpha(k)\|_{l^\infty(\mathbb{Z})} = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \{|\alpha(k)|\}$.
- Dado el espacio medible $(X, \mathbb{X}, \mu)$, denotamos por $L^p(X)$ al espacio de todas las funciones medibles $f : X \to \mathbb{C}$, tales que $\int_X |f(x)|^p d\mu(x) < \infty$ si $1 \leq p < \infty$ o $ess\,sup_X\ |f| < \infty$, si $p = \infty$. Entenderemos por $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{L^2(X)}$.
- $\langle \xi \rangle = (1 + \xi^2)^{1/2}$, para todo $\xi \in \mathbb{R}$.
- $H^s(\mathbb{K})$ es el espacio de Sobolev sobre $\mathbb{K} = \mathbb{T}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ con índice $s \in \mathbb{R}$, de tipo L^2.
- $(f, g)_s$, denota el producto interno de $f, g \in H^s(\mathbb{K})$, para todo $s \in \mathbb{R}$, con $\mathbb{K} = \mathbb{T}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

- $\|f\|_s$, denota la norma de $f \in H^s(\mathbb{K})$, para todo $s \in \mathbb{R}$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{T}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
- $\|u\|_{\infty,s} = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_s$, para cada $u \in C\left([0,T]; H^s(\mathbb{K})\right)$ y cada $s \in \mathbb{R}$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{T}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
- $\mathcal{B}(X,Y)$, denota el espacio de los operadores lineales acotados de X en Y, donde X y Y son espacios de Banach. Si $X = Y$, se denota $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X,X)$.
- $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$, denota la función Gamma con $x > 0$.
- $B(x,y) = \int_0^1 z^{x-1}(1-z)^{y-1}\, dz$, denota la función Beta con $x, y > 0$.
- $Q = -\beta\mathcal{H}\partial_x^2 - \eta(\mathcal{H}\partial_x - \partial_x^2)$.
- $q(\xi) = i\beta|\xi|\xi + \eta\left(|\xi| - |\xi|^2\right)$, para todo $\xi \in \mathbb{R}$.
- $\Re(a)$ denota la parte real del número complejo a.

CAPÍTULO 1

Preliminares

En este capítulo se presentan conceptos, definiciones y algunos resultados teóricos necesarios para el desarrollo de este trabajo. Omitiremos las demostraciones de algunos resultados, puesto que son hechos ampliamente tratados en la literatura, sin embargo, indicaremos referencias donde se podrán consultar.

1.1. Transformada de Fourier y distribuciones en $\mathbb{T}$

Entenderemos el toro $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ como $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Por lo tanto, hay una identificación entre las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periódicas de periodo 2π y las funciones $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$. En efecto, si F es una función sobre el toro, entonces

$$f(x) = F(e^{ix}) \tag{1.1}$$

define una función 2π periódica. Recíprocamente, si f es una función periódica de periodo 2π, entonces existe una función F sobre $\mathbb{T}$ que satisface (1.1). De esta manera, entenderemos toda función sobre el toro como una función periódica de periodo 2π y le asignaremos a $\mathbb{T}$ la medida usual de Lebesgue restringida al intervalo $[-\pi, \pi]$. Luego, tenemos que

$$\int_{\mathbb{T}} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

para cada función f sobre $\mathbb{T}$.

Definición 1.1. *La transformada de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{T})$ es la sucesión compleja $\widehat{f} = (\widehat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ definida para cada entero k como*

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-ikx}dx.$$

La serie

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx}$$

se denomina la serie de Fourier.

Proposición 1.1. *i) La transformada de Fourier pertenece al espacio $\mathcal{B}\left(L^1(\mathbb{T}), l^\infty(\mathbb{Z})\right)$. Además,*

$$\left|\widehat{f}(k)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\|f\|_{L^1(\mathbb{T})}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$.

ii) (Lema de Riemann-Lebesgue) Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, entonces $\widehat{f}(k) \to 0$, si $|k| \to \infty$.

Demostración. Se puede consultar [18]. □

Definición 1.2. *Sean $\phi, \psi \in C(\mathbb{T})$. La convolución $\phi * \psi$ de ϕ y ψ es la función*

$$(\phi * \psi)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \phi(y)\psi(x-y)dy, \text{ para todo } x \in \mathbb{T}.$$

Presentamos algunas propiedades de la convolución, su demostración se puede consultar en [18].

Proposición 1.2. *Sean $\phi, \psi, \sigma \in C(\mathbb{T})$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces,*

a) $\phi * \psi \in C(\mathbb{T})$,

b) $(\phi * \psi) * \sigma = \phi * (\psi * \sigma)$,

c) $(\phi * \psi) = (\psi * \phi)$,

d) $(\phi + \psi) * \sigma = \phi * \sigma + \psi * \sigma$,

e) $(\lambda\phi) * \psi = \lambda(\phi * \psi) = \psi * (\lambda\psi)$,

f) $(\phi * \psi)^\wedge(k) = \widehat{\phi}(k)\widehat{\psi}(k)$, *para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

Otra definición necesaria para este trabajo es la siguiente.

Definición 1.3. *Sean $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ y $\beta = (\beta_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ dos sucesiones de números complejos. La convolución de α y β es la sucesión $\alpha * \beta$ dada por*

$$(\alpha * \beta)_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j \beta_{k-j},$$

definida para los términos donde el lado derecho de esta igualdad tenga sentido.

Los espacios $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$

$\mathcal{P} = C^\infty(\mathbb{T})$ es el espacio de todas la funciones periódicas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de periodo 2π infinitamente diferenciales. La topología en $\mathcal{P}$ es generada por la familia de seminormas definidas por la norma infinito de cada derivada, es decir, $\left\|\phi^{(j)}\right\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$, para cada $\phi \in \mathcal{P}$ y $j \geq 0$. Esta topología no es derivada de una norma, pero es metrizable con la métrica

$$d(\phi, \psi) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \frac{\left\|\phi^{(j)} - \psi^{(j)}\right\|_{L^\infty(\mathbb{T})}}{1 + \left\|\phi^{(j)} - \psi^{(j)}\right\|_{L^\infty(\mathbb{T})}}, \tag{1.2}$$

donde $c_j > 0$ son constantes positivas y $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ converge. Más aún, $\mathcal{P}$ con esta distancia es un espacio métrico completo, es decir, es un espacio de Fréchet.

Definimos $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ como el espacio de las sucesiones que decrecen rápidamente, es decir, $\alpha = (\alpha_k) \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$ si y solo si

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \left|k^j \alpha_k\right| < \infty, \ \forall j \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

$\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ es un espacio métrico completo empleando la distancia definida en (1.2), pero con las seminormas dada por (1.3) variando $j \in \mathbb{N}$.

Definición 1.4. *Sea $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$. La transformada inversa de Fourier de α es la función*

$$(\alpha)^{\vee}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ikx}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Con el siguiente teorema observamos como la transformada de Fourier relaciona los espacios $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ y $\mathcal{P}$.

Teorema 1.1. *i) Sea $\phi \in \mathcal{P}$. Entonces, $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$ y $\widehat{\phi^{(j)}}(k) = (ik)^j \widehat{\phi}(k)$, para todo entero k. Además, vale la fórmula de inversión*

$$\phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ikx}.$$

ii) La transformada de Fourier $\widehat{\ }: \mathcal{P} \mapsto \mathcal{S}(\mathbb{Z})$ es un isomorfismo y un homeomorfismo.

Demostración. Consultar [18]. □

Proposición 1.3. *Sea $f \in \mathcal{P}$. Entonces $\left\|\widehat{f}\right\|^2_{l^2(\mathbb{Z})} = \frac{1}{2\pi} \left\|f\right\|^2_{L^2(\mathbb{T})}$. De manera equivalente,*

$$\frac{1}{2\pi}(f,g)_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\overline{g(x)}dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)}. \tag{1.4}$$

Puesto que $\mathcal{P}$ es denso en $L^2(\mathbb{T})$ la proposición anterior nos permite concluir el siguiente resultado.

Proposición 1.4. *La transformada de Fourier $\widehat{\ }: L^2(\mathbb{T}) \to l^2(\mathbb{Z})$ es una isometría sobreyectiva y vale la identidad de Parseval (1.4).*

Notaremos por $\mathcal{P}'$ al dual topológico de $\mathcal{P}$, es decir, el espacio de todos los funcionales lineales continuos de $\mathcal{P}$ en $\mathbb{C}$. $\mathcal{P}'$ es llamado el *espacio de las distribuciones periódicas*. Inspirados en la definición de la transformada de Fourier para $\mathcal{P}$ damos la siguiente definición.

Definición 1.5. *La transformada de Fourier en $\mathcal{P}'$ es la sucesión compleja definida por la fórmula*

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\left\langle f, e^{-ik(\cdot)}\right\rangle, \ \text{para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

.

Definimos la derivada de una distribución periódica f como

$$\left\langle f^{(j)}, \phi \right\rangle := (-1)^j \left\langle f, \phi^{(j)} \right\rangle, \tag{1.5}$$

para todo entero $j \geq 0$ y cada función $\phi \in \mathcal{P}$.

Una sucesión compleja $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es de crecimiento lento si existe una constante $C > 0$ y un entero positivo N, tal que

$$|\alpha_k| \leq C|k|^N \text{ para todo } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\,.$$

El conjunto de todas estas sucesiones se denota por $\mathcal{S}'(\mathbb{Z})$. Tenemos que $\mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ es un espacio vectorial complejo, para el cual definimos la topología de la convergencia puntual. Presentamos la siguiente caracterización de $\mathcal{P}'$ dada por la transformada de Fourier.

Teorema 1.2. *La transformada de Fourier* $\widehat{\ }: \mathcal{P}' \to \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ *es un isomorfismo y un homeomorfismo. Además, si* $f \in \mathcal{P}'$

$$\left(f^{(j)}\right)^{\wedge}(k) = (ik)^j \widehat{f}(k),$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ *y cada entero* $j \geq 0$.

Otra propiedad importante que se puede extender a $\mathcal{P}'$ es la convolución. Para esto introducimos los siguientes operadores. Sea $\phi \in \mathcal{P}$ y $x \in \mathbb{T}$, entonces definimos el operador traslación como $(T_x\phi)(y) = \phi(y - x)$ y el operador reflexión como $\tilde{\phi}(y) = \phi(-y)$. Luego, para $\mathcal{P}'$ el operador traslación se define como

$$\langle T_x f, \phi \rangle := \langle f, T_{-x}\phi \rangle$$

y el operador reflexión como

$$\left\langle \tilde{f}, \phi \right\rangle := \left\langle f, \tilde{\phi} \right\rangle,$$

para toda función $\phi \in \mathcal{P}$ y $x \in \mathbb{T}$. Con esta notación tenemos la siguiente definición.

Definición 1.6. *Sean* $f \in \mathcal{P}'$ *y* $\psi \in \mathcal{P}$*. Definimos la convolución* $f * \psi$ *de* f *y* ψ *como la función*

$$f * \psi(x) := \frac{1}{2\pi} \left\langle f, T_x\tilde{\phi} \right\rangle.$$

Puesto que para $f \in \mathcal{P}'$ y $\psi \in \mathcal{P}$, $(f * \phi)^{(n)} = f^{(n)} * \phi = f * \phi^{(n)}$, entonces $f * \phi \in \mathcal{P}$. Este hecho nos permite dar la siguiente definición.

Definición 1.7. *Sean* $f, g \in \mathcal{P}'$ *definimos la convolución de dos distribuciones* $f * g$ *como*

$$\langle f * g, \phi \rangle = \langle f, \tilde{g} * \phi \rangle\,, \text{ para toda } \phi \in \mathcal{P}.$$

Notamos que las propiedades $b)$ hasta $e)$ de la Proposición 1.2 son válidas para la convolución en $\mathcal{P}'$. Además, si $f, g \in \mathcal{P}'$, en [18] se demuestra que efectivamente $f * g \in \mathcal{P}'$ y

$$(f * g)^{\wedge}(k) = \widehat{f}(k)\widehat{g}(k), \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplo 1.1 (Distribución $v.p. \cot\left(\frac{x}{2}\right)$)**.** *Tenemos los siguientes resultados:*

(1) En $\mathcal{P}'$ definimos el valor principal de la función $\cot\left(\frac{x}{2}\right)$*, denotado como* $v.p. \cot\left(\frac{x}{2}\right)$ *como la expresión*

$$\left\langle v.p. \cot\left(\frac{x}{2}\right), \phi \right\rangle = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\epsilon < |x| < \pi} \phi(x) \cot\left(\frac{x}{2}\right) dx, \text{ para toda } \phi \in \mathcal{P}.$$

Puesto que $\cot\left(\frac{x}{2}\right)$ *es una función impar,*

$$\left\langle v.p. \cot\left(\frac{x}{2}\right), \phi \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} x \cot\left(\frac{x}{2}\right) dx.$$

Luego, $\left|\left\langle v.p. \cot\left(\frac{x}{2}\right), \phi\right\rangle\right| \leq C \left\|\phi'\right\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$*. Así,* $v.p. \cot\left(\frac{x}{2}\right) \in \mathcal{P}'$*.*

(2) $\left(v.p. \cot\left(\frac{x}{2}\right)\right)^\wedge(k) = -isgn(k)$*, para todo entero k. En efecto, notemos que*

$$\lim_{\substack{\delta \to 0^+ \\ \eta \to \infty}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\delta \leq |x| \leq \eta} \frac{e^{-i\xi x}}{x} \, dx = \lim_{\substack{\delta \to 0^+ \\ \eta \to \infty}} -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} sgn(\xi) \int\limits_{\delta|\xi|}^{\eta|\xi|} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} \, dy = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} sgn(\xi), \tag{1.6}$$

además,

$$\frac{1}{2} \cot\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{x} + \sum_{m \neq 0} \frac{1}{x - 2\pi m} - \frac{1}{2\pi m}$$

y la convergencia de la serie anterior es uniforme en compactos del plano complejo que no tengan puntos de $2\pi\mathbb{Z}$. De la serie anterior y (1.6) tenemos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta \to 0^+} \int\limits_{\delta \leq |x| \leq \pi} \frac{1}{2} \cot\left(\frac{x}{2}\right) e^{-ikx} \, dx \\
&= \lim_{\delta \to 0^+} \left(\int\limits_{\delta \leq |x| \leq \eta} \frac{e^{-ikx}}{x} \, dx + \int\limits_{\delta \leq |x| \leq \pi} \sum_{m \neq 0} \frac{e^{-ikx}}{x - 2\pi m} - \frac{e^{-ikx}}{2\pi m} \, dx \right) \\
&= \lim_{\delta \to 0^+} \left(\int\limits_{\delta \leq |x| \leq \pi} \frac{e^{-ikx}}{x} \, dx \right) + \sum_{m \neq 0} \int\limits_{-\pi + 2\pi m}^{\pi + 2\pi m} \frac{e^{-ikx}}{x} \, dx \\
&= \lim_{\delta \to 0^+} \int\limits_{\delta \leq |x|} \frac{e^{-ikx}}{x} = -i\pi sgn(k).
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Luego, la afirmación se concluye por (1.7) y la definición de los coeficientes de Fourier para distribuciones periódicas.

Definición 1.8 (La transformada de Hilbert periódica)**.** *Definimos la transformada de Hilbert periódica $\mathcal{H}$ por la expresión*

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_0^{2\pi} f(y) \cot\left(\frac{y - x}{2}\right) dy, \ \forall f \in \mathcal{P}.$$

Por lo visto en el Ejemplo 1.1 tenemos que $\mathcal{H}(\phi)(y)$ está definida para cada $y \in \mathbb{T}$ y $\mathcal{H}(\phi) \in \mathcal{P}'$. En la siguiente proposición se presentan algunas propiedades de la transformada de Hilbert

Proposición 1.5. *Sean $f, g \in \mathcal{P}$*

i) $\widehat{\mathcal{H}f}(k) = isgn(k)\widehat{f}(k)$, *para todo* $k \in \mathbb{Z}$.

ii) $(\mathcal{H}f, g)_0 = -(f, \mathcal{H}g)_0$. *Además,* $\|\mathcal{H}(f)\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}$

iii) $\partial_x \mathcal{H} = \mathcal{H}\partial_x$

Demostración. i) En $\mathcal{P}'$ vale que

$$\mathcal{H}(f)(y) = -\lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\cot\left(\frac{x}{2}\right) \chi_{\{\epsilon < |x| \leq \pi\}} * f \right)(y).$$

Pero por lo demostrado en el Ejemplo 1.1

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\cot\left(\frac{x}{2}\right) \chi_{\{\epsilon < |x| \leq \pi\}} * f \right)^{\wedge}(k) = -isgn(k)\widehat{f}(k), \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Luego, $\widehat{\mathcal{H}(\phi)}(k) = isgn(k)\widehat{f}(k)\ \forall k \in \mathbb{Z}$.

ii) y iii) son consecuencia de i). □

Resaltamos que la transformada de Hilbert es un operador unitario sobre $L^2(\mathbb{T})$, además, para $1 \leq p < \infty$ la transformada de Hilbert existe en casi toda parte. Más aún, $\mathcal{H} \in \mathcal{B}(L^p(\mathbb{T}))$, para $1 < p < \infty$. Estos resultados se pueden consultar en [10].

1.2. Distribuciones y transformada de Fourier en $\mathbb{R}$

En esta sección presentamos la versión de los resultados anteriores para la recta real. Para ver una demostración de estos hechos y un tratamiento amplio de la teoría en $\mathbb{R}^n$, se pueden consultar [16], [18] y [21]. Comenzamos definiendo el espacio de Schwartz y su dual, que toman la importancia de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ en la teoría de la transformada de Fourier en $\mathbb{R}$.

Definición 1.9. *El espacio Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ infinitamente diferenciables, tales que*

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^\alpha \partial^\beta f(x) \right| < \infty\, \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}.$$

Una distribución temperada es un funcional lineal continuo sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. El conjunto de todas las distribuciones temperadas se denota como $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

La topología en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es generada por la familia de seminormas $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. De esta manera, definiendo una métrica similar a la dada en (1.2), deducimos que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es un espacio métrico completo. Para $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ consideramos la topología débil inducida por las funciones de evaluación para cada $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

La transformada de Fourier se define de la siguiente manera.

Definición 1.10. *La transformada de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{R})$ es la función*

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

Con la definición anterior tenemos un resultado similar al dado en la Proposición 1.1. En efecto, la aplicación $\widehat{\ }: L^1(\mathbb{R}) \to C_\infty(\mathbb{R})$ es lineal, inyectiva y acotada (no es sobreyectiva), donde $C_\infty(\mathbb{R})$ denota el espacio de las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, tales que $f(x) \to 0$, cuando $|x| \to \infty$. Con el siguiente teorema observamos la importancia de la transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Teorema 1.3. *La aplicación $\phi \mapsto \widehat{\phi}$ es un isomorfismo de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ en sí mismo, cuya inversa se define como*

$$\phi^\vee(\xi) = \phi^\wedge(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \phi(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi,$$

para todo $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Además, para cada entero $m \in \mathbb{N}$ y $\xi \in \mathbb{R}$

$$(-i)^m \left(\partial^m \phi\right)^\wedge(\xi) = \xi^m \widehat{\phi}(\xi),$$
$$(-i)^m \left(x^m \phi\right)^\wedge(\xi) = \left(\partial^m \widehat{\phi}\right)(\xi).$$

Dado que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es un subespacio denso de $L^2(\mathbb{R})$, entonces el resultado anterior nos permite concluir que la transformada de Fourier $\widehat{\ }: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ es un operador unitario, es decir,

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left\|\widehat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R})}, \text{ para toda } f \in L^2(\mathbb{R}).$$

La transformada de Fourier en $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ se define de la siguiente manera.

Definición 1.11. *Dada $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, su transformada de Fourier $\widehat{\psi} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ se define como*

$$\left\langle \widehat{\psi}, \phi \right\rangle = \left\langle \psi, \widehat{\phi} \right\rangle, \text{ para todo } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

De igual manera definimos la transformada inversa para $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ como $\langle \psi^\vee, \phi \rangle = \langle \psi, \phi^\vee \rangle$, para todo $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Las operaciones con distribuciones se definen como en la sección anterior, incluyendo la derivada que se define como en (1.5). Presentamos el siguiente resultado

Teorema 1.4. *La transformada de Fourier $\widehat{\ }: \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ es un isomorfismo y un homeomorfismo. Además, para $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, se tiene que $\left(\psi^{(m)}\right)^\wedge(\xi) = (i\xi)^m \widehat{\psi}(\xi)$, para todo $\xi \in \mathbb{R}$ y cada entero $m \geq 0$.*

Definición 1.12. *Sean $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ y $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Definimos la convolución $\psi * \phi$ de ψ y ϕ como la función*

$$\psi * \phi(x) := \langle \psi, \phi(x - \cdot) \rangle .$$

Para $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ y $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, se puede verificar que $(\psi * \phi)^{(n)} = \psi^{(n)} * \phi = \psi * \phi^{(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por tanto $\psi * \phi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Además,

$$(\psi * \phi)^\wedge = 2\pi \widehat{\psi}\widehat{\phi},$$

donde $\widehat{\psi}\widehat{\phi} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ se define como $\left\langle \widehat{\psi}\widehat{\phi}, g \right\rangle = \left\langle \widehat{\psi}, \widehat{\phi} g \right\rangle$, para todo $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Finalizamos esta sección definiendo la transformada de Hilbert en este contexto.

