Cohomología de productos semidirectos

Niny Johanna Arcila Maya

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas
Medellín, Colombia
2016

Cohomología de productos semidirectos

Niny Johanna Arcila Maya

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias Matemáticas

Director:
Ph.D. José Manuel Gómez Guerra

Línea de Investigación:
Topología Algebraica
Grupo de Investigación:
Grupo Interinstitucional de Investigación en Geometría y Topología

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas
Medellín, Colombia
2016

"[Mathematics] is security. Certainty. Truth. Beauty. Insight. Structure. Architecture. I see mathematics, the part of human knowledge that I call mathematics, as one thing—one great, glorious thing. Whether it is differential topology, or functional analysis, or homological algebra, it is all one thing. ... They are intimately interconnected, they are all facets of the same thing. That interconnection, that architecture, is secure truth and is beauty. That's what mathematics is to me."

PAUL R. HALMOS

Agradecimientos

Me gustaría expresar mi gratitud dando reconocimiento a todas las personas, que jugando papeles diferentes, hicieron posible la culminación de esta tesis.

A mi director de tesis, Ph.D. José Manuel Gómez Guerra, un especial agradecimiento por su paciencia ante mis numerosas inquietudes, por su incondicional orientación, por su profesional manera de trabajar y por su interés en el bienestar de sus estudiantes. Su experiencia y dedicación han sido fuente de motivación para continuar mi formación académica.

Quiero agradecer a mi mamá, Magnolia Maya López, por su apoyo, confianza y sincero amor. Sin lugar a duda sus palabras alentadoras en los momentos de desaliento fueron sumamente importantes durante la realización de mi pregrado y maestría.

Agradezco a mi papá, Luis Fernando Arcila Palacio, por sus sabios consejos, por ser ejemplo de seriedad y responsabilidad. Todas sus enseñanzas y amor han hecho de mi vida académica y personal más fácil.

Gracias a mis preciosas hermanitas por su ternura y por alegrar mis días con sus preguntas ocurrentes acerca de la matemática.

Le doy gracias a mi *Gaturris*, Jorge Alberto Coronado Sarmiento, por su comprensión, su paciencia y sus comentarios jocosos que hacían desaparecer mis preocupaciones.

A mis colegas y amigos por las conversaciones científicas y no científicas de las que tanto provecho he sacado.

A los jurados evaluadores de este trabajo les agradezco su tiempo y dedicación para corregir la versión final del mismo.

Finalmente, gracias a la Universidad Nacional de Colombia por haber financiado por completo mis estudios de posgrado, al haberme otorgado la beca de posgrado *Grado de Honor*.

Resumen

En el primer capítulo de este trabajo se demuestra que dado un grupo discreto G las definiciones geométrica y algebraica de la cohomología de G son equivalentes, es decir, se prueba que $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \cong H^n(BG;\mathbb{Z})$ para $n \geq 0$.

En el segundo capítulo se definen los conceptos básicos de sucesión espectral y se construye la sucesión espectral de *Lyndon-Hochshild–Serre* para extensiones de grupos.

En el tercer capítulo se introduce el concepto de acción compatible y se calcula la cohomología del grupo $\Gamma = \mathbb{Z}^n \rtimes \mathbb{Z}/p$ para p un número primo.

Palabras clave: cohomología de grupo, producto semidirecto, sucesión espectral, acción compatible.

Contenido

Lista de Figuras

Introducción

La teoría de cohomología de grupos tiene sus comienzos entre los años 1936 y 1942. Witold Hurewicz en el año 1936 demostró que la clase de homotopía de los espacios topológicos "inesféricos", aquellos que tienen grupos de homotopía triviales para grados superiores, está completamente determinada por su grupo fundamental, pero no se demostró la forma en que lo hacía. Luego Heinz Hopf en el año 1942 publicó su artículo *"Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe"*, este artículo contenía un resultado de carácter algebraico que proporcionó la manera en la que el grupo fundamental de un espacio topológico inesférico determinaba su tipo de homotopía.

