Grupo modular parametrizado y representaciones en SL(2,K)

por

Dairo Luis Díaz Ávila

Trabajo presentado como requisito parcial
para optar al Título de

Magister en Matemáticas

Directora: Margarita María Toro Villegas

Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Diciembre 2015

Este trabajo ha sido apoyado parcialmente por el proyecto *Matemáticas y Computación*,
código Hermes 20305.

Resumen

En este trabajo se estudia en general las representaciones de grupos finitamente presentados en $SL(2,\mathbb{C})$ concentrándonos en el estudio del subgrupo Π de $SL(2,\mathbb{Z}[t])$, generado por la matriz parabólica $A = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y la matriz elíptica $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, donde $\mathbb{Z}[t]$ es el anillo de polinomios en la variable t con coeficientes en los enteros. Previo a introducir este grupo, estudiamos aspectos básicos de la teoría de representaciones y algunas familias de subgrupos de $SL(2,\mathbb{C})$, en particular, los grupos de Hecke. El grupo Π es una generalización de los grupos de Hecke. Describimos con claridad los elementos de Π y estudiamos los subgrupos libres de indice 4. Mostramos una lista de estos subgrupos y probamos que son los únicos, estableciendo cuáles de ellos son normales.

Contenido

Agradecimientos

Quisiera agradecer a Dios, por darme la fuerza, la sabiduría y la fortaleza para no desfallecer en las situaciones que se me han presentado en el transcurso de la maestría, por la oportunidad de realizar este trabajo, que significa un gran aporte a mis conocimientos en matemáticas, por iluminar mi camino y permitirme alcanzar las metas y superar los obstáculos que la vida pone.

A la directora Margarita María Toro Villegas, por ser la principal colaboradora para la realización del mismo, por su generosidad al brindarme la oportunidad de recurrir a su capacidad y experiencia, por sus valiosas sugerencias y acertados aportes en un marco de confianza y sabiduría.

A la universidad Nacional de Colombia sede Medellín por darme la oportunidad de estudiar y profundizar mis conocimientos como matemático.

A mi padre, que en paz descanse, quien, aún después de muerto, siguió brindándome la ayuda necesaria para recorrer este camino.

A mi madre que siempre ha estado allí dándome todo su apoyo y luchando para llevarme a ser la persona que soy hoy y por enseñarme que en la vida los grandes triunfos merecen grandes sacrificios.

A mi novia, por su amor y paciencia, por creer en mí y darme su apoyo incondicional en los momentos difíciles y por acompañarme hasta el final de este camino.

A todos los que de una u otra forma colaboraron en la realización y culminación de este trabajo.

Introducción

El tema general del trabajo es el de las representaciones de grupos en $SL(2,\mathbb{C})$ y como tema relacionado, nos concentraremos en el subgrupo Π de $SL(2,\mathbb{Z}[t])$, generado por las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

aquí $\mathbb{Z}[t]$ denotará el anillo de polinomios con coeficientes en los enteros y t es una indeterminada. Este grupo es llamado el *grupo modular parametrizado* y su estudio será clave en este trabajo. Vamos a presentar resultados relacionados con la descripción de los sus elementos y de sus subgrupos, específicamente aquellos subgrupos libres de índice cuatro; estableciendo con claridad cuáles de ellos son o no normales.

Uno de los aspectos interesantes del grupo modular parametrizado es que su estudio implica saber simultáneamente de un infinito número de subgrupos de $SL(2,\mathbb{C})$, lo cuál es importante en la teoría de representaciones, específicamente en las representaciones en $SL(2,\mathbb{C})$, las cuáles son homomorfismos de un grupo cualquiera G en el grupo $SL(2,\mathbb{C})$. Si tenemos una representación de un grupo G en $SL(2,\mathbb{C})$, las imágenes de subgrupos de G bajo la representación resultan ser subgrupos de $SL(2,\mathbb{C})$, de igual manera las imágenes inversas bajo la representación de subgrupos de $SL(2,\mathbb{C})$ resultan ser subgrupos de G. Es así que el conocimiento de subgrupos y/o familias de subgrupos de $SL(2,\mathbb{C})$ podría ser fundamental en la obtención de información de aspectos algebraicos del grupo G, como por ejemplo, información acerca del lattice de subgrupos de G.

Por otro lado, el grupo $SL(2,\mathbb{C})$ actúa sobre el semiplano superior complejo extendido cerrado H como un grupo de transformaciones fraccionarias lineales complejas, llamadas también transformaciones de Möbius complejas, es decir las transformaciones del plano complejo de la forma $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, donde a, b, c y d son números complejos tales que $ad - bc \neq 0$. Esta acción preserva ángulos y círculos en el plano complejo extendido. El grupo especial lineal proyectivo $PSL(2,\mathbb{C})$, el cual es equivalente al grupo cociente $\frac{SL(2,\mathbb{C})}{\{\pm I\}}$, es isomorfo al grupo de las transformaciones de Möbius complejas definidas por las matrices del grupo $SL(2,\mathbb{C})$, éstas son $\left\{T : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ donde } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ y } ad - bc = 1\right\}$. Es así como se pueden identificar las transformaciones de Möbius definidas por las matrices en $SL(2,\mathbb{C})$ con los elementos del grupo $PSL(2,\mathbb{C})$. Estos grupos han sido objeto de muchos estudios y tienen una estrecha relación con la Geometría Hiperbólica, como se puede evidenciar en los trabajos de Riley y Thurston [23] y [30].

La representación de grupos fue muy importante para resolver el problema de clasificación de grupos finitos. En este caso, la teoría de caracteres jugó un papel central. Algunos resultados y métodos se extendieron para el caso de grupos compactos y de Lie. Para grupos en general la situación es diferente y hay que tener en cuenta otros aspectos, pero siempre se sigue con la idea de buscar representaciones de los grupos en grupos conocidos.

Hay un caso muy especial cuando el grupo G es el grupo fundamental de una 3-variedad M. En este caso, el estudio del grupo G tiene un interés geométrico y topológico, adicional al deseo de resolver el problema puramente algebraico de clasificación de grupos. En este caso usualmente lo que se quiere es extraer información sobre M a partir de la información que se tenga de G. Por eso la búsqueda de grupos en los cuales se quiere la representación es especial.

En esta dirección, los trabajos de Riley, [21], [22] y Thurston [30], abrieron una ruta revolucionaria y muy prolífera en resultados al investigar representaciones de grupos de 3-variedades en $PSL\,(2,\mathbb{C})$. La razón por la cual fue tan exitoso este camino es que el grupo $PSL\,(2,\mathbb{C})$ es isomorfo al grupo $Iso^{+}\mathbb{H}^{3}$, el grupo de las isometrías del espacio hiperbólico $\mathbb{H}^{3}$, que preservan orientación. Esto hizo que se le diera interpretación geométrica a las representaciones y llevó a resultados tan impresionantes como la Conjetura de Geometrización de las 3-variedades, establecida por Thurston y probada por Perelman en el 2001. Como corolario del teorema de uniformalización de Thurston se prueba la conjetura de Poincaré. Véase [5] para una buena introducción al tema.

Así que buscar representaciones en $PSL\,(2,\mathbb{C})$ y por tanto, subgrupos de este grupo, es un trabajo siempre muy importante. Ahora, para muchas 3-variedades, en particular los complementos de nudos, se probó que toda representación en $PSL\,(2,\mathbb{C})$ se puede levantar a una representación en $SL\,(2,\mathbb{C})$, y claramente, como $PSL\,(2,\mathbb{C}) \simeq SL\,(2,\mathbb{C})\,/\,\{I,-I\}$, entonces cualquier representación en $SL\,(2,\mathbb{C})$ induce una representación en $PSL\,(2,\mathbb{C})$. Como es mucho más natural trabajar en $SL\,(2,\mathbb{C})$, resulta que nos podemos concentrar en buscar representaciones en $SL\,(2,\mathbb{C})$ y ya para la interpretación geométrica, pasar al cociente.

El descubrimiento de la Geometría Hiperbólica es uno de los acontecimientos científicos más importantes de la época moderna y es uno de los casos de descubrimientos simultáneos de la matemática, el cual se dio por los matemáticos Juan Bolyai y Nicolás Lobachevsky en los años 1820. Luego de la aparición de ella, surgieron trabajos de distintos matemáticos como Poincaré, Picard, Bianchi, Klein, Killing, Hopf, Thurston, entre otros. Poincaré por ejemplo enunció el problema de hallar subgrupos propiamente discontinuos de isometrías directas de $\mathbb{H}^2$ y $\mathbb{H}^3$, es decir, subgrupos discretos de $PSL(2,\mathbb{R})$ y $PSL(2,\mathbb{C})$. Picard estudió el subgrupo $PSL(2,\mathbb{Z}[\sqrt{-1}])$ de $PSL(2,\mathbb{C})$, con $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ el anillo de enteros algebraicos del cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$. Demostró que actúa propia y discontinuamente en $\mathbb{H}^3$, o equivalentemente que es un subgrupo discreto de $PSL(2,\mathbb{C})$. Bianchi estudió el grupo $PSL(2,O_d)$, donde O_d es el anillo de enteros del campo cuadrático $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, d entero positivo. Lo hizo para muchos valores de d y, de hecho, descubrió el concepto de "Orbifold", sin definirlo específicamente. Descubrió que el número de terminales del "Orbifold", $\mathbb{H}^3/PSL(2,O_d)$, coincidía con el número de clases del anillo O_d.

La Geometría hiperbólica se hizo muy importante debido a su gran influencia en diversas ramas centrales de la matemática. Troels Jorgensen y William Thurston hicieron una gran innovación en la topología al descubrir que la geometría hiperbólica constituye una poderosa herramienta en el estudio de las 3-variedades y los nudos. Antíguos matemáticos como Picard, Bianchi y Gieseking construyeron ejemplos de variedades hiperbólicas. Pero fue R. Riley, [23], [21], [22] quien comenzó un estudio ordenado asombroso que dio lugar a darle estructura única de variedad riemanniana de curvatura constante -1, de volumen finito y completa en la 3-

variedad $S^3 - 5/3$, donde $5/3$ es el nudo del ocho, haciendo un gran aporte a la teoría de nudos.

Podemos ver entonces que, estudiar los grupos $SL(2,\mathbb{C})$ y $PSL(2,\mathbb{C})$ y subgrupos de éstos es muy importante, no solo por sus aspectos algebraicos, sino también en el marco de la Geometría Hiperbólica puesto que, como hemos mencionado, actúan sobre el plano hiperbólico como grupos de isometrías de éste. En particular, los subgrupos discretos, es decir subgrupos dotados de la topología discreta, de $PSL(2,\mathbb{R})$ y $PSL(2,\mathbb{C})$ resultan ser subgrupos propiamente discontinuos de isometrías directas del plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ y el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^3$. Entre los subgrupos discretos de $PSL(2,\mathbb{R})$ y $PSL(2,\mathbb{C})$ podemos encontrar el grupo clásico modular, los grupos clásicos de Hecke, el grupo $PSL(2,\mathbb{Z}[\sqrt{-1}])$, entre otros. En este trabajo definimos algunos de estos subgrupos y nos concentramos en un capítulo en estudiar los grupos clásicos de Hecke, los cuales corresponden a una generalización del grupo clásico modular. Los grupos clásicos de Hecke los definimos inicialmente desde el punto de vista de la Geometría Hiperbólica como *grupos triangulares*, luego como subgrupos discretos de $PSL(2,\mathbb{R})$ generados por las transformaciones

$$T(z) = \frac{-1}{z} \text{ y } W(z) = z + \lambda, \tag{2}$$

donde $\lambda = \lambda_q = 2\cos(\frac{\pi}{q})$, para $q \geq 3$, con q un número entero y vemos la relación entre estas definiciones. Para hacer el estudio geométrico de los grupos de Hecke vemos la necesidad de incluir en el trabajo dos apéndices, en los cuáles se dan a conocer definiciones, resultados y se fijan algunas notaciones necesarios para mayor claridad de lo trabajado en dicho estudio.

Pero es el estudio del Grupo Modular Parametrizado Π nuestro objetivo principal. Este grupo no es en sí mismo un subgrupo de $SL(2,\mathbb{C})$; sin embargo, al darle valores a la variable; t, sí obtenemos un subgrupo de $SL(2,\mathbb{C})$. De hecho para algunos valores de la variable t obtendremos subgrupos que al proyectarse en $PSL(2,\mathbb{C})$ resultan ser los grupos clásicos muy estudiados como los ya mencionados grupos de Hecke, grupo modular, grupos de Bianchi, entre otros, y que, como indicamos antes, tienen una estrecha relación con la Geometría Hiperbólica.

El trabajo consta de 3 capítulos y dos apéndices. En el primer capítulo tratamos las representaciones en $SL(2,\mathbb{C})$, las trabajamos en dos secciones. En la primera sección tratamos aspectos generales de la teoría de representaciones como las definiciones de representación de un grupo G en el grupo lineal general $GL(V)$, donde V es un espacio vectorial, representación fiel, representación irreducible y mostramos algunos ejemplos de representaciones. En la segunda sección introducimos algunas definiciones de subgrupos de $SL(2,\mathbb{C})$, cuyas proyecciones al grupo $PSL(2,\mathbb{C})$ resultan ser los grupos clásicos discretos como el grupo modular, los grupos de Bianchi y los grupos de Hecke; estudiamos otros subgrupos de $SL(2,\mathbb{C})$ como el grupo de Schild, los grupos $G(m)$ y $G(\alpha,\beta,\gamma)$ e introducimos la definición de otra familia de subgrupos de $SL(2,\mathbb{C})$ llamados grupos dos parabólicos, véase [28].

El segundo capítulo de este trabajo está dividido también en dos secciones, dedicadas completamente al estudio de los grupos clásicos de Hecke que, como hemos mencionado, los tratamos desde dos puntos de vista. En la primera sección damos una definición netamente geométrica: previamente definimos los conceptos de grupo de isometrías del plano hiperbólico del tipo (α,β,γ) y grupo triangular, para luego sí definir los grupos de Hecke como grupos triangulares con *signatura* $(0:2,q,\infty)$, donde $3 \leq q \leq \infty$. Terminamos la sección con un resultado, que probamos detalladamente, relacionado con la *signatura* de un *grupo fuchsiano* con *elementos parabólicos* y *dominio fundamental* con *h-área* menor que π. Los conceptos de signatura de un grupo, grupo fuchsiano, dominio fundamental, así como cada concepto y resultado de la Geometría Hiperbólica que necesitamos conocer en esta parte, lo podemos encontrar en los apéndices A y B. Para mayor información véase [4].

En la segunda sección trabajamos los grupos de Hecke como subgrupos discretos de $PSL(2,\mathbb{R})$ generados por las transformaciones de Möbius en (2), mostramos cómo podemos presentarlos, introducimos los grupos de Hecke extendidos y mostramos una presentación de ellos también.

En el último capítulo hablamos del grupo modular parametrizado Π. Este grupo fue introducido en [17], como generalización del grupo modular, grupos de Hecke y grupo 2-parabólico. En la primera sección introducimos su definición, mostramos dos formas equivalentes de escribir las palabras en él, la forma $W = B^e A^{j_n} V$ con $V = BA^{j_n}...A^{j_1}B^l$ y las formas $\pm T_n$, $\pm BT_n$, $\pm T_n B$, $\pm BT_n B$, donde $T_n = A^{k_n}B...A^{k_1}B$, que en esta sección también definimos. Probamos resultados relacionados a los polinomios que componen a las matrices T_n, mostramos que estas últimas formas son distintas y por último probamos que la forma inicial, $W = B^e A^{j_n} V$ con $V = BA^{j_n}...A^{j_1}B^l$, es única. En la segunda sección nos concentramos en estudiar los subgrupos $\Pi_0, \Pi_1, ..., \Pi_8$ de Π, que allí definimos, vemos que los subgrupos $\Pi_1, ..., \Pi_8$ son libres, de índice 4 y que los primeros 4 son normales y los siguientes son no normales. En la tercera y última sección mostramos una presentación del grupo Π_0, mostramos que Π_0 es equivalente a las intersecciones $\Pi_1 \cap \Pi_2$, $\Pi_2 \cap \Pi_3$, $\Pi_3 \cap \Pi_4$ y $\Pi_4 \cap \Pi_1$, mostramos unas presentaciones libres de los subgrupos $\Pi_1 \cap \Pi_3$ y $\Pi_2 \cap \Pi_4$ y por último probamos que los subgrupos $\Pi_1, ..., \Pi_4$ son los únicos subgrupos libres de Π de índice 4. Véase [20]

En la parte final del trabajo hacemos dos apéndices: apéndice A y apéndice B, que son realizados exclusivamente para facilitarle al lector el estudio de la primera sección del segundo capítulo del trabajo. En ésta parte se dan a conocer algunos conceptos y resultados importantes para comprender lo que se estudia en el cuerpo del presente trabajo y para fijar notaciones, lo cual se hace necesario debido a que en el trabajo se estudian temas de distintas áreas de la matemática, por lo cual se debe tener cuidado con las definiciones y notaciones que no son estándar en todos los contextos. Los lectores con suficiente conocimiento de Geometría Hiperbólica pueden hacer la lectura de esta parte sin remitirse a los apéndices. Para mayor información véase [4]. En el apéndice A tratamos las definiciones de plano hiperbólico y disco de Poincaré y enunciamos resultados relacionados con la relación del grupo $PSL(2,\mathbb{R})$ con estos dos modelos. En el apéndice B trabajamos en los grupos Fuchsianos y definimos los conceptos de región fundamental, tesela, teselación, región de Dirichlet, cúspides, terminaciones hiperbólicas, puntos cónicos, entre otros conceptos necesarios para definir por último el concepto de signatura de un grupo. Este es un concepto fundamental en la primera sección del capítulo 2.

Capítulo 1

Representaciones de Grupos en $SL(2,\mathbb{C})$

En este capítulo estudiamos algunos conceptos básicos de la teoría de representaciones en general, así como familias de subgrupos de $SL(2,\mathbb{C})$ y prporcionamos ejemplos importantes de representaciones de grupos de nudos en $SL(2,\mathbb{C})$. En la primera sección damos la definición de representación de grupos en el grupo de transformaciones lineales invertibles, $GL(V)$, la definición de representación irreducible y la definición de una representación fiel. Solo damos algunas definiciones y resultados básicos. Para las pruebas y mas información véase [29].

En la segunda sección, en primera instancia, introducimos la familia especial de subgrupos de $SL(2,\mathbb{C})$, generados por las matrices $A_t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, para cada $t \in \mathbb{C}$; luego continuamos con los subgrupos de $SL(2,\mathbb{C})$ pertenecientes a esta familia, que al proyectarse en $PSL(2,\mathbb{C})$, dan como resultados el grupo clásico modular, los grupos de Bianchi y los grupos clásicos de Hecke. Definimos el subgrupo de $SL(2,\mathbb{Z}[t])$, llamado el grupo dos parabólico, y mostramos la familia de subgrupos de $SL(2,\mathbb{C})$ a la que da lugar; introducimos los subgrupos $G(m)$ y $G(\alpha,\beta,\gamma)$ de $SL(2,\mathbb{C})$ y terminamos el capítulo mostrando ejemplos de representaciones en subgrupos de las familias anteriores, de grupos de nudos particulares. Nos limitamos a dar una definición de dichos subgrupos sin profundizar en el estudio de ellos, con excepción de los grupos de Hecke, los cuales estudiamos en el siguiente capítulo. En la tercera sección mostramos tres ejemplos de representación de grupos específicos en $SL(2,\mathbb{C})$. Estos grupos son grupos de nudos y el descubrimiento de estas representaciones por Riley jugó un papel central en la transformación del estudio de las 3-variedades en general y de los nudos en particular.

1.1 Conceptos básicos de las representaciones de grupos

Sea V un espacio vectorial. El conjunto $\mathrm{Hom}(V)$ es el conjunto de las transformaciones lineales $A : V \longrightarrow V$ y para cada par de espacios vectoriales V y W, $\mathrm{Hom}(V,W)$ es el espacio de transformaciones lineales de V en W. Denotamos por $\mathrm{GL}(V)$ al grupo lineal general, el cual es tal que $\mathrm{GL}(V) \subset \mathrm{Hom}(V)$ y está conformado por las transformaciones lineales de V en V que son invertibles.

Definición 1.1.1 *Una representación de grupo del grupo G es un homomorfismo ρ de G a $GL(V)$ para algún V. La dimensión de V es llamada el grado de la representación. Si ρ es* *inyectivo, decimos que la representación es fiel.*

En particular cuando hablamos de una representación de un grupo cualquiera G en $SL(2,\mathbb{C})$, nos referimos también a un homomorfismo, pero que va del grupo G en el grupo especial lineal, $SL(2,\mathbb{C})$.

Teorema 1.1.1 *Sea $U : G \longrightarrow GL(V)$ una representación del grupo finito G. Entonces V tiene un producto punto $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en el cual cada $U(g)$ es unitario, esto es,*

$$\langle U(g)v, U(g)w\rangle = \langle v, w\rangle$$

para todo v, $w \in V$ y $g \in G$.

Definición 1.1.2 *Sean U y V representaciones de un grupo G. Se define la suma directa de U y V, $U \oplus V$, como*

$$(U \oplus V)(g) = U(g) \oplus V(g),$$

la cual es también una representación, llamada la representación suma directa.

Definición 1.1.3 *Sea U una representación de G en V, con V un espacio de Hilbert. Un subespacio $W \subset V$ es llamado invariante si para todo $g \in G$ y $w \in W$, $U(g)w \in W$.*

Teorema 1.1.2 *Si W es un subespacio invariante, entonces el subespacio*

$$W^{\perp} = \{v \in V : \langle v, w\rangle = 0 \textit{ para todo } w \in W\}$$

también es un subespacio invariante.

Definición 1.1.4 *Una representación U de G en V es llamada irreducible si y sólo si los únicos subespacios invariantes de V son $\{0\}$ y V.*

Corolario 1.1.3 *U es irreducible si y sólo si no puede ser escrita como una suma directa de representaciones no triviales,(esto es, no cero dimensionales).*

Teorema 1.1.4 *Cualquier representación de un grupo finito G puede ser escrita como una suma directa de representaciones irreducibles.*

1.2 Subgrupos de $SL(2,\mathbb{C})$

En esta sección nos concentramos en subgrupos del grupo especial lineal $SL(2,\mathbb{C})$. En este punto vale la pena decir que todos los subgrupos de $SL(2,\mathbb{C})$ de los que hablamos inicialmente fueron trabajados como subgrupos de $PSL(2,\mathbb{C})$ sin embargo a veces se trabajan como subgrupos de $SL(2,\mathbb{C})$, lo cual puede llevar a confusiones. Debido a que existe un homomorfismo natural $\pi : SL(2,\mathbb{C}) \to PSL(2,\mathbb{C})$ con kernel de π el conjunto $\{I,-I\}$, entonces no hacemos distinción entre subgrupos de $SL(2,\mathbb{C})$ que contienen $\{I,-I\}$ y los correspondientes subgrupos de $PSL(2,\mathbb{C})$.