Definición 1.13 (La transformada de Hilbert)**.** *Definimos la transformada de Hilbert $\mathcal{H}$ por la expresión*

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{\pi}\, v.\ p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{y-x}\, dy, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \ \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Los resultados dados en la Proposición 1.5 son válidos para la transformada de Hilbert en el caso real, cambiado a $\mathbb{T}$ por $\mathbb{R}$ y $\mathcal{P}$ por $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Para ver estos resultados, se puede consultar [10] donde se demuestra que $\widehat{\mathcal{H}f}(\xi) = i\operatorname{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi)$, para todo $\xi \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

1.3. Espacios de Sobolev y buen planteamiento

Puesto que los resultados presentados para los espacios de Sobolev en $\mathbb{T}$ y $\mathbb{R}$ serán tratados por separado, por simplicidad denotaremos la norma y el producto interno de la misma manera en ambos casos. Luego, para todo $s \in \mathbb{R}$ el espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{T})$ consiste de todas las distribuciones $f \in \mathcal{P}'$ tales que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle k \rangle^{2s} \left| \widehat{f}(k) \right|^2 < \infty.$$

El producto interno y la norma de $f, g \in H^s(\mathbb{T})$, se definen como

$$(f,g)_s = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle k \rangle^{2s} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)}, \qquad \|f\|_s = \left(2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle k \rangle^{2s} \left| \widehat{f}(k) \right|^2 \right)^{1/2}.$$

El espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ consiste de las distribuciones $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, tales que $\widehat{f}$ es medible y

$$\|f\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \left| \widehat{f}(\xi) \right|^2 d\xi < \infty.$$

El producto interno para $f, g \in H^s(\mathbb{R})$ se define como

$$(f,g)_s = \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\, d\xi.$$

Notemos que cuando $s = 0$, tenemos un espacio isométricamente isomorfo a $L^2(\mathbb{T})$ o a $L^2(\mathbb{R})$, según corresponda. Por otro lado, entenderemos por

$$H^\infty(\mathbb{T}) = \bigcap_{s \geq 0} H^s(\mathbb{T})$$

y de la misma manera definimos $H^\infty(\mathbb{R})$. Estos espacios los dotamos con la topología generada por las seminormas $\|\cdot\|_m$, para cada $m \in \mathbb{N}$.

De la definición de los espacios de Sobolev se deducen las siguientes propiedades.

Teorema 1.5. *a)* $H^s(\mathbb{T}) \hookrightarrow H^r(\mathbb{T})$ *para* $s \geq r$.

b) Sea $m \in \mathbb{N}$. *Entonces* $f \in H^m(\mathbb{T})$ *si y solo si* $\partial^j f = f^{(j)} \in L^2(\mathbb{T})$, *para todo* $j = 1, 2, \ldots, m$, *donde las derivadas son tomadas en el sentido de* $\mathcal{P}'$. *Más aún, la norma* $\|f\|_m$ *es equivalente a la norma*

$$|||f|||_m = \left(\sum_{j=0}^{m} \left\| f^{(j)} \right\|_{L^2(\mathbb{T})} \right)^{1/2}.$$

c) $(H^s(\mathbb{T}))'$ *el dual de* $H^s(\mathbb{T})$, *es isométricamente isomorfo a* $H^{-s}(\mathbb{T})$, *para todo número real* s.

d) (Lema de Sobolev).Sea $k \in \mathbb{N}$. *Si* $s > k + \frac{1}{2}$, $H^s(\mathbb{T}) \hookrightarrow C^k(\mathbb{T})$ *y*

$$\left\| f^{(j)} \right\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq C \|f\|_s ,$$

para todo entero $j = 0, 1, 2, \ldots, k$ *y cada* $f \in H^s(\mathbb{T})$.

e) Si $s > 1/2$, $H^s(\mathbb{T})$ *es un álgebra de Banach. En particular, existe una constante* C_s *que depende de* s *tal que*

$$\|fg\|_s \leq C_s \|f\|_s \|g\|_s ,$$

para todo $f, g \in H^s(\mathbb{T})$.

Demostración. Ver [18]. □

Observación 1.1. *Los resultado del Teorema 1.5 son válidos para* $H^s(\mathbb{R})$, *cambiando a* $\mathbb{T}$ *por* $\mathbb{R}$ *y a* $\mathcal{P}$ *por* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. *Más aún, el Lema de Sobolev afirma que para* $s > k + \frac{1}{2}$, $H^s(\mathbb{R})$ *está continuamente inmerso en* $C^k_\infty(\mathbb{R})$, *el espacio de funciones con* k *derivadas continuas que se anulan en el infinito.*

Por último explicamos la definición de buen planteamiento empleada.

Definición 1.14 (Buen Planteamiento)**.** *Sean* X, Y *espacios de Banach, tales que* $Y \hookrightarrow X$. *Consideramos el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = F(t, u(x,t)) \ \in X, \\ u(x,0) = \phi(x) \in Y \end{cases} \tag{1.8}$$

donde $F : [0,T] \times Y \to X$ *es una función por lo menos continua y la derivada tiene sentido en la topología de* X. *Diremos que el problema de valor inicial (1.8) es localmente bien planteado, si*

i) Para todo $\phi \in Y$, *existe* $T(\phi) > 0$ *y* $u \in C([0,T];Y)$, *tal que* $u(0) = \phi$ *y* u *satisface la ecuación (1.8).*

ii) Existe una única $u \in C([0,T];Y)$ *solcuión de (1.8).*

iii) La aplicación dato inicial solución $\phi \to u \in C([0,T];Y)$ *es continua. Más precisamente, si* $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de elementos de* Y, *tal que* $\phi_n \to \phi_\infty$ *en* Y *cuando* $n \to \infty$, *sean* $u_n \in C([0,T];Y)$, $n = 1, 2, 3, \ldots, \infty$ *las soluciones correspondientes. Entonces, se tiene que* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ *satisface* *a)* *Sea $T \in (0, T_\infty)$. Entonces, u_n puede ser extendida al intervalo $[0, T]$ para n suficientemente grande.*

b) *Además,*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \|u_n(t) - u_\infty(t)\| = 0.$$

De esta manera, bajo las condiciones anteriores si $T = \infty$, diremos que el problema de valor inicial (1.8) es globalmente bien planteado. Si alguna de las condiciones anteriores no se cumple se dirá que el problema está mal planteado.

.

1.4. Desigualdades

Lema 1.1. *Sean $a, b \in [0, \infty)$ y $s \geq 0$. Entonces existen constantes positivas m_s y M_s que dependen de s, tales que*

$$m_s(a^s + b^s) \leq (a + b)^s \leq M_s(a^s + b^s).$$

Lema 1.2 (Desigualdad de Gronwall). *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\beta > 0$ y $g \in C([a, b]; \mathbb{R})$ tal que*

$$g(x) \leq \alpha + \beta \int_a^x g(s)ds.$$

Entonces, $g(x) \leq \alpha e^{\beta(x-a)}$, para todo $x \in [a, b]$.

Lema 1.3 (Desigualdad de Young). *Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces para todo $a, b \geq 0$*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Considerando $\epsilon > 0$ y a, b números no negativos, podemos emplear la desigualdad de Young con los números $(\epsilon p)^{1/p}a$ y $(\epsilon p)^{-1/p}b$, para concluir el siguiente resultado.

Lema 1.4 (Desigualdad de Young con ϵ). *Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces para todo $a, b \geq 0$*

$$ab \leq \epsilon a^p + C(\epsilon)b^q, \quad \epsilon > 0,$$

donde $C(\epsilon) = (p\epsilon)^{\frac{-q}{p}} q^{-1}$.

Proposición 1.6 (Teorema de Young para convoluciones). *Sean $\alpha \in l^p(\mathbb{Z})$, $\beta \in l^q(\mathbb{Z})$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ con $1 \leq p, q, r \leq \infty$. Entonces $\alpha * \beta \in l^r(\mathbb{Z})$ y*

$$\|\alpha * \beta\|_{l^r(\mathbb{Z})} \leq \|\alpha\|_{l^p(\mathbb{Z})} \|\beta\|_{l^q(\mathbb{Z})}.$$

Proposición 1.7 (Teorema de Young para convoluciones). *Sean $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^q(\mathbb{R})$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ con $1 \leq p, q, r \leq \infty$. Entonces $f * g \in L^r(\mathbb{R})$ y*

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \|g\|_{L^q(\mathbb{R})}.$$

Proposición 1.8 (Desigualdad de Peetre). *Sean $s \in \mathbb{R}$ y $x, y \in \mathbb{R}^n$. Entonces,*

$$\left(1 + |x|^2\right)^s \leq 2^{|s|} \left(1 + |x - y|^2\right)^{|s|} \left(1 + |y|^2\right)^s. \tag{1.9}$$

Lema 1.5. *Existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq C \left(\|f\|_0 + \|f\|_0^{\frac{1}{2}} \|f'\|_0^{\frac{1}{2}} \right), \tag{1.10}$$

para cada $f \in H^1(\mathbb{T})$.

Demostración. Ver Lema 4.1 en [24]. $\square$

CAPÍTULO 2

Estudio Clásico de la Ecuación sobre el Toro

En este capítulo se muestra el buen planteamiento local para la ecuación de Chen-Lee (1) en $H^s(\mathbb{T})$, para $s > 1/2$ y el buen planteamiento global para $s \geq 1$. Para llegar a estos resultados comenzamos estudiando la ecuación lineal asociada al problema de Cauchy (1).

2.1. Ecuación lineal

En esta sección se estudia el problema de Cauchy asociado a la parte lineal de la ecuación de Cheen-Lee, dado por

$$\begin{cases} u_t + \beta \mathcal{H} u_{xx} + \eta(\mathcal{H} u_x - u_{xx}) = 0, \\ u(x,0) = \phi(x) \in H^s(\mathbb{T}), \end{cases} \tag{2.1}$$

donde $s \in \mathbb{R}$ y las constantes β y η son positivas. De la ecuación lineal (2.1) tenemos el siguiente operador

$$Q := -\beta \mathcal{H} \partial_x^2 - \eta(\mathcal{H}\partial_x - \partial_x^2),$$

para el cual, se tiene por la transformada de Fourier

$$\widehat{Q\phi}\,(k) = q\,(k)\,\widehat{\phi}\,(k)\,, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}, \text{ y cada } \phi \in \mathcal{P},$$

donde $q(k) = i\beta|k|k + \eta\left(|k| - |k|^2\right)$ para todo entero k. Luego, afirmamos que

$$Q \in \mathcal{B}\left(H^s(\mathbb{T}), H^{s-2}(\mathbb{T})\right).$$

En efecto, para todo $k \in \mathbb{Z}$

$$|q(k)| = \left| i\beta|k|k + \eta\left(|k| - k^2\right)\right| \leq (\beta + 2\eta)\,\langle k \rangle^2$$

y por lo tanto

$$\|Q\phi\|_{s-2} = (2\pi)^{1/2}\left\|\langle k \rangle^{s-2} q(k)\widehat{\phi}(k)\right\|_{l^2(\mathbb{Z})} \leq (\beta + 2\eta)\,\|\phi\|_s\,. \tag{2.2}$$

De esta manera, con el operador Q el problema de Cauchy (2.1) queda escrito como

$$\begin{cases} u_t - Qu = 0, \\ u(x,0) = \phi(x) \in H^s(\mathbb{T}). \end{cases} \tag{2.3}$$

Tomando transformada de Fourier en (2.3) e integrando la ecuación resultante entre 0 y t se tiene

$$\widehat{u}\,(k,t) = e^{q(k)t}\widehat{\phi}\,(k)\,,$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $t \geq 0$. Así, formalmente encontramos un candidato a solución de la ecuación (2.1) dado por

$$u(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{q(k)t+ikx}\widehat{\phi}\,(k)\,. \tag{2.4}$$

Verificaremos que efectivamente (2.4) es la solución del problema lineal. Antes de esto, comenzamos definiendo para cada $t \geq 0$ las aplicaciones $S\,(t)$ como

$$S\,(t)\,\phi = \left(e^{q(\cdot)t}\widehat{\phi}\,(\cdot)\right)^{\vee},$$

para todo $\phi \in \mathcal{P}$. Se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.1. *$(S(t))_{t\geq 0}$ es un C^0 semigrupo en $H^s(\mathbb{T})$, $s \in \mathbb{R}$. Además, $(S(t))_{t\geq 0}$ es un semigrupo de contracciones, es decir,*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{B}(H^s(\mathbb{T}))} \leq 1. \tag{2.5}$$

Demostración. Puesto que $\eta\left(|k| - k^2\right) t \leq 0$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $t \geq 0$, se tiene que

$$\left|e^{q(k)t}\right| = e^{\eta\left(|k|-k^2\right)t} \leq 1.$$

Luego de la linealidad de $S(t)$ y la desigualdad anterior, se sigue que $S(t) \in \mathcal{B}(H^s(\mathbb{T}))$ para todo $t \in [0,\infty)$ y (2.5) se satisface.

Verificaremos la continuidad de la aplicación $t \mapsto S\,(t)\,\phi$, para $\phi \in H^s(\mathbb{T})$ y $t \geq 0$. Las demás propiedades de semigrupo se demuestran fácilmente. Sean $t, t' \in [0,\infty)$ y $\phi \in H^s(\mathbb{T})$. Tenemos que

$$\|S(t)\phi - S(t')\phi\|_s^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle k\rangle^{2s} \left|e^{q(k)t}\widehat{\phi}\,(k) - e^{q(k)t'}\widehat{\phi}\,(k)\right|^2. \tag{2.6}$$

Notemos que para todo $k \in \mathbb{Z}$

$$\langle k\rangle^{2s} \left|e^{q(k)t}\widehat{\phi}\,(k) - e^{q(k)t'}\widehat{\phi}\,(k)\right|^2 \leq 4\,\langle k\rangle^{2s} \left|\widehat{\phi}\,(k)\right|^2, \tag{2.7}$$

por lo tanto (2.7) y el criterio M de Weierstrass implican que (2.6) converge absoluta y uniformemente. Con esto se concluye la continuidad. □

Con el siguiente teorema se muestra que efectivamente (2.4) es la solución buscada de la ecuación lineal (2.1).

Teorema 2.2. *La función $u(t) = S(t)\phi$, $t \geq 0$ es la única solución de (2.1) que satisface la ecuación*

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - Qu(t)\right\|_{s-2} = 0.$$

La convergencia anterior es uniforme con respecto a $t \geq 0$.

Demostración. Notemos que

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - Qu(t)\right\|_{s-2}^2 &= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\langle k\rangle^{2(s-2)}\left|\frac{e^{q(k)(t+h)}-e^{q(k)t}}{h} - q(k)e^{q(k)t}\right|^2\left|\widehat{\phi}(k)\right|^2 \\
&\leq 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\langle k\rangle^{2(s-2)}\, e^{2\eta\left(|k|-k^2\right)t}\left|\frac{e^{q(k)h}-1}{h} - q(k)\right|^2\left|\widehat{\phi}(k)\right|^2.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Primero supongamos que $h > 0$, entonces por la desigualdad del valor medio se tiene que

$$\left|\frac{e^{q(k)h}-1}{h}\right| \leq |q(k)|\,.$$

Así, la desigualdad anterior y (2.2) implican que existe una constante $C_{\beta,\eta}$ que depende de β y η, tal que

$$\begin{aligned}
\langle k\rangle^{2(s-2)}\, e^{2\eta\left(|k|-k^2\right)t}\left|\frac{e^{q(k)h}-1}{h} - q(k)\right|^2\left|\widehat{\phi}(k)\right|^2 &\leq 4\,\langle k\rangle^{2(s-2)}\,|q(k)|^2\left|\widehat{\phi}(k)\right|^2 \\
&\leq C_{\beta,\eta}\,\langle k\rangle^{2s}\left|\widehat{\phi}(k)\right|^2,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. Luego, por el criterio M de Weierstrass y (2.9) se tiene que (2.8) converge absoluta y uniformemente, concluyendo lo afirmado si $h > 0$.

Por otro lado, si $h < 0$, por (2.2) y (2.5)

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - Qu(t)\right\|_{s-2} &= \left\|\frac{S(t+h)\phi - S(t)\phi}{h} - QS(t)\right\|_{s-2} \\
&= \left\|S(t+h)\left(\frac{S(-h)\phi-\phi}{-h} - QS(-h)\phi\right)\right\|_{s-2} \\
&\leq \left\|\frac{S(-h)\phi-\phi}{-h} - Q\phi\right\|_{s-2} + \left\|Q\left(\phi - S(-h)\phi\right)\right\|_{s-2} \\
&\leq \left\|\frac{S(-h)\phi-\phi}{-h} - Q\phi\right\|_{s-2} + C_{\beta,\eta}\left\|\phi - S(-h)\phi\right\|_{s},
\end{aligned} \tag{2.10}$$

por lo demostrado para $h > 0$ y la continuidad del semigrupo la expresión anterior tiende a cero si $h \to 0^-$.

Resta por verificar la unicidad, para esto sean $u(t)$ y $v(t)$ soluciones del problema de Cauchy (2.1) con datos iniciales $\phi, \psi \in H^s(\mathbb{T})$ respectivamente.

Luego, $w(t)=u(t)-v(t)$ satisface (2.1) con dato inicial $\phi-\psi$, además,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_{s-2}^2 &= 2\Re\left(w,Qw\right)_{s-2}\\ &= 2\Re\left(2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\langle k\rangle^{2(s-2)}\overline{q(k)}\,|\widehat{w}(k)|^2\right)\\ &= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\langle k\rangle^{2(s-2)}\eta\left(|k|-k^2\right)|\widehat{w}(k)|^2\leq 0. \end{aligned}\tag{2.11}$$

Hemos usado que $\eta\left(|k|-k^2\right)\leq 0$, para todo $k\in\mathbb{Z}$. Así, (2.11) implica que

$$\|w(t)\|_{s-2}\leq\|w(0)\|_{s-2}=\|\phi-\psi\|_{s-2}\,,\ t\in[0,\infty).$$

Por tanto la unicidad se tendrá si hacemos $\phi=\psi$. □

Corolario 1. *El problema de Cauchy (2.1) está bien planteado en $H^s(\mathbb{T})$, para todo $s\in\mathbb{R}$. Esto quiere decir, que para todo $\phi\in H^s(\mathbb{T})$, (2.1) tiene una única solución $u\in C^1\left([0,\infty);H^{s-2}(\mathbb{T})\right)$ que depende continuamente del dato inicial.*

Demostración. Por los resultados demostrados anteriormente solo nos resta por verificar la continuidad de la derivada de la solución. De esta manera, sean $t'\geq 0$ fijo y h número real, tal que si $t'>0$, $|h|\leq t'$ y si $t'=0$, $h\geq 0$. Entonces por (2.2) tenemos que

$$\begin{aligned}\left\|\partial_t S(t'+h)\phi-\partial_t S(t')\phi\right\|_{s-2} &= \left\|Q\left(S(t'+h)\phi-S(t')\phi\right)\right\|_{s-2}\\ &\leq C_{\eta,\beta}\left\|S(t'+h)\phi-S(t')\phi\right\|_s.\end{aligned}$$

De la anterior desigualdad y la continuidad del semigrupo se concluye lo buscado. □

Concluimos esta sección presentando algunas estimativas lineales asociadas al semigrupo de contracciones $(S(t))_{t\geq 0}$. Esta propiedades son importantes para demostrar el buen planteamiento local y global de la ecuación de Chen-Lee (1).

Teorema 2.3. *Sean $s\in\mathbb{R}$ y $\lambda\geq 0$. Entonces, $S(t)\in\mathcal{B}\left(H^s(\mathbb{T}),H^{s+\lambda}(\mathbb{T})\right)$, para todo $t>0$. Además, existe una constante C_λ tal que*

$$\|S(t)\phi\|_{s+\lambda}\leq C_\lambda\left(1+\frac{1}{(\eta t)^{\frac{\lambda}{2}}}\right)e^{\frac{\eta t}{8}\left(1+\sqrt{1+\frac{8\lambda}{\eta t}}\right)}\|\phi\|_s\,,\tag{2.12}$$

para cada $\phi\in H^s(\mathbb{T})$.

Demostración. Para $\phi\in H^s(\mathbb{T})$ se tiene que

$$\begin{aligned}\|S(t)\phi\|_{s+\lambda} &= (2\pi)^{1/2}\left\|\langle k\rangle^{s+\lambda}e^{q(k)t}\widehat{\phi}(k)\right\|_{l^2(\mathbb{Z})}\\ &\leq\left\|\langle k\rangle^{\lambda}e^{q(k)t}\right\|_{l^\infty(\mathbb{Z})}\|\phi\|_s\,.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Para dar una cota de la norma $\left\|\langle k\rangle^{\lambda} e^{q(k)t}\right\|_{l^\infty(\mathbb{Z})}$, observamos que para todo $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ tenemos

$$\left|\langle k\rangle^{\lambda} e^{q(k)t}\right| \leq C_\lambda |k|^\lambda e^{\eta(|k|-k^2)t} \leq C_\lambda \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^\lambda e^{\eta(|x|-x^2)t}. \tag{2.14}$$

Sea $w_t(x) = x^\lambda e^{\eta(x-x^2)t}$, con $x \geq 0$. Tenemos que $w_t(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$, además,

$$w_t'(x^*) = 0 \Leftrightarrow x^* = \frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8\lambda}{\eta t}}\right).$$

Por lo tanto, w_t alcanza su valor máximo en x^*. De esta manera, existe una constante positiva $\tilde{C}_\lambda$ para la cual

$$w_t(x^*) \leq \tilde{C}_\lambda \left(1 + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{\lambda}{2}}}\right) e^{\frac{\eta t}{8}\left(1+\sqrt{1+\frac{8\lambda}{\eta t}}\right)-\frac{\lambda}{2}}. \tag{2.15}$$

Luego de (2.14), (2.15) y el caso $k = 0$, ajustando la constate se tiene que

$$\left\|\langle k\rangle^{\lambda} e^{q(k)t}\right\|_{l^\infty(\mathbb{Z})} \leq C_\lambda \left(1 + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{\lambda}{2}}}\right) e^{\frac{\eta t}{8}\left(1+\sqrt{1+\frac{8\lambda}{\eta t}}\right)}.$$

Con lo anterior se concluye (2.12). □

Teorema 2.4. *Sea $t > 0$, $s > -\frac{1}{2}$. Entonces, $S(t) \in \mathcal{B}\left(L^1(\mathbb{T}), H^s(\mathbb{T})\right)$. Más aún, existe una constante C_s que depende únicamente de s tal que*

$$\|S(t)\phi\|_s \leq C_s \left(1 + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{s}{2}}} + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{1+2s}{4}}}\right) \|\phi\|_{L^1(\mathbb{T})}, \tag{2.16}$$

para cada $\phi \in L^1(\mathbb{T})$.