Estos resultados dieron lugar a un hecho muy importante para su época: lograron expresar la dependencia de un invariante topológico sobre uno de tipo algebraico, el grupo fundamental. Así se conviertieron en la fuente no solo de la homología y la cohomología de grupos sino de las definiciones de funtor, dualidad, sucesión espectral, espacios topológicos *Eilenberg–MacLane*, funtores derivados y álgebra homológica.[1]

Este trabajo de grado se concentra en el cómputo de cohomología de grupos para un caso particular de grupos que se construyen mediante el producto semidirecto. En general, si G es un grupo discreto, los grupos de cohomología $H^n(G,\mathbb{Z})$ para $n \geq 0$ son invariantes algebraicos que capturan información intrínseca del grupo G. Estos grupos de cohomología pueden definirse de dos maneras distintas pero equivalentes. Desde el punto de vista geométrico, dado un grupo discreto G podemos encontrar un espacio llamado el espacio clasificante de G que se denota por BG. Este espacio clasificante es un espacio conexo que está determinado por las siguientes condiciones: el grupo fundamental de BG es G y los grupos de homotopía altos de BG son triviales. En otras palabras, BG es un espacio de Eileberg-Maclane de tipo $K(G,1)$. La definición geométrica de los grupos de cohomología de G está dada por los grupos de cohomología del espacio BG. Más precisamente, se tiene

$$H^n(G;\mathbb{Z}) := H^n(BG;\mathbb{Z}), \text{ para } n \geq 0.$$

Desde el punto de vista algebraico podemos definir los grupos de cohomología $H^n(G,\mathbb{Z})$ de la siguiente manera. Consideremos el anillo de grupo $\mathbb{Z}G$ asociado a G. Como grupo abeliano $\mathbb{Z}G$ es un grupo libre abeliano con generados los elementos de G. Utilizando este

[1] Está breve historia fue tomada del texto de S. MacLane [8] en el cual puede encontrarse una versión más detallada de la misma.

anillo podemos podemos definir $H^n(G,\mathbb{Z})$ de manera algebraica como

$$H^n(G;\mathbb{Z}) = \mathrm{Ext}^*_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}), \text{ para } n \geq 0.$$

Es interesante recalcar que las dos definiciones dadas anteriormente son equivalentes y por tanto podemos utilizar herramientas geométricas, topológicas y algebraicas para el cálculo de los grupos de cohomología.

A continuación describiremos brevemente el objetivo principal de este trabajo de grado. Sea p un número primo y consideremos un homomorfismo de grupos $\varphi : \mathbb{Z}/p \to GL_n(\mathbb{Z})$. Utilizando el homomorfismo φ podemos construir el producto semidirecto $\Gamma := \mathbb{Z}^n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/p$. El propósito principal de este proyecto de tesis es realizar el cálculo de la cohomología de los grupos $\Gamma = \mathbb{Z}^n \rtimes \mathbb{Z}/p$. Notemos que el homomorfismo $\varphi : \mathbb{Z}/p \to GL_n(\mathbb{Z})$ define una representación integral del grupo $\mathbb{Z}/p$. Cuando esta representación es fiel entonces el grupo Γ se puede pensar como un grupo cristalográfico, los cuales forman una clase importante de grupos por sus aplicaciones en geometría, álgebra y topología. En particular, el cálculo de estos grupos de cohomología determina el cálculo de la cohomología de orbidades toroidales de dimensión 6 los cuales juegan un papel importante en la teoría de cuerdas.

Para calcular la cohomología de los grupos de la forma $\Gamma = \mathbb{Z}^n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/p$ se puede utilizar la sucesión espectral de *Lyndon–Hochschild–Serre* asociada a la sucesión exacta corta

$$0 \to \mathbb{Z}^n \to \Gamma \to \mathbb{Z}/p \to 0.$$

En [1], Adem, Ge, Pan y Petrosyan demostraron que esta sucesión espectral colapsa en el término E_2. Además no hay problemas de extensión, por lo tanto se obtiene un isomorfismo

$$H^k(\Gamma;\mathbb{Z}) = \bigoplus_{i+j=k} H^i(\mathbb{Z}/p, H^j(\mathbb{Z}^n;\mathbb{Z})).$$

De esta manera se pueden producir cálculos explícitos de estos grupos de cohomología. En este trabajo de grado se van a estudiar las técnicas y los resultados fundamentales desarrollados en [1].