Las representaciones que surgen en Geometría Hiperbólica son las representaciones en $PSL(2,\mathbb{C})$. Debido a que el grupo $PSL(2,\mathbb{C})$ es el cociente $SL(2,\mathbb{C})/\{\pm I\}$, las grupos $PSL(2,\mathbb{C})$ y $SL(2,\mathbb{C})$ no difieren mucho, facilitando la posibilidad de pasar de representaciones en $SL(2,\mathbb{C})$ a representaciones en $PSL(2,\mathbb{C})$. Por esta razón nos concentramos en esta sección en subgrupos de $SL(2,\mathbb{C})$ y cuando necesitemos trabajar en $PSL(2,\mathbb{C})$ hacemos el cociente por $\{\pm I\}$, teniendo presente las consideraciones que esto requiera.

Sea t un número complejo fijo. El grupo generado por las matrices

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

es un subgrupo de $SL(2,\mathbb{C})$. Nótese que, para cada número complejo t obtenemos un subgrupo propio, $G(t)$, de $SL(2,\mathbb{C})$; por tanto, el conjunto $\{G(t) : t \in \mathbb{C}\}$ es una familia de subgrupos de $SL(2,\mathbb{C})$. Cuando $t = 1$ obtenemos el subgrupo de $SL(2,\mathbb{C})$ llamado grupo modular.
A continuación damos una definición precisa del grupo modular, de los grupos de Bianchi y de los grupos de Hecke, vistos como subgrupos de $SL(2,\mathbb{C})$.

Definición 1.2.1 *Definimos el grupo modular como el subgrupo de $SL(2,\mathbb{C})$ generado por las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.*

A continuación definimos los subgrupos de Bianchi. Para esta definición debemos tener en cuenta el anillo de enteros del campo cuadrático $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, donde d es un entero libre de cuadrado, O_d, el cual es el anillo conformado por los números de la forma $a + wb$, donde w está dado por

$$w = \begin{cases} \sqrt{-d} & \text{si } d \equiv 2,3 \pmod 4 \\ \frac{1+\sqrt{-d}}{2} & \text{si } d \equiv 1 \pmod 4 \end{cases}.$$

Así por ejemplo el anillo de enteros del campo cuadrático $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ es $O_1 = \left\{a + b\sqrt{-1} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$, anillo que es llamado el anillo de los enteros gaussianos.

Definición 1.2.2 *Sea $d \in \mathbb{N}$ un entero libre de cuadrado y sea O_d el anillo de enteros del campo cuadrático $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$. Se definen los grupos de Bianchi como los grupos $SL(2, O_d)$.*

Nótese que O_d es un subconjunto de $\mathbb{C}$, por tanto $SL(2, O_d)$ es un subgrupo de $SL(2,\mathbb{C})$.

El grupo de bianchi que se obtiene cuando $d = 1$, es llamado el grupo de Picard. Nótese que en este caso el anillo O_d es el de los enteros gaussianos. Véase [2].

Los grupos de Bianchi son especialmente importantes en la Geometría Hiperbólica. Estos actúan en el espacio hiperbólico como isometrías del plano que preservan la orientación y el cociente $\mathbb{H}^3/PSL(2, O_d)$ es lo que en geometría se conoce como 3- Orbifold que no es compacto pero tiene volumen finito. Estos grupos han sido muy estudiados y tienen gran cantidad de aplicaciones en geometría y topología (véase [1]). Es así como tener representaciones de grupos en los grupos de Bianchi cobra mucha importancia.

Definición 1.2.3 *El grupo generado por las matrices en* $SL(2, \mathbb{C})$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} (1-i)/2 & (1-i)/2 \\ -(1-i)/2 & (1-i)/2 \end{bmatrix}\ y\ A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -(1-i)/\sqrt{2} \\ (1+i)/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

es llamado el grupo de Schild y se denota por Σ.

Definición 1.2.4 *Los grupos generados por las matrices en* $SL(2, \mathbb{C})$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_q \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\ y\ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

donde $\lambda_q = 2cos(\frac{\pi}{q})$, *para* $q \geq 3$, *con* q *un número entero, son llamados los grupos de Hecke.*

Como hemos dicho trataremos los grupos clásicos de Hecke en el siguiente capítulo, los cuales se obtienen proyectando éstos en $PSL(2, \mathbb{C})$.

Definición 1.2.5 *Consideremos el anillo de polinomios* $\mathbb{Z}[t]$, *donde* t *es una variable. El grupo dos-parabólico es el subgrupo de* $SL(2, \mathbb{Z}[t])$ *generado por* $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}$ *y* $Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Nótese que por cada $x \in \mathbb{C}$ tenemos un subgrupo de $SL(2, \mathbb{C})$, por tanto podemos considerar la familia de subgrupos de $SL(2, \mathbb{C})$, $\{H_t : t \in \mathbb{C}\}$, donde $H_t = \langle X, Y \rangle$.

Definición 1.2.6 *Para* $m \in \mathbb{R}$, *sea* $K(m)$ *el subgrupo de* $SL(2, \mathbb{R})$ *(en consecuencia subgrupo de* $SL(2, \mathbb{C})$*) generado por las matrices*

$$\begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\ y\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix}.$$

Tenemos entonces otra familia de subgrupos de $SL(2, \mathbb{C})$, $\{K(m) : m \in \mathbb{R}\}$. Ésta familia ha sido muy estudiada por matemáticos como Sanov, quién en 1947 probó que $K(2)$ es libre (véase [27]), después Brenner mostró que $K(m)$ es libre para todo $m \in \mathbb{R}$ tal que $|m| \geq 2$, véase en [7].

Bachmuth y Mochizuki definieron otra familia de subgrupos de $SL(2, \mathbb{R})$, la cual introducimos a continuación. Se puede consultar más acerca de ella en [3].

Definición 1.2.7 *Se define el sugrupo $G(\alpha, \beta, \gamma)$ de $SL(2, \mathbb{R})$ generado por*

$$h_0 = \begin{bmatrix} 1+\alpha & -\alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix}, \; h_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; y \; h_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{bmatrix}$$

1.3 Ejemplos

En esta sección vamos a mostrar ejemplos de representaciones en $SL(2, \mathbb{C})$ de tres grupos específicos. Los tres grupos son ejemplos de grupos de nudos, es decir, cada uno de ellos es el grupo fundamental de la 3-variedad que se forma al tomar el complemento en $\mathbb{S}^3$ de una vecindad tubular de un nudo. En la Figura 1.1 mostramos un diagrama de los nudos que vamos a considerar.

a) Nudo 4_1 b) Nudo 5_2 c) Nudo 6_1

Figura 1.1

Para nuestro trabajo lo único que usamos es una presentación del grupo con dos generadores y una relación, y no tenemos en cuenta el origen del grupo ni su interpretación topológica. Pero para el desarrollo de la teoría de nudos estos ejemplos fueron definitivos, en especial el primero de ellos.

1.3.1 Representación del grupo del nudo 4_1

El grupo que se muestra en la Figura 1.1 a) es el nudo del ocho o nudo de Saboya, que se conoce en las tablas de nudos con el código 4_1 y también como el nudo racional $(5, 2)$. El grupo de este nudo admite la siguiente presentación

$$G = \left\langle a, b \mid bab^{-1}a^{-1}b = ab^{-1}a^{-1}ba \right\rangle.$$

Note que esta presentación tiene sólo dos generadores y una relación, que usualmente se escribe como $bw = wa$, donde w es la palabra $w = ab^{-1}a^{-1}b$. Este es uno de los grupos fundamentales de 3-variedades con una presentación más simple, así que fue al primero que Riley le estudio las representaciones $SL(2, \mathbb{C})$, véase [21].

Para definir una representación $\rho : G \to SL(2, \mathbb{C})$ se deben buscar matrices en $SL(2, \mathbb{C})$ que sean las imágenes de los generadores y mostrar que estas matrices satisfacen la relación del grupo. Denotemos

$$A = \rho(a) \qquad \text{y} \qquad B = \rho(b).$$

Lo que hizo Riley fue suponer que la representación fuera parabólica, es decir que las matrices A y B tuvieran traza 2. Por tanto, supuso que se podía tomar sin perdida de generalidad que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

para algún número complejo t. Y procedió a buscar un valor de t que permitiera que ρ así definido fuera representación.

Repitamos el proceso y busquemos t. Denotemos por W la palabra $\rho(w) = A \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot B$, entonces:

$$\begin{aligned} W &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} t+1 & t \\ t(t+1) - t & t^2 - t + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t+1 & t \\ t^2 & t^2 - t + 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Luego

$$B \cdot W = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t+1 & t \\ t^2 & t^2 - t + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 + t + 1 & t^2 + 1 \\ t^2 & t^2 - t + 1 \end{bmatrix}$$

y

$$W \cdot A = \begin{bmatrix} t+1 & t \\ t^2 & t^2 - t + 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 + t + 1 & t \\ t^3 + t & t^2 - t + 1 \end{bmatrix}$$

así que la igualdad $B \cdot W = W \cdot A$ nos lleva a la igualdad de matrices

$$\begin{bmatrix} t^2 + t + 1 & t^2 + 1 \\ t^2 & t^2 - t + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 + t + 1 & t \\ t^3 + t & t^2 - t + 1 \end{bmatrix}$$

que corresponde a un sistema de cuatro ecuaciones polinomiales en la variable t, que se reduce a dos ecuaciones

$$t^2 + 1 = t \qquad \text{y} \qquad t^2 = t^3 + t$$

pues las otras dos son triviales. Estas dos ecuaciones son la misma y conducen a que t cumpla

$$t^2 - t + 1 = 0$$

es decir, que si tomamos a t como una raíz cúbica primitiva de -1, entonces ρ es una representación. Así que tenemos que para

$$t=\frac{1}{2}i\sqrt{3}+\frac{1}{2} \quad \text{o} \quad t=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}$$

se tiene representación de G en $SL(2,\mathbb{C})$.

Si tomamos $t=\frac{1}{2}i\sqrt{3}+\frac{1}{2}$, se tiene la representación

$$\rho\left(a\right)=A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(i\sqrt{3}+1\right) & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho\left(b\right)=B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y se puede probar que es una representación fiel, es decir que ρ es un homomorfismo 1-1 y por tanto

$$G\simeq\langle A,B\rangle=\left\langle\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(i\sqrt{3}+1\right) & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\rangle. \tag{1.1}$$

Se puede probar que si se toma $t=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}$ se obtiene una representación equivalentes, es decir, la única representación parabólica del grupo G está dada por (1.1). Este grupo G está estrechamente relacionado con el grupo Π_1 que estudiaremos en el Capítulo 3, y es una de las motivaciones para definir el grupo modular parametrizado.

Los otros dos ejemplos que presentamos son de la misma familia, así que sólo mostraremos la presentación del grupo y el valor de t que permite encontrar una representación fiel.

1.3.2 Representación del grupo del nudo 5_2

El nudo 5_2 se ve en la Figura 1.1 b), se conoce también como el nudo racional $(7,3)$. Admite una presentación de la forma

$$G=\langle a,b\mid bw=wa\rangle$$

donde w es la palabra $w=aba^{-1}b^{-1}ab$.

Se plantea también que queremos una representación $\rho:G\to SL(2,\mathbb{C})$ donde

$$\rho\left(a\right)=A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \rho\left(b\right)=B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En este caso tenemos que

$$\begin{aligned} W &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} t^2-t+1 & t^2+1 \\ t\left(t^2+1\right) & t^3+t^2+2t+1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto

$$B\cdot W=\begin{bmatrix} t^3+t^2+1 & t^3+2t^2+2t+2 \\ t\left(t^2+1\right) & t^3+t^2+2t+1 \end{bmatrix}$$

y

$$W\cdot A=\begin{bmatrix} t^3+t^2+1 & t^2+1 \\ t\left(t^3+2t^2+2t+2\right) & t^3+t^2+2t+1 \end{bmatrix}$$

así que necesitamos t que cumpla

$$t^3+2t^2+2t+2=t^2+1$$

$$t^3+t^2+2t+1=0,$$

que tiene como solución $t=-0.215\,08-1.307\,1i,\ t=-0.215\,08+1.307\,1i, t=-0.569\,84$. Las dos primeras raíces dan lugar a representaciones equivalentes, que son fieles, y la última no se acostumbra tener en cuenta, pues llega a $SL(2,\mathbb{R})$, que no es lo que se busca en este caso.

1.3.3 Representación del grupo del nudo 6_1

El nudo 6_1 se ve en la Figura 1.1 c), se conoce también como el nudo racional $(9,5)$. Admite una presentación de la forma

$$G=\langle a,b \mid bw=wa\rangle$$

donde w es la palabra $w=ab^{-1}a^{-1}bab^{-1}a^{-1}b$.

Se busca una representación $\rho : G\to SL(2,\mathbb{C})$ donde

$$\rho\left(a\right)=A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \rho\left(b\right)=B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que conduce a

$$W=\begin{bmatrix} t^3+t^2+2t+1 & t^3+2t \\ t^4+2t^2 & t^4-t^3+3t^2-2t+1 \end{bmatrix}$$

Por tanto

$$B\cdot W=\begin{bmatrix} t^4+t^3+3t^2+2t+1 & t^4+3t^2+1 \\ t^4+2t^2 & t^4-t^3+3t^2-2t+1 \end{bmatrix}$$

y

$$W\cdot A=\begin{bmatrix} t^4+t^3+3t^2+2t+1 & t^3+2t \\ t^5+3t^3+t & t^4-t^3+3t^2-2t+1 \end{bmatrix}$$

así que necesitamos que t cumpla

$$t^4+3t^2+1=t^3+2t$$

o sea

$$t^4 - t^3 + 3t^2 - 2t + 1 = 0,$$

que tiene soluciones $t = 0.395\,12 + 0.506\,84i,\ t = 0.395\,12 - 0.506\,84i, t = 0.104\,88 - 1.\,552\,5i$, y $t = 0.104\,88 + 1.\,552\,5i$.

Capítulo 2

Grupos de Hecke

En éste capítulo estudiaremos los grupos clásicos de Hecke en el contexto de la geometría hiperbólica y desde el punto de vista algebraico. En la primera sección trabajamos la geometría de los grupos de Hecke. Para definirlos debemos previamente introducir los grupos de isometrías del plano de tipo $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ y los grupos triangulares, los conceptos referentes a la geometría hiperbólica necesarios aquí se darán en los apéndices de este trabajo. En la segunda sección nos concentramos en los grupos de Hecke vistos desde el ámbito del álgebra, mostramos una presentación de ellos, definimos los grupos de Hecke extendidos y también mostramos una presentación para estos.

2.1 Aspectos Geométricos de los Grupos de Hecke

En ésta sección definimos lo grupos de Heche teniendo en cuenta el concepto de signatura de un grupo Fuchsiano y se presenta un resultado importante sobre grupos no elementales. Debemos tener en cuenta que trabajaremos con isometrías del plano hiperbólico y por tanto cuando usemos la distancia ρ, nos referimos a la distancia hiperbólica, de la cuál hablamos en el apéndice A

Definición 2.1.1 *Un grupo G de isometrías del plano hiperbólico es llamado de tipo $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ si y sólo si G es generado por las reflexiones a través de los lados de algún triángulo con ángulos α, β y γ.*

Definición 2.1.2 *Un grupo G es un $(p,\ q,\ r)-$grupo triangular si y sólo si G es un grupo conforme de tipo $(\pi/p,\ \pi/q,\ \pi/r)$. Llamamos G un grupo triangular si éste es un $(p,\ q,\ r)-$grupo triangular para algunos enteros p, q y r.*

A continuación definimos los grupos de Hecke usando el concepto de signatura. Para más detalles de este concepto, véase apéndice A.

Definición 2.1.3 *Un grupo de Hecke es un grupo triangular con signatura $(0 : 2, q, \infty)$ para algún entero q satisfaciendo $3 \leq q \leq +\infty$*

Ejemplo: Sean

$$g(z) = -1/z, \qquad h(z) = z + \cos(\pi/q)$$

entonces $\langle g, h \rangle$ tiene signatura $(0 : 2, q, \infty)$. Como cualquiera dos grupos triangulares con la misma signatura son conjugados, vemos que cualquier grupo de Hecke es conjugado a $\langle g, h \rangle$.

Proposición 2.1.1 *Sea G un grupo fuchsiano con elementos parabólicos. Si G tiene un dominio fundamental con h-área menor que π, entonces G tiene una de las signaturas* $(0 : 2, q, \infty)$ *donde* $3 \leq q \leq +\infty$ *o* $(0 : 3, q, \infty)$ *con* $q = 3, 4$ *o* 5.

Prueba. Como el dominio fundamental tiene área finita , G no tiene terminaciones hiperbólicas, entonces G tiene signatura $(k : m_1, ..., m_n, \infty)$, el ∞ está presente ya que sabemos que G tiene elementos parabólicos. De la Sección 10.4 de [4] se deduce que

$$2\pi \left[2k - 2 + \sum_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{m_j} \right) + 1 \right] < \pi, \tag{2.1}$$

como $m_j \geq 2$, entonces $-\frac{2}{m_j} \geq -1$

$$\begin{aligned} 2\left[2k - 1 + \sum_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{m_j}\right)\right] &< 1 \Rightarrow 4k - 2 + 2\sum_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{m_j}\right) < 1 \Rightarrow \\ 4k - 2 + 2\sum_{j=1}^{n} 1 - 2\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{m_j} &< 1 \Rightarrow 4k - 2 + 2n + \sum_{j=1}^{n} -\frac{2}{m_j} < 1 \Rightarrow \\ 4k - 2 + 2n + \sum_{j=1}^{n} -1 &< 1 \Rightarrow 4k - 2 + 2n - n < 1 \Rightarrow 4k + n < 3, \end{aligned}$$

de donde se sigue que $k = 0$ y $n = 2$, reemplazando éstos valores en (2.1) tenemos que

$$\begin{aligned} 2\left[2(0) - 2 + \sum_{j=1}^{2}\left(1 - \frac{1}{m_j}\right) + 1\right] &< 1 \Rightarrow 2\left[\left(1 - \frac{1}{m_1}\right) + \left(1 - \frac{1}{m_2}\right) - 1\right] < 1 \\ &\Rightarrow 1 - \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} > \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

de donde se sigue que $\min\{m_1, m_2\} \leq 3$. ■

La prueba del siguiente teorema la haremos con todo detalle para mostrar el tipo de razonamiento que se utiliza, las otras pruebas se pueden consultar en [4]. En dicha prueba consideramos que u, v y w son puntos no colineales en el plano hiperbólico, α, β y γ los ángulos y a, b y c las longitudes de los lados del triángulo con vértices u, v y w. Los tres vértices del triángulo determinan un número positivo λ el cual es definido por

$$\begin{aligned} \lambda &= \operatorname{senh}(a)\operatorname{senh}(b)\operatorname{sen}(\gamma) \\ &= \operatorname{senh}(b)\operatorname{senh}(c)\operatorname{sen}(\alpha) \\ &= \operatorname{senh}(c)\operatorname{senh}(a)\operatorname{sen}(\beta). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Esta igualdad se da como consecuencia de la regla del seno. Tomamos el lado $[u, v]$ como la base del triángulo que está sobre la geodésica L_w, entonces la altura del triángulo es $\rho(w, L_w)$ donde

$$\operatorname{senh} \rho(w, L_w) = \operatorname{senh}(a)\operatorname{sen}(\beta).$$

Así podemos también escribir

$$\lambda = \operatorname{senh}(\text{base}) \times \operatorname{senh}(\text{altura}),$$

independientemente de cual lado sea la base.

Teorema 2.1.2 *Sean f, g y h elementos elípticos de orden 2 los cuales generan un grupo no elemental G, supongamos que u, v y w son, respectivamente, puntos fijos de f, g y h y sea λ como en (2.2).*
1) Si $\lambda > 1$ entonces G es discreto y tiene signatura $(0 : 2, 2, 2; 0; 1)$.
2) Si $\lambda = 1$ entonces G es discreto y tiene signatura $(0 : 2, 2, 2; 1; 0)$.
3) Si $\lambda < 1$ entonces G es discreto solo si λ es uno de los valores

$$cos(\frac{\pi}{q}),\ q \geq 3; \qquad cos(\frac{2\pi}{q}),\ q \geq 5; \qquad cos(\frac{3\pi}{q}),\ q \geq 7:$$

las posibles signaturas para G son

$$(0 : 2, 2, 2, q; 0; 0),\ (0 : 2, 3, q; 0; 0),\ (0 : 2, 4, q; 0; 0).$$

Prueba. Supongamos primero que $\lambda > 1$ entonces podemos construir el polígono

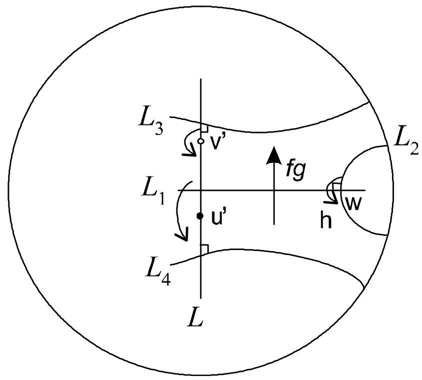

Figura 2.1

donde u' y v' son imágenes de u y v respectivamente bajo alguna potencia del elemento fg. En [4] podemos observar un resultado que afirma que una isometría g es hiperbólica si y sólo si puede ser representada como $g = \sigma_2\sigma_1$, donde σ_j es la reflexión en L_j. Teniendo en cuenta la figura anterior tenemos que

$$\sigma_1\sigma_2 = h, \qquad \sigma_1\sigma_3 = fg,$$

entonces fg satisface las condiciones antes mencionadas, por tanto este elemento es hiperbólico, con eje L. Nótese que de la prueba de [4, Th.11.5.1] tenemos que

$$\rho(L_1, L_3) = \rho(u, v) = \rho(L_1, L_4),$$

así

$$\rho(L_3, L_4) = 2\rho(u, v).$$

Ahora como

$$u' = (fg)^m(u) \text{ y } v' = (fg)^n(v), \text{ para algunos enteros } m \text{ y } n,$$

tenemos que,

$$(fg)^m f(fg)^{-m}(u') = (fg)^m f(u) = (fg)^m(u) = u'$$

y similarmente

$$(fg)^n g(fg)^{-n}(v') = v',$$

luego $(fg)^m f(fg)^{-m}$ y $(fg)^n g(fg)^{-n}$ fijan a u' y v' respectivamente.