Demostración. Puesto que $\phi \in L^1(\mathbb{T})$, entonces $\left|\widehat{\phi}(k)\right| \leq \frac{1}{2\pi} \|\phi\|_{L^1(\mathbb{T})}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|S(t)\phi\|_s &= (2\pi)^{1/2} \left\|\langle k\rangle^s e^{q(k)t}\widehat{\phi}(k)\right\|_{l^2(\mathbb{Z})} \\
&\leq (2\pi)^{1/2} \left\|\widehat{\phi}(k)\right\|_{l^\infty(\mathbb{Z})} \left\|\langle k\rangle^s e^{q(k)t}\right\|_{l^2(\mathbb{Z})} \\
&\leq (2\pi)^{-1/2} \|\phi\|_{L^1(\mathbb{T})} \left\|\langle k\rangle^s e^{q(k)t}\right\|_{l^2(\mathbb{Z})}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Como $\eta\left(|k| - k^2\right)t \leq -\frac{\eta k^2 t}{2}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ con $|k| \geq 2$, se tiene que

$$\left\|\langle k\rangle^s e^{q(k)t}\right\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle k\rangle^{2s} e^{2\eta\left(|k|-k^2\right)t} \leq 1 + 2^{s+1} + 2^{s+1}\sum_{k=2}^{\infty} k^{2s} e^{-\eta k^2 t}. \tag{2.18}$$

Sea $I := \sum_{k=2}^{\infty} k^{2s} e^{-\eta k^2 t}$, buscaremos una cota para I. La desigualdad (2.18) motiva a estudiar la función $h(x) = x^{2s}e^{-\eta x^2 t}$ para $x > 0$. Luego,

$$h'(x) = 2\left(s - \eta t x^2\right) x^{2s-1} e^{-\eta x^2 t}. \tag{2.19}$$

Así, si $-\frac{1}{2} < s \leq 0$, (2.19) implica que h es una función monótona decreciente en $[1, \infty)$ y por tanto $h(k) \leq \int_{k-1}^{k} x^{2s} e^{-\eta x^2 t}\, dx$, para todo entero $k \geq 2$. Luego,

$$
\begin{aligned}
I = \sum_{k=2}^{\infty} h(k) \leq \int_{1}^{\infty} x^{2s} e^{-\eta x^2 t} dx &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\eta t}\right)^{\frac{1+2s}{2}} \int_{\eta t}^{\infty} x^{\frac{2s-1}{2}} e^{-x} dx \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\eta t}\right)^{\frac{1+2s}{2}} \Gamma\left(\frac{1+2s}{2}\right). \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

Por otro lado, si $s > 0$ se tiene por (2.19) que el máximo de la función $h(x)$ se alcanza en $x_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{s}{\eta t}}$. Luego, $x_{\text{máx}} \leq 1$, entonces h es monótona decreciente en $[1, \infty)$ y se sigue que I queda acotado como en (2.20). Si $x_{\text{máx}} > 1$, tenemos por (2.19) que $h(x)$ es monótona creciente en $[1, x_{\text{máx}})$ y decreciente en $(x_{\text{máx}}, \infty)$, lo cual implica que

$$
\begin{aligned}
I &\leq \left(\frac{s}{\eta t}\right)^{s} e^{-s} + \int_{2}^{\infty} x^{2s} e^{-\eta x^2 t} dx \\
&\leq \left(\frac{s}{\eta t}\right)^{s} e^{-s} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\eta t}\right)^{\frac{1+2s}{2}} \Gamma\left(\frac{1+2s}{2}\right). \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

De esta manera, por (2.20) y (2.21), existe una constante C_s que depende de s tal que

$$
I \leq C_s \left(\frac{1}{(\eta t)^{s}} + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{1+2s}{2}}} \right). \qquad (2.22)
$$

Por tanto, de (2.18) y (2.22), ajustando la constante y tomando raíz cuadrada se concluye el teorema. $\square$

Como consecuencia de la demostración del teorema anterior se deduce el siguiente lema.

Lema 2.1. *Sean $t > 0$ y $\lambda \geq 0$. Entonces, existe una constante C_λ que depende únicamente de λ tal que*

$$
\left\| |k|^{\lambda} e^{q(k)t} \right\|_{l^2(\mathbb{Z})} = \left\| |k|^{\lambda} e^{\eta\left(|k| - k^2\right)t} \right\|_{l^2(\mathbb{Z})} \leq C_\lambda \Upsilon_\eta^\lambda(t),
$$

donde

$$
\Upsilon_\eta^\lambda(t) := 1 + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{\lambda}{2}}} + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{1+2\lambda}{4}}}.
$$

El Lema 2.1 es fundamental para estudiar la buena colocación local y global de la ecuación de Chen-Lee (1) cuando el índice s es negativo.

2.2. Teoría local $H^s(\mathbb{T})$, $s > \frac{1}{2}$

En ese capítulo se mostrará que el problema de Cauchy (1) está localmente bien puesto en $H^s(\mathbb{T})$, cuando $s > 1/2$. Para esto, se obtendrá con el Teorema 2.5 una solución local para la ecuación integral (2.23) y luego con la Proposición 2.1 se mostrará la equivalencia entre la ecuación diferencial (1) y la fórmula integral (2.23). Por último, con el Teorema 2.7 se demuestra que las soluciones encontradas para la ecuación (1) son soluciones clásicas.

Teniendo en cuenta el principio de Duhamel y la teoría desarrollada para la ecuación lineal (2.1), tenemos que para obtener el buen planteamiento del problema de Cauchy (1), debemos estudiar la ecuación integral

$$u\left(t,x\right) = S\left(t\right)\phi - \frac{1}{2}\int_0^t S\left(t-t'\right)\partial_x u^2(t')\,dt', \tag{2.23}$$

definida para todo $t \geq 0$. De esta manera, comenzamos presentando el siguiente resultado donde se verifica la existencia de una solución local para (2.23) cuando $s > \frac{1}{2}$.

Teorema 2.5. *Sean $\phi \in H^s(\mathbb{T})$, $s > \frac{1}{2}$ y $\eta, \beta > 0$ fijos. Entonces, existe un tiempo $T\left(s, \|\phi\|_s, \eta\right) > 0$ y una función $u \in C\left([0,T]; H^s(\mathbb{T})\right)$ que satisface la ecuación integral (2.23).*

Demostración. Sean $M, T > 0$ números reales fijos, pero arbitrarios. T será escogido de manera adecuada durante la demostración. Consideremos la aplicación

$$\left(Au\right)\left(t\right) = S\left(t\right)\phi - \frac{1}{2}\int_0^t S\left(t-t'\right)\partial_x u^2(t')\,dt', \tag{2.24}$$

definida sobre el espacio métrico completo

$$\Lambda_s\left(T, M, \phi\right) = \left\{ u \in C\left([0,T]; H^s(\mathbb{T})\right) : \sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - S(t)\phi\|_s \leq M \right\}, \tag{2.25}$$

cuya función distancia se define como $d(u,v) = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - v(t)\|_s$, para todo $u, v \in \Lambda_s(T)$. La idea para esta demostración, es verificar que existe $T > 0$ para el cual A es una contracción estricta en $\Lambda_s(T)$. Dividimos la demostración en las siguientes partes.

i) Si $u \in \Lambda_s(T)$, entonces $Au \in C\left([0,T]; H^s(\mathbb{T})\right)$. Es fácil ver que $(Au)(t) \in H^s(\mathbb{T})$, para todo $t \in [0,T]$. Por otro lado, para ver que Au es continua como función de t, notamos que para $t, \tau \geq 0$

$$\begin{aligned} \|A(u)(t) - A(u)(\tau)\|_s &\leq \|\left(S(t) - S(\tau)\right)\phi\|_s \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\|\int_0^t S\left(t-t'\right)\partial_x u^2(t')\,dt' - \int_0^\tau S\left(\tau - t'\right)\partial_x u^2(t')\,dt'\right\|_s . \end{aligned} \tag{2.26}$$

Por la continuidad del semigrupo el primer término de la parte derecha de (2.26) tiende a cero si $\tau \to t$. Luego, solo resta por verificar que la expresión restante de la derecha de (2.26) tiende a cero si $\tau \to t$. Para esto, supongamos que $0 < t < \tau < T$, así

$$\begin{aligned}&\left\|\int_0^t S\left(t-t'\right)\partial_x u^2(t')\,dt' - \int_0^\tau S\left(\tau-t'\right)\partial_x u^2(t')\,dt'\right\|_s \\ &\leq \int_0^t \left\|\left(S\left(t-t'\right)-S\left(\tau-t'\right)\right)\partial_x u^2(t')\right\|_s dt' + \int_t^\tau \left\|S\left(\tau-t'\right)\partial_x u^2(t')\right\|_s dt'. \quad (2.27)\end{aligned}$$

Primero veamos que la segunda integral de la derecha de (2.27) tiende a cero cuando $\tau\to t$. En efecto, por el Teorema 2.3 se tiene que

$$\begin{aligned}&\int_t^\tau \left\|S\left(\tau-t'\right)\partial_x u^2(t')\right\|_s dt' \\ &\leq C\int_t^\tau \left(1+\frac{1}{\eta^{1/2}\left(\tau-t'\right)^{1/2}}\right)e^{\frac{\eta(\tau-t')}{8}\left(1+\sqrt{1+\frac{8}{\eta(\tau-t')}}\right)}dt' \sup_{t\in[0,T]}\left\|u^2(t)\right\|_s \\ &\leq C_s\left(\left(\tau-t\right)+\frac{2}{\eta^{1/2}}\left(\tau-t\right)^{1/2}\right)e^{\frac{\eta T+\sqrt{\eta^2T^2+8\eta T}}{8}}\left(M+\|\phi\|_s\right)^2. \quad (2.28)\end{aligned}$$

Hemos usado que $H^s(\mathbb{T})$ es un álgebra de Banach y por lo tanto

$$\left\|u^2(t')\right\|_s \leq C_s\left\|u(t')\right\|_s^2 \leq C_s\left(M+\|\phi\|_s\right)^2. \quad (2.29)$$

Por otro lado, para mostrar que la primera integral de la derecha de (2.27) tiende a cero cuando $\tau\to t$, notemos que el Teorema 2.3 y la desigualdad (2.29) implican que

$$\begin{aligned}&\left\|\left(S\left(t-t'\right)-S\left(\tau-t'\right)\right)\partial_x u^2(t')\right\|_s \\ &\quad\leq \left\|S\left(t-t'\right)\partial_x u^2(t')\right\|_s + \left\|S\left(\tau-t'\right)\partial_x u^2(t')\right\|_s \\ &\quad\leq C_s\left(1+\frac{1}{\eta^{1/2}\left(t-t'\right)^{1/2}}\right)e^{\frac{\eta T+\sqrt{\eta^2T^2+8\eta T}}{8}}\left(M+\|\phi\|_s\right)^2. \quad (2.30)\end{aligned}$$

De esta manera, como $(t-t')^{-\frac{1}{2}}$ es una función integrable de t' sobre $(0,t)$, tenemos por (2.30) y el Teorema de la Convergencia Dominada que

$$\lim_{\tau\to t}\int_0^t \left\|\left(S\left(t-t'\right)-S\left(\tau-t'\right)\right)\partial_x u^2(t')\right\|_s dt' = 0. \quad (2.31)$$

Se concluye que $Au\in C\left([0,T];H^s(\mathbb{T})\right)$.

ii) Existe $T_1>0$, tal que $Au\in\Lambda_s(T_1)$, para todo $u\in\Lambda_s(T_1)$. Por la desigualdad (2.29) y la desigualdad de regularización (2.12)

$$\begin{aligned}\left\|(Au)(t)-S(t)\phi\right\|_s &\leq \frac{1}{2}\int_0^t \left\|S\left(t-t'\right)\partial_x u^2(t')\right\|_s dt' \\ &\leq C\int_0^t \left(1+\frac{1}{\eta^{1/2}\left(t-t'\right)^{1/2}}\right)e^{\frac{\eta(t-t')}{8}\left(1+\sqrt{1+\frac{8}{\eta(t-t')}}\right)}\left\|u^2(t')\right\|_s dt' \\ &\leq C_s\left(T_1+2\left(\frac{T_1}{\eta}\right)^{1/2}\right)e^{\frac{\eta T_1+\sqrt{\eta^2T_1^2+8\eta T_1}}{8}}\left(M+\|\phi\|_s\right)^2. \quad (2.32)\end{aligned}$$

Como la expresión anterior tiende a cero cuando $T_1 \to 0^+$, entonces podemos escoger un tiempo $T_1 > 0$ tal que (2.32) sea menor que M.

iii) Sea $T_1 > 0$ que satisface ii). Entonces existe $T \in (0, T_1]$, tal que A es una contracción sobre $\Lambda_s(T)$. En efecto, para $t \in [0, T]$ tenemos que

$$\begin{aligned} &\|(Au)(t) - (Av)(t)\|_s \\ &\quad \leq \frac{1}{2}\int_0^t \left\| S\left(t-t'\right)\partial_x\left(u^2(t') - v^2(t')\right)\right\|_s dt' \\ &\quad \leq Ce^{\frac{\eta T + \sqrt{\eta^2 T^2 + 8\eta T}}{8}} \int_0^t \left(1 + \frac{1}{\eta^{1/2}\left(t-t'\right)^{1/2}}\right)\left\|u^2(t') - v^2(t')\right\|_s dt' \end{aligned} \tag{2.33}$$

y además

$$\begin{aligned} \left\|u^2(t') - v^2(t')\right\|_s &\leq C_s\left(\|u(t')\|_s + \|v(t')\|_s\right)\|u(t') - v(t')\|_s \\ &\leq C_s\left(M + \|\phi\|_s\right)\|u(t') - v(t')\|_s, \end{aligned} \tag{2.34}$$

por lo tanto

$$\|(Au)(t) - (Av)(t)\|_s \leq C_s f_\eta(T)\left(M + \|\phi\|_s\right)\sup_{t\in[0,T]}\|u(t) - v(t)\|_s, \tag{2.35}$$

donde

$$f_\eta(t) = \left(t + \frac{2t^{1/2}}{\eta^{1/2}}\right)e^{\frac{\eta t + \sqrt{\eta^2 t^2 + 8\eta t}}{8}},\ t \geq 0.$$

De esta manera escogiendo $T \in (0, T_1]$ suficientemente pequeño tal que

$$C_s f_\eta(T)\left(M + \|\phi\|_s\right) < 1,$$

se concluye lo afirmado.

De i), ii) y iii) se sigue que A es una contracción en un espacio métrico completo. Luego, por el Teorema de Punto Fijo de Banach, existe una única $u \in \Lambda_s(T)$ que satisface la ecuación integral (2.23). □

Proposición 2.1. *Supongamos que $s > \frac{1}{2}$. Entonces, el problema de Cauchy (1) es equivalente a la ecuación integral (2.23). Más precisamente, si $u \in C\left([0,T]; H^s(\mathbb{T})\right)$ es una solución de (1), entonces u satisface (2.23). Recíprocamente, si $u \in C\left([0,T]; H^s(\mathbb{T})\right)$, satisface (2.23), entonces $u \in C^1\left([0,T]; H^{s-2}(\mathbb{T})\right)$ y satisface (1).*

Demostración. Supongamos que $u \in C\left([0,T]; H^s(\mathbb{T})\right)$ es solución del problema de Cauchy (1). Se tiene por lo demostrado en el Teorema 2.2 la siguiente igualdad en $H^{s-2}(\mathbb{T})$

$$\begin{aligned} \partial_{t'}\left(S(t-t')u(t')\right) &= S(t-t')\left(u_{t'}(t') - Qu(t')\right) \\ &= -\frac{1}{2}S(t-t')\partial_x u^2(t'). \end{aligned} \tag{2.36}$$

Luego, por el Teorema Fundamental del Cálculo se sigue que u satisface la formula integral.

Recíprocamente, supongamos que $u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{T}))$ y satisface (2.23). De esta manera, sean $t > 0$ fijo y $h \in \mathbb{R}$ con $|h| < t$. Primero, supongamos que $h > 0$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\int_0^{t+h} S(t+h-t')\,\partial_x u^2(t')\,dt' - \frac{1}{h}\int_0^t S(t-t')\,\partial_x u^2(t')\,dt' \\ = \frac{1}{h}\int_0^t \left(S(t+h-t') - S(t-t')\right)\partial_x u^2(t')\,dt' + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-t')\,\partial_x u^2(t')\,dt'.\end{aligned} \tag{2.37}$$

Notemos que para la segunda integral del lado derecho de (2.37)

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-t')\,\partial_x u^2(t')\,dt - \partial_x u^2(t)\right\|_{s-2} \\ \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\left\|S(t+h-t')\,\partial_x u^2(t') - \partial_x u^2(t)\right\|_{s-2} dt'\end{aligned} \tag{2.38}$$

y como $\left\|S(t+h-t')\,\partial_x u^2(t') - \partial_x u^2(t)\right\|_{s-2}$ es una función continua de t', se sigue por el Teorema del Valor Medio para integrales que

$$\lim_{h\to 0^+}\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-t')\,\partial_x u^2(t')\,dt - \partial_x u^2(t)\right\|_{s-2} = 0.$$

Por otro lado, utilizando la convergencia uniforme demostrada en el Teorema 2.2, se tiene que la primera integral de la derecha de (2.37) satisface

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^t \left(S(t+h-t') - S(t-t')\right)\partial_x u^2(t')\,dt' &= \int_0^t \partial_t S(t-t')\,\partial_x u^2(t')\,dt' \\ &= Q\int_0^t S(t-t')\,\partial_x u^2(t')\,dt',\end{aligned} \tag{2.39}$$

donde el límite anterior es tomado en $H^{s-2}(\mathbb{T})$.

Supongamos que $h < 0$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\int_0^{t+h} S(t+h-t')\,\partial_x u^2(t')\,dt' - \frac{1}{h}\int_0^t S(t-t')\,\partial_x u^2(t')\,dt' \\ = \frac{1}{h}\int_0^{t+h} \left(S(t+h-t') - S(t-t')\right)\partial_x u^2(t')\,dt' - \frac{1}{h}\int_{t+h}^{t} S(t-t')\,\partial_x u^2(t')\,dt'.\end{aligned} \tag{2.40}$$

De esta manera, con el mismo argumento empleado para la desigualdad (2.38) se tiene que en $H^{s-2}(\mathbb{T})$

$$\lim_{h\to 0^-} -\frac{1}{h}\int_{t+h}^{t} S(t-t')\,\partial_x u^2(t')\,dt = \partial_x u^2(t). \tag{2.41}$$

Además, como $u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{T}))$, entonces por la parte i) de la demostración del Teorema (2.5)

$$\int_0^t S(t-t')\partial_x u^2(t')\ dt' \in C([0,T]; H^s(\mathbb{T})),$$

pero esto implica junto con la convergencia uniforme demostrada en el Teorema 2.2 que en $H^{s-2}(\mathbb{T})$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h}\int_0^{t+h}\left(S\left(t+h-t'\right)-S\left(t-t'\right)\right)\partial_x u^2(t')\,dt' &= \int_0^t \partial_t S\left(t-t'\right)\partial_x u^2(t')\,dt' \\ &= Q\int_0^t S\left(t-t'\right)\partial_x u^2(t')\,dt', \quad (2.42)\end{aligned}$$

Luego, por los casos estudiados anteriormente tenemos la siguiente igualdad en $H^{s-2}(\mathbb{T})$

$$\frac{d}{dt}\int_0^t S\left(t-t'\right)\partial_x u^2(t')\,dt' = Q\int_0^t S\left(t-t'\right)\partial_x u^2(t')\,dt' + \partial_x u^2(t). \qquad (2.43)$$

Por lo tanto, derivando (2.23) respecto a t, se tiene por (2.43) que $u \in C^1\left([0,T];H^{s-2}(\mathbb{T})\right)$ y satisface la ecuación (1). □

Resta por verificar la dependencia continua y la unicidad. Para verificar esto resultados presentamos el siguiente lema preliminar.

Lema 2.2. *Supongamos que $\lambda>0$, $\gamma>0$, $\lambda+\gamma>1$ y $a\geq 0$, $b\geq 0$, u es una función no negativa y $t^{\gamma-1}u(t)$ es localmente integrable sobre $0\leq t\leq T$. Si*

$$u(t)\leq a+b\int_0^t (t-s)^{\lambda-1}\,s^{\gamma-1}u(s)ds,$$

para casi todo $t\in(0,T)$, entonces

$$u(t)\leq aE_{\lambda,\gamma}\left((b\Gamma(\lambda))^{1/v}\,t\right),$$

donde $v=\lambda+\gamma-1>0$,

$$E_{\lambda,\gamma}(s)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m s^{mv}, \qquad (2.44)$$

con $c_0=1$ y $c_{m+1}/c_m=\Gamma(mv+\gamma)/\Gamma\left(mv+\gamma+\lambda\right)$ para $m\geq 0$. Cuando $s\to\infty$,

$$E_{\lambda,\gamma}(s)=O\left(s^{1/2(v/\lambda-\gamma)}\cdot\exp\left(\frac{\lambda}{v}s^{v/\lambda}\right)\right).$$

Demostración. Ver Lema 7.1.2 en [17]. □

Teorema 2.6. *Sean $\eta,\beta>0$. Entonces, el problema de Cauchy (1) es localmente bien planteado en $H^s(\mathbb{T})$, $s>\frac{1}{2}$. Es decir, para todo $\phi\in H^s(\mathbb{T})$ existen $T>0$ y $u\in C([0,T];H^s(\mathbb{T}))\cap C^1([0,T];H^{s-2}(\mathbb{T}))$ que satisface (1). Además, la aplicación dato inicial solución $\phi\in H^s(\mathbb{T})\to u\in C([0,T];H^s(\mathbb{T}))$ es continua. Más aún, sean $\phi,\psi\in H^s(\mathbb{T})$ y $u,v\in C([0,T];H^s(\mathbb{T}))$ las soluciones correspondientes. Sea $K=\left(\|u(t)\|_{\infty,s}+\|v(t)\|_{\infty,s}\right)$. Entonces*

$$\sup_{t\in[0,T]}\|u(t)-v(t)\|_s\leq\|\phi-\psi\|_s\,E\left(C_sK^{1/2}g_\eta(T)^{1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}T\right), \qquad (2.45)$$

donde $E(s) = E_{1/2,1}(s)$ *se define como en el Lema 2.2 y*

$$g_\eta(t) = \left(\frac{1+(\eta t)^{1/2}}{\eta^{1/2}}\right) e^{\frac{\eta t+\sqrt{\eta^2t^2+8\eta t}}{8}} \tag{2.46}$$

es una función creciente para $t \in [0,T]$.