Este trabajo de tesis está organizado de la siguiente manera: En el capítulo 1 se estudian las definiciones de cohomología de grupos, en el capítulo 2 se introducen las nociones básicas de sucesiones espectrales y se construye la sucesión espectral de *Lyndon–Hoschshild–Serre* asociada a una extensión de grupos. En el capítulo 3 se dan las definiciones de acción compatible y acción especial y se calcula la cohomología del producto semidirecto de un $\mathbb{Z}G-$retículo finitamente generado con G, donde G es el grupo cíclico finitamente generado de orden p, con p un número primo. Finalmente, en el apéndice se estudian los conceptos de conjuntos simpliciales como conceptos preliminares para construir el espacio clasificante de un grupo discreto.

Capítulo 1

Cohomología de grupos

Este capítulo toma como referencia principal el libro de K. S. Brown [4] y la sección de $G-$CW complejos es tomada del texto de T. Dieck [15]. El propósito de este capítulo es demostrar que si G es un grupo discreto entonces las definiciones algebraica y geométrica de la cohomología de G son equivalentes. Para ello se introducen los conceptos de $G-$módulo, $G-$CW complejo, cohomología de grupo desde el punto de vista algebraico y topológico, se describen algunas resoluciones libres importantes de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G-$módulo y se presentan los resultados que permiten demostrar la equivalencia mencionada.

También se incluyen las definiciones y algunas propiedades de la cohomología de grupos con coeficientes y de módulos inducidos y coinducidos, ya que serán de utilidad en el segundo capítulo de este trabajo.

En este capítulo adoptaremos las siguientes convenciones: G siempre denotará un grupo discreto escrito multiplicativamente. A menos que de manera explicita se diga lo contrario, los módulos se entenderán como módulos a izquierda, las acciones de grupo serán acciones a izquierda y el conjunto de los enteros será un $G-$módulo trivial. Los grupos abelianos $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,-)$ y $-\otimes_{\mathbb{Z}}-$ se denotarán por $\mathrm{Hom}(-,-)$ y $-\otimes-$.

1.1. $G-$módulos

En general, si G es un grupo (no necesariamente finito) y R es un anillo puede construirse un $R-$módulo que tenga los elementos de G como base. Utilizando las operaciones de G y de R, este módulo puede dotarse de estructura de anillo.

Para esto, denotemos por RG o por $R[G]$ al conjunto de sumas formales $\sum_{g\in G} r_g g$, donde $g \in G$, $r_g \in R$ y $r_g = 0$, para todo $g \in G$, excepto para un número finito. Este conjunto tiene estructura de anillo con las siguientes operaciones:

$$\sum_{g\in G} r_g g + \sum_{g\in G} s_g g = \sum_{g\in G} (r_g + s_g) g,$$
$$\left(\sum_{g\in G} r_g g\right)\left(\sum_{h\in G} s_h h\right) = \sum_{g,h\in G} r_g s_h gh.$$

RG también tiene estructura de $R-$módulo con la operación

$$s\left(\sum_{g\in G} r_g g\right) = \sum_{g\in G} (s r_g) g.$$

De hecho, si R es conmutativo entonces RG es un álgebra sobre R.

Este anillo recibe el nombre de **anillo de grupo de** G **sobre** R y en el caso de que R sea conmutativo, recibe el nombre de **álgebra de grupo de** G **sobre** R.

Las estructuras básicas que aparecen en cohomología de grupos son los anillos de grupo sobre el anillo de los enteros y los módulos sobre estos anillos.

Si G es un grupo, el anillo $\mathbb{Z}G$ (o $\mathbb{Z}[G]$) se llamará simplemente **anillo de grupo** (o **anillo integral del grupo** G).
Ejemplos. (Anillos de grupo)

1. Si G es el grupo trivial entonces claramente $\mathbb{Z}[1] = \{x\cdot 1 \mid x\in\mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$.