Recíprocamente, si Γ y Φ fijan a u' y v', respectivamente, entonces $\Gamma = (fg)^m f(fg)^{-m}$ y $\Phi = (fg)^n g(fg)^{-n}$. En efecto, sabemos que $\Gamma \in G$, por lo tanto Γ se puede escribir como una palabra en f, g y h. Ahora, fh y gh se pueden escribir como la compuesta de reflexiones $\sigma_1\gamma\gamma\sigma_3$ y $\gamma\sigma_3\sigma_2\sigma_1$, respectivamente, siendo γ la reflexión en L, luego ni $fh\,(u')$ ni $gh\,(u')$ caen en L, es decir, no pueden fijar u', así que $\Gamma \in \langle f, g\rangle$. Entonces sólo se pueden dar los siguientes casos:

$$\begin{aligned} \text{i) } \Gamma &= (fg)^k \\ \text{ii) } \Gamma &= g\,(fg)^k\, f \\ \text{iii) } \Gamma &= (fg)^k\, f \\ \text{iv) } \Gamma &= g\,(fg)^k\,, \end{aligned}$$

para algún entero k.
Supongamos que se cumple iii), esto es, $\Gamma = (fg)^k\, f$, para algún entero k, entonces, dado que,

$$(fg)^m f(fg)^{-m} = (fg)^m f(gf)^m = (fg)^m fgfgf...gf = (fg)^m (fg)^m f = (fg)^{2m} f,$$

es decir, $(fg)^{2m} f$ fija a u', se sigue que

$$\begin{aligned} (fg)^k\, f\left(u'\right) &= (fg)^{2m} f(u') \Rightarrow f\left(u'\right) = (fg)^{2m-k} f(u') \Rightarrow \\ u' &= (gf)^{2m-k}\,(u'), \end{aligned}$$

luego u' es dejado fijo por $(gf)^{2m-k}$. Ahora:

$$u' = (fg)^{2m}\, f(u') = \underbrace{(fgfg...fgf)}_{k-1}\underbrace{(gfgf...gf)}_{2m-k}(u') = (fgfg...fgf)(u') = (fg)...f(u'),$$

entonces $u' = (fg)^t f(u')$, con $t = k - 1$. Repitiendo este proceso llegaríamos a que $u' = f(u')$, lo cual no es cierto. De donde se sigue que $\Gamma = (fg)^{2m}\, f$.

Ahora, supongamos que se cumple i), esto es, $\Gamma = (fg)^k$, como $u' = (fg)^m(u)$ siendo ésta la menor potencia en la que ocurre ésto, entonces

$$(fg)^k\,(u') = u' = (fg)^m(u) \Rightarrow u' = (fg)^{m-k}(u),$$

pero $m - k < m$ lo cual contradice la minimalidad de m. Así que Γ no puede ser ninguna potencia de fg.

Supongamos que se cumple ii), esto es, $\Gamma = g\,(fg)^k\, f$, entonces, como $(fg)^{2m}\, f(u') = u'$, tenemos que para $k + 1 \geq 2m$, entonces $k + 1 = 2m + s$ para cierto entero s y

$$
\begin{aligned}
g\,(fg)^k\,f(u') &= u' \Rightarrow (fg)^{k+1}\,f(u') = f(u') \Rightarrow \\
(fg)^s\,(fg)^{2m}\,f(u') &= f(u') \Rightarrow (fg)^s\,(u') = f(u') \Rightarrow \\
f\,(fg)^s\,(u') &= u',
\end{aligned}
$$

luego

$$
\begin{aligned}
f\,(fg)^s\,(u') &= (fg)^{2m}f(u') \Rightarrow (fg)^s\,(u') = (gf)^{2m}(u') \Rightarrow \\
(gf)^{-2m}\,(fg)^s\,(u') &= u' \Rightarrow (fg)^{2m+s}\,(u') = u' \Rightarrow \\
(fg)^{k+1}\,(u') &= u'
\end{aligned}
$$

pero ésto es una contradicción, ya que habíamos probado que ninguna potencia de fg fija a u'. Ahora, para $k+1 \leq 2m$, tenemos que $2m = k+t$, para cierto entero t, entonces

$$
(fg)^t\,(fg)^k\,f(u') = (fg)^t\,f(u') \Rightarrow u' = (fg)^t\,f(u'),
$$

pero de (i) tenemos de lo probado anteriormente que $t = 2m$ entonces $k = 0$, así $(gf)\,(u') = u'$, de donde se sigue que $(fg)^{-1}\,(u') = u'$, entonces u' es fijado por una potencia de fg, lo cual es una contradicción. Por tanto el caso ii) se descarta.

Por último si se cumple iv), esto es, si $\Gamma = g\,(fg)^k$, entonces

$$
\begin{aligned}
g\,(fg)^k\,(u') &= u' = (fg)^{2m}f(u') \Rightarrow \\
(fg)^k\,(u') &= g(fg)^{2m}f(u') \Rightarrow \\
(fg)^k\,(u') &= (gf)^{2m}(u') \Rightarrow \\
(fg)^{k+2m}\,(u') &= u',
\end{aligned}
$$

entonces u' es fijado por una potencia de fg lo cual es una contradicción. Entonces el caso iv) se descarta. Así que $\Gamma = (fg)^{2m}\,f = (fg)^m f(fg)^{-m}$. En forma análoga se prueba que $\Phi = (fg)^n g(fg)^{-n}$. Así que los elementos que fijan a u' y v' son $(fg)^m f(fg)^{-m}$ y $(fg)^n g(fg)^{-n}$ respectivamente.

Los mapeos que aparean los lados del polígono generan a G y por teorema de Poincaré [4, Th.9.8.4], el polígono es un dominio fundamental para G. En éste caso G contiene 3 clases maximales conjugadas de subgrupos cíclicos elípticos maximales, cada uno de orden 2. Ahora de acuerdo a la Figura 2.1 tenemos que al hacer la identificación sólo hay una vecindad tubular, esto es una terminación hiperbólica y que no hay puntos comunes en el infinito, es decir no hay cúspides, en consecuencia la signatura de G está dada por $(0 : 2, 2, 2; 0; 1)$, lo cual prueba (1).

Ahora haciendo una modificación se tiene (2) si $\lambda = 1$ teniendo en cuenta que $(L_2, L_3) = 1$, pero (L_2, L_3) =cosh$\rho(L_2, L_3)$ y en tal caso cosh$\rho(L_2, L_3) = 1$, de donde $\rho(L_2, L_3) = 0$ y así L_2 y L_3 son tangentes en un punto, o (L_2, L_3) =cosϕ donde L_2 y L_3 se encuentran formando un ángulo ϕ. Por tanto en cualquiera de éstos casos L_2 y L_3 son tangentes en el infinito e igualmente L_2 y L_4 son tangentes sobre el círculo en el infinito. Así que podemos representar esta situación en la Figura 2.2

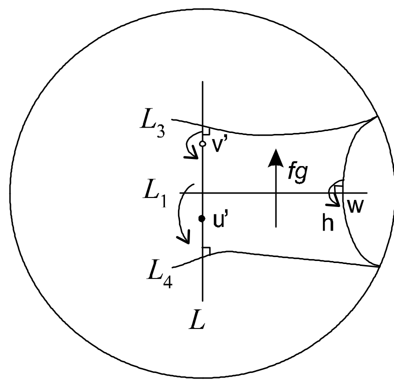

Figura 2.2

Al hacer la identificación dada, G contiene 3 clases maximales conjugadas de subgrupos cíclicos elípticos maximales, cada uno de orden 2, pero en éste caso no hay vecindades tubulares y sí un punto en común en el infinito, es decir, no hay terminaciones hiperbólicas y hay una cúspide, por lo tanto la signatura de G está dada por $(0 : 2, 2, 2; 1; 0)$

Por último, si $\lambda < 1$, L_2 se encuentra con L_3 y L_4 un ángulo θ y se considera entonces el siguiente polígono

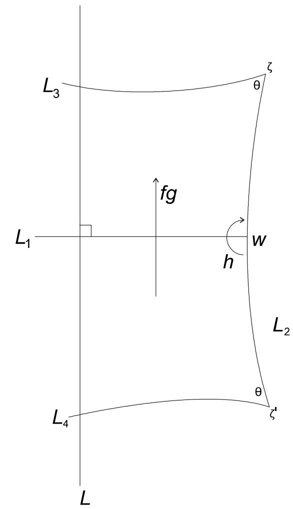

Figura 2.3

, claramente por lo antes dicho y teniendo en cuenta que el águlo en el que se intersectan los lados es θ, entonces $\lambda =$cosθ. Supongamos que G es discreto entonces de [4, Pag 303] tenemos que hgf (o hfg) satisface

$$hgf = (\sigma_2\sigma_1)(\sigma_1\sigma_3) = \sigma_2\sigma_3$$

y esto es la rotación del ángulo 2θ alrededor de ζ. Sea q el orden del elemento elíptico hgf, entonces $\cos(2q\theta) = 1$, de donde se sigue que $2q\theta = 2\pi p$ para algún entero positivo p, $(p, q) = 1$, así que $\theta = \frac{\pi p}{q}$ para algún entero p, $(p, q) = 1$. Si $p = 1$ obtenemos un polígono fundamental para G. Como observamos en la imagen anterior el polígono no tiene terninaciones en el infinito, así que no tiene ni terminaciones hiperbólicas ni cúspides, por tanto, la signatura de G es $(0 : 2, 2, 2, q; 0; 0)$. También tenemos que $\lambda =$cos$(\frac{\pi}{q})$. Si $q = 1$ o $q = 2$, entonces $\lambda = -1$ o $\lambda = 0$ lo cual no puede ser ya que $\lambda > 0$, así que $q \geq 3$. Ahora supongamos que $p \geq 2$. La G-imagen del cuadrilátero compacto cubre el plano hiperbólico (existe un número positivo r tal que cada punto del cuadrilátero yace en un disco de radio r cubierto por la G-imagen) así, suponiendo que G tiene signatura y considerando las áreas tenemos

$$2\pi \left[2k - 2 + \sum_{j=1}^{s} \left(1 - \frac{1}{m_j} \right) \right] \leq \pi - \frac{2\pi p}{q}.$$

De donde se sigue de [4, pág. 270] que $4k-4+s < 1$ y claramente tenemos que $0 < 2k-2+s$, así que, para que se cumplan simultáneamente éstas dos desigualdades se debe tener que $k = 0$ y $s = 3$ o $s = 4$. Supongamos que $s = 4$. Como G contiene un elemento de orden q, podemos asumir que q divide a m_4. Entonces como $p \geq 2$, $m_j \geq 2$ y $q \leq m_4$, tenemos

$$2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{m_4}\right] \leq 2\left[2 - \sum_{j=1}^{4}\left(1 - \frac{1}{m_j}\right)\right],$$

como $p \geq 2$ y $q \leq m_4$, entonces $\frac{2p}{q} \geq \frac{4}{q} \geq \frac{4}{m_4}$, de donde $1 - \frac{2p}{q} \leq 1 - \frac{4}{m_4}$, luego

$$2\left[2 - \sum_{j=1}^{4}\left(1 - \frac{1}{m_j}\right)\right] \leq 1 - \frac{2p}{q},$$

así

$$\begin{aligned} 2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{m_4}\right] &\leq 2\left[2 - \sum_{j=1}^{4}\left(1 - \frac{1}{m_j}\right)\right] \\ &\leq 1 - \frac{2p}{q} \leq 1 - \frac{4}{m_4}, \end{aligned}$$

de donde

$$1 - \frac{2}{m_4} \leq 1 - \frac{4}{m_4},$$

lo cuál es cierto sólo cuando $m_4 = \infty$ y entonces G contiene elementos parabólicos, sin embargo ésto no puede ser ya que el cuadrilátero es compacto y contiene puntos de todas las órbitas. Así $s = 3$ y G es un grupo triangular. Podemos entonces escribir la signatura de G como $(0 : l, m, n)$ donde q divide a n. Por [4, Th.9.8.6], existe un entero positivo N tal que el cuadrilátero contiene N imágenes de cada punto en el plano. Así, por consideración de áreas

$$2\pi N\left[1 - \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\right] = \pi - \frac{2\pi p}{q}.$$

Así $\theta = \frac{\pi p}{q}$ y como ζ y $\zeta^{\prime}$ están en la misma órbita encontramos por el Teorema 9.8.6 de [4] que $N \geq p$, así

$$\begin{aligned} 2p\left[1 - \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\right] &\leq 2N\left[1 - \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\right] \\ &= 1 - \frac{2p}{q}, \end{aligned}$$

como q divide a n, $q < n$, entonces

$$2p\left[1 - \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\right] \leq 1 - \frac{2p}{q} \leq 1 - \frac{2p}{n}, \tag{2.3}$$

entonces

$$\begin{aligned} 2p\left[1-\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\right] &\leq 1-\frac{2p}{n} \Longrightarrow 1-\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2p}-\frac{1}{n} \\ &\Longrightarrow 1-\frac{1}{l}-\frac{1}{m} \leq \frac{1}{2p} \Longrightarrow \frac{1}{l}+\frac{1}{m} \geq \frac{2p-1}{2p} \geq \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

esto último debido a que $p \geq 2$. Las soluciones de esta última desigualdad son

$$(l, m, p) = (2, 3, 4),\ (2, 3, 3),\ (2, 4, 2).$$

Si $(l, m, p) = (2, 4, 2)$, entonces toda las desigualdades en (2.3) se mantienen y dado que q divide a n, existe un entero positivo r tal que $n = rq$, entonces (2.3) implica

$$\begin{aligned} 2(2)\left[1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{rq}\right)\right] &\leq 1-\frac{2(2)}{q} \Longrightarrow \\ 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{rq} &\leq \frac{1}{4}-\frac{1}{q} \Longrightarrow \frac{1}{rq} \geq \frac{1}{q} \Longrightarrow \\ rq &\leq q, \end{aligned}$$

de donde se sigue que $r = 1$ y por tanto $q = n$; entonces en éste caso G tiene signatura $(0 : 2, 4, q)$, donde $q \geq 5$ y $\lambda = \cos(\frac{2\pi}{q})$.

Si $(l, m, p) = (2, 3, 3)$, entonces toda las desigualdades en (2.3) se mantienen nuevamente, así que similarmente se prueba que $q = n$, G tiene signatura $(0 : 2, 3, q)$ donde $q \geq 7$ y $\lambda = \cos(\frac{3\pi}{q})$.

Para el caso restante, a saber, $(l, m, p) = (2, 3, 2)$ necesitamos un argumento ligeramente diferente. Primero los puntos fijos elípticos u', v', w, ζ y ζ' están en más de dos órbitas (ninguno puede estar en la órbita de orden 3). Esto significa que $N \geq 3$ y usando las desigualdades en (2.3) tenemos

$$6\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{n}\right) \leq 1-\frac{4}{q},$$

así que $q = n$ (porque $\frac{n}{q}$ es un entero). Con lo cual se completa la demostración. ■

2.2 Aspectos Algebraicos de los Grupos De Hecke

Como vimos en el ejemplo de la sección anterior cualquier grupo de Hecke es conjugado a $\langle g, h\rangle$ donde $g(z) = -1/z$ y $h(z) = z + \cos(\pi/q)$, esto es, cualquier grupo de Hecke puede ser visto como el generado por g y h. A continuación daremos una definición de los grupos denotados por $H(\lambda)$, los cuales dependen de un parámetro λ y que serán equivalentes a los grupos de Hecke para $\lambda = \lambda_q = 2\cos(\frac{\pi}{q})$, para $q \geq 3$, con q un número entero, o $\lambda \geq 2$.

Definición 2.2.1 *Los grupos de Hecke $H(\lambda)$ son definidos como subgrupos discretos maximales* *de $PSL(2,\mathbb{R})$ generado por dos transformaciones lineales*

$$T(z) = \frac{-1}{z} \quad y\ W(z) = z + \lambda,$$

donde λ es un número real positivo fijo.

Sea $S = TW$, entonces

$$S(z) = T(W(z)) = T(z+\lambda) = \frac{-1}{z+\lambda}.$$

Por identificación de la transformación $\frac{az+b}{cz+d}$ con la matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $H(z)$ puede ser considerado como un grupo multiplicativo de matrices de orden 2. Nótese que T y S tienen representaciones matriciales

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

En [13] se muestra que $H(\lambda)$ es fuchsiano si y sólo si $\lambda = \lambda_q = 2\cos(\frac{\pi}{q})$, para $q \geq 3$, con q un número entero, o $\lambda \geq 2$.

Proposición 2.2.1 *Cualquier grupo de Hecke $H(\lambda_q)$ tiene una presentación*

$$H(\lambda_q) = \left\langle T, S : T^2 = S^q = I \right\rangle$$

y es isomorfo al producto libre de dos grupos cíclicos finitos.

Prueba. Véase [8]. ■

Algunos ejemplos particulares de grupos de Hecke son:

$H(\lambda_3) = \Gamma =$PSL$(2,\mathbb{Z})$, el cual es el *grupo modular*, $H(\lambda_4) = H(\sqrt{2})$, $H(\lambda_5) = H(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$, y $H(\lambda_6) = H(\sqrt{3})$.

Definición 2.2.2 *Los Grupos de Hecke extendidos $\overline{H}(\lambda_q)$ se definen como subgrupos discretos maximales de $PSL(2,\mathbb{R})$ generado por las transformaciones lineales*

$$T(z) = \frac{-1}{z},\ W(z) = z + \lambda \ y \ R(z) = \frac{1}{\bar{z}},$$

para $q \geq 3$ entero.

Proposición 2.2.2 *Cualquier grupo de Hecke extendido $\overline{H}(\lambda_q)$ tiene una presentación*

$$\overline{H}(\lambda_q) = \left\langle T, S, R : T^2 = S^q = R^2 = (RT)^2 = (RS)^2 = I \right\rangle.$$

Prueba. Véase en [25]. ■

Observación: Si tenemos que

$$R_1(z) = \frac{1}{z}, \quad R_2(z) = -\overline{z} \quad R_3(z) = -\overline{z} - \lambda_q,$$

donde $T = R_2R_1 = R_1R_2$ y $S = R_1R_3$, entonces obtenemos la presentación alternativa

$$\overline{H}(\lambda_q) = \left\langle R_1, R_2, R_3 : R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = (R_1R_2)^2 = (R_1R_3)^q = I \right\rangle.$$

Como hemos visto, los grupos clásicos de Hecke son una generalización del grupo modular clásico y muchos resultados concernientes al grupo modular se pueden extender a los grupos de Hecke (Ver [8] y [9]) y también existe mucha bibliografía de ellos debido a que, así como los grupos de Bianchi, vistos en el capítulo anterior, éstos son de gran importancia en la Geometría Hiperbólica por ser también subgrupos discretos de $PSL(2, \mathbb{C})$. Nuestro interés es generalizar estos grupos y, precisamente, una generalización de ellos es el grupo modular parametrizado Π, el cual estudiamos en el siguiente capítulo del trabajo.

Capítulo 3

Grupo Modular Parametrizado

En éste capítulo trabajamos con el subgrupo Π de $SL(2, \mathbb{Z}[t])$ generado por las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, donde $\mathbb{Z}[t]$ es el anillo de polinomios en la variable t. Para $\varsigma \in \mathbb{C}$, sea $\Pi(\varsigma)$ el subgrupo de $SL(2, \mathbb{C})$ obtenido por sustitución de t por el número ς. Así, para $\varsigma = 1$ tenemos el grupo $\Pi(1)$ que corresponde al grupo modular $SL(2, \mathbb{Z})$ que al proyectarse en $PSL(2, \mathbb{C})$ se obtiene el grupo clásico modular. El grupo Π es una generalización de los grupos de Hecke. Los grupos $\Pi(2\cos(\pi/q))$ $(q \geq 3)$ se convierten en los grupos clásicos de Hecke al ser proyectados en $PSL(2, \mathbb{C})$ y así a medida que variemos el valor de ς obtenemos subgrupos distintos de $SL(2, \mathbb{C})$, es por esto que el grupo Π es llamado *Grupo modular parametrizado.* En la primera sección de este capítulo hablamos de la forma de las palabras en Π, mostrando en primera instancia que cualquier palabra W de Π, $W \notin \{\pm I, \pm B\}$ tiene la forma $W = B^e A^{j_n} V$, con $V = B^e A^{j_n} ... A^{j_1} B^l$, donde $e \in \{0, 1\}$, $l \in \{0, 1, 2, 3\}$, $j_v \in \mathbb{Z}$ para todo $v = 1, ..., n$, y $j_n \neq 0$, luego definimos las matrices $T_n = A^{k_n} B ... A^{k_2} B A^{k_1} B$, observamos que las palabras en Π también se pueden escribir de una de las formas $\pm T_n$, $\pm B T_n$, $\pm T_n B$, $\pm B T_n B$, mostramos los polinomios que componen las entradas de las matrices T_n, probamos que las palabras $\pm T_n$, $\pm B T_n$, $\pm T_n B$, $\pm B T_n B$ son todas distintas entre sí y en la parte final de la sección mostramos la unicidad de la escritura de la palabras $W = B^e A^{j_n} V$, con $V = B^e A^{j_n} ... A^{j_1} B^l$. En la segunda sección definimos algunos subgrupos especiales de Π, que denotamos por $\Pi_0, \Pi_1, ..., \Pi_8$, probamos que los subgrupos $\Pi_1, ..., \Pi_4$ son normales en Π y libres de índice 4 y probamos que estos subgrupos tienen una presentación libre $\Pi_k = \langle AB^{k-1}, [A, B] \rangle$,con $k = 1, 2, 3, 4$ y donde $[A, B]$ es el conmutador de los elementos A y B de Π. Probamos que los grupos $\Pi_5, .., \Pi_8$, que denotaremos por Π_{j+4} con $j = 1, 2, 3, 4$ y que no son normales en Π, son libres y también de índice 4. Trabajamos en la tercera y última sección del capítulo en la intersección de los subgrupos Π_k $(k = 1, 2, 3, 4)$, probamos la equivalencia entre el grupo Π_0 y las intersecciones $\Pi_1 \cap \Pi_2$, $\Pi_2 \cap \Pi_3$, $\Pi_3 \cap \Pi_4$ y $\Pi_4 \cap \Pi_1$, probamos que los grupos $\Pi_1 \cap \Pi_3$ y $\Pi_2 \cap \Pi_4$ tienen presentaciones libres $\Pi_1 \cap \Pi_3 = \langle A^2, [A, B], [A^2, B] \rangle$ y $\Pi_2 \cap \Pi_4 = \langle A^2 B^2, [A, B], [A^2, B] \rangle$ y que Π_0 tiene índice 2en estos grupos, por último probamos que los subgrupos Π_i $(i = 1, 2, .., 8)$ son los únicos subgrupos libres de índice 4 de Π.