Demostración. Por el Teorema 2.5 y la Proposición 2.1 sólo basta verificar la unicidad y la continuidad. De esta manera, por el Teorema 2.3 y el hecho de ser $H^s(\mathbb{T})$ un álgebra de Banach para $s > \frac{1}{2}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\|u(t)-v(t)\|_s \\
&\quad\leq \|\phi-\psi\|_s + \frac{1}{2}\int_0^t \left\|S\left(t-t'\right)\partial_x\left(u^2(t')-v^2(t')\right)\right\|_s dt' \\
&\quad\leq \|\phi-\psi\|_s + Ce^{\frac{\eta T+\sqrt{\eta^2T^2+8\eta T}}{8}}\int_0^t\left(1+\frac{1}{\eta^{1/2}\left(t-t'\right)^{1/2}}\right)\left\|u^2(t')-v^2(t')\right\|_s\ dt' \\
&\quad\leq \|\phi-\psi\|_s + C_sKe^{\frac{\eta T+\sqrt{\eta^2T^2+8\eta T}}{8}}\int_0^t\left(\frac{(\eta T)^{1/2}+1}{\eta^{1/2}\left(t-t'\right)^{1/2}}\right)\|u(t')-v(t')\|_s\ dt'. \quad (2.47)
\end{aligned}$$

Así, (2.47) implica que el Lema 2.2 es válido con $\lambda = 1/2$ y $\gamma = 1$, por lo tanto

$$\sup_{t\in[0,T]}\|u(t)-v(t)\|_s \leq \|\phi-\psi\|_s\, E\left(C_sK^{1/2}g_\eta(T)^{1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}T\right), \tag{2.48}$$

donde $E(s) = E_{\frac{1}{2},1}(s) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m s^{m/2}$, con $c_0 = 1$, $\frac{c_{m+1}}{c_m} = \Gamma(\frac{m}{2}+1)/\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{3}{2}\right)$ para $m \geq 0$ y para $t \in [0,T]$

$$g_\eta(t) = \left(\frac{1+(\eta t)^{1/2}}{\eta^{1/2}}\right) e^{\frac{\eta t+\sqrt{\eta^2t^2+8\eta t}}{8}}.$$

□

Proposición 2.2. *Sean* $\phi_n \in H^s(\mathbb{T})$, $n = 1,2,3,\ldots,\infty$, *tales que* $\phi_n \xrightarrow{H^s(\mathbb{T})} \phi_\infty$, *cuando* $n \to \infty$. *Sean* $u_n \in C\left([0,T_n]; H^s(\mathbb{T})\right)$ *soluciones de* (1) *construidas en el Teorema 2.5 con* $u_n(0) = \phi_n$. *Sea* $T \in (0, T_\infty)$. *Entonces, para* n *suficientemente grande* u_n *está definida en* $[0,T]$, *además,*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}\|u_n(t)-u_\infty(t)\|_s = 0.$$

Demostración. Sea $T \in (0,T_\infty)$. Por las partes ii) y iii) de la demostración del Teorema 2.5, se tiene que el tiempo de existencia es una función continua y decreciente de la norma del dato inicial. Por lo tanto como $\phi_n \to \phi_\infty$ cuando $n \to \infty$, tenemos que existe un entero positivo N, tal que si $n \geq N$, entonces $T_n > T$ y $u_n \in \Lambda_s\left(T, M, \phi_n\right)$. Luego, para $n \geq N$, la solución u_n de (1) con dato inicial ϕ_n satisface

$$\|u_n(t)\|_s \leq K^* := \sup_{1\leq n\leq\infty}\left(\|\phi_n\|_s\right) + M.$$

De esta manera, razonando como en la demostración del Teorema 2.6 tenemos que para cada $n \geq N$

$$\|u_n(t) - u_\infty(t)\|_s \leq \|\phi_n - \phi_\infty\|_s \, E\left(C_s \left[K^* g_\eta(T)\right]^{1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} T\right), \tag{2.49}$$

donde $E(s) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m s^{m/2}$, con $c_0 = 1$, $\frac{c_m+1}{c_m} = \Gamma(\frac{m}{2}+1)/\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{3}{2}\right)$ para $m \geq 0$ y g_η se define como en (2.46). $\square$

Concluiremos este capítulo mostrando que para $\phi \in H^s(\mathbb{T})$ con $s > \frac{1}{2}$, se tiene que el problema de Cauchy (1) tiene solución en el sentido clásico.

Proposición 2.3. *Sean $s > \frac{1}{2}$ y $\delta \in (0,1)$. Entonces la aplicación*

$$t \to \int_0^t S(t-t')\partial_x(u^2)(t')\,dt',$$

pertenece a $C\left((0,T]; H^{s+\delta}(\mathbb{T})\right)$, para cada $u \in C\left((0,T]; H^s(\mathbb{T})\right)$.

Demostración. Sean $\tau, t \in [0,T]$, tales que $0 < t < \tau$. Entonces

$$\left\|\int_0^\tau S(\tau-t')\partial_x(u^2)(t')\,dt' - \int_0^t S(t-t')\partial_x(u^2)(t')\,dt'\right\|_{s+\delta} \leq \mathbb{I}(t,\tau) + \mathbb{II}(t,\tau)$$

donde $\mathbb{I}(t,\tau) = \int_0^t \left\|\left(S(\tau-t') - S(t-t')\right)\partial_x(u^2)(t')\right\|_{s+\delta} dt'$ y

$$\mathbb{II}(t,\tau) = \int_t^\tau \left\|S(\tau-t')\partial_x(u^2)(t')\right\|_{s+\delta} dt'.$$

Primero, veamos que $\mathbb{II}(t,\tau) \to 0$ cuando $\tau \to t$. Por el Teorema 2.3 tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{II}(t,\tau) &\leq (2\pi)^{\frac{1}{2}} \int_t^\tau \left\|\langle k\rangle^{1+s+\delta} e^{\eta(|k|-k^2)(\tau-t')}\widehat{u^2(t')}(k)\right\|_{l^2(\mathbb{Z})} dt' \\
&\leq \int_t^\tau \left\|\langle k\rangle^{1+\delta} e^{\eta(|k|-k^2)(\tau-t')}\right\|_{l^\infty(\mathbb{Z})} \left\|u^2(t')\right\|_s dt' \\
&\leq C_\delta e^{\frac{\eta T + \sqrt{\eta^2T^2 + 8(1+\delta)T}}{8}} \int_t^\tau \left(1 + \frac{1}{\eta^{\frac{1+\delta}{2}}(\tau-t')^{\frac{1+\delta}{2}}}\right) dt' \, \|u\|_{\infty,s}^2 \\
&= C_\delta e^{\frac{\eta T + \sqrt{\eta^2T^2 + 8(1+\delta)T}}{8}} \left((\tau-t) + \frac{(\tau-t)^{\frac{1-\delta}{2}}}{\eta^{\frac{1+\delta}{2}}}\right) \|u\|_{\infty,s}^2 .
\end{aligned}$$

Luego, $\mathbb{II}(t,\tau) \to 0$ cuando $\tau \to t$, ya que $\delta < 1$.

Para estimar $\mathbb{I}(t,\tau)$, notemos que

$$\left|e^{q(k)(\tau-t')} - e^{q(k)(t-t')}\right| \leq 2e^{\eta(|k|-k^2)(t-t')}, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}$$

y por lo tanto por el Teorema 2.3 se tiene que para cada $t' \in [0,t)$

$$
\begin{aligned}
&\left\| \left(S(\tau - t') - S(t-t') \right) \partial_x (u^2)(t') \right\|_{s+\delta} \\
&\qquad\qquad \leq (2\pi)^{\frac{1}{2}} \left\| \langle k \rangle^{1+s+\delta} \left(e^{q(k)(\tau - t')} - e^{q(k)(t-t')} \right) \widehat{u^2(t')}(k) \right\|_{l^2(\mathbb{Z})} \\
&\qquad\qquad \leq 2 \left\| \langle k \rangle^{1+\delta} e^{\eta(|k|-k^2)(t-t')} \right\|_{l^\infty(\mathbb{Z})} \|u\|_{\infty,s}^2 \\
&\qquad\qquad \leq C_\delta F_\eta \left(t - t' \right) \|u\|_{\infty,s}^2 \qquad (2.50)
\end{aligned}
$$

donde

$$
F_\eta(t) = \left(1 + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{1+\delta}{2}}} \right) e^{\frac{\eta t + \sqrt{\eta^2 t^2 + 8(1+\delta)\eta t}}{8}}.
$$

Como $0 < \delta < 1$, entonces $F_\eta(t-t')$ está en $L^1_{t'}(0,t)$. Por lo tanto de la continuidad del semigrupo $S\,(t)$, la desigualdad (2.50) y el Teorema de la Convergencia Dominada, se sigue que $\lim_{\tau \to t} \mathbb{III}(t,\tau) = 0$. Con esto se concluye la demostración. □

Teorema 2.7. *Sean $s > \frac{1}{2}$, $\phi \in H^s(\mathbb{T})$ y $u \in C\left([0,T]; H^s(\mathbb{T})\right)$ la solución del problema de Cauchy (1) con dato inicial ϕ construida en el Teorema 2.6. Entonces, $u \in C\left((0,T]; H^\infty(\mathbb{T})\right)$.*

Demostración. Por lo resultados vistos para la ecuación lineal, tenemos que la aplicación $t \mapsto S(t)\phi$ es continua en el intervalo $(0,T]$ con respecto a la topología de $H^\infty(\mathbb{T})$. Luego, por la Proposición 2.3 existe $\delta > 0$ tal que

$$
u \in C\left([0,T]; H^s(\mathbb{T})\right) \cap C\left((0,T]; H^{s+\delta}(\mathbb{T})\right).
$$

Por lo tanto, iterando este argumento, usando la unicidad de la solución y el hecho que el intervalo de existencia depende únicamente de la norma en $H^s(\mathbb{T})$ del dato inicial, deducimos que

$$
u \in C\left([0,T]; H^s(\mathbb{T})\right) \cap C\left((0,T]; H^\infty(\mathbb{T})\right).
$$

□

2.3. Teoría global en $H^s(\mathbb{T})$, $s \geq 1$

En este capítulo se mostrará que el problema de Cauchy (1) es globalmente bien planteado en $H^s(\mathbb{T})$, $s \geq 1$, para $\eta, \beta > 0$. Para lograr este resultado, con el Lema 2.3 obtenemos estimativas a priori de la solución, que junto con los Teoremas 2.3 y 2.4 permiten concluir el resultado global.

Lema 2.3. *Sean $\phi \in H^1(\mathbb{T})$ y $u \in C\left([0,T]; H^1(\mathbb{T})\right)$ solución de (1) con $u(0) = \phi$. Entonces, existe una constante positiva $C = C\left(\eta, \|\phi\|_0\right)$ que depende de $\|\phi\|_0$ y η tal que*

$$\|u\|_0 \leq \|\phi\|_0\,, \tag{2.51}$$
$$\|u_x\|_0 \leq \|\phi'\|_0\, e^{CT}. \tag{2.52}$$

Demostración. Para demostrar (2.51) multiplicamos la ecuación (1) por u e integrando por partes se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\partial_t \|u(t)\|_0^2 &= -(u, uu_x)_0 - \beta(u, \mathcal{H}u_{xx})_0 - \eta(u, \mathcal{H}u_x)_0 + \eta(u, u_{xx})_0 \\
&= -\eta(u, \mathcal{H}u_x)_0 + \eta(u, u_{xx})_0 \\
&= 2\pi\eta \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(|k| - k^2\right) |\widehat{u}(k)|^2 \leq 0.
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Por lo tanto, $\|u(t)\|_0$ es monótona decreciente para $t \in [0, \infty)$ y se concluye (2.51).

Mostraremos (2.52), para esto denotemos por $w = u_x$. Luego, derivando la ecuación (1) respecto a x se tiene que w satisface la ecuación

$$\begin{cases} w_t + w^2 + uw_x + \beta\mathcal{H}w_{xx} + \eta\left(\mathcal{H}w_x - w_{xx}\right) = 0, \\ w(0) = \phi'. \end{cases}$$

Multiplicando la ecuación anterior por w e integrando entre $-\pi$ y π se sigue

$$\frac{1}{2}\partial_t \|w(t)\|_0^2 = -(w, w^2)_0 - (w, uw_x)_0 - \beta(w, \mathcal{H}w_{xx})_0 - \eta(w, \mathcal{H}w_x)_0 + \eta(w, w_{xx})_0. \tag{2.54}$$

Para analizar la expresión anterior se buscará una cota para el término $(w, uw_x)_0$. Así, por el Lema 1.5 existe un constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
|\,(w, uw_x)_0\,| &\leq \|u\|_0 \|w\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \|w_x\|_0 \\
&\leq C\|u\|_0 \left(\|w\|_0 \|w_x\|_0 + \|w\|_0^{\frac{1}{2}} \|w_x\|_0^{\frac{3}{2}} \right).
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Para $\epsilon > 0$ se tiene por el Lema 1.4

$$\|w\|_0 \|w_x\|_0 \leq \epsilon \|w_x\|_0^2 + C_1(\epsilon) \|w\|_0^2\,, \tag{2.56}$$
$$\|w\|_0^{\frac{1}{2}} \|w_x\|_0^{\frac{3}{2}} \leq \epsilon \|w_x\|_0^2 + C_2(\epsilon) \|w\|_0^2\,. \tag{2.57}$$

Donde $C_1(\epsilon)$ y $C_2(\epsilon)$ son constantes positivas que dependen únicamente de ϵ. De esta manera, reemplazando las desigualdades anteriores en (2.55)

$$|\,(w, uw_x)_0\,| \leq \epsilon C \|u\|_0 \|w_x\|_0^2 + C(\epsilon) \|u\|_0 \|w\|_0^2\,, \tag{2.58}$$

donde $C > 0$ no depende de ϵ. Puesto que $-(w, w^2)_0 = 2(w, uw_x)_0$ y como $\|u\|_0 \leq \|\phi\|_0$ por (2.51), entonces (2.54) queda acotado como

$$\frac{1}{2}\partial_t \|w(t)\|_0^2 \leq C(\epsilon, \|\phi\|_0)\|w\|_0^2 + \epsilon C(\|\phi\|_0)\|w_x\|_0^2 - \eta(w, \mathcal{H}w_x)_0 + \eta(w, w_{xx})_0. \quad (2.59)$$

Luego, haciendo $\epsilon = \frac{\eta}{2C(\|\phi\|_0)}$ se sigue

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_t \|w(t)\|_0^2 &\leq C(\eta, \|\phi\|_0)\|w\|_0^2 + \frac{\eta}{2}\|w_x\|_0^2 - \eta(w, \mathcal{H}w_x)_0 + \eta(w, w_{xx})_0 \\ &= C(\eta, \|\phi\|_0)\|w\|_0^2 + 2\pi\eta \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(|k| - \frac{k^2}{2}\right)|\widehat{w}(k)|^2 \\ &\leq C(\eta, \|\phi\|_0)\|w\|_0^2 + \frac{\eta}{2}\|w\|_0^2 \\ &= C(\eta, \|\phi\|_0)\|w\|_0^2, \end{aligned} \quad (2.60)$$

por lo tanto, integrando la expresión anterior entre 0 y t se obtiene

$$\|w(t)\|_0^2 \leq \|w(0)\|_0^2 + C\int_0^t \|w(t')\|_0^2\, dt',$$

así por la desigualdad de Gronwall

$$\|w(t)\|_0^2 \leq \|\phi'\|_0^2 e^{Ct}.$$

□

Teorema 2.8. *El problema de Cauchy* (1) *está globalmente bien planteado en* $H^1(\mathbb{T})$.

Demostración. Sea

$$T^* := \sup\left\{T > 0 \mid \text{ Existe una única } u \in C\left([0,T]; H^1(\mathbb{T})\right) \text{ que satisface (1)}\right\}$$

Sea $u \in C([0,T^*); H^1(\mathbb{T}))$ la solución local de (1) en el intervalo maximal $[0,T^*)$. Se mostrará que $T^* < \infty$ implica una contradicción. Del Lema 2.3 se sigue que

$$\|u(t)\|_1 \leq C(\|\phi\|_1, T^*), \text{ para todo } t \in [0,T^*). \quad (2.61)$$

Por lo visto en la demostración del Teorema 2.5 se tiene que el tiempo de existencia es una función decreciente de la norma, por lo tanto existe $T_1 > 0$ tal que para toda $\psi \in H^1(\mathbb{T})$ con $\|\psi\|_1 \leq C(\|\phi\|_1, T^*)$, existe $u_1 \in C([0,T_1]; H^s(\mathbb{T}))$ solución de (2.23) con $u_1(0) = \psi$. Sea $0 < \epsilon < T_1$, aplicando este resultado a $\psi = u(T^* - \epsilon)$, se define

$$v(t) = \begin{cases} u(t), & \text{si } 0 \leq t \leq T^* - \epsilon, \\ u_1(t - T^* + \epsilon), & \text{si } T^* - \epsilon \leq t \leq T^* + T_1 - \epsilon \end{cases} \quad (2.62)$$

Luego $v(t)$ es una solución de la ecuación integral (2.23) en $[0, T^* + T_1 - \epsilon]$. Pero esto contradice la definición de T^*, puesto que $T^* + T_1 - \epsilon > T^*$. □

Teorema 2.9. *El problema de Cauchy* (1) *está globalmente bien planteado en* $H^s(\mathbb{T})$, *para* $s \geq 1$.

Demostración. Sean $\delta \in (0,1)$, $\phi \in H^{1+\delta}(\mathbb{T})$ y $u \in C\left([0,T]; H^s(\mathbb{T})\right)$ la solución local de (1) con dato inicial ϕ. Entonces, por el Teorema 2.3 se tiene

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{1+\delta} &\leq \|S(t)\phi\|_{1+\delta} + \frac{1}{2}\int_0^t \left\| S(t-t')\partial_x u^2\,(t')\right\|_{1+\delta} dt' \\
&\leq \|\phi\|_{1+\delta} + C_\delta\, e^{\frac{\eta T + \sqrt{\eta^2 T^2 + 16\eta T}}{8}} \int_0^t \left(1 + \frac{1}{\eta^{\frac{1+\delta}{2}} (t-t')^{\frac{1+\delta}{2}}}\right) \left\|\partial_x u^2\,(t')\right\|_0 dt' \\
&\leq \|\phi\|_{1+\delta} + C_\delta\, e^{\frac{\eta T + \sqrt{\eta^2 T^2 + 16\eta T}}{8}} \int_0^t \left(1 + \frac{1}{\eta^{\frac{1+\delta}{2}} (t-t')^{\frac{1+\delta}{2}}}\right) \|u\,(t')\|_1^2\, dt'
\end{aligned}$$

Por el Lema 2.3 se verifica que $\|u(t)\|_1^2 \leq C\left(\|\phi\|_1, T\right)$ y por lo tanto se sigue que

$$\|u(t)\|_{1+\delta} \leq \|\phi\|_{1+\delta} + C_\delta\left(\|\phi\|_1, T\right)\left(T + \frac{2T^{\frac{1-\delta}{2}}}{\eta^{\frac{1+\delta}{2}}(1-\delta)}\right) e^{\frac{\eta T + \sqrt{\eta^2 T^2 + 16\eta T}}{8}},$$

lo cual establece el resultado para $s = 1+\delta \in (0,2)$. Luego, iterando el argumento anterior se concluye el teorema.

$\square$

CAPÍTULO 3

Ecuación de Chen-Lee en $H^s(\mathbb{T})$, $s > -1/2$

En este capítulo mostraremos que el problema de Cauchy (1) está localmente bien planteado en $H^s(\mathbb{T})$ para $s > -\frac{1}{2}$, globalmente bien planteado en $H^s(\mathbb{T})$ para $s \geq 0$ y en $X_T^s \hookrightarrow C([0,T]; H^s(\mathbb{T}))$ para $s \in (-\frac{1}{2}, 0)$. También, demostramos que la aplicación dato inicial solución de (1) falla en ser C^2 en $H^s(\mathbb{T})$, para $s < -1$. Adicionalmente, examinamos la convergencia de las soluciones de la ecuación de Chen-Lee (1) cuando se fija la disipación $\eta > 0$ y se hace tender a cero el parámetro de dispersión β.

La estrategia en esta sección es emplear un argumento de contracción utilizando la fórmula integral (2.23) sobre espacios de funciones adecuados. Para lograr esto, adaptaremos las ideas presentadas por Dix [9], Esfahani [12, 13] y Duque [11], para el problema Cauchy (1). De esta manera, definimos los siguientes espacios.