2. Supongamos que G es un grupo cíclico finito de orden n con generador t, entonces los elementos de G son de la forma $\sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i$ con $a_i \in \mathbb{Z}$.

   Por ejemplo, para $n = 2$ tenemos que $G = \{1, t\}$ con $t^2 = 1$, es decir, $G \cong \mathbb{Z}/2$. Entonces el anillo del grupo $\mathbb{Z}/2$ es

   $$\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2] = \{x\cdot 1 + y\cdot t \mid x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

3. Sea G el grupo cíclico infinito generado por t donde el orden de t es infinito. Entonces $\mathbb{Z}[G] \cong \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, es decir, el anillo del grupo G es el anillo de los polinomios de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n) t^n$ con $a(n) \in \mathbb{Z}$ y $a(n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, excepto para un número finito.

Definición 1.1. Sea G un grupo. Un grupo abeliano A se dice $G-$**módulo** si G actúa linealmente sobre A, es decir, existe una acción de G en A tal que $g(a_1 + a_2) = ga_1 + ga_2$, para todo $g \in G$ y para todo $a_1,\ a_2 \in A$.

Resulta claro que un grupo abeliano es un $G-$módulo si y solo si es un $\mathbb{Z}G-$módulo, ya que si A es un $G-$módulo entonces A puede dotarse de estructura de módulo sobre $\mathbb{Z}G$ de la siguiente manera,

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) a = \sum_{g\in G} a_g (ga),$$

con $a_g \in \mathbb{Z}$ y $a \in A$. De aquí, si definimos la categoría $G-\mathrm{Mod}$ como aquella que tiene por objetos los $G-$módulos y por morfismos a las funciones $G-$equivariantes y, denotamos por $_{\mathbb{Z}G}\mathrm{Mod}$ a la categoría de los módulos sobre el anillo $\mathbb{Z}G$, tenemos que estas dos categorías $G-\mathrm{Mod}$ y $_{\mathbb{Z}G}\mathrm{Mod}$ pueden identificarse.

Si A y B son $G-$módulos denotaremos a los grupos abelianos $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(A,B)$ y $A\otimes_{\mathbb{Z}G}B$ por $\mathrm{Hom}_G(A,B)$ y $A\otimes_G B$ respectivamente. Observemos que por ser A un $G-$módulo a izquierda tiene sentido considerar el producto tensorial sobre $\mathbb{Z}G$ entre A y B porque A puede dotarse de estructura de $G-$módulo a derecha mediante la siguiente acción lineal a derecha:

$$ag = g^{-1}a, \quad \text{para todo } g \in G \text{ y } a \in A.$$

Ejemplos. ($G-$módulos)

1. Todo grupo abeliano A es un $G-$módulo con la acción trivial, esto es, $ga = a$ para todo $g \in G$ y para todo $a \in A$. En este caso diremos que A es un $G-$**módulo trivial**.
2. Supongamos que $G = \{1, \tau\}$ con $\tau^2 = 1$ y sea $A = \mathbb{Z}$. Definimos la acción de τ por el cambio de signo, $\tau a = -a$ para todo $a \in A$. Claramente esta acción es lineal, entonces $\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}/2-$módulo, es decir, un módulo sobre $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2]$ donde el producto está dado por
$$(x+y\tau)a = (x-y)a.$$
para todo $x, y, a \in \mathbb{Z}$.
3. Sea G un grupo y H un subgrupo de G. Veamos que $\mathbb{Z}[G/H]$ es un $G-$módulo.

   Se tiene que el grupo G actúa en el conjunto G/H por traslación a izquierda. Esta acción puede extenderse a una acción lineal de G en $\mathbb{Z}[G/H]$ de la siguiente manera: sea A el conjunto de representantes de las clases distintas de G/H entonces
$$g\left(\sum_{a\in A} n_a\overline{a}\right) = \sum_{a\in A} n_a\overline{ga},$$
para todo $n_a \in \mathbb{Z}$ y $g \in G$.
4. Sea R un anillo arbitrario. Recordemos que si A y B son $R-$módulos a izquierda entonces $\mathrm{Hom}(A,B)$ no tiene necesariamente estructura de $R-$módulo. De manera similar, si A es un $R-$módulo a derecha y B es un $R-$módulo a izquierda, entonces $A\otimes B$ solo tiene estructura de grupo abeliano. Pero cuando el anillo es $\mathbb{Z}G$ si se tienen estructuras de $G-$módulos para estos grupos abelianos.