3.1 El Grupo Π

En esta sección estamos interesados en describir palabras en el grupo modular parametrizado Π. La forma de estas nos permitirá probar resultados interesantes sobre este grupo. Probamos que las palabras $W \in \Pi$, $W \notin \{\pm I, \pm B\}$, se pueden describir de la forma $W = B^e A^{j_n} V$, con $V = B^e A^{j_n} ... A^{j_1} B^l$, donde $e \in \{0, 1\}$, $l \in \{0, 1, 2, 3\}$, $j_v \in \mathbb{Z}$ y también tienen una de las formas $\pm T_n$, $\pm BT_n$, $\pm T_n B$, $\pm BT_n B$, donde $T_n = A^{k_n} B ... A^{k_2} B A^{k_1} B$. Estas maneras de escribir las palabras en Π son por supuesto equivalentes, sin embargo, la primera manera encapsula las palabras de Π en una sola forma, mientras que la segunda forma nos da varias maneras de escribir palabras de Π, por tanto sería más útil usar la primera forma para demostrar los resultados que veamos del grupo Π. En las secciones posteriores gran parte de las pruebas se hacen por inducción, lo cual es un motivo más para usar la primera forma de escribir las palabras en Π.

Definición 3.1.1 *Se define el subgrupo Π de $SL(2, \mathbb{Z}[t])$ como el subgrupo generado por las matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ y\ B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

grupo que, como dijimos antes, es llamado el Grupo modular parametrizado.

Nota: De aquí en adelante siempre que hablemos de los símbolos A y B nos estamos refiriendo a las matrices mencionadas en la anterior definición.
Notación: Para $W \in \Pi$, tenemos que

$$W = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}[t]$, $ad - bc = 1$. Si $\varsigma \in \mathbb{C}$ entonces $W(\varsigma)$ denota la matriz con elementos $a(\varsigma)$, $b(\varsigma)$, $c(\varsigma)$, $d(\varsigma)$, entonces $W(\varsigma) \in SL(2, \mathbb{C})$.

NOTA: En el siguiente lema mostraremos una forma de escribir todas las palabras en Π y más adelante mostraremos que esta forma es única. Como hemos anticipado, esta escritura y el hecho de ser única será de mucha ayuda para demostrar los resultados del grupo Π que requieran inducción.

Lema 3.1.1 *Todas las palabras $W \in \Pi$ con $W \notin \{\pm I, \pm B\}$ tienen la forma*

$$W = B^e A^{j_n} V \ \text{con}\ V = BA^{j_{n-1}} ... A^{j_1} B^l \qquad (n \in \mathbb{N}), \tag{3.2}$$

donde $e \in \{0, 1\}$, $l \in \{0, 1, 2, 3\}$, $j_v \in \mathbb{Z}$, y $j_n \neq 0$.

Prueba. Sea $W \in \Pi$ con $W \notin \{\pm I, \pm B\}$, como $\Pi = \langle A, B \rangle$, entonces cualquier palabra $W \in \Pi$ es de la forma

$$W = A^{k_1} B^{s_1} ... A^{k_m} B^{s_m},$$

con k_i y $s_p \in \mathbb{Z}$ para todo i, $p \in \{1, 2, ..., m\}$, pero se puede ver fácilmente que $B^4 = I$, $B^3 = -B$, $B^2 = -I$, así que

$$B^{s_i} = \begin{cases} I & \text{Si } s_i \equiv 0 \mod 4 \\ B & \text{Si } s_i \equiv 1 \mod 4 \\ -I & \text{Si } s_i \equiv 2 \mod 4 \\ -B & \text{Si } s_i \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$$

Luego podemos tomar $0 \leq s_i \leq 3$ ($s_i \in \mathbb{Z}$). Como $-I$ conmuta con cualquier elemento del grupo y $B^{s_i} = -B = -IB$, para $s_i = 3$ y $B^{s_i} = -I$, para $s_i = 2$, entonces podemos colocar las $-I$ al final de la palabra, nótese que, como las potencias de B que son I o $-I$ se colocan al final, entonces el número de ocurrencias de A disminuye, luego

$$W = A^{q_1} B A^{q_2} B ... A^{q_{r-1}} B A^{q_r} B^{s_r} (\pm I).$$

donde r es un natural menor que m y cada $q_i \in \mathbb{Z}$. Es claro que $B^{s_r}(\pm I) \in \{I, B, -I, B\}$, entonces $B^{s_r}(\pm I) = B^t$, con $t \in \{0, 1, 2, 3\}$. Además, como $W \neq \pm I, \pm B$, existe q_i, con $i \in \{1, 2, ..., r\}$ tal que $q_i \neq 0$ y $q_1 = q_2 = ... = q_{i-1} = 0$, entonces

$$\begin{aligned} W &= A^{q_1} B ... B A^{q_{i-1}} B A^{q_i} ... B A^{q_r} B^t = B^{r-1} A^{q_i} B A^{q_{i+1}} ... B A^{q_r} B^t \\ &= B^e A^{q_i} B A^{q_{i+1}} ... B A^{q_r} B^t (\pm I) = B^e A^{q_i} B A^{q_{i+1}} ... B A^{q_r} B^l, \end{aligned}$$

donde $e \in \{0, 1\}$, $l \in \{0, 1, 2, 3\}$, $q_t \in \mathbb{Z}$ para $t \in \{i, i+1, .., r\}$, y $j_n \neq 0$, renombrando las potencias de A en W, $A^{q_i} = A^{j_n}, A^{q_{i+1}} = A^{j_{n-1}}, ..., A^{q_r} = A^{j_1}$, donde $n = r - i + 1$, tenemos que $W = B^e A^{j_n} B A^{j_{n-1}} ... B A^{j_1} B^l$, así

$$W = B^e A^{j_n} V \text{ con } V = B A^{j_{n-1}} ... A^{j_1} B^l \quad (n \in \mathbb{N}),$$

donde $e \in \{0, 1\}$, $l \in \{0, 1, 2, 3\}$, $j_v \in \mathbb{Z}$ para todo $v = 1, 2, ..., n$, y $j_n \neq 0$. ■

A continuación mostramos cómo son las potencias de la matriz A de la que se habla en la definición del grupo Π. La prueba es una consecuencia directa de inducción matemática, por tanto la omitiremos.

Proposición 3.1.2

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & kt \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A^k B = \begin{bmatrix} kt & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Definición 3.1.2 *Sea $\mathcal{K}$ la colección de todas las sucesiones $v = (k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $k_n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Definimos $T_0 = 0$ y*

$$T_n = T_n(v) = A^{k_n}B...A^{k_2}BA^{k_1}B \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{3.4}$$

Por abuso de notación usualmente escribimos T_n en lugar de $T_n(v)$.

Observación: Como $-I$ conmuta con todas las matrices vemos que Π consiste de $\pm I$, $\pm B$ y

$$\pm T_n,\ \pm BT_n,\ \pm T_nB,\ \pm BT_nB, \tag{3.5}$$

Proposición 3.1.3 *Sea $v = (k_n) \in \mathcal{K}$ y sean $\alpha_n = \alpha_n(v)$ y $\beta_n = \beta_n(v)$ definidas recursivamente por:*

$$\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = k_1t,\ \alpha_{n+1} = k_{n+1}t\alpha_n - \alpha_{n-1} \tag{3.6}$$

$$\beta_0 = 0,\ \beta_1 = -1,\ \beta_{n+1} = k_{n+1}t\beta_n - \beta_{n-1} \tag{3.7}$$

para $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$T_n = \begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{3.8}$$

Prueba. Hagamos la prueba por inducción. Tenemos que $T_1 = A^{k_1}B = \begin{bmatrix} 1 & k_1t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, de donde

$$T_1 = \begin{bmatrix} k_1t & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_0 & \beta_0 \end{bmatrix},$$

entonces para $n = 1$ se cumple la conclusión. Supongamos que(3.8) se cumple para $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= A^{k_{n+1}}BA^{k_n}B...A^{k_2}BA^{k_1}B = A^{k_{n+1}}BT_n \\ &= \begin{bmatrix} 1 & k_{n+1}t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} k_{n+1}t\alpha_n - \alpha_{n-1} & k_{n+1}t\beta_n - \beta_{n-1} \\ \alpha_n & \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} \\ \alpha_n & \beta_n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

así (3.8) se cumple para $n + 1 \in \mathbb{N}$. Quedando así probada (3.8) para toda $n \in \mathbb{N}$. ∎

Lema 3.1.4 *Si se tienen las hipótesis de la anterior proposición, entonces*

$$\begin{aligned} \alpha_n &= k_n...k_2k_1t^n + \sum_{i<n} a_it^i \\ \beta_n &= -k_n...k_2t^{n-1} + \sum_{j<n-1} b_jt^j, \end{aligned} \tag{3.9}$$

con $a_i, b_j \in \mathbb{Z}$ *(*$0 \leq i < n, 0 \leq j < n-1$*), donde* $a_0 = (-1)^{n/2}, b_0 = 0$ *si* n *es par y* $a_0 = 0, b_0 = (-1)^{(n-1)/2}$ *si* n *es impar.*

Prueba. Hagamos la prueba de la primera fórmula en (3.9) por inducción.

$$\alpha_1 = k_1 t = k_1 t^1 + \sum_{i<1} a_i t^i,$$

con $a_0 = 0$. Luego para $n = 1$ se satisface dicha fórmula. Supongamos que se cumple para cada $1 \leq k < n+1$, k y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1} &= k_{n+1} t \alpha_n - \alpha_{n-1} \\
&= k_{n+1} t (k_n ... k_2 k_1 t^n + \sum_{i<n} a_i t^i) - (k_{n-1} ... k_2 k_1 t^{n-1} + \sum_{j<n-1} c_j t^j) \\
&= k_{n+1} k_n ... k_2 k_1 t^{n+1} + k_{n+1} t \sum_{i<n} a_i t^i - k_{n-1} ... k_2 k_1 t^{n-1} - \sum_{j<n-1} c_j t^j,
\end{aligned}$$

de donde

$$\alpha_{n+1} = k_{n+1} k_n ... k_2 k_1 t^{n+1} + k_{n+1} a_0 t + ... + k_{n+1} a_{n-1} t^n - k_{n-1} ... k_2 k_1 t^{n-1} - c_0 - c_1 t - ... - c_{n-2} t^{n-2},$$

entonces $\alpha_{n+1} = k_{n+1} k_n ... k_2 k_1 t^{n+1} - c_0 + (k_{n+1} a_0 - c_1) t + ... + (k_{n+1} a_{n-3} - c_{n-2}) t^{n-2} + (k_{n+1} a_{n-2} - k_{n-1} ... k_2 k_1) t^{n-1} + k_{n+1} a_{n-1} t^n$, con $c_j \in \mathbb{Z}$ para cada $0 \leq j < n-1$, si n es par, entonces $a_0 = (-1)^{n/2}$ y $c_0 = 0$ Se sigue que

$$\alpha_{n+1} = k_{n+1} k_n ... k_2 k_1 t^{n+1} + \sum_{i<n+1} d_i t^i,$$

con $d_0 = -c_0 = 0, d_1 = k_{n+1} a_0 - c_1, ..., d_{n-2} = k_{n+1} a_{n-3} - c_{n-2}, d_{n-1} = k_{n+1} a_{n-2}$ y $d_n = k_{n+1} a_{n-1}$. Ahora si n es impar, entonces $a_0 = 0$ y $c_0 = (-1)^{(n-1)/2}$, de donde se tiene que $-c_0 = (-1)^{(n+1)/2}$, entonces

$$\alpha_{n+1} = k_{n+1} k_n ... k_2 k_1 t^{n+1} + \sum_{i<n+1} d_i t^i,$$

con $d_0 = -c_0 = (-1)^{(n+1)/2}, d_1 = k_{n+1} a_0 - c_1, ..., d_{n-2} = k_{n+1} a_{n-3} - c_{n-2}, d_{n-1} = k_{n+1} a_{n-2}$ y $d_n = k_{n+1} a_{n-1}$. Así la fórmula se cumple para $k = n+1$. La segunda fórmula en (3.9) se prueba en forma análoga. ■

Corolario 3.1.5 *Con las hipótesis de la proposición anterior tenemos que* t *divide a* α_{2m-1} *y* t *divide a* β_{2m} *para todo* $m \in \mathbb{N}$.

Prueba. Tenemos que $\alpha_1 = k_1 t$, entonces t divide a α_1. Supongamos que t divide a α_{2n-1}. Como

$$\alpha_{2n+1} = k_{2n+1} t \alpha_{2n} - \alpha_{2n-1}$$

y dado que t divide a α_{2n-1}, entonces t divide a α_{2n}, así t divide a α_{2m-1} para todo $m \in \mathbb{N}$. En forma análoga se prueba que t divide a β_{2m} para todo $m \in \mathbb{N}$. ■

Lema 3.1.6 *Sean $v, u \in \mathcal{K}$, $v = (k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u = (l_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $T_n = T_n(v)$ y $U_m = T_m(u)$. Entonces $T_n = U_m$ para algunos $n, m \in \mathbb{Z}$ si y sólo si $n = m$ y $k_i = l_i$ para todo $1 \leq i \leq m$.*

Prueba. Claramente si para algunos $n, m \in \mathbb{N}$, se tiene que $n = m$ y $k_i = l_i$ para todo $1 \leq i \leq m$, entonces $T_n = U_m$. Supongamos que $T_n = U_m$ para algunos $n, m \in \mathbb{N}$, como

$$\begin{aligned} T_n &= A^{k_n} B A^{k_{n-1}} B \ldots A^{k_1} B = \begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \end{bmatrix} \text{ y} \\ U_m &= A^{l_n} B A^{l_{n-1}} B \ldots A^{l_1} B = \begin{bmatrix} \alpha^*_m & \beta^*_m \\ \alpha^*_{m-1} & \beta^*_{m-1} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

entonces $\alpha_n = \alpha^*_m$ pero por lema anterior $n =$deg(α_n) y $m =$deg(α^*_m), entonces $n = m$. Además del lema 3.1.4.también tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha_n &= k_n \ldots k_2 k_1 t^n + \sum_{i<n} a_i t^i \text{ y} \\ \alpha^*_m &= l_m \ldots l_2 l_1 t^m + \sum_{j<m} c_j t^j, \end{aligned}$$

con $a_i, c_j \in \mathbb{Z}$ $(0 \leq i < n, 0 \leq j < m)$ entonces

$$k_m \ldots k_2 k_1 = l_m \ldots l_2 l_1 \qquad \text{y} \qquad k_{m-1} \ldots k_2 k_1 = l_{m-1} \ldots l_2 l_1,$$

entonces

$$k_n = k_m = l_m,$$

luego

$$A^{l_m} B U_{m-1} = U_m = T_n = A^{k_n} B A^{k_{n-1}} B \ldots A^{k_1} B = A^{k_n} B T_{n-1} = A^{l_m} B T_{n-1},$$

entonces

$$U_{m-1} = T_{n-1},$$

de donde se sigue que $k_{n-1} = l_{m-1}$ y repitiendo éste proceso $m-$veces tenemos que $k_i = l_i$ para todo $1 \leq i \leq m$. ■

Lema 3.1.7 *Las palabras $\pm T_n$, $\pm BT_n$, $\pm BT_n B$ y $\pm T_n B$ son distintas.*

Prueba. Sabemos del lema 3.1.6 que las palabras de la forma T_n son distintas entre sí. Entonces claramente las palabras de la forma $-T_n$ son distintas entre sí. Sean $v, u \in \mathcal{K}$, $v = (k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u = (l_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $T_n = T_n(v)$ y $U_m = T_m(u)$. Tenemos por proposición 3.1.3

$$T_n = \begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \end{bmatrix} \ (n \in \mathbb{N}) \text{ y } T_m = \begin{bmatrix} \alpha_m^* & \beta_m^* \\ \alpha_{m-1}^* & \beta_{m-1}^* \end{bmatrix} \ (m \in \mathbb{N}),$$

entonces

$$-T_m = \begin{bmatrix} -\alpha_m^* & -\beta_m^* \\ -\alpha_{m-1}^* & -\beta_{m-1}^* \end{bmatrix} \ (m \in \mathbb{N}),$$

luego si $T_n = -T_m$ para algunos $n, m \in \mathbb{Z}$ entonces se sigue que $n = m$ y $k_n = k_m = l_m$, entonces

$$-A^{l_m} B T_{m-1} = -T_m = T_n = A^{k_n} B A^{k_{n-1}} B \ldots A^{k_1} B = A^{k_n} B T_{n-1} = A^{l_m} B T_{n-1},$$

de donde se tiene que

$$T_{n-1} = -T_{m-1},$$

se sigue que $k_{n-1} = l_{m-1}$ y repitiendo éste proceso $m-$veces tenemos que $k_i = l_i$ para todo $1 \leq i \leq m$. Entonces $T_n = -T_n$, de donde se sigue que $\alpha_n = -\alpha_n$, $\beta_n = -\beta_n$, $\alpha_{n-1} = -\alpha_{n-1}$ y $\beta_{n-1} = -\beta_{n-1}$, entonces $\alpha_n = 0$, $\alpha_{n-1} = 0$, $\beta_n = 0$ y $\beta_{n-1} = 0$, luego

$$T_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

lo cual no puede darse. Así que las palabras de la forma T_n son distintas a las palabras de la forma $-T_m$, es decir

$$T_n \neq -T_m \text{ para cualquier par } n, m \in \mathbb{Z} \tag{3.10}$$

Ahora tenemos que si $BT_n = BT_m$ para algunos $n, m \in \mathbb{Z}$, entonces $T_n = T_m$ para algunos $n, m \in \mathbb{Z}$, entonces $n = m$ y $k_i = l_i$ para todo $1 \leq i \leq m$, por tanto, las palabras de la forma BT_n son distintas entre sí. Análogamente se prueba que las palabras de la forma BT_nB son distintas entre sí, al igual que las palabras de la forma T_nB. Por último notemos que

$$\begin{aligned} BT_n &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_{n-1} & -\beta_{n-1} \\ \alpha_n & \beta_n \end{bmatrix} \\ BT_nB &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_{n-1} & -\beta_{n-1} \\ \alpha_n & \beta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \\ \beta_n & -\alpha_n \end{bmatrix} \\ T_nB &= \begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_n & -\alpha_n \\ \beta_{n-1} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

entonces: Si $T_n = BT_m$ para algunos $n, m \in \mathbb{Z}$, tenemos que $\begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha^*_{m-1} & -\beta^*_{m-1} \\ \alpha^*_m & \beta^*_m \end{bmatrix}$, entonces $n = m-1$ y $n-1 = m$, entonces $n = m-1$ y $n = m+1$, lo cual es absurdo.

Si $T_n = BT_mB$ para algunos $n, m \in \mathbb{Z}$, tenemos que $\begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta^*_{m-1} & \alpha^*_{m-1} \\ \beta^*_m & -\alpha^*_m \end{bmatrix}$, entonces $n = m-2$ y $n-1 = m-1$, entonces $n = m-2$ y $n = m$, lo cual es absurdo.

Si $T_n = T_mB$ para algunos $n, m \in \mathbb{Z}$, tenemos que $\begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta^*_m & -\alpha^*_m \\ \beta^*_{m-1} & -\alpha^*_{m-1} \end{bmatrix}$, entonces $n = m-1$ y $n-1 = m$, entonces $n = m-1$ y $n = m+1$, lo cual es absurdo.

Si $BT_n = BT_mB$ para algunos $n, m \in \mathbb{Z}$, tenemos que $\begin{bmatrix} -\alpha_{n-1} & -\beta_{n-1} \\ \alpha_n & \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta^*_{m-1} & \alpha^*_{m-1} \\ \beta^*_m & -\alpha^*_m \end{bmatrix}$, entonces $n-1 = m-2$ y $n-2 = m-1$, entonces $n = m-1$ y $n = m+1$, lo cual es absurdo.

Si $BT_n = T_mB$ para algunos $n, m \in \mathbb{Z}$, tenemos que $\begin{bmatrix} -\alpha_{n-1} & -\beta_{n-1} \\ \alpha_n & \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta^*_m & -\alpha^*_m \\ \beta^*_{m-1} & -\alpha^*_{m-1} \end{bmatrix}$, entonces $n-1 = m-1$ y $n-2 = m$, entonces $n = m$ y $n = m+2$, lo cual es absurdo.

Si $BT_nB = T_mB$ para algunos $n, m \in \mathbb{Z}$, tenemos que $\begin{bmatrix} -\beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \\ \beta_n & -\alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta^*_m & -\alpha^*_m \\ \beta^*_{m-1} & -\alpha^*_{m-1} \end{bmatrix}$, entonces $n-2 = m-1$ y $n-1 = m-2$, entonces $n = m+1$ y $n = m-1$, lo cual es absurdo. Por tanto las palabras V_n, BV_n, BV_nB y V_nB son distintas. De igual manera como se probó (3.10) se prueba que las palabras BT_n, BT_nB y T_nB son distintas respectivamente a $-BV_n$, $-BV_nB$ y $-V_nB$ y como los polinomios que componen éstas matrices son respectivamente del mismo grado de los polinomios que componen las entradas de las matrices BT_n, BT_nB y T_nB entonces las palabras $\pm T_n$, $\pm BT_n$, $\pm BT_nB$ y $\pm T_nB$ son distintas. ■

Corolario 3.1.8 *La escritura de las palabras en (3.2) es única.*

Prueba. Sea $W \in \Pi$, con $W \neq \pm I, \pm B$, digamos que $W = B^e A^{j_n} V$ con $V = BA^{j_{n-1}} ... A^{j_1} B^l$ $(n \in \mathbb{N})$, $e \in \{0,1\}$ y $l \in \{0,1,2,3\}$ entonces $W = B^e A^{j_n} BA^{j_{n-1}} ... A^{j_1} BB^{l-1} = B^e T_n(J) B^{l-1}$, con $J = (j_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $e \in \{0,1\}$ y $l-1 \in \{-1,0,1,2\}$. Como $B^{-1} = -B$, $B^0 = I$, $B^1 = B$ y $B^2 = -I$, tenemos que $W = \pm T_n$ ó $\pm T_nB$ ó $\pm BT_n$ ó $\pm BT_nB$ y, dado que todas estas palabras son distintas por Lema 3.1.7 entonces se sigue que la escritura $B^e A^{j_n} V$ con $V = BA^{j_{n-1}} ... A^{j_1} B^l$ $(n \in \mathbb{N})$, $e \in \{0,1\}$ y $l \in \{0,1,2,3\}$ para W es única. ■

3.2 Los Subgrupos $\Pi_1, ..., \Pi_8$

En esta sección nos concentramos en estudiar subgrupos del grupo Π, específicamente subgrupos libres y de índice 4 y mostramos presentaciones libres de estos subgrupos

Definición 3.2.1 *Para una palabra $W \in \Pi$ definimos $\tau(W)$ como el número de B en la representación (3.2). Como $B^4 = I$, $B^2 = -I$, consideramos $\tau(W)$ módulo 4. Definimos también*

$\sigma(W)$ *como el número de* A *en la representación (3.2) dicho número puede ser cualquier número entero.*

Observación: Las funciones $\tau : \Pi \to \mathbb{Z}_4$ y $\sigma : \Pi \to \mathbb{Z}$ son homomorfismos de grupos.