Definición 3.1. *Supongamos que $0 < T \leq 1$ y $s < 0$. Sea X_T^s la clase de todas las funciones $u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{T}))$, tales que*

$$\|u\|_{X_T^s} := \sup_{t\in(0,T]} \left(\|u(t)\|_s + t^{|s|/2} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{T})} \right) < \infty. \tag{3.1}$$

Nótese que X_T^s es un espacio de Banach, para el cual $X_T^s \hookrightarrow C([0,T]; H^s(\mathbb{T}))$, esto es, X_T^s está continua y densamente inmerso (estrictamente) en $C([0,T]; H^s(\mathbb{T}))$ para $s < 0$.

3.1. Estimativas Lineales

Comenzamos dando el siguiente lema técnico.

Lema 3.1. *Dados $\lambda > 0$, $\eta > 0$ y $t > 0$. Entonces, existe una constante C_λ que depende únicamente de λ tal que*

$$\left\| |tk^2|^\lambda e^{\eta\left(|k|-k^2\right)t} \right\|_{l^\infty(\mathbb{Z})} \leq C_\lambda \left(t^\lambda + \eta^{-\lambda} \right) e^{\frac{\eta}{8}\left(t + t^{\frac{1}{2}} \sqrt{t + \frac{16\lambda}{\eta}} \right)}.$$

Demostración. Tenemos la siguiente desigualdad

$$|tk^2|^\lambda e^{\eta\left(|k|-k^2\right)t} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^{2\lambda} e^{\eta\left(|x|t^{1/2}-x^2\right)}, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Sea $w_t(x) = x^{2\lambda} e^{\eta\left(xt^{1/2}-x^2\right)}$, para $x \geq 0$. Nótese que $w_t(x)$ tiende a cero cuando $x \to \infty$. Además,

$$w_t'(x_1) = 0 \iff x_1 = \frac{1}{4}\left(t^{\frac{1}{2}} + \sqrt{t + \frac{16\lambda}{\eta}}\right).$$

De esta manera, el valor máximo de w_t se alcanza en el punto x_1. Por tanto existe un constante C_λ que depende únicamente de λ, tal que

$$w_t(x_1) \leq C_\lambda \left(t^\lambda + \eta^{-\lambda}\right) e^{\frac{\eta}{8}\left(t+t^{\frac{1}{2}}\sqrt{t+\frac{16\lambda}{\eta}}\right)}.$$

Con la anterior desigualdad se concluye la demostración. □

Presentamos la siguiente estimativa lineal en el espacio X_T^s

Proposición 3.1. *Sean $0 < T \leq 1$, $\eta > 0$, $s < 0$ y $\phi \in H^s(\mathbb{T})$. Entonces, existe una constante C_s tal que*

$$\sup_{t\in[0,T]} t^{\frac{|s|}{2}} \|S(t)\phi\|_{L^2} \leq C_s\, f_{s,\eta}(T)\, \|\phi\|_s\,, \tag{3.2}$$

donde

$$f_{s,\eta}(t) = 1 + \left(t^{\frac{|s|}{2}} + \eta^{-\frac{|s|}{2}}\right) e^{\frac{\eta}{8}\left(t+t^{\frac{1}{2}}\sqrt{t+\frac{8|s|}{\eta}}\right)},$$

es una función creciente en el intervalo $[0, 1]$.

Demostración. Puesto que $0 < T \leq 1$, se tiene que

$$t \leq \frac{(1 + k^2t)}{(1 + k^2)}, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z} \text{ y } t \in [0, T].$$

Luego, esta desigualdad implica

$$t^{|s|/2} \|S(t)\phi\|_{L^2} \leq \left\| \left\langle t^{1/2}k\right\rangle^{|s|} e^{\eta\left(|k|-k^2\right)t} \right\|_{l^\infty(\mathbb{Z})} \|\phi\|_s\,. \tag{3.3}$$

Así, empleando el Lema 3.1 se tiene que

$$\begin{aligned}\left\langle t^{1/2}k\right\rangle^{|s|} e^{\eta\left(|k|-k^2\right)t} &\leq C_s \left(1 + (tk^2)^{\frac{|s|}{2}} e^{\eta\left(|k|-k^2\right)t}\right) \\ &\leq C_s(1 + \left(t^{\frac{|s|}{2}} + \eta^{-\frac{|s|}{2}}\right) e^{\frac{\eta}{8}\left(t+t^{\frac{1}{2}}\sqrt{t+\frac{8|s|}{\eta}}\right)}).\end{aligned} \tag{3.4}$$

De esta manera, concluimos (3.2) de (3.3) y (3.4). □

3.2. Estimativas Bilineales

Para deducir las estimativas bilineales recordamos el resultado dado en el Lema 2.1. El cual nos dice que para $t > 0$ y $\lambda \geq 0$, existe una constante C_λ que depende únicamente de λ tal que

$$\left\| |k|^\lambda e^{q(k)t} \right\|_{l^2(\mathbb{Z})} = \left\| |k|^\lambda e^{\eta\left(|k|-k^2\right)t} \right\|_{l^2(\mathbb{Z})} \leq C_\lambda \Upsilon_\eta^\lambda(t),$$

donde

$$\Upsilon_\eta^\lambda(t) := 1 + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{\lambda}{2}}} + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{1+2\lambda}{4}}}.$$

Este resultado nos permite deducir la siguiente proposición.

Proposición 3.2. *Sea $0 < T \leq 1$, $-\frac{1}{2} < s < 0$ y $u, v \in X_T^s$. Entonces, para alguna constante $C_{s,\eta}$ que depende de s y η*

$$\left\| \int_0^t S(t-t')\partial_x(uv)(t')\ dt' \right\|_{X_T^s} \leq C_{s,\eta} T^{\frac{1+2s}{4}} \|u\|_{X_T^s} \|v\|_{X_T^s}. \tag{3.5}$$

Demostración. Puesto que $s < 0$, se sigue que $(1+k^2)^{\frac{s}{2}} \leq |k|^s$ para todo entero no nulo k. Así,

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t S(t-t')\partial_x(uv)(t')\ dt' \right\|_s \\ &\qquad \leq (2\pi)^{1/2} \int_0^t \left\| \langle k \rangle^s e^{\eta\left(|k|-k^2\right)(t-t')} \left(\partial_x(uv)(t')\right)^\wedge(k) \right\|_{l^2(\mathbb{Z})} dt' \qquad (3.6)\\ &\qquad \leq (2\pi)^{1/2} \int_0^t \left\| |k|^{1+s} e^{\eta\left(|k|-k^2\right)(t-t')} \right\|_{l^2(\mathbb{Z})} \left\| \widehat{u(t')} * \widehat{v(t')}(k) \right\|_{l^\infty(\mathbb{Z})} dt'. \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Young y la identidad de Parseval

$$\left\| \widehat{u(t')} * \widehat{v(t')}(k) \right\|_{l^\infty(\mathbb{Z})} \leq \frac{\|u\|_{X_T^s} \|v\|_{X_T^s}}{2\pi |t'|^{|s|}}, \tag{3.7}$$

luego, tenemos que

$$\left\| \int_0^t S(t-t')\partial_x(uv)(t')\, dt' \right\|_s \leq \int_0^t \frac{\left\| |k|^{1+s} e^{\eta\left(|k|-k^2\right)(t-t')} \right\|_{l^2(\mathbb{Z})}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} |t'|^{|s|}}\, dt' \|u\|_{X_T^s} \|v\|_{X_T^s}. \tag{3.8}$$

Para estimar la integral del lado derecho de (3.8) tenemos por el Lema 2.1 que existe una constante C_s que depende únicamente de s tal que

$$\left\| |k|^{s+1} e^{\eta\left(|k|-k^2\right)t} \right\|_{l^2(\mathbb{Z})} \leq C_s \left(1 + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{s+1}{2}}} + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{2s+3}{4}}} \right),\ \forall t > 0. \tag{3.9}$$

Por lo tanto, de (3.8), (3.9) y el cambio de variables $tz = t'$, se sigue que

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^t S(t-t')\partial_x(uv)(t')\,dt' \right\|_s \\
&\leq C_s \int_0^t \left(\frac{1}{|t'|^{|s|}} + \frac{1}{(\eta(t-t'))^{\frac{1+s}{2}}|t'|^{|s|}} + \frac{1}{(\eta(t-t'))^{\frac{3+2s}{4}}|t'|^{|s|}} \right) dt' \, \|u\|_{X_T^s} \|v\|_{X_T^s} \\
&= C_s \left(\frac{t^{1+s}}{1+s} + \frac{t^{\frac{1+s}{2}}}{\eta^{\frac{1+s}{2}}} \int_0^1 z^s |1-z|^{-(\frac{1+s}{2})} dz + \frac{t^{\frac{1+2s}{4}}}{\eta^{\frac{3+2s}{4}}} \int_0^1 z^s |1-z|^{-(\frac{3+2s}{4})} dz \right) \|u\|_{X_T^s} \|v\|_{X_T^s} \\
&\leq C_s \left(\frac{T^{1+s}}{1+s} + \frac{T^{\frac{1+s}{2}}}{\eta^{\frac{1+s}{2}}} B\left(1+s, \frac{1-s}{2}\right) + \frac{T^{\frac{1+2s}{4}}}{\eta^{\frac{3+2s}{4}}} B\left(1+s, \frac{1-2s}{4}\right) \right) \|u\|_{X_T^s} \|v\|_{X_T^s} \\
&\leq C_s \left(1 + \frac{1}{\eta^{\frac{1+s}{2}}} + \frac{1}{\eta^{\frac{3+2s}{4}}} \right) T^{\frac{1+2s}{4}} \|u\|_{X_T^s} \|v\|_{X_T^s} . \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Donde recordamos que $B(x, y)$ es la función Beta con $x, y > 0$.

Para la estimativa faltante, empleando el mismo razonamiento anterior, se sigue que para todo $0 \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned}
&t^{|s|/2} \int_0^t \|S(t-t')\partial_x(uv)(t')\|_{L^2(\mathbb{T})} \, dt' \\
&\quad \leq C t^{|s|/2} \left(\int_0^t \frac{\left\| |k| e^{\eta\left(|k|-k^2\right)(t-t')} \right\|_{l^2(\mathbb{Z})}}{|t'|^{|s|}} \, dt' \right) \|u\|_{X_T^s} \|v\|_{X_T^s} \\
&\quad \leq C t^{|s|/2} \left(\int_0^t \frac{1}{|t'|^{|s|}} + \frac{1}{(\eta(t-t'))^{1/2}|t'|^{|s|}} + \frac{1}{(\eta(t-t'))^{3/4}|t'|^{|s|}} dt' \right) \|u\|_{X_T^s} \|v\|_{X_T^s} \\
&\quad \leq C_s \left(1 + \frac{1}{\eta^{1/2}} + \frac{1}{\eta^{3/4}} \right) T^{\frac{1+2s}{4}} \|u\|_{X_T^s} \|v\|_{X_T^s} . \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Luego, de (3.10), (3.11) y la definición de la norma en X_T^s se concluye lo afirmado. □

Observación 3.1. *Si consideramos $s' > s > -\frac{1}{2}$. Entonces modificando el espacio $X_T^{s'}$ por*

$$\tilde{X}_T^{s'} = \left\{ u \in X_T^{s'} : \|u\|_{\tilde{X}_T^{s'}} < \infty \right\},$$

donde

$$\|u\|_{\tilde{X}_T^{s'}} = \|u\|_{X_T^{s'}} + t^{|s|/2} \left\| (1-\partial_x^2)^{\frac{s'-s}{2}} u \right\|_{L^2}$$

y utilizando que existe una constate positiva C, tal que

$$(1+k^2)^{\frac{s}{2}} \leq C \left((1+k^2)^{\frac{s}{2}} (1+j^2)^{\frac{(s'-s)}{2}} + (1+k^2)^{\frac{s}{2}} \left(1+(k-j)^2\right)^{\frac{(s'-s)}{2}} \right),$$

para todo $k, j \in \mathbb{Z}$, deducimos argumentando como en la Proposición 3.2 que

$$\left\| \int_0^t S(t-t')\partial_x(uv)(t') \, dt' \right\|_{\tilde{X}_T^{s'}} \leq C_{s,\eta} T^{\frac{1+2s}{4}} \left(\|u\|_{\tilde{X}_T^{s'}} \|v\|_{X_T^s} + \|u\|_{X_T^s} \|v\|_{\tilde{X}_T^{s'}} \right).$$

Proposición 3.3. *Sea* $0 < T \leq 1$, $s \in (-\frac{1}{2}, 0)$ *y* $\delta \in [0, s+\frac{1}{2})$, *entonces la aplicación*

$$t \to \int_0^t S(t-t')\partial_x(u^2)(t')\ dt',$$

pertenece a $C\Big((0,T]; H^{s+\delta}(\mathbb{T})\Big)$, *para cada* $u \in X_T^s$.

Demostración. Sean $t, \tau \in [0,T]$ fijos, tales que $t < \tau$. Entonces,

$$\left\| \int_0^\tau S(\tau - t')\partial_x(u^2)(t')\ dt' - \int_0^t S(t-t')\partial_x(u^2)(t')\ dt' \right\|_{s+\delta} \leq \mathbb{I}(t,\tau) + \mathbb{II}(t,\tau),$$

donde $\mathbb{I}(t,\tau) := \int_0^t \|(S(\tau-t') - S(t-t'))\,\partial_x(u^2)(t')\|_{s+\delta}\, dt'$ y

$$\mathbb{II}(t,\tau) := \int_t^\tau \left\| S(\tau-t')\partial_x(u^2)(t') \right\|_{s+\delta} dt'.$$

Siguiendo el mismo argumento de la demostración de la Proposición 3.2 tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{II}(t,\tau) &\leq (2\pi)^{\frac{1}{2}} \int_t^\tau \left\| \langle k \rangle^{s+\delta} e^{\eta\left(|k|-k^2\right)(\tau-t')} \left(\partial_x u^2(t')\right)^\wedge (k) \right\|_{l^2(\mathbb{Z})} dt' \\
&\leq C \left(\int_t^\tau \frac{\left\| |k|^{1+s+\delta} e^{-\eta\left(|k|-k^2\right)(\tau-t')} \right\|_{l^2(\mathbb{Z})}}{|t'|^{|s|}}\ dt' \right) \|u\|_{X_T^s}^2 \\
&\leq C \left(\int_t^\tau (t')^s + (t')^s|\tau-t'|^{-\frac{1+s+\delta}{2}} + (t')^s|\tau-t'|^{-\frac{3+2(s+\delta)}{4}}\ dt' \right) \|u\|_{X_T^s}^2 \\
&\leq C \left(\frac{(\tau-t)^{1+s}}{1+s} + \int_t^\tau |t'-t|^s|\tau-t'|^{-\frac{1+s+\delta}{2}} + |t'-t|^s|\tau-t'|^{-\frac{3+2(s+\delta)}{4}}\ dt' \right) \|u\|_{X_T^s}^2 .
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Donde cada constante anterior $C = C(s,\delta,\eta)$ depende de s, δ y η. Con la sustitución $z = \frac{t'-t}{\tau-t}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_t^\tau |t'-t|^s|\tau-t'|^{-\frac{1+s+\delta}{2}}\ dt' &= (\tau-t)^{\frac{1+s-\delta}{2}} \int_0^1 z^s|1-z|^{-\frac{1+s+\delta}{2}}\ dz, \\
\int_t^\tau |t'-t|^s|\tau-t'|^{-\frac{3+2(s+\delta)}{4}}\ dt' &= (\tau-t)^{\frac{1+2(s-\delta)}{4}} \int_0^1 z^s|1-z|^{-\frac{3+2(s+\delta)}{4}}\ dz.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Luego, por (3.12) y (3.13) tenemos que $\lim_{\tau\to t} \mathbb{II}(t,\tau) = 0$. Para estimar $\mathbb{I}(t,\tau)$ nótese que

$$\mathbb{I}(t,\tau) \leq C \int_0^t \frac{\left\| |k|^{1+s+\delta} \left(e^{q(k)(\tau-t')} - e^{q(k)(t-t')} \right) \right\|_{l^2(\mathbb{Z})}}{|t'|^{|s|}}\, dt'\ \|u\|_{X_T^s}^2 . \tag{3.14}$$

Por el Lema 2.1 y dado que $t < \tau$, se tiene que existe una constante $C_{s,\delta}$ tal que

$$\begin{aligned}
\left\| |k|^{1+s+\delta} \left(e^{q(k)(\tau-t')} - e^{q(k)(t-t')} \right) \right\|_{l^2(\mathbb{Z})} &\leq 2 \left\| |k|^{1+s+\delta} e^{\eta\left(|k|-k^2\right)(t-t')} \right\|_{l^2(\mathbb{Z})} \\
&\leq C_{s,\delta} \Upsilon_\eta^{1+s+\delta}(t-t'),
\end{aligned} \tag{3.15}$$

donde

$$\Upsilon_\eta^{1+s+\delta}(t) = 1 + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{1+s+\delta}{2}}} + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{3+2(s+\delta)}{4}}}, \ \forall t > 0.$$

Luego (3.15) y el criterio M de Weierstrass implican que

$$\lim_{\tau \to t} \left\| |k|^{1+s+\delta} \left(e^{q(k)(\tau - t')} - e^{q(k)(t-t')} \right) \right\|_{l^2(\mathbb{Z})} = 0. \tag{3.16}$$

Puesto que la función $(t')^s \Upsilon_\eta^{1+s+\delta}(t-t')$ está en $L^1_{t'}(0,1)$, deducimos de (3.16) y el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue que $\lim_{\tau \to t} \mathbb{I}(t,\tau) = 0$. Con esto se completa la demostración. □

El siguiente lema es una adaptación para el caso periódico del Lema 2.3.1 en [8]. Este hecho permite adaptar las proposiciones anteriores para $C([0,T]; H^s(\mathbb{T}))$ con $s \geq 0$ y $0 < T \leq 1$.

Lema 3.2. *Sean $a > 0$, $r \geq 0$ y $\phi, \psi \in H^r(\mathbb{T})$, entonces*

$$\| \langle ak \rangle^r (\phi\psi)^\wedge(k) \|_{l^\infty(\mathbb{Z})} \leq 2^{\frac{r}{2}} \left\| \langle ak \rangle^r \widehat{\phi}(k) \right\|_{l^2(\mathbb{Z})} \left\| \langle ak \rangle^r \widehat{\psi}(k) \right\|_{l^2(\mathbb{Z})} \tag{3.17}$$

Demostración. Como $r \geq 0$, entonces $H^r(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^2(\mathbb{T})$, esto implica que $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{T})$ y además

$$(\phi\psi)^\wedge(k) = \widehat{\phi} * \widehat{\psi}(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(j)\widehat{\psi}(k-j), \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Por la desigualdad de Peetre (1.9) se tiene que

$$\langle ak \rangle^r \leq 2^{\frac{r}{2}} \langle a(k-j) \rangle^r \langle aj \rangle^r, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} |\langle ak \rangle^r (\phi\psi)^\wedge(k)| &\leq 2^{\frac{r}{2}} \sum_{j=\infty}^{\infty} \left| \langle aj \rangle^r \widehat{\phi}(j) \langle a(k-j) \rangle^r \widehat{\psi}(k-j) \right| \\ &\leq 2^{\frac{r}{2}} \left\| \langle ak \rangle^r \widehat{\phi}(k) \right\|_{l^2(\mathbb{Z})} \left\| \langle ak \rangle^r \widehat{\psi}(k) \right\|_{l^2(\mathbb{Z})}. \end{aligned}$$

□

Observación 3.2. *Suponiendo que $s \geq 0$ y $0 < T \leq 1$, tenemos un resultado similar al dado en la Proposición 3.2 para el espacio $C([0,T]; H^s(\mathbb{T}))$. De hecho, se tiene que*

$$\left\| \int_0^t S(t-t')\partial_x(uv)(t')\, dt' \right\|_{\infty,s} \leq C_{s,\eta} T^{\frac{1}{4}} \|u\|_{\infty,s} \|v\|_{\infty,s},$$

para todo $u, v \in C([0,T]; H^s(\mathbb{T}))$. Para ver este resultado, empleamos el Lema 3.2 con $a = 1$ y obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^t \|S(t-t')\partial_x(uv)(t')\|_s \, dt' &\leq C \int_0^t \left\| |k| e^{\eta\left(|k|-k^2\right)(t-t')} \right\|_{l^2(\mathbb{Z})} \left\| \langle k \rangle^s \left(uv(t')\right)^\wedge (k) \right\|_{l^\infty(\mathbb{Z})} \, dt' \\ &\leq C_s \int_0^t \left\| |k| e^{\eta\left(|k|-k^2\right)(t-t')} \right\|_{l^2(\mathbb{Z})} \|u(t')\|_s \|v(t')\|_s \, dt' \\ &\leq C_{s,\eta} \left(\int_0^t 1 + \frac{1}{(t-t')^{1/2}} + \frac{1}{(t-t')^{3/4}} \, dt' \right) \|u\|_{\infty,s} \|v\|_{\infty,s} \\ &\leq C_{s,\eta} T^{\frac{1}{4}} \|u\|_{\infty,s} \|v\|_{\infty,s} \qquad (3.18)\end{aligned}$$

Observación 3.3. *Sean $s \geq 0$ y $0 < T \leq 1$. Vale el mismo resultado de la Proposición 3.3 cambiando a X_T^s por $C\left([0,T]; H^s(\mathbb{T})\right)$ y considerando $\delta \in [0, \frac{1}{2})$. En efecto, definiendo los mismos términos $\mathbb{I}(t,\tau)$ y $\mathbb{III}(t,\tau)$ empleados en la demostración de la Proposición 3.3, tenemos por el Lema 3.2*

$$\begin{aligned}\mathbb{III}(t,\tau) &\leq (2\pi)^{\frac{1}{2}} \int_t^\tau \left\| |k| \langle k \rangle^\delta e^{\eta\left(|k|-k^2\right)(\tau-t')} \right\|_{l^2(\mathbb{Z})} \left\| \langle k \rangle^s [u^2(t')]^\wedge(k) \right\|_{l^\infty(\mathbb{Z})} \, dt' \\ &\leq C_{s,\delta} \int_t^\tau \left\| |k|^{1+\delta} e^{\eta(|k|-k^2)(\tau-t')} \right\|_{l^2(\mathbb{Z})} \|u(t')\|_s^2 \, dt' \\ &\leq C_{s,\delta,\eta} \left((\tau-t) + (\tau-t)^{\frac{1-\delta}{2}} + (\tau-t)^{\frac{1}{4}(1-2\delta)} \right) \|u\|_{\infty,s}^2 . \qquad (3.19)\end{aligned}$$

De esto, $\lim_{\tau\to t} \mathbb{III}(t,\tau) = 0$. Para el término $\mathbb{I}(t,\tau)$ se tiene en este caso

$$\mathbb{I}(t,\tau) \leq C_{s,\delta} \left(\int_0^t \left\| |k|^{1+\delta} \left(e^{q(k)(\tau-t')} - e^{q(k)(t-t')} \right) \right\|_{l^2(\mathbb{Z})} \, dt' \right) \|u\|_{\infty,s}^2 , \qquad (3.20)$$

y por el Lema 2.1

$$\left\| |k|^{1+\delta} \left(e^{q(k)(\tau-t')} - e^{q(k)(t-t')} \right) \right\|_{l^2(\mathbb{Z})} \leq C_{s,\delta} \left(1 + \frac{1}{(\eta(t-t'))^{\frac{1+\delta}{2}}} + \frac{1}{(\eta(t-t'))^{\frac{3+2\delta}{4}}} \right), \forall t > 0$$

Luego, por la desigualdad anterior se puede emplear el mismo argumento de la demostración de la Proposición 3.3 para concluir que $\lim_{\tau\to t} \mathbb{I}(t,\tau) = 0$.