Definición 3.2.2 *Definimos los subgrupos* Π_k *de* Π *por*

$$\Pi_k = \{W \in \Pi : \tau(W) \equiv (k-1)\sigma(W) \quad mod\ 4\} \quad (k = 1, 2, 3, 4). \tag{3.11}$$

y el subgrupo Π_0 *de* Π *por*

$$\Pi_0 = \{W \in \Pi : \sigma(W) \equiv \tau(W) \equiv 0 \quad mod\ 4\} \tag{3.12}$$

En el siguiente lema mostramos otra forma de escribir las presentaciones $\Gamma_k = \left\langle AB^{k-1}, [A, B] \right\rangle$ $(k = 1, 2, 3, 4)$, lo cual usaremos en la prueba del teorema siguiente.

Lema 3.2.1 *Sea* $\Gamma_k = \left\langle AB^{k-1}, [A, B] \right\rangle$ $(k = 1, 2, 3, 4)$*, entonces*

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \left\langle A, BAB^{-1} \right\rangle \\
\Gamma_2 &= \langle AB, BA \rangle \\
\Gamma_3 &= \left\langle -A, -BAB^{-1} \right\rangle \\
\Gamma_4 &= \langle -AB, -BA \rangle .
\end{aligned}$$

Prueba. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \left\langle AB^{1-1}, [A, B] \right\rangle = \left\langle A, A(BA^{-1}B^{-1}) \right\rangle \\
&= \left\langle A, A(BAB^{-1})^{-1} \right\rangle = \left\langle A, BAB^{-1} \right\rangle ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_2 &= \left\langle AB^{2-1}, [A, B] \right\rangle = \left\langle AB, ABA^{-1}B^{-1} \right\rangle \\
&= \left\langle AB, AB(BA)^{-1} \right\rangle = \langle AB, BA \rangle ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_3 &= \left\langle AB^{3-1}, [A, B] \right\rangle = \left\langle -A, ABA^{-1}B^{-1} \right\rangle \\
&= \left\langle -A, -A(-BA^{-1}(-B)) \right\rangle = \left\langle -A, -A(-BAB^{-1})^{-1} \right\rangle \\
&= \left\langle -A, -BAB^{-1} \right\rangle
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\Gamma_4 &= \left\langle AB^{4-1}, [A,B] \right\rangle = \left\langle -AB, ABA^{-1}B^{-1} \right\rangle = \left\langle -AB, -AB(-BA)^{-1} \right\rangle \\ &= \langle -AB, -BA \rangle .\end{aligned}$$

■

Teorema 3.2.2 *Sea $k = 1, 2, 3, 4$. El grupo Π_k es un subgrupo normal libre de índice 4 en* Π *con la presentación libre*

$$\Pi_k = \left\langle AB^{k-1}, [A,B] \right\rangle = \Gamma_k \tag{3.13}$$

Prueba. a) Definimos para $k = 1, 2, 3, 4$ $\tau_k : \Pi \to \mathbb{Z}_4$ por: Para cada $W \in \Pi$

$$\tau_k(W) = \tau(W) - (k-1)\sigma(W) \bmod 4,$$

τ_k es homomorfismo, en efecto: Sean V y $W \in \Pi$, entonces

$$\tau_k(VW) = \tau(VW) - (k-1)\sigma(VW) \bmod 4,$$

como τ y σ son homomorfismos entonces

$$\begin{aligned}\tau_k(VW) &= \tau(V) + \tau(W) - (k-1)(\sigma(V) + \sigma(W)) \bmod 4 \\ &= \tau(V) - (k-1)\sigma(V) + \tau(W) - (k-1)\sigma(W) \bmod 4 \\ &= \tau_k(V) + \tau_k(W) \bmod 4\end{aligned}$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(\tau_k) &= \{W \in \Pi : \tau_k(W) = 0 \bmod 4\} \\ &= \{W \in \Pi : \tau(W) - (k-1)\sigma(W) = 0 \bmod 4\} \\ &= \{W \in \Pi : \tau(W) \equiv (k-1)\sigma(W) \bmod 4\} \\ &= \Pi_k.\end{aligned}$$

Lo cual prueba que $\Pi_k \lhd \Pi$. Por otro lado, afirmamos que

$$\Pi_k B^j = \{W \in \Pi : \tau(W) \equiv (k-1)\sigma(W) + j \mod 4\} \quad (j = 0, 1, 2, 3),$$

que éstos son clases laterales distintas y que la unión de ellos es Π. En efecto: Primero probemos que

$$\Pi_k B^j = \{W \in \Pi : \tau(W) \equiv (k-1)\sigma(W) + j \mod 4\} \quad (j = 0, 1, 2, 3),$$

si $Z \in \Pi_k B^j$, entonces $Z = WB^j$ para algún $W \in \Pi_k$, entonces

$$\tau(W) \equiv (k-1)\sigma(W) \mod 4,$$

entonces

$$\begin{aligned}\tau(Z) &= \tau(WB^j) = \tau(W) + \tau(B^j)\\ &= \tau(W) + j \equiv (k-1)\sigma(W) + j \mod 4 \ (j = 0, 1, 2, 3),\end{aligned}$$

entonces

$$\tau(Z) \equiv (k-1)\sigma(W) + j \mod 4 \ (j = 0, 1, 2, 3),$$

de donde $Z \in \{W \in \Pi : \tau(W) \equiv (k-1)\sigma(W) + j \mod 4\}$ $(j = 0, 1, 2, 3)$. Recíprocamente si $W \in \{W \in \Pi : \tau(W) \equiv (k-1)\sigma(W) + j \mod 4\}$ $(j = 0, 1, 2, 3)$, entonces

$$\tau(W) \equiv (k-1)\sigma(W) + j \mod 4 \ (j = 0, 1, 2, 3),$$

luego

$$\begin{aligned}\tau(WB^{-j}) &= \tau(W) + \tau(B^{-j})\\ &= \tau(W) - j\\ &\equiv (k-1)\sigma(W) + j - j \mod 4\\ &= (k-1)\sigma(W) \mod 4,\end{aligned}$$

entonces $WB^{-j} \in \Pi_k$, de donde se sigue que $W = WB^{-j}B^j \in \Pi_k B^j$. Por tanto

$$\Pi_k B^j = \{W \in \Pi : \tau(W) \equiv (k-1)\sigma(W) + j \mod 4\} \quad (j = 0, 1, 2, 3).$$

Veamos ahora que estas clases laterales son distintas entre si. Supongamos que $\Pi_k B^j = \Pi_k B^i$ para $i \neq j$, $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$. Entonces podemos tomar $W \in \Pi_k B^j \cap \Pi_k B^i$, entonces

$$\tau(W) \equiv (k-1)\sigma(W) + j \mod 4 \text{ y } \tau(W) \equiv (k-1)\sigma(W) + i \mod 4,$$

entonces

$$(k-1)\sigma(W) + j \equiv (k-1)\sigma(W) + i \mod 4,$$

de donde $j \equiv i \mod 4$, $i, j \in \{0,1,2,3\}$, entonces $j-i=0$, así $j=i$, lo cual es una contradicción, por tanto las clases laterales $\Pi_k B^j$ son distintas entre sí. Por último veamos que

$$\bigcup_{j=0}^{3} \Pi_k B^j = \Pi.$$

Claramente $\bigcup_{j=0}^{3} \Pi_k B^j \subset \Pi$. Si $W \in \Pi$, entonces

$$\tau(W) \equiv (k-1)\sigma(W) \mod 4 \text{ ó } \tau(W) \not\equiv (k-1)\sigma(W) \mod 4,$$

si $\tau(W) \equiv (k-1)\sigma(W) \mod 4$, entonces $\tau(W) \equiv (k-1)\sigma(W)+0 \mod 4$, entonces $W \in \Pi_k B^0$, de donde $W \in \bigcup_{j=0}^{3} \Pi_k B^j$. Si $\tau(W) \not\equiv (k-1)\sigma(W) \mod 4$, entonces $\tau(W)-(k-1)\sigma(W)$ no es múltiplo de 4, entonces existe $j \in \{1,2,3\} \subset \{0,1,2,3\}$ tal que $\tau(W)-(k-1)\sigma(W)-j$ es múltiplo de 4, de donde $\tau(W) \equiv (k-1)\sigma(W)+j \mod 4$ para algún $j \in \{0,1,2,3\}$, entonces $W \in \Pi_k B^j$ para algún $j \in \{0,1,2,3\}$, por tanto $W \in \bigcup_{j=0}^{3} \Pi_k B^j$, entonces $\Pi \subset \bigcup_{j=0}^{3} \Pi_k B^j$ y por tanto $\bigcup_{j=0}^{3} \Pi_k B^j = \Pi$ y en consecuencia Π_k tiene índice 4.

b) Sea $W \in \Pi_k$, $W \neq I$, si $W = B^j$ para algún $j = 1,2,3$ entonces $\tau(W) = \tau(B^j) = j \not\equiv 0 \mod 4$ para $j = 1,2,3$ y $\sigma(W) = \sigma(B^j) = 0$, entonces $\tau(W) \not\equiv (k-1)\sigma(W) \mod 4$ para todo k, entonces $W \notin \Pi_k \forall k$, lo cual es una contradicción, por tanto $W \neq B^j \ \forall j \in \{1,2,3\}$. Así que W tiene una de las formas en (3.5) y sabemos por lema 3.1.7 que todas estas palabras son distintas. Así que Π_k es un grupo libre.

c) Sea $W \in \Pi$. Veamos que $\Gamma_k \subset \Pi_k$. Tenemos que $\sigma(AB^{k-1}) = 1$, $\sigma([A,B]) = \tau([A,B]) = 0$ y $\tau(AB^{k-1}) = k-1$, entonces

$$\tau(AB^{k-1}) = k-1 = (k-1)\sigma(AB^{k-1}),$$

con $k \in \{1,2,3,4\}$, luego $\tau(AB^{k-1}) \equiv (k-1)\sigma(AB^{k-1}) \mod 4$ y $\tau([A,B]) = 0 = (k-1)\sigma([A,B])$, entonces $\tau([A,B]) \equiv (k-1)\sigma([A,B]) \mod 4$, así si $W \in \Gamma_k$, entonces $\tau(W) \equiv (k-1)\sigma(W) \mod 4$ y por tanto $W \in \Pi_k$.

d) Veamos que $\Pi_k \subset \Gamma_k$, es decir, debemos probar que

$$\text{si } W \in \Pi_k, \text{ esto es, si } \tau(W) \equiv (k-1)\sigma(W) \mod 4, \text{ entonces } W \in \Gamma_k \tag{3.14}$$

.

En efecto:Sea $W \in \Pi$, procedemos por inducción sobre el número n de ocurrencias de A en W. Si $n = 0$, entonces $\sigma(W) = 0$, entonces $\tau(W) \equiv (k-1)\sigma(W) \mod 4$ implica que

$\tau(W) \equiv 0 \mod 4$, de donde $W = I$ y por tanto $W \in \Gamma_k$. Supongamos que (3.14) se cumple cuando el número de ocurrencias de A es menor que n. Sabemos que $W = B^e A^{j_n} V$, con $V = BA^{j_{n-1}}...A^{j_1}B^l$, donde $e \in \{0,1\}$, $l \in \{0,1,2,3\}$, $j_v \in \mathbb{Z}$ y $j_n \neq 0$.
Afirmación: Existe $U \in \Pi_k$ tal que $W^* = U^{-1}W$ tiene menos de n ocurrencias de A. En efecto:

caso 1: $k = 1$.

Definimos $U = B^e A^{j_n} B^{-e} = (B^e A B^{-e})^{j_n} \in \Gamma_1 \subset \Pi_1$, de donde $U \in \Pi_1$, entonces

$$W^* = U^{-1}W = B^e A^{-j_n} B^{-e} B^e A^{j_n} V = B^e V,$$

la cual tiene menos de n ocurrencias de A.

caso 2: $k = 2$.

Definimos $U = B^e A^{j_n} B^{j_n - e}$, si $j_n = 2q$, entonces

$$\begin{aligned} U &= B^e A^{2q} B^{2q-e} = B^e (AA)^q (B^2)^q B^{-e} = B^e (AAB^2)^q B^{-e} \\ &= B^e (ABBA)^q B^{-e} \in \Gamma_2 \subset \Pi_2. \end{aligned}$$

Si $j_n = 2q+1$, entonces

$$U = B^e A^{2q} A B^{2q} B B^{-e} = B^e (ABBA)^q ABB^{-e} \in \langle AB, BA \rangle \subset \Pi_2,$$

así en ambos casos $U \in \Pi_2$, de donde

$$W^* = U^{-1}W = (B^e A^{j_n} B^{j_n - e})^{-1} W = B^{e-j_n} A^{-j_n} B^{-e} B^e A^{j_n} V = B^{e-j_n} V,$$

la cual tiene menos de n ocurrencias de A.

caso 3: $k = 3$.

Sea $U = B^e A^{j_n} B^{-e}$, si j_n es par, entonces

$$U = B^e A^{j_n} B^{-e} = (B^e A B^{-e})^{j_n} = (B^e(-A)B^{-e})^{j_n} \in \left\langle -A, -BAB^{-1} \right\rangle \subset \Pi_3,$$

entonces $U \in \Pi_3$ y en el caso 1 se mostró que para este U, $W^* = U^{-1}W$ tiene menos de n ocurrencias de A. Ahora sea $U = -B^e A^{j_n} B^{-e}$, si j_n es impar, entonces

$$U = -B^e A^{j_n} B^{-e} = (B^e(-A)B^{-e})^{j_n} \in \left\langle -A, -BAB^{-1} \right\rangle \subset \Pi_3,$$

entonces $U \in \Pi_3$, luego $W^* = U^{-1}W = (-B^e A^{j_n} B^{-e})^{-1} B^e A^{j_n} V = -B^e A^{-j_n} B^{-e} B^e A^{j_n} V = -B^e V$, la cuál tiene menos de n ocurrencias de A.

caso 4: $k = 4$.

Para $j_n = 2q$ con $q \in \mathbb{Z}$, sea

$$U = B^e A^{j_n} B^{j_n - e} = B^e (ABBA)^q B^{-e} = B^e(-AB(-BA))^q B^{-e} \in \langle -AB, -BA \rangle \subset \Pi_4,$$

entonces $U \in \Pi_4$ y $W^* = U^{-1}W = B^{e-j_n}V$ tiene menos de n ocurrencias de A.

Para $j_n = 2q+1$, con $q \in \mathbb{Z}$, definimos $U = -B^e A^{j_n} B^{j_n - e}$, entonces

$$\begin{aligned} U &= -B^e A^{j_n} B^{j_n-e} = B^e(-A)^{2q+1} B^{2q+1-e} = B^e((-A)(-A))^q(-A)(-I)^q BB^{-e} \\ &= B^e(-AB(-BA))^q(-AB)B^{-e} \in \langle -AB, -BA \rangle \subset \Pi_4. \end{aligned}$$

y $W^* = U^{-1}W = (-B^e A^{j_n} B^{j_n-e})^{-1} B^e A^{j_n} V = -B^{e-j_n} A^{-j_n} B^{-e} B^e A^{j_n} V = -B^{e-j_n}V$, la cual tiene menos de n ocurrencias de A.

Luego si $W \in \Pi_k$ con n ocurrencias de A, por la afirmación anterior existe $U \in \Pi_k$ tal que $W^* = U^{-1}W$ tiene menos de n ocurrencias de A. Luego como $U^{-1} \in \Pi_k$ y $W \in \Pi_k$, entonces $W^* = U^{-1}W \in \Pi_k$ y como W^* tiene menos de n ocurrencias de A, por la hipótesis inductiva $W^* \in \Gamma_k$ y en los casos de la afirmación anterior se probó siempre que $U \in \Gamma_k$, así que $W = UW^* \in \Gamma_k$, con lo cual acabamos la prueba. ■

Observación: Del teorema 3.2.2 vemos que Π_1 el subgrupo de $\Pi \subset SL(2, \mathbb{Z}[t])$ es generado por las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} = -BA^{-1}B = BA^{-1}B^{-1}. \tag{3.15}$$

Lema 3.2.3 *Sea $k = 1, 2, 3, 4$, el grupo*

$$\Pi_{k+4} = \left\langle AB^{k-1}, -[A, B] \right\rangle \tag{3.16}$$

es un subgrupo libre de índice 4 en Π.

Prueba. Sea $C = [A, B]$. Como Π_k es libre existe un único homomorfismo $\varphi_k : \Pi_k \to \Pi$ tal que

$$\varphi_k(AB^{k-1}) = AB^{k-1}, \varphi_k(C) = -C. \tag{3.17}$$

Entonces de (3.17) y (3.16) se infiere que $\varphi_k(\Pi_k) = \Pi_{k+4}$, ya que AB^{k-1} y $C = [A, B]$, generadores de Π_k, son tales que $\varphi_k(AB^{k-1}) = AB^{k-1} \in \Pi_{k+4}$, $\varphi_k(C) = -C \in \Pi_{k+4}$, entonces $\varphi_k(\Pi_k) \subset \Pi_{k+4}$ y recíprocamente los generadores AB^{k-1} y $-C = -[A, B]$ de Π_{k+4} son tales que $AB^{k-1} = \varphi_k(AB^{k-1}) \in \varphi_k(\Pi_k)$ y $-C = \varphi_k(C) \in \varphi_k(\Pi_k)$, entonces $\Pi_{k+4} \subset \varphi_k(\Pi_k)$. Afirmamos que $\varphi(W) = \pm W$ para $W \in \Pi_k$. En efecto: Si $W \in \Pi_k$, entonces lo podemos escribir como una palabra del alfabeto $\{D, C\}$ con $D = AB^{k-1}$ y $C = [A, B]$, esto es, $W = D^{j_1} C^{l_1} ... D^{j_n} C^{l_n}$, con

j_i y $l_i \in \mathbb{Z}\ \forall i$, entonces

$$\begin{aligned}\varphi_k(W) &= \varphi_k(D^{j_1}C^{l_1}...D^{j_n}C^{l_n}) = (\varphi_j(D))^{j_1}(\varphi_j(C))^{l_1}...(\varphi_j(D))^{j_n}(\varphi_j(C))^{l_n} \\ &= D^{j_1}(-C)^{l_1}...D^{j_n}(-C)^{l_n} = \pm D^{j_1}C^{l_1}...D^{j_n}C^{l_n} = \pm W.\end{aligned}$$

Ahora supongamos que $\varphi_k(W) = I$. Entonces $W = \pm I$, donde $-I$ no es posible ya que Π_k es un grupo libre. Se sigue que $W = I$. En consecuencia φ_k es un isomorfismo de Π_k sobre Π_{k+4} y por tanto Π_{k+4} también es un grupo libre. Ahora veamos que Π_{k+4} es de índice 4, para ésto, definamos las clases laterales

$$\Pi_{k+4}B^j = \left\{WB^j : W \in \Pi_{k+4}\right\} = \left\{\varphi_k(W_1)B^j : W_1 \in \Pi_k\right\},$$

donde $W = \varphi_k(W_1)$, $W_1 \in \Pi_k$. Primero veamos que estas clases son distintas, en efecto: Sean $i, j \in \{0,1,2,3\}$, $i \neq j$, supongamos que $\varphi_k(W_1)B^j = \varphi_k(W_2)B^i$, para algunos W_1 y $W_2 \in \Pi_k$, entonces

$$\varphi_k(W_2^{-1})\varphi_k(W_1) = B^{i-j},$$

de donde $B^{i-j} \in \Pi_{k+4}$, como las potencias no triviales de B no pueden estar en Π_{k+4} ya que, como vimos al principio de la prueba, Π_{k+4} es un grupo libre , entonces $i-j = 0$, entonces $i = j$, lo cual es una contradicción. Ahora probemos que $\bigcup_{j=0}^{3} \Pi_{k+4}B^j = \Pi$. Claramente $\bigcup_{j=0}^{3} \Pi_{k+4}B^j \subset \Pi$, veamos que $\Pi \subset \bigcup_{j=0}^{3} \Pi_{k+4}B^j$, en efecto: Sea $W \in \Pi$. Sabemos de la prueba del teorema 3.2.2 que $\Pi = \bigcup_{j=0}^{3} \Pi_k B^j$, luego $W = W_0 B^t$ para algún $t \in \{0,1,2,3\}$ y $W_0 \in \Pi_k = \left\langle AB^{k-1}, [A,B]\right\rangle$.

Afirmación: $W_0 = W_2(-I)^{\epsilon}$ para algún $W_2 \in \Pi_{k+4}$ y $\epsilon \in \mathbb{Z}$. En efecto, sea $D = AB^{k-1}$, entonces

$$\begin{aligned}W_0 &= D^{j_1}C^{l_1}...D^{j_m}C^{l_m} \\ &= D^{j_1}(-I)^{l_1}(-C)^{l_1}...D^{j_m}(-I)^{l_m}(-C)^{l_m},\end{aligned}$$

tenemos que cualquier potencia de $-I$ conmuta con cualquier elemento en Π, puesto que éstas son iguales a I o a $-I$, así que

$$\begin{aligned}W_0 &= D^{j_1}(-C)^{l_1}...D^{j_m}(-C)^{l_m}(-I)^{l_1+...+l_m} \\ &= D^{j_1}(-C)^{l_1}...D^{j_m}(-C)^{l_m}(-I)^{\epsilon},\end{aligned}$$

con $\epsilon = l_1 + ... + l_m \in \mathbb{Z}$. Tenemos que $W_2 = D^{j_1}(-C)^{l_1}...D^{j_m}(-C)^{l_m} \in \langle D, -C\rangle = \left\langle AB^{k-1}, -[A,B]\right\rangle = \Pi_{k+4}$, entonces $W_0 = W_2(-I)^{\epsilon}$, para algún $W_2 \in \Pi_{k+4}$ y $\epsilon \in \mathbb{Z}$.

Luego $W = W_0B^t = W_2(-I)^\epsilon B^t = W_2(B^2)^\epsilon B^t = W_2B^{2\epsilon+t} = W_2B^p$, para algún $p \in \{0,1,2,3\}$, así que $W = W_2B^p$, para algún $W_2 \in \Pi_{k+4}$ y $p \in \{0,1,2,3\}$, entonces $W \in \Pi_{k+4}B^p$, para algún $p \in \{0,1,2,3\}$ y por tanto $W \in \bigcup_{j=0}^{3} \Pi_{k+4}B^j$. ■

Proposición 3.2.4 *El grupo* Π_{k+4} *satisface*

$$B\Pi_{k+4}B^{-1} = \Pi_{k^*+4}, \tag{3.18}$$

con $k^* = k+2$ *mod* 4 *si* $k \neq 2$ *y* $k^* = 4$ *si* $k = 2$.

Prueba. Nuevamente se $C = [A,B]$, tenemos que

$$\begin{aligned} BCB^{-1} &= BABA^{-1}B^{-1}B^{-1} = BABA^{-1}(-B)(-B) = BA(-B)A^{-1} \\ &= BAB^{-1}A^{-1} = BA(AB)^{-1} = (A^{-1}B^{-1})^{-1}(AB)^{-1} \\ &= (ABA^{-1}B^{-1})^{-1} = ([A,B])^{-1} = C^{-1}, \end{aligned}$$

de donde $B(-C)B^{-1} = -C^{-1}$. Por otro lado

$$BAB^{k-1}B^{-1} = BAB^{k-2},$$

entonces, como $\Pi_{k+4} = \langle AB^{k-1}, -[A,B]\rangle = \langle AB^{k-1}, -C\rangle$ se tiene que

$$B\Pi_{k+4}B^{-1} = \left\langle BAB^{k-2}, -C^{-1}\right\rangle = \left\langle BAB^{k-2}, -C\right\rangle,$$

pero

$$\begin{aligned} -CBAB^{k-2} &= -ABA^{-1}B^{-1}BAB^{k-2} \\ &= ABA^{-1}B^{-1}BAB^{k} = AB^{k+1} \\ &= AB^{k-1+2} = AB^{k+2-1} = AB^{k^*-1}, \end{aligned}$$

con $k^* = k+2$ mod 4, si $k \neq 2$ y $k^* = 4$ si $k = 2$, luego

$$B\Pi_{k+4}B^{-1} = \left\langle AB^{k^*-1}, -C\right\rangle = \Pi_{k^*+4},$$

con $k^* = k+2$ mod 4, si $k \neq 2$ y $k^* = 4$ si $k = 2$. ■

3.3 La intersección de los subgrupos Π_1,..., Π_4

Teorema 3.3.1 *El grupo Π_0 es un subgrupo normal libre de índice 16 en Π y tiene la presentación*

$$\Pi_0 = \left\langle A^4, [A,B], \left[A^{-1},B\right], \left[A^2,B\right], \left[A^{-2},B\right]\right\rangle \tag{3.19}$$

Prueba. (a) Sabemos que $\tau : \Pi \longrightarrow \mathbb{Z}_4$ y $\sigma : \Pi \longrightarrow \mathbb{Z}$, son homomorfismos y son tales que $\ker(\tau) = \{W \in \Pi : \tau(W) \equiv 0 \bmod 4\}$ y $\ker(\sigma) = \{W \in \Pi : \sigma(W) = 0\}$, entonces

$$\begin{aligned} \ker(\tau) \cap \ker(\sigma) &= \{W \in \Pi : \sigma(W) \equiv \tau(W) \equiv 0 \bmod 4\} \\ &= \Pi_0, \end{aligned}$$

así que Π_0 es un subgrupo normal de Π. Los 16 conjuntos

$$\{W : \sigma(W) = j, \tau(W) = k\}\,(j,k = 0,1,2,3)$$

forman un sistema de clases laterales completo de Π_0 en Π. En efecto: Tenemos que $A^iB^j \in \Pi_0A^sB^m$, con $i,s \in \{0,1,2,3\}$ y $j,m \in \{0,1,2,3\}$ si y sólo si

$$\begin{aligned} (A^sB^m)^{-1}A^iB^j &\in \Pi_0 \Leftrightarrow B^{-m}A^{-s}A^iB^j \in \Pi_0 \\ &\Leftrightarrow B^{-m}A^{i-s}B^j \in \Pi_0 \Leftrightarrow B^{-m}A^{i-s}B^{j-m}B^m \in \Pi_0 \\ &\Leftrightarrow A^{i-s}B^{j-m} \in \Pi_0, \end{aligned}$$

luego $\sigma(A^{i-s}B^{j-m}) = i - s \equiv 0 \bmod 4$ y $\tau(A^{i-s}B^{j-m}) = j - m \equiv 0 \bmod 4$, pero $i,j,s,m \in \{0,1,2,3\}$, entonces $-3 \leq i - s \leq 3$ y $-3 \leq j - m \leq 3$, luego $i - s = 0$ y $j - m = 0$, entonces $i = s$ y $j = m$.

Así que $\left\{I, B, B^2, B^3, A, A^2, A^3, AB, AB^2, AB^3, A^2B, A^2B^2, A^2B^3, A^3B, A^3B^2, A^3B^3\right\}$ está compuesto por representantes de clases laterales derechas distintas de Π_0 en Π.

Ahora bien: Veamos que para cualquier $W \in \Pi$, W está en una de las clases $\Pi_0A^iB^j$ con $i,j \in \{0,1,2,3\}$. Hagamos la prueba por inducción sobre el número n de ocurrencias de A en la palabra. Si $n = 1$, esto es, si $W = B^eA^{k_1}B^l$, con $e \in \{0,1\}$, $k_1 \in \mathbb{Z}$ y $l \in \{0,1,2,3\}$, entonces

$$\begin{aligned} W &= B^eA^{k_1}B^{-e}A^{-k_1}A^{k_1}B^eB^l \\ &= B^eA^{k_1}B^{-e}A^{-k_1}A^{4q+s}B^{l+e}, \text{ para algún } q \in \mathbb{Z} \text{ y } 0 \leq s \leq 3, \end{aligned}$$

entonces

$$W = B^eA^{k_1}B^{-e}A^{-k_1}A^{4q}A^sB^{l+e},$$

como $e \in \{0,1\}$, entonces $l+e \in \{0,1,2,3,4\}$, luego $B^{l+e} = B^{l_0}$, para algún $l_0 \in \{0,1,2,3\}$, así que

$$W = B^e A^{k_1} B^{-e} A^{-k_1} A^{4q} A^s B^{l_0}, \text{ con } s, l_0 \in \{0,1,2,3\}$$

y donde $B^e A^{k_1} B^{-e} A^{-k_1} A^{4q} \in \Pi_0$, pues $\tau(B^e A^{k_1} B^{-e} A^{-k_1} A^{4q}) = 0$ y $\sigma(B^e A^{k_1} B^{-e} A^{-k_1} A^{4q}) = 4q \equiv 0 \mod 4$. Por tanto $W \in \Pi_0 A^s B^{l_0}$. Ahora supongamos que cualquier palabra en Π con menos de n ocurrencias de A está en una de las clases $\Pi_0 A^i B^j$ con $i,j \in \{0,1,2,3\}$. Supongamos que $W \in \Pi$ tiene n ocurrencias de A, entonces $W = B^e A^{j_n} V$, con $V = BA^{j_{n-1}} ... A^{j_1} B^l$, donde $e \in \{0,1\}$, $l \in \{0,1,2,3\}$, $j_v \in \mathbb{Z}$ y $j_n \neq 0$, entonces

$$W = (B^e A^{j_n} BA^{j_{n-1}} ... BA^{j_2} B) A^{j_1} B^l,$$

como $B^e A^{j_n} BA^{j_{n-1}} ... BA^{j_2} B$ tiene $n-1 < n$ ocurrencias de A, por hipótesis inductiva

$$B^e A^{j_n} BA^{j_{n-1}} ... BA^{j_2} B = W_0 A^i B^m,$$

con $W_0 \in \Pi_0$, $i, m \in \{0,1,2,3\}$, luego

$$\begin{aligned} W &= W_0 A^i B^m A^{j_1} B^l = W_0 A^i B^m A^{-i} B^{-m} B^m A^i A^{j_1} B^l \\ &= W_0 A^i B^m A^{-i} B^{-m} B^m A^{i+j_1} B^l = W_0 A^i B^m A^{-i} B^{-m} B^m A^{i+j_1} B^{-m} A^{-(i+j)} A^{i+j} B^m B^l \\ &= W_0 A^i B^m A^{-i} B^{-m} B^m A^{i+j_1} B^{-m} A^{-(i+j)} A^{i+j} B^{m+l}, \end{aligned}$$

con $i+j, m+l \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$. Por el algoritmo de la división $A^{i+j} = A^{4r+t}$, para algún $r \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq t \leq 3$, además $B^{m+l} = B^{l_0}$, para algún $l_0 \in \{0,1,2,3\}$, así

$$W = W_0 A^i B^m A^{-i} B^{-m} B^m A^{i+j_1} B^{-m} A^{-(i+j)} A^{4r} A^t B^{l_0}, \text{ con } t, l_0 \in \{0,1,2,3\}$$

y claramente $W_0 A^i B^m A^{-i} B^{-m} B^m A^{i+j_1} B^{-m} A^{-(i+j)} A^{4r} \in \Pi_0$. Por tanto $W \in \Pi_0 A^t B^{l_0}$.

En consecuencia Π_0 tiene índice 16 en Π. Como Π_1 tiene índice 4 en Π, se sigue que Π_0 tiene índice 4 en Π_1. Sabemos que el grupo libre Π_1 tiene rango 2, luego se sigue de [16, Th.2.10] que Π_0 es libre de rango $4(2-1)+1 = 5$. Luego los 5 generadores en (3.19) son generadores libres.

(b) Sea Γ el grupo con la presentación en (3.19). Cada una de las palabras en (3.19) satisface $\sigma(W) \equiv \tau(W) \equiv 0 \mod 4$. Así se sigue de (3.12) que $\Gamma \subset \Pi_0$.

Todo $W \in \Pi$ con $W \neq \pm I, \pm B$ tiene la forma (3.2). Probemos que $\Pi_0 \subset \Gamma$. Nuevamente por inducción sobre el número n de ocurrencias de A. En vista de (3.19) tenemos que $A^4 \in \Gamma$ y

$$BA^4B^{-1} = BA^2A^2B^{-1} = \left[A^2, B\right]^{-1} A^4 \left[A^{-2}, B\right] \in \Gamma.$$

Se sigue que

$$A^{4q} \in \Gamma,\ BA^{4q}B^{-1} \in \Gamma\ (q \in \mathbb{Z}). \tag{3.20}$$

Sea $W \in \Pi_0$, donde W tiene $n = 1$ ocurrencia de A, esto es $W = B^e A^{j_1} B^l$, con $e \in \{0, 1\}$, $j_1 \in \mathbb{Z}$ y $l \in \{0, 1, 2, 3\}$. Si $e = 0$, entonces $W = A^{j_1} B^l$, como $W \in \Pi_0$, entonces $\sigma(W) = j_1 \equiv 0$ mod 4, de donde $j_1 = 4q$ para algún $q \in \mathbb{Z}$ y $\tau(W) = l \equiv 0$ mod 4, como $l \in \{0, 1, 2, 3\}$, entonces $l = 0$. Se sigue que $W = A^{4q}$, lo cual por (3.20) pertenece a Γ. Si $e = 1$, entonces $W = BA^{j_1}B^l$, nuevamente, como $W \in \Pi_0$, entonces $\sigma(W) = j_1 \equiv 0$ mod 4, de donde $j_1 = 4q$ para algún $q \in \mathbb{Z}$ y $\tau(W) = l + 1 \equiv 0$ mod 4, como $l + 1 \in \{1, 2, 3, 4\}$, entonces $l + 1 = 4$, entonces $l = 3$. Así $W = BA^{4q}B^3 = BA^{4q}B^{-1}$ y de nuevo, por (3.20) $W \in \Gamma$.

Supongamos que $W \in \Pi_0 \Longrightarrow W \in \Gamma$ es cierto si W tiene menos de n ocurrencias de A. Sea $W = B^e A^{j_n} V$, con $V = BA^{j_{n-1}}B...A^{j_1}B^l$ como es descrito en (3.2).

Si $e = 0$, entonces

$$W = A^{j_n}V = A^{4q+r}V = A^{4q}A^rBA^{-r}B^{-1}.BA^rA^{j_{n-1}}B...A^{j_1}B^l = A^{4q}\left[A^r, B\right]V^*$$

donde $q \in \mathbb{Z}$, $r = -1, 0, 1, 2$ y $V^* = A^{r+j_{n-1}}B...A^{j_1}B^l$ tiene la forma (3.2) con $n-1$ ocurrencias de A. Además $\tau(V^*) = \tau(W) \equiv 0$ mod 4 y $\sigma(V^*) = j_1 + j_2 + ... + j_{n-1} + r$, como $W \in \Pi_0$, entonces $\sigma(W) = j_1 + j_2 + ... + j_{n-1} + j_n = j_1 + j_2 + ... + j_{n-1} + 4q + r \equiv 0$ mod 4, de donde $\sigma(V^*) = j_1 + j_2 + ... + j_{n-1} + r \equiv 0$ mod 4, entonces $V^* \in \Pi_0$. Luego, por hipótesis inductiva $V^* \in \Gamma$, entonces W es un producto de elementos en Γ, así que $W \in \Gamma$.

Si $e = 1$, entonces

$$W = BA^{4q+r}V = BA^{4q}B^{-1}BA^rB^{-1}A^{-r}A^rBV = BA^{4q}B^{-1}\left[A^r, B\right]^{-1}V^*$$

donde $V^* = A^rBV = A^rB^2A^{j_{n-1}}B...A^{j_1}B^l = A^{r+j_{n-1}}B...A^{j_1}B^{l+2}$ tiene la forma (3.2) con $n-1$ ocurrencias de A y nuevamente $\tau(V^*) = \tau(W) \equiv 0$ mod 4 y $\sigma(V^*) = j_1 + j_2 + ... + j_{n-1} + r \equiv 0$ mod 4, entonces $V^* \in \Pi_0$. Se sigue de la hipótesis inductiva que $V^* \in \Gamma$. Así nuevamente W es un producto de elementos en Γ y por tanto $W \in \Gamma$. ■

Proposición 3.3.2 *El grupo* Π_0 *satisface*

$$\Pi_0 = \Pi_1 \cap \Pi_2 = \Pi_2 \cap \Pi_3 = \Pi_3 \cap \Pi_4 = \Pi_4 \cap \Pi_1 \tag{3.21}$$

Prueba. Para abreviar los cálculos hacemos la siguiente notación

$$\{\sigma \equiv m, \tau \equiv n\} = \{W \in \Pi : \sigma(W) \equiv m, \tau(W) \equiv n \text{ mod } 4\} \tag{3.22}$$

Luego podemos reescribir las intersecciones de subgrupos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\Pi_1 \cap \Pi_2 &= \{\tau \equiv 0\} \cap \{\tau \equiv \sigma\} = \{0 \equiv \tau \equiv \sigma\} = \Pi_0 \\
\Pi_2 \cap \Pi_3 &= \{\tau \equiv \sigma\} \cap \{\tau \equiv 2\sigma\} = \{\sigma \equiv 0 \equiv \tau\} = \Pi_0 \\
\Pi_3 \cap \Pi_4 &= \{\tau \equiv 2\sigma\} \cap \{\tau \equiv 3\sigma\} = \Pi_0 \\
\Pi_4 \cap \Pi_1 &= \{\tau \equiv 3\sigma\} \cap \{\tau \equiv 0\} = \Pi_0.
\end{aligned}$$

Vemos de (3.21) que Π_0 es un subgrupo de todos los Π_k el cual es normal ya que todas las definiciones están en términos de σ y τ. ■

A continuación estudiamos las otras intersecciones de los subgrupos Π_i, $i = 1, 2, 3, 4$.

Teorema 3.3.3 *Tenemos la presentación libre*

$$\Pi_1 \cap \Pi_3 = \left\langle A^2, [A, B], \left[A^2, B\right]\right\rangle, \; \Pi_2 \cap \Pi_4 = \left\langle A^2B^2, [A, B], \left[A^2, B\right]\right\rangle \tag{3.23}$$

y Π_0 *tiene índice* 2 *en estos grupos.*

Prueba. Sean $\Gamma_1 = \left\langle A^2, [A, B], \left[A^2, B\right]\right\rangle$ y $\Gamma_2 = \left\langle A^2B^2, [A, B], \left[A^2, B\right]\right\rangle$. Debemos mostrar que $\Pi_1 \cap \Pi_3 = \Gamma_1$ y que $\Pi_2 \cap \Pi_4 = \Gamma_2$. Primero probemos que $\Pi_1 \cap \Pi_3 = \Gamma_1$ y para ésto, probemos las dos contenencias entre estos grupos. Con la notación usada en la proposición anterior

$$\begin{aligned}
\Pi_1 \cap \Pi_3 &= \{\tau \equiv 0\} \cap \{\tau \equiv \sigma\} \\
&= \{\sigma \equiv 0, 2 \text{ y } \tau \equiv 0\}.
\end{aligned}$$

Ahora bien, tenemos que $\tau(A^2) = 0$ y $\sigma(A^2) = 2$, $\tau([A, B]) = 0$ y $\sigma([A, B]) = 0$ y $\tau(\left[A^2, B\right]) = 0$ y $\sigma(\left[A^2, B\right]) = 0$, luego $A^2, [A, B], \left[A^2, B\right] \in \Pi_1 \cap \Pi_3$ y por tanto $\Gamma_1 \subset \Pi_1 \cap \Pi_3$. Ahora veamos que $\Pi_1 \cap \Pi_3 \subset \Gamma_1$, en efecto: Sabemos que A^2 y $\left[A^2, B\right] \in \Gamma_1$, entonces $A^{-2}\left[A^2, B\right] \in \Gamma_1$, pero

$$A^{-2}\left[A^2, B\right] = A^{-2}A^2BA^{-2}B^{-1} = BA^{-2}B^{-1},$$

entonces $BA^{-2}B^{-1} \in \Gamma_1$, de donde $(BA^{-2}B^{-1})^q = B(A^{-2})^qB^{-1} \in \Gamma_1$ $(q \in \mathbb{Z})$, entonces

$$B(A^2)^qB^{-1} \in \Gamma_1 \; (q \in \mathbb{Z}) \tag{3.24}$$

. Hagamos la prueba de que $\Pi_1 \cap \Pi_2 \subset \Gamma_1$ por inducción sobre el número n de ocurrencias de A en la palabra. Sea $W \in \Pi_1 \cap \Pi_3$ y supongamos que W tiene $n = 1$ ocurrencia de A, esto es, $W = B^eA^{j_1}B^l$, donde $e \in \{0, 1\}$, $j_1 \in \mathbb{Z}$ y $l \in \{0, 1, 2, 3\}$. Si $e = 0$, entonces $W = A^{j_1}B^l$. Como $W \in \Pi_1 \cap \Pi_3$, entonces $\sigma(W) \equiv 0$ ó $\sigma(W) \equiv 0 \bmod 4$, de donde $j_1 = 2q$ para algún $q \in \mathbb{Z}$, además $\tau(W) = l \equiv 0 \bmod 4$, como $l \in \{0,1,2,3\}$, entonces $l = 0$, entonces $W = A^{2q} \in \Gamma_1$, de donde $\Pi_1 \cap \Pi_3 \subset \Gamma_1$. Si $e = 1$, entonces $W = BA^{j_1}B^l$, como $W \in \Pi_1 \cap \Pi_3$ tenemos que $\sigma(W) = j_1 \equiv 0$ ó $2 \bmod 4$, de donde $j_1 = 2q$ para algún $q \in \mathbb{Z}$ y $\tau(W) = l + 1 \equiv 0 \bmod 4$, así que $l + 1 = 4$, entonces $l = 3$, luego

$$W = BA^{2q}B^3 = BA^{2q}B^{-1} = B(A^2)^qB^{-1},$$

entonces por (3.24) $W = B(A^2)^qB^{-1} \in \Gamma_1$. Supongamos que para palabras W que tienen menos de n ocurrencias A se cumple que si $W \in \Pi_1 \cap \Pi_3$, entonces $W \in \Gamma_1$. Sea $W \in \Pi_1 \cap \Pi_3$ tal que W tiene n ocurrencias de A, esto es, $W = B^eA^{j_n}BA^{j_{n-1}}...A^{j_1}B^l$, donde $e \in \{0,1\}$, $j_v \in \mathbb{Z}$ y $l \in \{0,1,2,3\}$.

Caso 1: Si $e = 0$, entonces $W = A^{j_n}BA^{j_{n-1}}...A^{j_1}B^l$, como $W \in \Pi_1 \cap \Pi_3$, entonces $\sigma(W)$ es un número par. Si $j_1 + j_2 + ... + j_{n-1}$ es par, entonces j_n debe ser par, así que $j_n = 2q$ para algún $q \in \mathbb{Z}$, entonces $W = (A^2)^qBA^{j_{n-1}}...A^{j_1}B^l$. Nótese que $(A^2)^q \in \Gamma_1$ y que $BA^{j_{n-1}}...A^{j_1}B^l$ es una palabra con $n - 1 < n$ ocurrencias de A tal que $\tau(BA^{j_{n-1}}...A^{j_1}B^l) = \tau(W) \equiv 0 \bmod 4$ (ya que $W \in \Pi_1 \cap \Pi_3$) y $\sigma(BA^{j_{n-1}}...A^{j_1}B^l) = j_1 + j_2 + ... + j_{n-1}$, lo cual es par y en consecuencia $\sigma(BA^{j_{n-1}}...A^{j_1}B^l) \equiv 0$ ó $2 \bmod 4$, de donde se sigue que $BA^{j_{n-1}}...A^{j_1}B^l \in \Pi_1 \cap \Pi_3$, entonces por hipótesis inductiva $BA^{j_{n-1}}...A^{j_1}B^l \in \Gamma_1$, así $W = (A^2)^qBA^{j_{n-1}}...A^{j_1}B^l \in \Gamma_1$. Si $j_1 + j_2 + ... + j_{n-1}$ es impar, entonces j_n debe ser impar, así que $j_n = 2q + 1$ para algún $q \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned} W &= (A^2)^qABA^{j_{n-1}}...A^{j_1}B^l \\ &= (A^2)^qABA^{-1}B^{-1}BAA^{j_{n-1}}...A^{j_1}B^l \\ &= (A^2)^q\,[A,B]\,BA^{j_{n-1}+1}...A^{j_1}B^l. \end{aligned}$$

Nótese que $(A^2)^q\,[A,B] \in \Gamma_1$, ya que $(A^2)^q$, $[A,B] \in \Gamma_1$, y que es una palabra con $n - 1$ ocurrencias de A tal que $\tau(BA^{j_{n-1}+1}...A^{j_1}B^l) = \tau(W) \equiv 0 \bmod 4$ y $\sigma(BA^{j_{n-1}+1}...A^{j_1}B^l) = j_1 + j_2 + ... + j_{n-1} + 1$, lo cual es par, ya que $j_1 + j_2 + ... + j_{n-1}$ es impar, entonces $\sigma(BA^{j_{n-1}+1}...A^{j_1}B^l) \equiv 0$ ó $2 \bmod 4$, de donde se sigue que $BA^{j_{n-1}+1}...A^{j_1}B^l \in \Pi_1 \cap \Pi_3$, entonces por la hipótesis inductiva $BA^{j_{n-1}+1}...A^{j_1}B^l \in \Gamma_1$, luego $W = (A^2)^q\,[A,B]\,BA^{j_{n-1}+1}...A^{j_1}B^l \in \Gamma_1$. Por tanto, en el caso en que $e = 0$, se cumple que si $W \in \Pi_1 \cap \Pi_3$ entonces $W \in \Gamma_1$.