3.3. Teoría Local y Global en $H^s(\mathbb{T})$ con $s > -1/2$

Con las estimativas anteriores procedemos a demostrar el buen planteamiento local.

Teorema 3.1. *Sean $\eta, \beta > 0$ y $s > -\frac{1}{2}$. Entonces para todo $\phi \in H^s(\mathbb{T})$, existe $T\left(\|\phi\|_s\right) > 0$, un espacio*

$$\mathfrak{X}_T^s \hookrightarrow C\left([0,T], H^s(\mathbb{T})\right)$$

y una única función u solución de (1) con $u(0) = \phi$. Más aún, $u \in C\left((0,T], H^\infty(\mathbb{T})\right)$ y la aplicación dato inicial solución $\phi \in H^s(\mathbb{T}) \to u \in \mathfrak{X}_T^s$, es suave.

Demostración. Para $T \in (0,1]$, si $-\frac{1}{2} < s < 0$ se escoge $\mathfrak{X}_T^s = X_T^s$ y si $s \geq 0$, hacemos $\mathfrak{X}_T^s = C\left([0,T]; H^s(\mathbb{T})\right)$. Dividimos la demostración en cinco pasos.

1. *Existencia.* Sea $\phi \in H^s(\mathbb{T})$ con $s > -\frac{1}{2}$. Definimos la aplicación

$$\Psi(u) = S(t)\phi - \frac{1}{2}\int_0^t S(t-t')\partial_x(u^2(t'))\,dt', \text{ para cada } u \in \mathfrak{X}_T^s.$$

Por la Proposición 3.1, junto con la Proposición 3.2 para $s < 0$ o por la Observación 3.2 para $s \geq 0$, existe una constante $C = C(\eta, s)$ tal que para todo $u, v \in \mathfrak{X}_T^s$ y $0 < T \leq 1$

$$\|\Psi(u)\|_{\mathfrak{X}_T^s} \leq C\left(\|\phi\|_s + T^{g(s)}\|u\|^2_{\mathfrak{X}_T^s}\right), \tag{3.21}$$

$$\|\Psi(u) - \Psi(v)\|_{\mathfrak{X}_T^s} \leq CT^{g(s)}\|u-v\|_{\mathfrak{X}_T^s}\|u+v\|_{\mathfrak{X}_T^s}, \tag{3.22}$$

donde $g(s) = \frac{1}{4}(1+2s)$, si $s \in (-\frac{1}{2}, 0)$ y $g(s) = \frac{1}{4}$, para $s \geq 0$. Luego sea $E_T(\gamma) = \left\{u \in \mathfrak{X}_T^s : \|u\|_{\mathfrak{X}_T^s} \leq \gamma\right\}$, con $\gamma = 2C\|\phi\|_s$ y $0 < T \leq \text{mín}\left\{1, (4C\gamma)^{-\frac{1}{g(s)}}\right\}$. Las desigualdades (3.21) y (3.22) implican que Ψ es una contracción en $E_T(\gamma)$. Así, por el Teorema de Punto Fijo de Banach existe una única solución u de la ecuación integral (1) que pertenece a $E_T(\gamma)$ y satisface $u(0) = \phi$.

2. *Dependencia continua.* Verificaremos que la aplicación $\phi \in H^s(\mathbb{T}) \mapsto u \in \mathfrak{X}_T^s$, donde u es la solución construida en la parte de *Existencia*, es continua. Más precisamente, para $s > -\frac{1}{2}$, si $\phi_n \to \phi_\infty$ en $H^s(\mathbb{T})$ y $u_n \in \mathfrak{X}_{T_n}^s$, son soluciones de la ecuación integral (1) (dadas en la parte de *Existencia*) con dato inicial ϕ_n, para todo $1 \leq n \leq \infty$. Entonces, para $T' \in (0, T_\infty)$, $u_n \in \mathfrak{X}_{T'}^s$ (para n suficientemente grande) y $u_n \to u_\infty$ en $\mathfrak{X}_{T'}^s$.

En efecto, recordemos que las soluciones y tiempos de existencia construidos anteriormente satisfacen

$$\begin{aligned} &0 < T_n \leq \text{mín}\left\{1, \left(8C^2\|\phi_n\|_s\right)^{-\frac{1}{g(s)}}\right\}, \\ &\|u_n\|_{\mathfrak{X}_T^s} \leq 2C\|\phi_n\|_s, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Sea $T' \in (0, T_\infty)$, las desigualdades anteriores y la suposición que $\phi_n \to \phi_\infty$ en $H^s(\mathbb{T})$, implican que existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \geq N$, se tiene que $T' \leq T_n$ y

$$\frac{\|\phi_n\|_s + \|\phi_\infty\|_s}{\|\phi_\infty\|_s} \leq 3.$$

De esta manera, por las Proposiciones 3.1, 3.2 para índices negativos o por la Observación 3.2 para $s \geq 0$, se sigue que para cada $n \geq N$

$$\begin{aligned} \|u_n - u_\infty\|_{\mathfrak{X}_{T'}^s} &\leq C\|\phi_n - \phi_\infty\|_s + CT'^{g(s)}\|u_n + u_\infty\|_{\mathfrak{X}_{T'}^s}\|u_n - u_\infty\|_{\mathfrak{X}_{T'}^s} \\ &\leq C\|\phi_n - \phi_\infty\|_s + 2C^2T_\infty^{g(s)}\left(\|\phi_n\|_s + \|\phi_\infty\|_s\right)\|u_n - u_\infty\|_{\mathfrak{X}_{T'}^s} \\ &\leq C\|\phi_n - \phi_\infty\|_s + \frac{\left(\|\phi_n\|_s + \|\phi_\infty\|_s\right)}{4\|\phi_\infty\|_s}\|u_n - u_\infty\|_{\mathfrak{X}_{T'}^s} \\ &\leq C\|\phi_n - \phi_\infty\|_s + \frac{3}{4}\|u_n - u_\infty\|_{\mathfrak{X}_{T'}^s}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|u_n - u_\infty\|_{\mathfrak{X}^s_{T'}} \leq C\,\|\phi_n - \phi_\infty\|_s$, para todo $n \geq N$.

3. *Unicidad.* Sean $u, v \in \mathfrak{X}^s_T$ soluciones de la ecuación integral (2.23) en $[0,T]$ con el mismo dato inicial. Para cada $r \in [0,T]$ definimos

$$F_r(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_r^t S(t-t')\left(\partial_x u^2(t') - \partial_x v^2(t')\right) dt', & \text{si } t \in (r,T] \\ 0, & \text{si } t \in [0,r] \end{cases}$$

para todo $t \in [0,T]$. Empleando el mismo argumento de la demostración de la Proposición 3.2 o de la Observación 3.2, se tiene que existe una constante $C = C(\eta, s)$ que depende de η y s, tal que para todo $r \in [0,T]$ y todo $\vartheta \in [r,T]$,

$$\|F_r\|_{\mathfrak{X}^s_\vartheta} \leq CK\,(\vartheta - r)^{g(s)}\,\|u-v\|_{\mathfrak{X}^s_\vartheta}\,, \tag{3.23}$$

donde $K = \|u\|_{\mathfrak{X}^s_T} + \|v\|_{\mathfrak{X}^s_T}$. De esta manera, nótese que (3.23) implica,

$$\|u-v\|_{\mathfrak{X}^s_\vartheta} = \|F_0\|_{\mathfrak{X}^s_\vartheta} \leq CK\vartheta^{g(s)}\,\|u-v\|_{\mathfrak{X}^s_\vartheta}\,. \tag{3.24}$$

Por lo tanto, escogiendo $\vartheta \in \left(0, (CK)^{-\frac{1}{g(s)}}\right)$ un número fijo, tenemos por (3.24) que $u \equiv v$ en $[0,\vartheta]$. Iterando este argumento, supongamos que hemos demostrado que $u \equiv v$ en $[0, m\vartheta]$, donde m es un entero positivo para el cual $m\vartheta \in [0,T]$. Entonces, si $(m+1)\vartheta \in [0,T]$ de (3.23) se sigue

$$\|u-v\|_{\mathfrak{X}^s_{(m+1)\vartheta}} = \left\|F_{(m\vartheta)}\right\|_{\mathfrak{X}^s_{(m+1)\vartheta}} \leq CK\vartheta^{g(s)}\,\|u-v\|_{\mathfrak{X}^s_{(m+1)\vartheta}}\,. \tag{3.25}$$

Si por otro lado $(m+1)\vartheta > T$, (3.23) implica

$$\begin{aligned} \|u-v\|_{\mathfrak{X}^s_T} = \left\|F_{(m\vartheta)}\right\|_{\mathfrak{X}^s_T} &\leq CK\,(T - m\vartheta)^{g(s)}\,\|u-v\|_{\mathfrak{X}^s_T} \\ &\leq CK\vartheta^{g(s)}\,\|u-v\|_{\mathfrak{X}^s_T}\,. \end{aligned} \tag{3.26}$$

La elección de ϑ, (3.25) y (3.26) implican que $u \equiv v$ en $[0, \text{mín}\,\{(m+1)\vartheta, T\}]$. Así, podemos continuar con este argumento hasta concluir la unicidad para todo el intervalo $[0,T]$.

4. *La solución* $u \in C\left((0,T], H^\infty(\mathbb{T})\right)$. Puesto que u está en $\mathfrak{X}^s_T$, tenemos que la Proposición 3.3, o la Observación 3.3, permiten razonar de la misma manera que en la demostración del Teorema 2.7, para concluir que $u \in C\left((0,T], H^\infty(\mathbb{T})\right)$.

5. *La aplicación dato inicial solución es suave.* La demostración de este hecho es similar a la dada en [26] Teorema 2.1, presentaremos este resultado para la ecuación de Chen-Lee (1). Denotemos por u_ϕ la solución de (1) con dato inicial $\phi \in H^s(\mathbb{T})$. Razonando como en la parte de *Existencia* es fácil ver que la aplicación dato inicial solución

$$\begin{aligned} \Phi : H^s(\mathbb{T}) &\to \mathfrak{X}^s_T \\ \phi &\mapsto u_\phi, \end{aligned}$$

es localmente Lipschitz. Para demostrar que Φ es suave, consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} H : H^s(\mathbb{T}) \times \mathfrak{X}_T^s &\to \mathfrak{X}_T^s \\ (\phi, u) &\mapsto u(t) - S(t)\phi + \frac{1}{2}\int_0^t S(t-t')\partial_x u^2(t')\, dt'. \end{aligned}$$

Primero, notemos que H está bien definida y es una aplicación suave, además, $H(\phi, u_\phi) = 0$. Más aún, sea $\phi \in H^s(\mathbb{T})$ fijo, entonces para cada $v \in \mathfrak{X}_T^s$,

$$\partial_v H(\phi, u_\phi)\, v = v(t) + \int_0^t S(t-t')\partial_x \left(u_\phi(t')v(t')\right)\, dt'.$$

Luego, utilizando la Proposición 3.2 o la Observación 3.2, se deduce que existe una constante $C_{\eta,s} > 0$ tal que

$$\left\|(I - \partial_v H(\phi, u_\phi))\, v\right\|_{\mathfrak{X}_T^s} \leq C_{\eta,s} T^{g(s)} \left\|u_\phi\right\|_{\mathfrak{X}_T^s} \left\|v\right\|_{\mathfrak{X}_T^s} \leq 2C_{\eta,s}^2 T^{g(s)} \left\|\phi\right\|_s \left\|v\right\|_{\mathfrak{X}_T^s},$$

hemos usado que $\left\|u_\phi\right\|_{\mathfrak{X}_T^s} \leq 2C\left\|\phi\right\|_s$. Escogiendo T suficientemente pequeño tal que $2C_{\eta,s}^2 T^{g(s)} \left\|\phi\right\|_s < 1$, se sigue que la aplicación lineal $\partial_v H(\phi, u_\phi) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}_T^s)$ es un isomorfismo. Por lo tanto, por el Teorema de la Función Implícita existe una vecindad V de ϕ en $H^s(\mathbb{T})$ y una aplicación suave $g : V \to C([0,T]; H^s(\mathbb{T}))$, tal que $H(\psi, g(\psi)) = 0$, para todo $\psi \in V$. Esto implica que $\Phi|_V = g$ es suave, así como la derivación es una propiedad local y ϕ es arbitrario, se concluye la demostración.

□

Daremos una demostración del resultado global.

Teorema 3.2. *Sean $\beta, \eta > 0$ y $s \geq 0$. Entonces el problema de Cauchy (1) está globalmente bien planteado para cualquier dato inicial $\phi \in H^s(\mathbb{T})$.*

Demostración. Sea $T^*(\left\|\phi\right\|_s)$ definido como

$$T^* = \sup\left\{T > 0 : \text{Existe una única solución de (2.23) en } C([0,T]; H^s(\mathbb{T}))\right\}.$$

Sea $u \in C([0,T^*); H^s(\mathbb{T})) \cap C((0,T^*); H^\infty(\mathbb{T}))$ la solución local de (2.23) en el intervalo $[0, T^*)$. Puesto que u es una solución clásica de (2.23), es válido el producto escalar en $L^2(\mathbb{T})$ entre la ecuación integral (2.23) y u. Por lo tanto empleando el mismo argumento de la demostración del Lema 2.3

$$\left\|u(t)\right\|_0 \leq \left\|\phi\right\|_0 \text{ para todo } t \in [0, T^*). \tag{3.27}$$

Así la desigualdad anterior permite razonar como en la demostración del Teorema 2.8 y concluir que $T^* = \infty$. □

Siguiendo las ideas dadas por Duque en [11] presentamos el siguiente resultado global para el espacio X_T^s con $-\frac{1}{2} < s < 0$.

Teorema 3.3. *Dados $\eta, \beta > 0$ y $s \in (-1/2, 0)$. Entonces la ecuación de Chen-Lee (1) está globalmente bien planteada en X_T^s.*

Demostración. Para $s \in (-1/2, 0)$ y $\phi \in H^s(\mathbb{T})$, sea $u \in X_T^s$ la solución del problema de Cauchy (1) con $u(0) = \phi$ dada por el Teorema 3.1. Entonces, para $T' \in (0, T)$ fijo tenemos que

$$\|u\|_{X_{T'}^s} = M_{T',s} < \infty.$$

Puesto que $u \in C\left((0,T]; H^\infty(\mathbb{T})\right)$, se sigue que $u(T') \in L^2(\mathbb{T})$ y de esta manera por el Teorema 3.3 la solución $\tilde{u}$ del problema de Cauchy (1) con dato inicial $u(T')$ es global en el tiempo. Además, por la unicidad, se verifica que $\tilde{u}(t) = u(T' + t)$ para todo $t \in [0, T - T']$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{X_T^s} &\leq \|u\|_{X_{T'}^s} + \|u(T' + \cdot)\|_{X_{T-T'}^s} \\
&\leq M_{T',s} + \|\tilde{u}\|_{X_{T-T'}^s} \\
&= M_{T',s} + \sup_{t \in [0, T-T']} \left\{ \|\tilde{u}(t)\|_s + t^{|s|/2} \|\tilde{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{T})} \right\} \\
&\leq M_{T',s} + \left(1 + (T - T')^{|s|/2}\right) \sup_{t \in [0, T-T']} \|\tilde{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}.
\end{aligned}$$

La estimativa anterior nos conduce al resultado buscado. $\square$

3.4. El flujo dato solución falla en ser C^2 cuando $s < -1$

En esta sección se demuestra que el método iterativo de Picard no puede ser implementado en la ecuación integral (2.23), en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{T})$, para $s < -1$. Como consecuencia, no existe $T > 0$ tal que (1) admite una única solución local definida en el intervalo $[0, T]$ y tal que la aplicación dato solución $\phi \longmapsto u(t),\ t \in [0, T]$, es C^2 diferenciable en el origen de $H^s(\mathbb{T})$ a $C([0, T]; H^s(\mathbb{T}))$.

Teorema 3.4. *Sean $s < -1$ y $T > 0$. Entonces no existe un espacio B_T^s continuamente inmerso en $C([0, T], H^s(\mathbb{T}))$ tal que existe $C > 0$ con*

$$\|S(t)\phi\|_{B_T^s} \le C\|\phi\|_s, \qquad \phi \in H^s(\mathbb{T}), \tag{3.28}$$

y

$$\left\|\int_0^t S(t-t')[u(t')u_x(t')]\ dt'\right\|_{B_T^s} \le C\|u\|_{B_T^s}^2 \tag{3.29}$$

para cada $u \in B_T^s$.

Demostración. Supongamos que existe un espacio B_T^s para el cual se satisfacen (3.28) y (3.29). Consideramos $u = S(t)\phi$ en (3.29), entonces

$$\left\|\int_0^t S(t-t')[(S(t')\phi)(S(t')\phi_x)]\ dt'\right\|_{B_T^s} \le C\|S(t)\phi\|_{B_T^s}^2. \tag{3.30}$$

Puesto que B_T^s está continuamente inmerso en $C([0, T], H^s(\mathbb{T}))$ y se satisface (3.28), se tiene para todo $t \in [0, T]$ que

$$\left\|\int_0^t S(t-t')[(S(t')\phi)(S(t')\phi_x)]\ dt'\right\|_s \le C\|\phi\|_s^2. \tag{3.31}$$

Mostraremos que (3.31) falla para una función ϕ apropiada. Sea ϕ definida por su transformada de Fourier como

$$\widehat{\phi}(k) = \begin{cases} N^{-s}, & \text{si } k = N \text{ o } k = 1-N, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde $N \gg 1$ es un entero positivo. Puesto que $N^2 \le 2\left(1 + (N-1)^2\right)$, se tiene

$$\|\phi\|_s^2 = 2\pi(1+N^2)^s N^{-2s} + 2\pi(1+(N-1)^2)^s N^{-2s} \le 2\pi(1+2^{-s}). \tag{3.32}$$

Por otro lado, la definición del semigrupo $(S(t))_{t\ge 0}$ implica

$$\begin{aligned}
\int_0^t S(t-t')[(S(t')\phi)(S(t')\phi_x)]\ dt' &= \int_0^t \sum_k e^{q(k)(t-t')} e^{ikx}(ik)\left(\widehat{S(t')\phi} * \widehat{S(t')\phi}\right)(k)\, dt' \\
&= \int_0^t \sum_k e^{q(k)(t-t')} e^{ikx}(ik)\left(\sum_j e^{q(j)t'} e^{q(k-j)t'}\widehat{\phi}(j)\widehat{\phi}(k-j)\right)\ dt' \\
&= \sum_{k,j} e^{q(k)t+ikx}(ik)\widehat{\phi}(j)\widehat{\phi}(k-j)\int_0^t e^{t'[i\psi(k,j)-\sigma(k,j)]}dt'
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\psi(k,j) &= \beta\left[(k-j)|k-j| - |k|k + |j|j\right],\\
\sigma(k,j) &= \eta\left[(k-j)^2 - |k-j| - |k|^2 + |k| + |j|^2 - |j|\right].
\end{aligned}$$

De esta manera, por la definición de ϕ tenemos que

- Si $k = 2-2N$, entonces $j = 1-N$ y

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^t S(t-t')[(S(t')\phi)(S(t')\phi_x)]\;dt'\right)^{\wedge}(2-2N)\\
&\qquad = e^{q(2-2N)t}\, i(2-2N)\, N^{-2s}\int_0^t e^{t'[i\psi((2-2N),1-N)-\sigma((2-2N),1-N)]}dt'.
\end{aligned}$$

- Si $k = 1$, entonces $j = 1-N$ ó $j = N$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^t S(t-t')[(S(t')\phi)(S(t')\phi_x)]\;dt'\right)^{\wedge}(1)\\
&= i\, e^{q(1)t}N^{-2s}\int_0^t e^{t'[i\psi(1,N)-\sigma(1,N)]}dt' + e^{q(1)t}(i)N^{-2s}\int_0^t e^{t'[i\psi(1,1-N)-\sigma(1,1-N)]}dt'.
\end{aligned}$$