Caso 2: Si $e = 1$, entonces $W = BA^{j_n}BA^{j_{n-1}}...A^{j_1}B^l$, como $W \in \Pi_1 \cap \Pi_3$, entonces $\sigma(W)$ es un número par. Si $j_1 + j_2 + ... + j_{n-1}$ es par, entonces j_n debe ser par, así que $j_n = 2q$ para algún $q \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned} W &= B(A^2)^qBA^{j_{n-1}}...A^{j_1}B^l \\ &= B(A^2)^qB^{-1}B^2A^{j_{n-1}}...A^{j_1}B^l. \end{aligned}$$

Nótese que por (3.24) $B(A^2)^q B^{-1} \in \Gamma_1$, además la palabra $B^2 A^{j_{n-1}} ... A^{j_1} B^l$ tiene $n-1 < n$ ocurrencias de A y es tal que $\tau(B^2 A^{j_{n-1}} ... A^{j_1} B^l) = \tau(W) \equiv 0 \bmod 4$ y $\sigma(B^2 A^{j_{n-1}} ... A^{j_1} B^l) = j_1 + j_2 + ... + j_{n-1}$ es par y por tanto $\sigma(B^2 A^{j_{n-1}} ... A^{j_1} B^l) \equiv 0$ ó $2 \bmod 4$, entonces $B^2 A^{j_{n-1}} ... A^{j_1} B^l \in \Pi_1 \cap \Pi_3$, luego, por hipótesis inductiva, $B^2 A^{j_{n-1}} ... A^{j_1} B^l \in \Gamma_1$.

Así que $W = B(A^2)^q B^{-1} B^2 A^{j_{n-1}} ... A^{j_1} B^l \in \Gamma_1$. Si $j_1 + j_2 + ... + j_{n-1}$ es impar, entonces j_n debe ser impar, así que $j_n = 2q + 1$ para algún $q \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned} W &= B(A^2)^q ABA^{j_{n-1}} ... A^{j_1} B^l = B(A^2)^q B^{-1} BAB^{-1} A^{-1} ABBA^{j_{n-1}} ... A^{j_1} B^l \\ &= B(A^2)^q B^{-1} [B, A] AB^2 A^{j_{n-1}} ... A^{j_1} B^l = B(A^2)^q B^{-1} [A, B]^{-1} B^2 A^{j_{n-1}+1} ... A^{j_1} B^l. \end{aligned}$$

Nótese que $B(A^2)^q B^{-1}$ y $[A, B]^{-1} \in \Gamma_1$ y que la palabra $B^2 A^{j_{n-1}+1} ... A^{j_1} B^l$ tiene $n-1 < n$ ocurrencias de A y es tal que $\tau(B^2 A^{j_{n-1}+1} ... A^{j_1} B^l) = \tau(W) \equiv 0 \bmod 4$ y $\sigma(B^2 A^{j_{n-1}+1} ... A^{j_1} B^l) = j_1 + j_2 + ... + j_{n-1} + 1$ lo cual es par y por tanto $\sigma(B^2 A^{j_{n-1}+1} ... A^{j_1} B^l) \equiv 0$ ó $2 \bmod 4$, entonces $B^2 A^{j_{n-1}+1} ... A^{j_1} B^l \in \Pi_1 \cap \Pi_3$ y por hipótesis inductiva $B^2 A^{j_{n-1}+1} ... A^{j_1} B^l \in \Gamma_1$, así que $W = B(A^2)^q B^{-1} [A, B]^{-1} B^2 A^{j_{n-1}+1} ... A^{j_1} B^l \in \Gamma_1$. Podemos entonces concluir que $\Pi_1 \cap \Pi_3 \subset \Gamma_1$.

Ahora veamos que $\Pi_2 \cap \Pi_4 = \Gamma_2$. Similarmente como probamos que $\Gamma_1 \subset \Pi_1 \cap \Pi_3$ se prueba que los generadores de Γ_2 satisfacen las condiciones del conjunto $\Pi_2 \cap \Pi_4 = \{\sigma \equiv 0, 2 \text{ y } \tau \equiv \sigma\}$ y por tanto $\Gamma_2 \subset \Pi_2 \cap \Pi_4$. Para probar que $\Pi_2 \cap \Pi_4 \subset \Gamma_2$ aplicamos nuevamente inducción sobre el número n de ocurrencias de A en la palabra. Nótese que

$$A^2 B^2 \left[A^2, B\right] = -A^2 A^2 BA^{-2} B^{-1} = -BA^{-2} B^{-1} = B(-A^{-2}) B^{-1},$$

entonces $B(-A^{-2})B^{-1} \in \Gamma_2$, de donde $(B(-A^{-2})B^{-1})^{-1} = B(-A^2)B^{-1} \in \Gamma_2$, entonces $B(A^2 B^2)^r B^{-1} \in \Gamma_2$ para cualquier $r \in \mathbb{Z}$. Sea $W \in \Pi_2 \cap \Pi_4$ una palabra con $n = 1$ ocurrencia de A, entonces $W = B^e A^{j_1} B^l$, donde $e \in \{0, 1\}$, $j_1 \in \mathbb{Z}$ y $l \in \{0, 1, 2, 3\}$. Si $e = 0$, entonces $W = A^{j_1} B^l$. Dado que $W \in \Pi_2 \cap \Pi_4$, entonces $\sigma(W) \equiv 0$ ó $2 \bmod 4$, de donde $j_1 = 2q$ para algún $q \in \mathbb{Z}$ y $\tau(W) \equiv \sigma(W) \bmod 4$, de donde $l = j_1 = 2q$, entonces

$$W = A^{2q} B^{2q} = (A^2 B^2)^q \in \Gamma_2.$$

Si $e = 1$, entonces $W = BA^{j_1} B^l$ y nuevamente como $W \in \Pi_2 \cap \Pi_4$, entonces $\sigma(W) \equiv 0$ ó $2 \bmod 4$, de donde $j_1 = 2q$ para algún $q \in \mathbb{Z}$ y $\tau(W) \equiv \sigma(W) \bmod 4$, de donde $l + 1 = j_1 = 2q$, de donde

$$W = BA^{2q} B^{2q-1} = BA^{2q} B^{2q} B^{-1} = B(A^2 B^2)^q B^{-1} \in \Gamma_2.$$

Así cualquier palabra en $\Pi_2 \cap \Pi_4$ con una ocurrencia de A pertenece a Γ_2. Supongamos que cualquier palabra en $\Pi_2 \cap \Pi_4$ con menos de n ocurrencias de A está en Γ_2. Sea $W \in \Pi_2 \cap \Pi_4$ una palabra con n ocurrencias de A. Similarmente como en la contenencia $\Pi_1 \cap \Pi_3 \subset \Gamma_2$ se podrá ver que en cualquier caso la palabra W se podrá escribir como un producto de elementos de Γ_2 y una palabra V^* que cumple las condiciones del conjunto $\Pi_2 \cap \Pi_4$ pero que tendrá menos de n ocurrencias de A y entonces por la hipótesis inductiva $V^* \in \Gamma_2$ y así $W \in \Gamma_2$. A continuación mostramos dichas escrituras en los diferentes casos de W. Sabemos que $W = B^e A^{j_n} B A^{j_{n-1}} ... A^{j_1} B^l$, donde $e \in \{0, 1\}$, $j_v \in \mathbb{Z}$ $(v = 0, 1, ...n)$ y $l \in \{0, 1, 2, 3\}$. Si $e = 0$, entonces $W = A^{j_n} B A^{j_{n-1}} ... A^{j_1} B^l$, si $j_1 + j_2 + ... + j_{n-1}$ es par, entonces $j_n = 2q$ para algún $q \in \mathbb{Z}$, entonces

$$W = A^{2q} B A^{j_{n-1}} ... A^{j_1} B^l = (-A^2)^q (-I)^q B A^{j_{n-1}} ... A^{j_1} B^l,$$

si q es par

$$\begin{aligned} W &= (-A^2)^q B A^{j_{n-1}} ... A^{j_1} B^l = (-A^2)^q B (-A^{-2})^q B^{-1} B (-A^2)^q A^{j_{n-1}} ... A^{j_1} B^l \\ &= (-A^2)^q B (-A^{-2})^q B^{-1} B A^{j_{n-1}+2q} ... A^{j_1} B^l = (-A^2)^q B (-A^{-2})^q B^{-1} B A^{j_{n-1}+j_n} ... A^{j_1} B^l \\ &= (-A^2)^q B (-A^{-2})^q B^{-1} V^*, \end{aligned}$$

con $V^* = B A^{j_{n-1}+j_n} ... A^{j_1} B^l$, si q es impar

$$\begin{aligned} W &= (-A^2)^q B^2 B A^{j_{n-1}} ... A^{j_1} B^l = (-A^2)^q B^2 B (-A^{-2})^{q+1} B^{-1} B (-A^2)^{q+1} A^{j_{n-1}} ... A^{j_1} B^l \\ &= (-A^2)^q B (-A^{-2})^{q+1} B^{-1} B^3 A^{j_{n-1}+2q+2} ... A^{j_1} B^l \\ &= (-A^2)^q B (-A^{-2})^{q+1} B^{-1} B^3 A^{j_{n-1}+j_n+2} ... A^{j_1} B^l = (-A^2)^q B (-A^{-2})^{q+1} B^{-1} V^*, \end{aligned}$$

con $V^* = B^3 A^{j_{n-1}+j_n+2} ... A^{j_1} B^l$.

Ahora, si $j_1 + j_2 + ... + j_{n-1}$ es impar, entonces $j_n = 2q + 1$ para algún $q \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned} W &= A^{2q+1} B A^{j_{n-1}} ... A^{j_1} B^l = A^{2q} A B A^{j_{n-1}} ... A^{j_1} B^l \\ &= A^{2q} A B A^{-1} B^{-1} B A A^{j_{n-1}} ... A^{j_1} B^l = (-A^2)^q \,[A, B]\, (-I)^q B A^{j_{n-1}+1} ... A^{j_1} B^l, \end{aligned}$$

si q es par

$$\begin{aligned} W &= (-A^2)^q \,[A, B]\, B A^{j_{n-1}+1} ... A^{j_1} B^l = (-A^2)^q \,[A, B]\, B (-A^{-2})^q B^{-1} B (-A^2)^q A^{j_{n-1}+1} ... A^{j_1} B^l \\ &= (-A^2)^q \,[A, B]\, B (-A^{-2})^q B^{-1} B A^{j_{n-1}+2q+1} ... A^{j_1} B^l \\ &= (-A^2)^q \,[A, B]\, B (-A^{-2})^q B^{-1} B A^{j_{n-1}+j_n} ... A^{j_1} B^l = (-A^2)^q \,[A, B]\, B (-A^{-2})^q B^{-1} V^*, \end{aligned}$$

con $V^* = BA^{j_{n-1}+j_n}...A^{j_1}B^l$. Si q es impar

$$\begin{aligned} W &= (-A^2)^q\,[A,B]\,B^2BA^{j_{n-1}+1}...A^{j_1}B^l \\ &= (-A^2)^q\,[A,B]\,B^2B(-A^{-2})^{q+1}B^{-1}B(-A^2)^{q+1}A^{j_{n-1}+1}...A^{j_1}B^l \\ &= (-A^2)^q\,[A,B]\,B(-A^{-2})^{q+1}B^{-1}B^3A^{j_{n-1}+2q+1+2}...A^{j_1}B^l \\ &= (-A^2)^q\,[A,B]\,B(-A^{-2})^{q+1}B^{-1}B^3A^{j_{n-1}+j_n+2}...A^{j_1}B^l = (-A^2)^q\,[A,B]\,B(-A^{-2})^{q+1}B^{-1}V^*, \end{aligned}$$

con $V^* = B^3A^{j_{n-1}+j_n+2}...A^{j_1}B^l$.

Ahora si $e = 1$, entonces $W = BA^{j_n}BA^{j_{n-1}}...A^{j_1}B^l$, si $j_1 + ... + j_{n-1}$ es par, entonces j_n es par, esto es $j_n = 2q$ para algún $q \in \mathbb{Z}$, entonces

$$W = BA^{2q}BA^{j_{n-1}}...A^{j_1}B^l = B(-A^2)^qB^{-1}(-I)^qBBA^{j_{n-1}}...A^{j_1}B^l,$$

si q es par

$$\begin{aligned} W &= B(-A^2)^qB^{-1}BBA^{j_{n-1}}...A^{j_1}B^l = B(-A^2)^qB^{-1}(-A^{-2})^qB^2A^{j_{n-1}+2q}...A^{j_1}B^l \\ &= B(-A^2)^qB^{-1}(-A^{-2})^qB^2A^{j_{n-1}+j_n}...A^{j_1}B^l = B(-A^2)^qB^{-1}(-A^{-2})^qV^*, \end{aligned}$$

con $V^* = B^2A^{j_{n-1}+j_n}...A^{j_1}B^l$. Si q es impar

$$\begin{aligned} W &= B(-A^2)^qB^{-1}B^2BBA^{j_{n-1}}...A^{j_1}B^l = B(-A^2)^qB^{-1}B^2B^2(-A^{-2})^{q+1}(-A^2)^{q+1}A^{j_{n-1}}...A^{j_1}B^l \\ &= B(-A^2)^qB^{-1}(-A^{-2})^{q+1}B^2B^2A^{j_{n-1}+2q+2}...A^{j_1}B^l \\ &= B(-A^2)^qB^{-1}(-A^{-2})^{q+1}B^2B^2A^{j_{n-1}+j_n+2}...A^{j_1}B^l = B(-A^2)^qB^{-1}(-A^{-2})^{q+1}V^*, \end{aligned}$$

con $V^* = B^2B^2A^{j_{n-1}+j_n+2}...A^{j_1}B^l$. Ahora, si $j_1 + ... + j_{n-1}$ es impar, entonces j_n es impar, esto es $j_n = 2q + 1$ para algún $q \in \mathbb{Z}$, entonces

$$W = BA^{2q+1}BA^{j_{n-1}}...A^{j_1}B^l = B(-A^2)^qB^{-1}(-I)^qBABA^{j_{n-1}}...A^{j_1}B^l,$$

si q es par

$$\begin{aligned} W &= B(-A^2)^qB^{-1}BABA^{j_{n-1}}...A^{j_1}B^l = B(-A^2)^qB^{-1}BAB^{-1}A^{-1}ABBA^{j_{n-1}}...A^{j_1}B^l \\ &= B(-A^2)^qB^{-1}\,[B,A]\,B^2A^{j_{n-1}+1}...A^{j_1}B^l \\ &= B(-A^2)^qB^{-1}\,[A,B]^{-1}\,(-A^{-2})^qB^2A^{j_{n-1}+1+2q}...A^{j_1}B^l \\ &= B(-A^2)^qB^{-1}\,[A,B]^{-1}\,(-A^{-2})^qB^2A^{j_{n-1}+j_n}...A^{j_1}B^l = B(-A^2)^qB^{-1}\,[A,B]^{-1}\,(-A^{-2})^qV^*, \end{aligned}$$

con $V^* = B^2 A^{j_{n-1}+j_n} ... A^{j_1} B^l$. Si q es impar

$$\begin{aligned}
W &= B(-A^2)^q B^{-1} B^2 BABA^{j_{n-1}} ... A^{j_1} B^l = B(-A^2)^q B^{-1} B^2 [B, A] AB^2 A^{j_{n-1}} ... A^{j_1} B^l \\
&= B(-A^2)^q B^{-1} [B, A] B^2 B^2 A^{j_{n-1}+1} ... A^{j_1} B^l \\
&= B(-A^2)^q B^{-1} [B, A] B^2 B^2 (-A^{-2})^{q+1} A^{j_{n-1}+2q+2+1} ... A^{j_1} B^l \\
&= B(-A^2)^q B^{-1} [B, A] (-A^{-2})^{q+1} B^2 B^2 A^{j_{n-1}+j_n+2} ... A^{j_1} B^l \\
&= B(-A^2)^q B^{-1} [A, B]^{-1} (-A^{-2})^{q+1} V^*,
\end{aligned}$$

con $V^* = B^2 B^2 A^{j_{n-1}+j_n+2} ... A^{j_1} B^l$.

Por último, como los grupos $\Pi_1 \cap \Pi_3$ y $\Pi_2 \cap \Pi_4$ son subgrupos propios de los grupos Π_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ y Π_0 tiene índice 4 en los Π_k, entonces Π_0 tiene índice 2 en $\Pi_1 \cap \Pi_3$ y $\Pi_2 \cap \Pi_4$. ■

Proposición 3.3.4 ***Teorema 3.3.5*** *Si H es un subgrupo libre de Π de índice 4 entonces $H = \Pi_i$, con $i = 1, 2, ..., 8$, más aún si H es normal, entonces $H = \Pi_k$ y si H no es normal entonces $H = \Pi_{k+4}$ para algún $k = 1, 2, 3, 4$.*

Prueba. Sea H un subgrupo libre de Π de índice 4. Tenemos que H, HB, HB^2 y HB^3 son clases laterales derechas distintas, ya que si $B^i \in HB^j$, con $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$, entonces $B^i B^{-j} \in H$, entonces $B^{i-j} \in H$ y como H es libre la única potencia de B que está en H es B^0, así $i - j = 0$, entonces $i = j$. Dado que H es de índice 4, entonces $\Pi = \bigcup_{i=0}^{3} HB^i$. Supongamos que H es normal.

Vamos a hacer la prueba estudiando la clase lateral en la que se encuentra A.

i) Si $A \in H$, entonces $BAB^{-1} \in H$, ya que H es normal, entonces $(BAB^{-1})^{-1} = BA^{-1}B^{-1} \in H$, de donde $A(BA^{-1}B^{-1}) = ABA^{-1}B^{-1} = [A, B] \in H$. Así, $\langle A, [A, B] \rangle \subset H$, entonces $\Pi_1 \subset H$ y como Π_1 y H tienen índice 4 entonces $H = \Pi_1$.

ii) Si $A \in HB$, entonces

$$AB^{-1} \in H \Rightarrow AB^3 \in H \Rightarrow -AB \in H,$$

como H es normal

$$B(-AB)B^{-1} \in H \Rightarrow B(-A)BB^{-1} \in H \Rightarrow -BA \in H,$$

de donde $\Pi_4 = \langle -AB, -BA \rangle \subset H$ y nuevamente, como Π_4 y H son de índice 4, entonces $\Pi_4 = H$.

iii) Si $A \in HB^2$, entonces $AB^{-2} = AB^2 = -A \in H$. Se sigue que $B(-A)B^{-1} \in H$, esto es, $-BAB^{-1} \in H$. Luego $\Pi_3 = \langle -A, -BAB^{-1} \rangle \subset H$ y por tanto $H = \Pi_3$.

iv) Si $A \in HB^3$, entonces

$$AB^{-3} \in H \Rightarrow AB \in H,$$

de donde $B(AB)B^{-1} = BA \in H$, entonces $\Pi_2 = \langle AB, BA \rangle \subset H$ y por tanto $H = \Pi_2$, por tanto $H = \Pi_k$, con $k = 1, 2, 3, 4$.

Supongamos ahora que H no es normal. Sabemos que $B^i \notin H$ para $i = 1, 2, 3$, ya que H es libre.

Afirmación 1: $ABA^{-1}B \notin HB$, en efecto:

Si $ABA^{-1}B \in HB$, entonces

$$ABA^{-1}BB^{-1} \in H \Rightarrow ABA^{-1} \in H \Rightarrow (ABA^{-1})(ABA^{-1}) \in H \Rightarrow B^2 \in H,$$

lo cual es una contradicción.

Afirmación 2: Si $ABA^{-1}B \in HB^2$, entonces $[A, B] \in H$, en efecto:

Si $ABA^{-1}B \in HB^2$, entonces

$$ABA^{-1}BB^{-2} = ABA^{-1}B^3 = ABA^{-1}B^{-1} \in H,$$

de donde, $[A, B] \in H$.

Afirmación 3: $ABA^{-1}B \notin HB^3$, en efecto:

Si $ABA^{-1}B \in HB^3$, entonces

$$ABA^{-1}BB^{-3} = ABA^{-1}B^{-2} = ABA^{-1}B^2 = -ABA^{-1} \in H,$$

entonces $(-ABA^{-1})(-ABA^{-1}) = B^2 \in H$, lo cual es una contradicción.

De nuevo estudiemos las clases laterales en las que se encuentra A.

i) Supongamos que $A \in H$. Tenemos que $-[A, B] = -ABA^{-1}B^{-1} = ABA^{-1}B$. De la afirmación 1 sabemos que $-[A, B] \notin HB$, de la afirmación 3 sabemos que $-[A, B] \notin HB^3$ y de la afirmación 2 sabemos que si $-[A, B] \in HB^2$, entonces $[A, B] \in H$, como $A \in H$, entonces $\Pi_1 = \langle A, [A, B] \rangle \subset H$, entonces $\Pi_1 = H$, lo cual es una contradición con el hecho de que H no es normal.

Así, si $A \in H$, entonces $-[A, B] = -ABA^{-1}B^{-1} = ABA^{-1}B \in H$ y por tanto $\Pi_5 = \langle A, -[A, B] \rangle \subset H$ y en consecuencia $H = \Pi_5$.

ii) si $A \in HB$, entonces $AB^{-1} = AB^3 \in H$. Sabemos por las afirmaciones 1 y 3 que $-[A, B] \notin HB$ y que $-[A, B] \notin HB^3$ y si $-[A, B] \in HB^2$, por la afirmación 2, $[A, B] \in H$, entonces $\Pi_4 = \left\langle AB^3, [A, B] \right\rangle \subset H$, de donde $H = \Pi_4$, lo cual es una contradicción ya que H no es normal. Así $-[A, B] \in H$, entonces $\Pi_8 = \left\langle AB^3, -[A, B] \right\rangle \subset H$ y en consecuencia $H = \Pi_8$.

iii) Supongamos que $A \in HB^2$, entonces $AB^{-2} = AB^2 \in H$. Tenemos que $-[A, B] \notin HB$ y que $-[A, B] \notin HB^3$ y si $-[A, B] \in HB^2$, entonces $[A, B] \in H$, entonces $\Pi_3 =$

$\left\langle AB^2, [A,B]\right\rangle \subset H$, entonces $\Pi_3 = H$, lo cual es una contradicción, así que $-[A,B] \in H$. Luego $\Pi_7 = \left\langle AB^2, -[A,B]\right\rangle \subset H$ y en consecuencia $H = \Pi_7$.

iv) Si $A \in HB^3$, entonces $AB^{-3} = AB \in H$. Tenemos que $-[A,B] \notin HB$ y $-[A,B] \notin HB^3$ y si $-[A,B] \in HB^2$, entonces $[A,B] \in H$, entonces $\Pi_2 = \langle AB, [A,B]\rangle \subset H$, entonces $\Pi_2 = H$, lo cual es una contradicción, así que $-[A,B] \in H$. Entonces $\Pi_6 = \langle AB, -[A,B]\rangle \subset H$ y en consecuencia $H = \Pi_6$. Así, si H no es normal, entonces $H = \Pi_{k+4}$, $k = 1,2,3,4$. ■

Con el teorema anterior hemos probado que los únicos subgrupos libres de Π de índice 4 son $\Pi_1, ..., \Pi_8$.

Proposición 3.3.6 *El subgrupo conmutador* Π' *tiene índice infinito en* Π.

Prueba. Sea $\Gamma = \{W \in \Pi : \sigma(W) = \tau(W) = 0\}$, aquí no consideramos congruencias. Entonces $\Pi' \subset \Gamma$ y todos los cocientes ΓA^{4k} son disjuntos. Concluimos que $\left|\Pi : \Pi'\right| \geq \left|\Gamma : \Pi'\right| = \infty$.
■

Apéndice A

Definiciones, Notaciones y Resultados de Geometría Hiperbólica

En este apéndice se dan algunos conceptos básicos de Geometría Hiperbólica así como algunos resultados sin prueba, para más información ver [4] y [6].

Definición A.0.1 *Sea A una región en $\mathbb{R}^n$, una densidad en A es una función continua $\lambda : A \to \mathbb{R}^+$.*

Dada una densidad λ en una región A y $\gamma : [a, b] \to A$. una curva de clase C^1 en A, se define la $\lambda-$longitud de γ como

$$l_\lambda(\gamma) = \int_a^b \lambda(\gamma(t)) \left|\gamma'(t)\right| dt.$$

Sea λ una densidad definida en una región A de $\mathbb{R}^n$ y z_1 y $z_2 \in A$, se define la $\lambda-$distancia de z_1 a z_2 como

$$\inf_\gamma \{l_\lambda(\gamma)\},$$

donde el ínfimo es sobre todas las curvas γ de clase C^1 por tramos que unen z_1 con z_2. A esta distancia se le denota por $\rho_\lambda(z_1, z_2)$.

Teorema A.0.7 *Sea λ una densidad definida en una región A de $\mathbb{R}^n$, entonces la distancia ρ_λ define una métrica en A.*

Notación: Denotaremos por $\mathbb{H}^2$ al conjunto $\{x + iy : y > 0\}$, que geométricamente corresponde al semiplano superior del plano complejo, y denotamos por Δ al disco unitario $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

Definición A.0.2 *El plano superior $\mathbb{H}^2$ provisto de la métrica definida por la densidad*

$$\lambda(z) = \frac{1}{im(z)}$$

se le llama el plano hiperbólico y a esta métrica se le llama métrica hiperbólica.

Teorema A.0.8 *El grupo $PSL(2,\mathbb{R})$ actúa como un grupo de isometrías en $\mathbb{H}^2$ con la métrica hiperbólica.*

Teorema A.0.9 *Cualquier isometría del plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ es un elemento de $PSL(2,\mathbb{R})$, o es de la forma*

$$z \longmapsto \frac{a(-\bar{z})+b}{c(-\bar{z})+d},$$

donde a, b, c y $d \in \mathbb{R}$, $ad-bc=1$.

Definición A.0.3 *El disco unitario Δ provisto con la métrica definida por la densidad*

$$\sigma(w) = \frac{2}{1-|w|^2},$$

se le conoce como el disco de Poincaré y a la métrica inducida se le llama métrica hiperbólica.

A ambos modelos, el disco de Poincaré y el semiplano $\mathbb{H}^2$, se les conoce como plano hiperbólico.

Al estudiar las transformaciones parabólicas e hiperbólicas, como éstas son conjugadas a las traslaciones y homotecias, el modelo del semiplano es el más adecuado. En contraste, el ámbito donde se entienden mejor las transformaciones elípticas es el disco unitario, ya que las rotaciones se expresan en términos de complejos unitarios. Casi todas las propiedades que se cumplen en el semiplano se cumplen también en el disco de Poincaré. Es por ésto que en el siguiente apéndice y en el Capítulo 2 se usa la notación Δ indistintamente para referirnos al modelo del semiplano y al modelo del disco de Poincaré.

Definición A.0.4 *Llamamos grupo conforme a un grupo de transformaciones del plano hiperbólico que no alteran la medida de los ángulos.*

Apéndice B

Grupos Fuchsianos y propiedades

En este apéndice se da la definición de Grupos Fuchsianos, la clasificación de estos y algunas definiciones y resultados sin prueba que como ya hemos dicho son importantes para lo que se trabaja en el capítulo 2. Para mayor información, ver [4] y [6].

Definición B.0.5 *Un grupo G de transformaciones de Möbius es un grupo Fuchsiano si existe un disco $G-$invariante en el cual G actúa discontinuamente.* .

Se puede probar, ver [6], que en un grupo fuchsiano se dan las siguientes condiciones

1) Si un grupo fuchsiano G es finito, entonces es cíclico generado por una rotación de ángulo $2\pi/n$ en torno a un punto, para algún entero positivo n.

2) Si G es infinito y no contiene elementos hiperbólicos, entonces es cíclico infinito generado por un único elemento parabólico y no contiene elementos elípticos.

3) Si G contiene un elemento hiperbólico que genera un subgrupo de índice finito entonces hay dos posibilidades:

a) G es cíclico infinito, generado por el elemento hiperbólico

b) G tiene un subgrupo de índice 2 generado por el elemento hiperbólico.

4) En los demás casos, G contiene un subgrupo isomorfo al grupo libre de rango 2 y sólo contiene elementos hiperbólicos.

Observación: Tenemos que si se da una de las condiciones 1 a 3 anteriormente descritas se dice que el grupo es *elemental*, mientras que si se da 4) el grupo se dice *no elemental*.

Ahora bien, podemos notar que todo elemento elíptico de un grupo fuchsiano tiene orden finito y el grupo es cíclico siempre que sus elementos no triviales compartan el conjunto de puntos fijos.

Definición B.0.6 *Sea G un grupo que actúa en un espacio X y la proyección canónica $p : X \to X/G$. Un subconjunto cerrado $F \subset X$ es una región fundamental para la acción de G si la restricción $p|_{\mathring{F}} : \mathring{F} \to X/G$ es inyectiva y la restricción $p|_F : F \to X/G$ es sobreyectiva. Esto es equivalente a que cumpla $\bigcup_{g\in G} g(F) = X$ y $\mathring{F} \cap g(\mathring{F}) = \varnothing$ para todo $g \in G$. Llamamos tesela al conjunto $g(F)$ para un $g \in G$, y teselación a la familia $\{g(F) : g \in G\}$.*

Observación: Al conocer la región fundamental para la acción de G podemos obtener información acerca de los generadores y relaciones de dicho grupo o también saber de la topología y la geometría de X/G.

Nótese que si $F \subset X$ es una región fundamental, se puede entender el cociente X/G como F identificando los puntos de su borde que pertenecen a una misma órbita.

Definición B.0.7 *Sean G un grupo fuchsiano y $p \in \Delta$ no fijado por ningún elemento no trivial de G.*

1) *Llamamos región de Dirichlet de G centrada en p al conjunto*

$$D_p(G) = \{z \in \Delta : \rho(z,p) \leq \rho(g(z),p) \text{ para todo } g \in G\}$$

2) *Decimos que G es geométricamente finito si admite una región fundamental que es un polígono convexo con un número finito de lados.*

Observación: **1)** $D_p(G)$ es intersección de semiplanos hiperbólicos y, por tanto, es hiperbólicamente convexa, esto es, un polígono hiperbólico convexo.

2) $D_p(G)$ está limitada por $H-$líneas que llamamos *geodésicas* y, posiblemente también por tramos del eje real (o de la frontera del disco unitario). Si dos de esas geodésicas se cortan en Δ, al punto de corte se le llama *vértice*. Los vértices resultan ser aislados.

3) Una región de Dirichlet es siempre localmente finita, esto es, un compacto tiene intersección no trivial con, a lo sumo, una cantidad finita de trasladados de $D_p(G)$.

4) Dado que las regiones de Dirichlet son convexas y localmente finitas, entonces, dichas regiones tienen las siguientes propiedades:

a) Los conjuntos de vértices y lados son numerables.

b) Cada vértice está exactamente en dos lados.

c) Dos lados se cortan en a lo sumo un vértice.

Proposición B.0.10 *Sea G un grupo fuchsiano, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *G es geométricamente finito.*

2) *La superficie Δ/G es topológicamente finita (es decir, es homeomorfa a una superficie compacta con una cantidad finita de perforaciones)*

3) *G es finitamente generado.*

Sean G un grupo fuchsiano y u y v vértices de una región de dirichlet $D_p(G)$, entonces:

1) Se dice que u y v son *vértices congruentes* si existe $g \in G$ tal que $g(u) = v$. Esta congruencia define una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia que resultan de dicha relación son llamadas *ciclos*.

2) Si $s^* = g(s)$ para dos lados s y s^* de $D_p(G)$ y $g \in G$, decimos que s, s^* son *lados congruentes* y que g los *empareja* (no pueden existir conjuntos de más de dos lados congruentes, es decir, un lado es congruente consigo mismo o bien con solo un lado distinto).

3) Supongamos que u y v son vértices congruentes, tenemos que si u es fijado por un elemento elíptico h, entonces v es fijado por el elemento elíptico ghg^{-1}, de donde se sigue que si un elemento de un ciclo es fijado también son fijados el resto de vértices del ciclo. Un ciclo como éste es llamado *ciclo elíptico* y, a sus vértices, *vértices elípticos*. Como $D_p(G)$ es localmente finita entonces un ciclo pueda tener a lo sumo una cantidad finita de vértices.

4) La frontera de la región de Dirichlet $D_p(G)$ puede tener una cantidad no numerable de componentes en la frontera de Δ, pero sólo puede haber una cantidad numerable de ellas con longitud euclídea positiva. A tales componentes en ambas fronteras se le llaman *lados libres*, que son intervalos cerrados en la frontera de Δ.

5) Se llama *vértice propio en el infinito* a un punto de $\partial\Delta \cap \partial D_p(G)$ que pertenece a dos lados de $D_p(G)$, y *vértice impropio* si pertenece a un lado y un lado libre. Ambos tipos de vértices están en el infinito. Nótese que el elemento de G que fija un vértice propio tiene que ser parabólico, puesto que pertenece a $\partial\Delta$

6) El subgrupo estabilizador (con respecto a G) de un punto en Δ es cíclico finito (son elementos elípticos y, por tanto, de orden finito). Este subgrupo cíclico es maximal.

7) Dos vértices en un ciclo elíptico son congruentes, entonces sus estabilizadores son subgrupos conjugados en G, ya que tienen el mismo orden. Por tanto existe una correspondencia biunívoco entre los ciclos elípticos de $D_p(G)$ y las clases de conjugación de subgrupos cíclicos finitos maximales no triviales de G.

8) Se llama *período* al orden de un subgrupo finito maximal de G. Cada período se repite el número de clases de conjugación de subgrupos finitos maximales de G de ese orden.

9) Si m es el orden del estabilizador de uno de los vértices en un ciclo elíptico y $\theta_1, ..., \theta_t$ son los ángulos internos de los vértices del ciclo, entonces $\theta_1 + ... + \theta_t = 2\pi/m$.

10) Sea $\{g_1, ..., g_n\}$ la familia de elementos de G que empareja los lados del borde de una región de Dirichlet $D_p(G)$ y H el grupo generado por dichos elementos. Se puede ver cómo, uniendo a $D_p(G)$ regiones vecinas obtenidas mediante sucesivas aplicaciones de elementos de H, se consigue una teselación Δ, entonces $G = H$, esto es, $\{g_1, ..., g_n\}$ es un conjunto de generadores de G.

11) Mediante la identificación de lados congruentes en $D_p(G)$, el espacio cociente $D_p(G)/G$ es homeomorfo al espacio de órbitas Δ/G. Esto implica, en particular, que es suficiente que una región de Dirichlet sea compacta en Δ para que también lo sean el resto de regiones de Dirichlet.

Ahora veamos algunas características geométricas de los tipos de isometrías en un grupo fuchsiano. Supongamos que G un grupo fuchsiano

Si $g \in G$ es un elemento hiperbólico, la geodésica que conecta sus dos puntos fijos en $\partial\Delta$ (la cuál es una sola) se llama *eje* de g.

En el cociente Δ/G, el eje desciende a una geodésica cerrada.

Un elemento parabólico $g \in G$ fija un punto en $\partial\Delta$ y también fija el interior de un *horociclo*, el cuál es una circunferencia tangente a $\partial\Delta$ en el punto fijo. Una *cúspide* se define como un cociente de la forma $O/\langle g\rangle$; tiene longitud infinita pero área finita. Todo elemento parabólico $g \in G$ crea una cúspide. Como todo elemento parabólico es conjugado a una traslación $z \longmapsto z+1$, todas las cúspides son isométricas en una vecindad de ∞.

Un elemento elíptico fija un punto en Δ y da lugar a lo que se llama una *singularidad cónica* en Δ/G.

Si una superficie hiperbólica geométricamente finita no es compacta, entonces tiene terminaciones en el infinito. Las regiones fundamentales de G tienen puntos o intervalos en $\partial\Delta$. Cuando una región fundamental tiene un intervalo (o más de uno) en $\partial\Delta$, los extremos de tal lado son puntos fijos de una isometría hiperbólica g. El cociente $\Delta/\langle g\rangle$ es un cilindro hiperbólico, la mitad del cual es homeomorfo a la terminación correspondiente de Δ/G, que se ensancha exponencialmente y tiene área infinita.

En síntesis en un grupo fuchsiano G tienen lugar las siguientes correspondencias:

$$\begin{array}{rcl}\text{geodésicas cerradas en } \Delta/G & \longleftrightarrow & \text{Clases de conjugación de elementos hiperbólicos de } G.\\ \text{Cúspides} & \longleftrightarrow & \text{Órbitas de puntos fijos parabólicos de } G.\\ \text{Puntos Cónicos} & \longleftrightarrow & \text{Órbitas de puntos fijos elípticos de } G.\end{array}$$

Además toda superficie hiperbólica geométricamente finita admite una descomposición

$$\Delta/G = K \cup \text{Cúspides} \cup \text{Terminaciones Hiperbólicas}$$

como unión de una superficie compacta K con borde y una cantidad finita de cúspides y terminaciones hiperbólicas.

Sea G un grupo fuchsiano, como vimos anteriormente, una región de Dirichlet tiene un número finito de ciclos elípticos y por tanto un número finito de clases de conjugación de subgrupos cíclicos finitos maximales no triviales, digamos r, supongamos que los órdenes de dichas clases de conjugación son $m_1, ..., m_r$ (cada m_j es mayor e igual que 2). Si G es geométricamente finito (equivalentemente G finitamente generado) entonces tiene un número finito s de cúspides y un número finito t de terminaciones hiperbólicas y a cada grupo se le asigna la *signatura* de G como

$$(g : m_1, ..., m_r; s; t)\,,$$

donde g es el género de la superficie Δ/G.

Definición B.0.8 *El símbolo*

$$(g : m_1, ..., m_r; s; t)$$

es llamado la signatura de G, donde g es el género de la superficie Δ/G.

Observación: En ocasiones escribimos la signatura de un grupo teniendo en cuenta los órdenes de los elementos parabólicos, los cuales sabemos que tienen orden infinito, y no se tienen en cuenta en la notación las terminaciones hiperbólicas ni las cúspides si se sabe que éstas son cero. Ilustrando esta situación, si por ejemplo sabemos que el grupo G tiene 2 elementos parabólicos, Δ/G no tiene terminaciones hiperbólicas y $m_1, ..., m_r$ son los órdenes de las clases de conjugación de subgrupos cíclicos finitos maximales no triviales de G y g es el género de Δ/G, entonces la signatura de G se podría escribir como $(g : m_1, ..., m_r, \infty, \infty)$ y si, además de no tener terminaciones hiperbólicas, no tiene elementos parabólicos entonces escribimos la signatura de G como $(g : m_1, ..., m_r)$.

Definición B.0.9 *Sea G un grupo fuchsiano que actúa en el plano hiperbólico Δ, decimos que G es de primera clase si la órbita de todo punto se acumula en todo punto de $\partial\Delta$ y así cualquier conjunto convexo $G-$invariante no vacío es necesariamente todo el plano hiperbólico. Decimos que G es de segunda clase si $\partial\Delta$ es la unión disjunta del conjunto límite Λ de G y una unión contable de arcos abiertos mutuamente disjuntos σ_j.*

Observación: Sea L_j la geodésica con los mismos puntos finales de σ_j y sea H_j el semiplano abierto acotado por L_j y separado de σ_j por L_j. Como la colección $\{\sigma_j\}$ es $G-$invariante, la colección $\{H_j\}$ también lo es. y así

$$N = \bigcap_j H_j, \tag{B.1}$$

es un subconjunto convexo $G-$invariante de Δ.

Definición B.0.10 *Sea G un grupo fuchsiano no elemental actuando en Δ. Sea N definido por (B.1) si G es de segunda clase y sea $N = \Delta$ si G es de primera clase, entonces N es llamado la región de Nielsen de G.*

Teorema B.0.11 *N es el subconjunto convexo abierto $G-$invariante no vacío más pequeño de Δ.*

Teorema B.0.12 *Existe un grupo fuchsiano finitamente generado no elemental con signatura $(g : m_1, ..., m_r; s; t)$ y $m_j \geq 2$ si y sólo si*

$$2g - 2 + s + t + \sum_{j=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) > 0.$$

Sea G un grupo fuchsiano finitamente generado no elemental con signatura $(g : m_1, ..., m_r; s; t)$ y región de Nielsen N. Entonces

$$h - \text{área}(N/G) = 2\pi \left[2g - 2 + s + t + \sum_{j=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{m_j} \right) \right].$$

Si G es de primera clase, entonces $N = \Delta$ y $t = 0$: así obtenemos una fórmula para el área de cualquier polígono fundamental.

Corolario B.0.13 *Sea G un grupo fuchsiano finitamente generado de primera clase con signatura $(g : m_1, ..., m_r; s; 0)$. Entonces para cualquier polígono fundamental convexo P de G,*

$$h - \text{área}(P) = 2\pi \left[2g - 2 + s + \sum_{j=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{m_j} \right) \right]$$

Teorema B.0.14 *Para todo grupo fuchsiano no elemental G con región de Nielsen N*

$$h - \text{área}(N/G) \geq \pi/21.$$

Se da la igualdad cuando G tiene signatura $(0 : 2, 3, 7; 0; 0)$ en cuyo caso $N = \Delta$.

Bibliografía

[1] I. Agol, D. D. Long, and A. W. Reid, *The Bianchi Groups are separable on geometrically finite subgroups*, Annals of Mathematics, **153** (2001), 599-621

[2] S. Alaca, K.S. Williams, *Introductory algebraic number theory*, Cambridge University Press (2004)

[3] S. Bachmuth and H. Mochizuki, *triples of* 2×2 *matrices which generate free groups*, Proc. Am. Math. Soc. 59 (1976), 25-28

[4] A.F. Beardon, *The geometry of dicrete groups*, Springer, Berlin 1983.

[5] F. Bonahon, *Low-Dimensional Geometry, From Euclidena Surfaces to Hyperbolic Knots,* Student Mathematical Library, **V. 49,** A.M.S , 2009.

[6] D. Borthwick, *Introduction to Spectral theory on Hyperbolic Surfaces*, Birkhauser, 2007

[7] J.L. Brenner, *Quelques groupes libres de matrices*, C. R. Acad. Sci. Paris 24 (1955), 1689-1691

[8] I.N. Cangül, *Normal subgroups of Hecke groups*, Ph.D. Thesis, Southampton University, December (1993).

[9] I.N. Cangül and D.Singerman, *Normal subgroups of Hecke groups and regular maps*, Math.Proc.Cambridge.Philos.Soc. **123** (1998), 59-74.

[10] B.Fine, F.Levin and G.Rosenberger, *Faithful complex representations of one relator groups*, N.Z.J.Math. **26** (1997),45-52.

[11] J.Gilman, *The structure of two-parabolic space: parabolic dust and iteration*, Geom.Dedicata **131** (2008), 27-48.

[12] J.Gilman and P.Waterman, *Classical two-parabolic T-Schottky groups*, J.Analyse Math. **98** (2006), 1-42.

[13] E. Hecke. *Über die bestimmung dirichletscher reihen durch ihre funktionalgleichungen.* Math. Ann; **112** (1936), 664-699

[14] M.J.Knopp and M.Newman, *On groups related to the Hecke groups*, Proc. Amer.Math.Soc. **119** (1993), 77-80.

[15] R.Lyndon and J.Ullman, *Groups generated by two parabolic fractional linear transformations*, Can.J.Math. **21** (1969), 1388-1403.

[16] W.Magnus, A. Karras and D. Solitar, *Combinatorial group theory*, 2.ed, Dover Publ., New York 1976

[17] D. Mejía, Ch. Pommerenke and M.Toro, *On the parametrized modular group*, J.Analyse Math. (2015),

[18] J. M. Montesinos, *Calidoscopios y 3- Variedades*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2003.

[19] Ch. Pommerenke and M.Toro, *On the two-parabolic subgroups of SL(2,C)*, Rev.Col.Mat. **45** (2011), 37-50.

[20] Ch. Pommerenke and M.Toro, *Free subgroups of the parametrized modular group,* To appear in Rev.Col.Mat.

[21] Riley, R, *Nonabelian Representations of 2-Bridge knot groups*, Quart. J. Math. Oxford (2), **35** (1984), 191-208.

[22] R.Riley, *Holomorphically parametrized families of subgroups of SL(2,C)*, Mathematika **32** (1985),248-264.

[23] R. Riley, *Seven Excellent knots*, In R. Brown and T. Thickstun, ed., *Low Dimensional Topology*, Cambrige University Press, Cambrige (1982), 81-151.

[24] J.J. Rotman, *Theory of Groups*, Wm. C. Brown Publishers, Iowa, 1988.

[25] R. Sahin, S. Ikikardes and Ö. Koruoglu, *Extended Hecke groups* $\overline{H}(\lambda_q)$ *and their fundamental regions*, Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang), **15**(1) (2007), 87-94.

[26] E. Salcedo Martínez, *El Grupo De Möbius y La Métrica Hiperbólica*, preprint.

[27] L. N. Sanov, *A property of a representation of a free group,* Dokl. Acad. Nauk. SSSR57 (1957), 657-659.

[28] M. Scharlemann, *Subgroups of* $SL(2, C)$ *freely generated by three parabolic elements*, Department of mathematics, University of California (1978).

[29] B. Simon, *Representations of finite and compact groups,* American Mathematical Society,

[30] W. Thurston, *Tree- dimensional geometry and topology Vol. 1*, ed. S. Levy, Princeton Math. Ser. **35**, Princeton University Press, N.J. (1997).