- Si $k = 2N$, se sigue que $j = N$ y así

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^t S(t-t')[(S(t')\phi)(S(t')\phi_x)]\;dt'\right)^{\wedge}(2N)\\
&\qquad = e^{q(2N)t}(2iN)N^{-2s}\int_0^t e^{t'[i\psi(2N,N)-\sigma(2N,N)]}dt'.
\end{aligned}$$

- Para todo entero k diferente de $2-2N$, 1 y $2N$ se tiene que

$$\left(\int_0^t S(t-t')[(S(t')\phi)(S(t')\phi_x)]\;dt'\right)^{\wedge}(k) = 0. \tag{3.33}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\psi(1,N) &= \psi(1,1-N) = 2\beta(N-1),\\
\sigma(1,N) &= \sigma(1,1-N) = 2\eta(N^2-2N+1),
\end{aligned}$$

Por lo tanto, considerando $t > 0$ fijo tenemos que

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^t S(t-t')[(S(t')\phi)(S(t')\phi_x)]\;dt'\right\|_s^2 &\geq \pi 2^s\left|\left(\int_0^t S(t-t')[(S(t')\phi)(S(t')\phi_x)]\;dt'\right)^{\wedge}(1)\right|^2\\
&= \pi 2^{s+2}\left|e^{q(1)t}N^{-2s}\frac{e^{t[i\psi(1,N)-\sigma(1,N)]}-1}{i\psi(1,N)-\sigma(1,N)}\right|^2\\
&\geq \pi 2^{s+2}\left|e^{q(1)t}N^{-2s}\Re\left(\frac{e^{t[i\psi(1,N)-\sigma(1,N)]}-1}{i\psi(1,N)-\sigma(1,N)}\right)\right|^2
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Tomando N suficientemente grande tal que $\left(1 - \left(\frac{\beta+\eta}{\eta}\right) e^{-2\eta(N^2-2N+1)t}\right) \geq \frac{1}{2}$, se sigue que

$$\begin{aligned}
&\Re\left(\frac{e^{t[i\psi(1,N)-\sigma(1,N)]}-1}{i\psi(1,N)-\sigma(1,N)}\right) \\
&\geq \frac{2\eta(N^2-2N+1)\left(1-e^{-2\eta(N^2-2N+1)t}\right)-2\beta(N-1)e^{-2\eta(N^2-2N+1)t}}{4\eta^2(N^2-2N+1)^2+4\beta^2(N-1)^2} \\
&\geq \frac{2\eta(N^2-2N+1)\left(1-(\frac{\beta+\eta}{\eta})e^{-2\eta(N^2-2N+1)t}\right)}{4\eta^2(N^2-2N+1)^2+4\beta^2(N-1)^2} \\
&\geq \frac{\eta}{4(\beta^2+\eta^2)(N^2-2N+1)} \\
&\geq \frac{C_{\beta,\eta}}{N^2}.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

donde $C_{\beta,\eta} = \frac{\eta}{8(\beta^2+\eta^2)}$. Entonces, por (3.34) y (3.35), existe una constante $C_{s,\beta,\eta} > 0$ tal que

$$\left\|\int_0^t S(t-t')[(S(t')\phi)(S(t')\phi_x)]\ dt'\right\|_s^2 \geq C_{s,\beta,\eta}N^{-4(s+1)}. \tag{3.36}$$

De esta manera (3.32), (3.36) y la desigualdad (3.31) implican que

$$C_{s,\beta,\eta}N^{-2(s+1)} \leq 2\pi(1+2^{-s}), \tag{3.37}$$

pero esto es una contradicción para N suficientemente grande ya que $s < -1$. □

Teorema 3.5. *Sea $s < -1$, entonces no existe $T > 0$ tal que (1) admite una única solución local definida en el intervalo $[0,T]$ y tal que la aplicación dato solución*

$$\phi \longmapsto u(t), \qquad t \in [0,T],$$

para (1) es C^2 diferenciable en cero de $H^s(\mathbb{T})$ a $C([0,T];H^s(\mathbb{T}))$.

Demostración. Sea $s < -1$, supongamos que existe $T > 0$ tal que el problema de Cauchy (1) es localmente bien planteado en $H^s(\mathbb{T})$ en $[0,T]$ y tal que la aplicación dato inicial solución $\Phi : H^s(\mathbb{T}) \to C([0,T];H^s(\mathbb{T}))$ es de clase C^2 en el origen. Cuando $\phi \in H^s(\mathbb{T})$, denotamos por $u_\phi(t) = \Phi(t)\phi$ la solución de la ecución de Chen-Lee (1) con dato inicial ϕ. Esto significa que u_ϕ es una solución de la ecuación integral

$$u_\phi(t) = S(t)\phi - \frac{1}{2}\int_0^t S(t-t')\partial_x(u_\phi)^2(t')dt'$$

Calculando la derivada de Fréchet de $\Phi(t)$ en ϕ con dirección ψ, obtenemos que

$$d_\phi\Phi(t)(\psi) = S(t)\psi - \int_0^t S(t-t')\partial_x\left(u_\phi(t')d_\phi\Phi(t')(\psi)\right)\ dt'. \tag{3.38}$$

Como suponemos que el problema de Cauchy (1) está bien planteado, por la unicidad $\Phi(t)(0) = 0$, entonces deducimos de (3.38) que

$$d_0\Phi(t)(\psi) = S(t)\psi. \tag{3.39}$$

Luego, utilizando (3.38) y (3.39) calculamos la segunda derivada de Fréchet en el origen con dirección (ϕ, ψ), obteniendo

$$d_0^2\Phi(t)(\phi,\psi) = -\int_0^t S(t-t')\partial_x[(S(t')\phi)(S(t')\psi)]\ dt'.$$

Como asumimos que la aplicación es C^2 en el origen, entonces

$$d_0^2\Phi(t) \in \mathcal{B}\left(H^s(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T}), H^s(\mathbb{T})\right),$$

pero esto implica que

$$\left\| d_0^2\Phi(t)(\phi,\psi) \right\|_s \leq C\left\|\phi\right\|_s \left\|\psi\right\|_s, \forall \phi,\psi \in H^s(\mathbb{T}). \tag{3.40}$$

La desigualdad (3.40) es equivalente a (3.31), que falla según lo demostrado en el Teorema 3.4. □

3.5. Convergencia de las soluciones de la ecuación CL

En esta sección estudiamos la convergencia de las soluciones de la ecuación de Chen-Lee (1) cuando la dispersión β tiende a cero y la disipación $\eta > 0$ es una constante fija. Para resaltar la dependencia del semigrupo de contracciones asociado a la parte lineal de la ecuación (1) con el parámetro β, denotaremos en esta sección

$$S_\beta(t)\phi = \left(e^{q(k)t}\widehat{\phi}(k)\right)^\vee = \left(e^{\left(i\beta|k|k+\eta(|k|-k^2)\right)t}\widehat{\phi}(k)\right)^\vee,$$

para todo $\beta \geq 0$, $\phi \in H^s(\mathbb{T})$ con $s \in \mathbb{R}$.

Cuando la dispersión $\beta = 0$ tenemos el siguiente problema de Cauchy o ecuación no dispersiva de Chen-Lee

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \eta(\mathcal{H}u_x - u_{xx}) = 0, \\ u(x,0) = \phi(x), \end{cases} \tag{3.41}$$

$\phi \in H^s(\mathbb{T})$, $s \in \mathbb{R}$. Observemos que fijando $\eta > 0$ los resultados dados en el Teorema 3.1 se cumplen para la ecuación (3.41), puesto que las constantes y argumentos involucrados son independientes de la variable β (de hecho el Teorema 3.1 es válido para todo $\beta \in \mathbb{R}$ y $\eta > 0$). Esto nos permite dar el siguiente resultado.

Teorema 3.6. *Sea $\eta > 0$ fijo. Sean $s > -1/2$ y $\phi \in H^s(\mathbb{T})$, si u^β es la solución de (1) con dato inicial ϕ construida en el Teorema 3.1 para $\beta \geq 0$ en el intervalo $[0,T]$ (recordemos que este intervalo es independiente de β), entonces*

$$\lim_{\beta\to 0^+}\left\|u^\beta - u^0\right\|_{\infty,s} = \lim_{\beta\to 0^+}\sup_{t\in[0,T]}\left\|u^\beta(t) - u^0(t)\right\|_s = 0,$$

donde u^0 es la solución local de (3.41) con $u^0(0) = \phi$.

Demostración. Como en la demostración del Teorema 3.1 entenderemos por $\mathfrak{X}_T^s = X_T^s$, si $s \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, y si $s \geq 0$, consideraremos $\mathfrak{X}_T^s = C\left([0,T]; H^s(\mathbb{T})\right)$. Sea $v^\beta = u^\beta - u^0$, entonces v^β satisface la ecuación integral

$$v^\beta(t) = \left(S_\beta(t) - S_0(t)\right)\phi - \frac{1}{2}\int_0^t \left(S_\beta(t-t') - S_0(t-t')\right)\partial_x((u^\beta)^2 - (u^0)^2)\, dt'$$

Así, para todo $\vartheta \in (0, T]$ la desigualdad triangular implica

$$\begin{aligned}\left\|v^\beta\right\|_{\mathfrak{X}_\vartheta^s} \leq \mathcal{I}_\beta + \mathcal{II}_\beta &:= \left\|\left(S_\beta(t) - S_0(t)\right)\phi\right\|_{\mathfrak{X}_\vartheta^s} \\ &+ \left\|\frac{1}{2}\int_0^t \left(S_\beta(t-t') - S_0(t-t')\right)\partial_x((u^\beta)^2 - (u^0)^2)\, dt'\right\|_{\mathfrak{X}_\vartheta^s}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Recordamos que las soluciones dadas en el Teorema 3.1 satisfacen para todo $\beta \geq 0$ que $\left\|u^\beta\right\|_{\mathfrak{X}_\vartheta^s} < \gamma = 2C\left\|\phi\right\|_s$, donde la constante $C = C(\eta, s)$ depende de η y s. De esta manera, empleando la Proposición 3.2 para $s < 0$, ó la Observación 3.2 para $s \geq 0$, se tiene que

$$\mathcal{II}_\beta \leq C_{s,\eta}\vartheta^{g(s)}\left(\left\|u^\beta\right\|_{\mathfrak{X}_\vartheta^s} + \left\|u^0\right\|_{\mathfrak{X}_\vartheta^s}\right)\left\|v^\beta\right\|_{\mathfrak{X}_\vartheta^s} \leq 2C_{s,\eta}\vartheta^{g(s)}\gamma\left\|v^\beta\right\|_{\mathfrak{X}_\vartheta^s}, \tag{3.43}$$

donde $g(s) = \frac{1}{4}(1+2s)$, si $s \in (-\frac{1}{2}, 0)$ y $g(s) = \frac{1}{4}$, para $s \geq 0$. Escogiendo $\vartheta > 0$ tal que $\vartheta \leq (4C_{s,\eta}\gamma)^{-\frac{1}{g(s)}}$, se tiene combinando (3.42) y (3.43)

$$\frac{1}{2}\left\|v^\beta\right\|_{\mathfrak{X}_\vartheta^s} \leq \mathcal{I}_\beta. \tag{3.44}$$

Estudiaremos el termino $\mathcal{I}_\beta$. Utilizando la desigualdad del valor medio y el mismo argumento de la demostración del Teorema 2.3, se tiene que

$$\begin{aligned}\left\|\left(S_\beta(t) - S_0(t)\right)\phi\right\|_s &= (2\pi)^{1/2}\left\|\langle k\rangle^s e^{\eta(|k|-k^2)t}\left(e^{i\beta|k|kt} - 1\right)\widehat{\phi}(k)\right\|_{l^2(\mathbb{Z})} \\ &\leq (2\pi)^{1/2}\beta t\left\|\langle k\rangle^s |k|^2 e^{\eta(|k|-k^2)t}\widehat{\phi}(k)\right\|_{l^2(\mathbb{Z})} \\ &\leq \beta\, t\left\||k|^2 e^{\eta(|k|-k^2)t}\right\|_{l^\infty(\mathbb{Z})}\left\|\phi\right\|_s \\ &\leq \beta\left(\frac{\eta\vartheta + 1}{\eta}\right)e^{\frac{1}{8}\left(\eta\vartheta + \sqrt{\eta^2\vartheta^2 + 8\eta\vartheta}\right)}\left\|\phi\right\|_s. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Por otro lado, dado que $0 \leq t \leq \vartheta \leq T \leq 1$, entonces $t^{1/2} \leq \left\langle kt^{1/2}\right\rangle\langle k\rangle^{-1}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Luego, suponiendo que $s \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ y razonando como en la demostración del Lema 3.1, tenemos que

$$\begin{aligned}t^{\frac{|s|}{2}}\left\|\left(S_\beta(t) - S_0(t)\right)\phi\right\|_0 &\leq (2\pi)^{1/2}\left\|\left\langle kt^{1/2}\right\rangle^{|s|}\langle k\rangle^s e^{\eta(|k|-k^2)t}\left(e^{i\beta|k|kt} - 1\right)\widehat{\phi}(k)\right\|_{l^2(\mathbb{Z})} \\ &\leq \beta\, t\left\|\left\langle kt^{1/2}\right\rangle^{|s|}|k|^2 e^{\eta(|k|-k^2)t}\right\|_{l^\infty(\mathbb{Z})}\left\|\phi\right\|_s \\ &\leq C_{s,\eta}\,\beta\, G_\eta(\vartheta)\left\|\phi\right\|_s, \end{aligned} \tag{3.46}$$

donde para cada $t \in [0, \vartheta]$ definimos

$$G_\eta(t) = \left(t + \eta^{-1}\right) e^{\frac{\eta}{8}\left(t + t^{1/2}\sqrt{t + \frac{16}{\eta}}\right)} + \left(t^{\frac{2+|s|}{2}} + \eta^{-\frac{2+|s|}{2}}\right) e^{\frac{\eta}{8}\left(t + t^{1/2}\sqrt{t + \frac{8(2+|s|)}{\eta}}\right)}.$$

De esta manera, (3.45) y (3.46) implican que $\lim_{\beta \to 0^+} \mathcal{I}_\beta = 0$ y por lo tanto

$$\sup_{t \in [0,\vartheta]} \left\| u^\beta(t) - u^0(t) \right\|_s \leq \left\| u^\beta - u^0 \right\|_{\mathfrak{X}^s_\vartheta} \to 0, \text{ si } \beta \to 0^+.$$

Por lo tanto, razonando como en la parte de *Unicidad* de la demostración del Teorema 3.1 podemos iterar el argumento anterior y concluir el resultado para todo el intervalo $[0, T]$. $\square$

CAPÍTULO 4

Ecuación de Chen-Lee en la Recta (Resultado Óptimo)

Los resultados dados en los capítulos anteriores se pueden adaptar fácilmente para la ecuación de Chen-Lee cuando se considera en $H^s(\mathbb{R})$. Por lo que en este capítulo verificamos que el problema de Cauchy (1) es localmente bien planteado en $H^s(\mathbb{R})$ cuando $s > -\frac{1}{2}$. También, mostramos que este resultado es óptimo en el sentido que la aplicación dato inicial solución falla en ser C^3 en $H^s(\mathbb{R})$ para $s < -\frac{1}{2}$. Por ultimo estudiamos la ecuación de Chen-Lee no dispersiva ($\beta = 0$).

4.1. Teoría local y global en $H^s(\mathbb{R})$ con $s > -1/2$

Comenzamos esta sección notando que para el operador $Q := -\beta\mathcal{H}\partial_x^2 - \eta(\mathcal{H}\partial_x - \partial_x^2)$, se tiene que

$$\widehat{Q\phi}\,(\xi) = q\,(\xi)\,\widehat{\phi}\,(\xi)\,,\ \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}, \text{ y cada } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

donde

$$q\,(\xi) = \beta i|\xi|\xi + \mu\left(|\xi| - \xi^2\right),\ \xi \in \mathbb{R}.$$

Luego, definimos el C^0 semigrupo asociado a la parte lineal de la ecuación (1) exactamente como en el caso periódico, es decir,

$$S(t)\phi = \left(e^{q(\cdot)t}\widehat{\phi}(\cdot)\right)^{\vee},\forall\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\ \forall t \geq 0.$$

De esta manera, tenemos que los resultados dados en el Capítulo 2 se pueden adaptar para la ecuación de Chen-Lee en el caso real.

Para estudiar la teoría con índices negativos de la ecuación real, definimos el espacio $\overline{X}_T^s$ de la misma manera como se definió X_T^s, es decir, para $0 < T \leq 1$ y $s < 0$,

$$\overline{X}_T^s = \left\{u \in C\left([0,T]; H^s(\mathbb{R})\right)\,:\,\|u\|_{\overline{X}_T^s} < \infty\right\},$$

donde

$$\|u\|_{\overline{X}_T^s} := \sup_{t\in(0,T]} \left(\|u(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} + t^{|s|/2} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \right). \tag{4.1}$$

La siguiente estimativa lineal se demuestra de igual manera como en la Proposición 3.1.

Proposición 4.1. *Sean $\eta > 0$, $s < 0$, $0 < T \leq 1$ y $\phi \in H^s(\mathbb{R})$, entonces*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|S(t)\phi\|_s \leq e^{\frac{\eta}{4}T} \|\phi\|_s . \tag{4.2}$$

Además, existe una constante C_s que depende únicamente de s tal que

$$\sup_{t\in[0,T]} t^{\frac{|s|}{2}} \|S(t)\phi\|_{L^2} \leq C_s \, g_{s,\eta}(T) \, \|\phi\|_s , \tag{4.3}$$

donde

$$g_{s,\eta}(t) = e^{\frac{\eta t}{4}} + \left(t^{\frac{|s|}{2}} + \eta^{-\frac{|s|}{2}} \right) e^{\frac{\eta}{8}\left(t + t^{\frac{1}{2}}\sqrt{t+\frac{8|s|}{\eta}}\right)},$$

es una función creciente definida sobre el intervalo $[0,1]$.

Notamos que la desigualdad (4.2) de la proposición anterior es válida para todo $T > 0$ y $s \in \mathbb{R}$. Para estudiar las estimativas bilineales presentamos el siguiente lema.

Lema 4.1. *Sean $\lambda > 0$ y $t > 0$. Entonces, existe una constante C_λ que depende únicamente de λ tal que*

$$\left\| |\xi|^\lambda e^{\eta\left(|\xi|-\xi^2\right)t} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_\lambda \frac{e^{\frac{\eta t}{2}}}{t^{\frac{1+2\lambda}{4}}}.$$

Demostración. Con el cambio de variables $w = t^{1/2}\xi$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left\| |\xi|^\lambda e^{\eta\left(|\xi|-\xi^2\right)t} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{\left\| |w|^\lambda e^{\eta\left(|w|t^{1/2}-w^2\right)} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}}{t^{\frac{1+2\lambda}{4}}} &\leq \frac{\left\| |w|^\lambda e^{-\frac{\eta w^2}{2}} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \left\| e^{\eta(wt^{1/2}-\frac{w^2}{2})} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{t^{\frac{1+2\lambda}{4}}} \\ &\leq C_\lambda \frac{e^{\frac{\eta t}{2}}}{t^{\frac{1+2\lambda}{4}}}. \end{aligned}$$

□

El Lema 4.1 nos permite razonar como en las demostraciones de la Proposición 3.2 y de la observación 3.2, para obtener estos mismos resultados para la ecuación real. Es decir, considerando la función $g(s) = \frac{1+2s}{4}$, si $-1/2 < s < 0$ y $g(s) = \frac{1}{4}$ para $s \geq 0$, tenemos que para $0 < T \leq 1$, $s > -\frac{1}{2}$, se deduce que

$$\left\| \int_0^t S(t-t')\partial_x(uv)(t') \, dt' \right\|_{\overline{\mathfrak{X}}_T^s} \leq C_{s,\eta} T^{g(s)} \, e^{\frac{\eta T}{2}} \, \|u\|_{\overline{\mathfrak{X}}_T^s} \|v\|_{\overline{\mathfrak{X}}_T^s} , \tag{4.4}$$

para todo $u, v \in \overline{\mathfrak{X}}_T^s$, donde $\overline{\mathfrak{X}}_T^s = \overline{X}_T^s$, si $-1/2 < s < 0$ y $\overline{\mathfrak{X}}_T^s = C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$, para $s \geq 0$.

Además, el Lema 4.1 nos permite concluir que los resultados de regularización dados en la Proposición 3.3 y en la Observación 3.3 son válidos para el problema de Cauchy (1) en $H^s(\mathbb{R})$, con $s > -1/2$. Luego, con estos hechos deducimos el siguiente teorema.

Teorema 4.1. *Los resultados dados en los Teoremas 3.1, 3.2, 3.3 y 3.6 son válidos en el caso real reemplazando a $H^s(\mathbb{T})$ por $H^s(\mathbb{R})$ y a X^s_T por $\overline{X}^s_T$.*

4.2. El flujo dato solución falla en ser C^3 cuando $s < -1/2$

Sin utilizar el método de restricción de norma de Fourier hemos deducido para el problema de Cauchy (1) en $H^s(\mathbb{R})$, buen planteamiento local cuando $s > -1/2$. Mostraremos que en el caso real este resultado es óptimo en el sentido que la aplicación dato inicial solución no es de clase C^3 en $H^s(\mathbb{R})$ para $s < -\frac{1}{2}$. De esta manera, el problema de Cauchy (1) no se puede resolver empleado un argumento de contracción en $H^s(\mathbb{R})$, cuando $s < -\frac{1}{2}$. Resaltamos que este resultado es más débil que el dado por Dix [9] para la ecuación de Burgers. También, destacamos que Pastrán muestra en [25] para el problema de Cauchy (1) en $H^s(\mathbb{R})$, que la aplicación dato inicial solución no es de clase C^2 cuando $s < -1$.

Teorema 4.2. *Sea $s < -\frac{1}{2}$, entonces no existe un tiempo $T > 0$ tal que (1) admite una única solución local definida sobre el intervalo $[0, T]$ y tal que la aplicación dato inicial solución*

$$\phi \longmapsto u(t), \qquad t \in [0, T], \tag{4.5}$$

de (1) sea de clase C^3 diferenciable en cero de $H^s(\mathbb{R})$ a $C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$.

Demostración. Sea $s < -\frac{1}{2}$ fijo. Supongamos que existe $T > 0$ tal que el problema de Cauchy (1) está localmente bien planteado en $H^s(\mathbb{R})$ sobre el intervalo $[0, T]$ y tal que la aplicación dato inicial solución

$$\Phi : H^s(\mathbb{R}) \longrightarrow C([0, T]; H^s(\mathbb{R})), \ \phi \longmapsto u(t)$$

es C^3 en el origen. Luego, para $\phi \in H^s(\mathbb{R})$ tenemos que $\Phi(\cdot)\phi$ es solución de la ecuación integral

$$\Phi(t)\phi = S(t)\phi - \frac{1}{2}\int_0^t S(t - t')\partial_x(\Phi(t')\phi)^2 \, dt'.$$

Por la suposición de unicidad $\Phi(t)(0) = 0$. Por lo tanto, este hecho y la ecuación integral permiten deducir

$$u_1(t) := d_0\Phi(t)(\phi) = S(t)\phi, \tag{4.6}$$

$$u_2(t) := d_0^2\Phi(t)(\phi, \phi) = -\int_0^t S(t - t')\partial_x \left(u_1(t')u_1(t')\right) \, dt', \tag{4.7}$$

$$u_3(t) := d_0^3\Phi(t)(\phi, \phi, \phi) = -3\int_0^t S(t - t')\partial_x \left(u_1(t')u_2(t')\right) \, dt'. \tag{4.8}$$

La suposición de regularidad C^3 implica

$$\|u_3(t)\|_s \leq C \|\phi\|_s^3, \forall \phi \in H^s(\mathbb{R}). \tag{4.9}$$

Mostraremos que (4.9) falla para una función ϕ apropiada. Definimos ϕ por su transformada de Fourier como

$$\widehat{\phi}(\xi) = N^{-s}\gamma^{-\frac{1}{2}}\left(\chi_{I_N}(\xi) + \chi_{I_N}(-\xi)\right), \tag{4.10}$$

donde $I_N = [N, N+2\gamma]$, $N \gg 1$ y $\gamma = \epsilon N$, con $0 < \epsilon \ll 1$ fijo. Nótese que

$$\|\phi\|_s \leq 2. \tag{4.11}$$

Por otro lado, observamos que para $\xi \in \mathbb{R}$

$$\widehat{u_3(t)}(\xi) = c\,\xi \int_0^t e^{q(\xi)(t-t')}\widehat{u_1(t')} * \widehat{u_2(t')}(\xi)\,dt'. \tag{4.12}$$

Para estudiar $\widehat{u_3(t)}(\xi)$ calculamos la transformada de Fourier de $u_2(t)$, así

$$\begin{aligned}
\widehat{u_2(t)}(\xi) &= c\int_0^t \xi e^{q(\xi)(t-t')}\left\{e^{q(\cdot)t'}\widehat{\phi} * e^{q(\cdot)t'}\widehat{\phi}\right\}(\xi)\,dt' \\
&= c\xi e^{q(\xi)t}\int_{\mathbb{R}}\int_0^t \widehat{\phi}\left(\xi-\xi_1\right)\widehat{\phi}\left(\xi_1\right)e^{(q(\xi_1)+q(\xi-\xi_1)-q(\xi))t'}\,dt'\,d\xi_1 \\
&= c\xi e^{q(\xi)t}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}\left(\xi-\xi_1\right)\widehat{\phi}\left(\xi_1\right)\frac{e^{\sigma(\xi,\xi_1)t}-1}{\sigma(\xi,\xi_1)}\,d\xi_1,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

donde

$$\begin{aligned}
\sigma(\xi,\xi_1) =& i\beta\left(|\xi-\xi_1|(\xi-\xi_1) - |\xi|\xi + |\xi_1|\xi_1\right) \\
&- \eta\left((\xi-\xi_1)^2 - |\xi-\xi_1| - \xi^2 + |\xi| + |\xi_1|^2 - |\xi_1|\right).
\end{aligned}$$

De esta manera, por (4.13) y el Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
&\widehat{u_3(t)}(\xi) = c\xi e^{q(\xi)t}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^{q(\xi)t'}\widehat{u_2(t')}(\xi_2)\widehat{u_1}(\xi-\xi_2)\,d\xi_2\,dt' \\
&= c\xi e^{q(\xi)t}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}\widehat{\phi}(\xi_1)\widehat{\phi}(\xi_2-\xi_1)\widehat{\phi}(\xi-\xi_2)\xi_2 e^{\sigma(\xi,\xi_2)t'}\left(\frac{e^{\sigma(\xi_2,\xi_1)t'}-1}{\sigma(\xi_2,\xi_1)}\right)d\xi_1\,d\xi_2\,dt' \\
&= c\xi e^{q(\xi)t}\int_{\mathbb{R}^2}\widehat{\phi}(\xi_1)\widehat{\phi}(\xi_2-\xi_1)\widehat{\phi}(\xi-\xi_2)\frac{\xi_2}{\sigma(\xi_2,\xi_1)} \\
&\times\left(\frac{e^{\psi(\xi,\xi_1,\xi_2)t}-1}{\psi(\xi,\xi_1,\xi_2)} - \frac{e^{\sigma(\xi,\xi_2)t}-1}{\sigma(\xi,\xi_2)}\right)d\xi_1\,d\xi_2,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

donde definimos

$$\psi(\xi,\xi_1,\xi_2) = \sigma(\xi,\xi_2) + \sigma(\xi_2,\xi_1).$$

Considerando los soportes de la integral (4.14) dados por el término $\widehat{\phi}(\xi_1)\widehat{\phi}(\xi_2-\xi_1)\widehat{\phi}(\xi-\xi_2)$, observamos que para $\xi \in [N+3\gamma, N+4\gamma]$ se tiene

$$|\widehat{u_3(t)}(\xi)| \geq CN^{-3s}\gamma^{-\frac{3}{2}}\left|\xi e^{q(\xi)t}\int_{K_\xi}\frac{\xi_2}{\sigma(\xi_2,\xi_1)}\left(\frac{e^{\psi(\xi,\xi_1,\xi_2)t}-1}{\psi(\xi,\xi_1,\xi_2)} - \frac{e^{\sigma(\xi,\xi_2)t}-1}{\sigma(\xi,\xi_2)}\right)d\xi_1\,d\xi_2\right|,$$

donde $K_\xi = K_\xi^1 \cup K_\xi^2 \cup K_\xi^3$ y

$$\begin{aligned}
K_\xi^1 &= \{(\xi_1, \xi_2) : \xi_1 \in I_N,\, \xi_2 - \xi_1 \in I_N,\, \xi - \xi_2 \in -I_N\}\,,\\
K_\xi^2 &= \{(\xi_1, \xi_2) : \xi_1 \in I_N,\, \xi_2 - \xi_1 \in -I_N,\, \xi - \xi_2 \in I_N\}\,,\\
K_\xi^3 &= \{(\xi_1, \xi_2) : \xi_1 \in -I_N,\, \xi_2 - \xi_1 \in I_N,\, \xi - \xi_2 \in I_N\}\,.
\end{aligned}$$

Nótese que para $\xi \in [N+3\gamma, N+4\gamma]$ y $(\xi_1, \xi_2) \in K_\xi$, tenemos que escogiendo $\gamma = \epsilon N$ se deduce

$$\begin{aligned}
|\sigma(\xi_2, \xi_1)| &\sim_{\beta,\eta} N^2,\\
|\psi(\xi, \xi_1, \xi_2)| &\sim_{\beta,\eta} N^2,\\
|\sigma(\xi, \xi_2)| &\sim_{\beta,\eta} N^2.
\end{aligned}$$

Para $a, b > 0$, $a \sim b$ significa que existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que $C_1 b \leq a \leq C_2 b$. También, denotamos por $a \sim_{\beta,\eta} b$ si las constates implícitas dependen de los parámetros β y η.

Luego, definiendo

$$t_N := N^{-2-\epsilon},$$

se verifica que $e^{\eta\left(|\xi|-\xi^2\right)t_N} > e^{-25\eta N^{-\epsilon}} > e^{-25\eta} > 0$, para todo $\xi \in [N+3\gamma, N+4\gamma]$. Además, por la serie de Taylor de la función exponencial

$$\frac{1}{\sigma(\xi_2, \xi_1)} \left(\frac{e^{\psi(\xi,\xi_1,\xi_2)t_N} - 1}{\psi(\xi, \xi_1, \xi_2)} - \frac{e^{\sigma(\xi,\xi_2)t_N} - 1}{\sigma(\xi, \xi_2)} \right) = \frac{1}{2N^{4+2\epsilon}} + R(\xi, \xi_1, \xi_z), \tag{4.15}$$

donde

$$|R(\xi, \xi_1, \xi_z)| \leq \sum_{k=3}^{\infty} \left| \frac{\psi(\xi, \xi_1, \xi_2)^{k-1} - \sigma(\xi, \xi_2)^{k-1}}{\sigma(\xi_2, \xi_1)\, k!} \right| t_N^k \leq O\left(\frac{1}{N^{4+3\epsilon}}\right).$$

Dado que la contribución más grande de (4.15) está dada por $N^{-4-2\epsilon}$, se tiene que para N suficientemente grande existe una constante $C > 0$ tal que

$$\Re\left(\frac{1}{\sigma(\xi_2, \xi_1)} \left(\frac{e^{\psi(\xi,\xi_1,\xi_2)t_N} - 1}{\psi(\xi, \xi_1, \xi_2)} - \frac{e^{\sigma(\xi,\xi_2)t_N} - 1}{\sigma(\xi, \xi_2)} \right) \right) \geq \frac{C}{N^{4+2\epsilon}}. \tag{4.16}$$

De esta manera, por (4.16) y el hecho que en K_ξ se tiene que $\xi_2 \sim N$ y $medida(K_\xi) \sim \gamma^2$, se deduce que para cada $\xi \in [N+3\gamma, N+4\gamma]$

$$\begin{aligned}
&\left|\widehat{u_3(t_N)}(\xi)\right|\\
&\geq cN^{-3s}\gamma^{-\frac{3}{2}}|\xi|e^{\eta(|\xi|-\xi^2)t_N} \left| \int_{K_\xi} \frac{\xi_2}{\sigma(\xi_2, \xi_1)} \left(\frac{e^{\psi(\xi,\xi_1,\xi_2)t} - 1}{\psi(\xi, \xi_1, \xi_2)} - \frac{e^{\sigma(\xi,\xi_2)t} - 1}{\sigma(\xi, \xi_2)} \right) d\xi_1\, d\xi_2 \right|\\
&\geq C_\eta N^{-3s}\gamma^{-\frac{3}{2}}N \left| \Re\left(\int_{K_\xi} \frac{\xi_2}{\sigma(\xi_2, \xi_1)} \left(\frac{e^{\psi(\xi,\xi_1,\xi_2)t} - 1}{\psi(\xi, \xi_1, \xi_2)} - \frac{e^{\sigma(\xi,\xi_2)t} - 1}{\sigma(\xi, \xi_2)} \right) d\xi_1\, d\xi_2 \right) \right|\\
&\geq C_\eta N^{-3s+1}\gamma^{-\frac{3}{2}}N^{-3-2\epsilon}N\gamma^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de la desigualdad anterior

$$\begin{aligned}\|u_3(t_N)\|_s^2 &\geq \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^s \left|\widehat{u_3(t_N)}(\xi)\right|^2 \chi_{[N+3\gamma,N+4\gamma]}(\xi)\,d\xi \\ &\geq C_{\eta,s}\gamma^2 N^{-4s-4-4\epsilon} \\ &= C_{\eta,s}N^{-4s-2-4\epsilon},\end{aligned}$$

pero esto contradice (4.9) para N suficientemente grande, por (4.11) y dado que $s < -\frac{1}{2}$. □

Concluiremos esta sección verificando que las ideas dadas por Vento en [32] para las ecuaciones disipativas de Benjamin Ono, se pueden adaptar para mejorar el resultado dado en el Teorema 4.2 para la ecuación no dispersiva de Chen-Lee.

Cuando la dispersión $\beta = 0$ tenemos el siguiente problema de Cauchy o ecuación no dispersiva de Chen-Lee

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \eta(\mathcal{H}u_x - u_{xx}) = 0, \\ u(x,0) = \phi(x), \end{cases} \tag{4.17}$$

$\phi \in H^s(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$. Resaltamos que al igual que en el caso periódico para la ecuación (3.41), los resultados dados en el Teorema 4.1 se cumplen para la ecuación (4.17) puesto que las constantes y argumentos involucrados no dependen del parámetro β. De esta manera, tenemos que el problema de Cauchy (4.17) es localmente bien planteado en $H^s(\mathbb{R})$ cuando $s > -\frac{1}{2}$. Mostramos que este resultado es óptimo con el siguiente teorema.

Teorema 4.3. *Fije $s < -\frac{1}{2}$. Entonces no existe un tiempo $T > 0$ tal que (4.17) admite una única solución local definida sobre el intervalo $[0,T]$ y tal que la aplicación dato inicial solución $\phi \longmapsto u(t)$ de (4.17) sea de clase C^2 diferenciable en cero de $H^s(\mathbb{R})$ a $C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$.*

Demostración. Para $\phi \in H^s(\mathbb{R})$, definimos $u_1(t)$ y $u_2(t)$ como en la demostración del Teorema 4.2. La suposición de regularidad C^2 implica que

$$\|u_2(t)\|_s \leq C\,\|\phi\|_s^2. \tag{4.18}$$

Mostraremos que (4.18) falla para una función ϕ adecuada. Consideremos ϕ definida de la misma manera que en (4.10), pero en este caso se hace $\gamma = N^{1-\epsilon}$ con $0 < \epsilon \ll 1$. Luego, argumentando como en la demostración del Teorema 4.2, se tiene que para $\xi \in [2N, 2N+4\gamma]$

$$\begin{aligned}\widehat{u_2(t)}(\xi) &= c\xi e^{\eta(|\xi|-\xi^2)t}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(\xi-\xi_1)\,\widehat{\phi}(\xi_1)\,\frac{e^{\lambda(\xi,\xi_1)t}-1}{\lambda(\xi,\xi_1)}\,d\xi_1, \\ &= cN^{-2s}\gamma^{-1}\xi e^{\eta(|\xi|-\xi^2)t}\int_{K_\xi}\frac{e^{\lambda(\xi,\xi_1)t}-1}{\lambda(\xi,\xi_1)}\,d\xi_1,\end{aligned} \tag{4.19}$$

donde

$$\begin{aligned}&K_\xi = \{\xi_1 \,:\, \xi-\xi_1 \in I_N,\, \xi_1 \in I_N\}, \\ &\lambda(\xi,\xi_1) = -\eta\left((\xi-\xi_1)^2 - |\xi-\xi_1| - \xi^2 + |\xi| + |\xi_1|^2 - |\xi_1|\right).\end{aligned}$$

Si $\xi \in [2N, 2N+4\gamma]$ y $\xi_1 \in K_\xi$ es fácil ver que

$$\lambda(\xi, \xi_1) \sim \eta N^2.$$

Por lo tanto, escogiendo $t_N = N^{-2-\epsilon}$, se sigue que $e^{\eta(|\xi|-\xi^2)t_N} > C_\eta > 0$. Además,

$$\left| \frac{e^{\lambda(\xi,\xi_1)t_N} - 1}{\lambda(\xi, \xi_1)} \right| = \frac{1}{N^{2+\epsilon}} + O\left(\frac{1}{N^{2+2\epsilon}}\right). \tag{4.20}$$

Luego, como $medida(K_\xi) \geq C\gamma$ para una constante positiva C, se sigue por (4.20)

$$\begin{aligned} |\widehat{u_2(t_N)}(\xi)| \chi_{[2N,2N+4\gamma]} &\geq CN^{-2s}\gamma^{-1} \,|\xi|\, e^{e^{\eta(|\xi|-\xi^2)t_N}} N^{-2-\epsilon}\, \gamma\, \chi_{[2N,2N+4\gamma]} \\ &\geq C_\eta N^{-2s-1-\epsilon} \chi_{[2N,2N+4\gamma]}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos una cota inferior de la norma de $u_2(t_N)$ en $H^s(\mathbb{R})$

$$\|u_2(t_N)\|_s^2 \geq C_\eta \int_{2N}^{2N+4\gamma} (1+\xi^2)^s N^{-4s-2-2\epsilon}\, d\xi \geq C_\eta N^{-2s-2-2\epsilon}\gamma = C_\eta N^{-2s-1-3\epsilon}. \tag{4.21}$$

Pero esto contradice (4.18), ya que $s < -\frac{1}{2}$ y $\|\phi\|_s \leq C_s$, para una constante positiva C_s que depende únicamente de s. $\square$

Bibliografía

[1] ALVAREZ, B. Y. *On the Cauchy problem for a Nonlocal Perturbation of the KdV Equation*. PhD thesis, IMPA-Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2002.

[2] ANGULO, J. *Nonlinear Dispersive Equations Existence and Stability of Solitary and Periodic Travelling Wave Solutions.* Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, 2009.

[3] BIAGIONI, H. A., BONA, J., IÓRIO, R. J., AND SCIALOM, M. On the korteweg-de vries-kuramoto-sivashinsky equation. *Adv. Differential Equations 1*, 1 (1996), 1–20.

[4] BOURGAIN, J. Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution, Part II: The KdV equation. *Geom. Funct. Anal. 3*, 3 (1993), 209–262.

[5] CHEN, H. H., AND LEE, Y. C. Nonlinear dynamical models of plasma turbulence. *Physica Scripta 1982*, T2A (1982), 41–47.

[6] CHEN, H. H., LEE, Y. C., AND QIAN, S. A study of nonlinear dynamical models of plasma turbulence. *Phys. Fluids B. 1*, 1 (1989), 87–98.

[7] CHEN, H. H., LEE, Y. C., AND QIAN, S. A turbulence model with stochastic soliton motion. *J. Math. Phys. 31*, 2 (1990), 506–516.

[8] DIX, D. Temporal asymptotic behavior of solutions of the Benjamin-Ono-Burgers equation. *J. Diff. Eq. 90* (1991), 238–287.

[9] DIX, D. Nonuniqueness and uniqueness in the initial-value problem for Burgers equation. *SIAM J. Math. Anal 1*, 1 (1996), 1–17.

[10] DUOANDIKOETXEA, J. *Fourier Analysis.* Crm Proceedings & Lecture Notes. American Mathematical Soc., 2001.

[11] DUQUE, O. *Sobre una versión bidimensional de la ecuación Benjamin-Ono generalizada.* PhD thesis, Universidad Nacional de Colombia, 2014.

[12] ESFAHANI, A. *High Dimensional Nonlinear Dispersive Models.* PhD thesis, IMPA-Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2008.

[13] ESFAHANI, A. Sharp well-posedness of the Ostrovsky, Stepanyams and Tsimring equation. *Math. Commun. 18*, 2 (2013), 323–335.

[14] Evans, L. *Partial Differential Equations.* Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2010.

[15] Feng, B. F., and Kawahara, T. Temporal evolutions and stationary waves for dissipative Benjamin-Ono equation. *Physica D 139* (2000), 301–318.

[16] Grafakos, L. *Classical Fourier Analysis*, 2 ed. Springer, 2008.

[17] Henry, D. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, 1 ed. Lecture Notes in Mathematics 840. Springer-Verlag, 1981.

[18] Iório, Jr, R. J., and De Magalhães, V. *Fourier Analysis and Partial Differential Equations.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2001.

[19] Kato, T., and Ponce., G. Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations. *Comm. Pure Appl. Math 41*, 7 (1988), 891–907.

[20] Kenig, C. E., Ponce, G., and Vega, L. A bilinear estimate with applications to the KdV equation. *J. Amer. Math. Soc. 9*, 2 (1996), 573–603.

[21] Linares, F., and Ponce, G. *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*, 2 ed. Springer, 2015.

[22] Molinet, L., Saut, J. C., and Tzvetkov, N. Ill-posedness issues fo the Benjamin-Ono and related equations. *SIAM J. Math. Anal. 33*, 4 (2001), 982–988.

[23] Ono, H. Algebraic solitary waves in stratified fluids. *J. Phys.Soc. Japan 39*, 4 (1975), 1082–1091.

[24] Paredes, J. M. Sobre el buen planteamiento de la ecuación de Ostrovsky. Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia, 2012.

[25] Pastran, R. A. On a perturbation of the Benjamin-Ono equation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 93* (2013), 273–296.

[26] Pilod, D. *The Cauchy problem for the dispersive Kuramoto-Velarde equation.* PhD thesis, IMPA-Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2006.

[27] Pilod, D. Sharp well-posedness results for the Kuramoto-Velarde equation. *Communications on Pure and Applied Analysis 7*, 4 (2008), 867–881.

[28] Ponce, G. On the global well-posedness of the Benjamin-Ono equation. *Differential Integral Equations 4*, 3 (1991), 527–542.

[29] Reed, M., and Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics: Functional Analysis.* No. v. 1 in Methods of Modern Mathematical Physics. Academic Press, 1980.

[30] Samaniego, B. A. The cauchy problem for a nonlocal perturbation of the KdV equation. *Differential Integral Equations 16*, 10 (2003), 1249–1280.

[31] Tao, T. Global well-posedness of the Benjamin-Ono equation in $H^1(\mathbb{R})$. *J. Hyperbolic Diff. Eq. 01*, 01 (2004), 27–49.

[32] Vento, S. Well-posedness and ill-posedness results for dissipative Benjamin-Ono equations. *Osaka J. Math. 48*, 4 (2011), 933–958.