   Sea G un grupo y consideremos los $G-$módulos A y B. Definimos la **acción diagonal en** $\mathrm{Hom}(A,B)$ como sigue,
$$(g\varphi)(a) = g\varphi(g^{-1}a),$$
para todo $g \in G$, $\varphi : A \longrightarrow B$ y $a \in A$. Y definimos la **acción diagonal en** $A\otimes B$ por,
$$g(a\otimes b) = ga\otimes gb,$$

para todo $g \in G$, $a \in A$ y $b \in B$.

Las acciones así definidas son lineales, con lo que $\text{Hom}(A,B)$ y $A \otimes B$ son $G-$módulos.

Existen dos $G-$módulos triviales importantes que permiten definir el funtor de los invariantes (también llamado funtor del punto fijo) y el funtor de los coinvariantes, los cuales son funtores que van de la categoría ${}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$ en ella misma.

Definición 1.2. Sea G un grupo y A un $G-$módulo.

1. Se define el subgrupo de los **invariantes de** A como
$$A^G = \{a \in A : \;\; ga = a \;\text{ para todo } g \in G\}.$$

2. Se define el cociente de los **coinvariantes de** A como
$$A_G = A/\text{submódulo generado por } \{(ga - a) : \;\; g \in G, \;\; a \in A\}.$$

Por definición es claro que tanto A^G como A_G son $G-$módulos triviales. Además A^G es el submódulo trivial maximal de A y A_G es el módulo cociente más grande de A que es trivial.

Dadas las definiciones anteriores, resultan naturales las definiciones de los funtores. El funtor de los invariantes, denotado por $-^G$, asigna a cada $G-$módulo el submódulo de sus invariantes y a cada morfismo $\varphi : A \longrightarrow B$ entre $G-$módulos le asigna el morfismo restricción $\varphi|_{A^G} : A^G \longrightarrow B^G$. La definición del funtor de los coinvariantes, $-_G$, es completamente análoga.

Nota 1. El grupo abeliano $\text{Hom}_G(A,B)$ se obtiene de $\text{Hom}(A,B)$ agregando la relación
$$\varphi(ga) = g\varphi(a)$$
para todo $\varphi : A \longrightarrow B$ homomorfismo de grupos abelianos, $g \in G$ y $a \in A$ o equivalentemente $(g\varphi)(a) = \varphi(a)$, es decir, $\text{Hom}_G(A,B) = \text{Hom}(A,B)^G$.

Similarmente el grupo abeliano $A \otimes_G B$ se obtiene de $A \otimes B$ agregando la relación
$$ag \otimes b = a \otimes gb$$
para todo $g \in G$, $a \in A$ y $b \in B$ lo que equivale a agregar la relación $ga \otimes gb = a \otimes b$, con lo que $A \otimes_G B = (A \otimes B)_G$.

La siguiente proposición permite determinar las propiedades que poseen los funtores de los invariantes y coinvariantes, al ser comparados con funtores conocidos.

Proposición 1.1. Sea A un $G-$módulo arbitrario y consideremos a $\mathbb{Z}$ como un $G-$módulo trivial. Entonces
$$A^G \cong \text{Hom}_G(\mathbb{Z},A) \quad \text{ y } \quad A_G \cong \mathbb{Z} \otimes_G A.$$

Demostración. Para ver que $A^G \cong \text{Hom}_G(\mathbb{Z},A)$ consideremos el mapeo $\text{Hom}_G(\mathbb{Z},A) \to A^G$ definido por $\varphi \mapsto \varphi(1)$ con $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow A$. Este mapeo es biyectivo y $\mathbb{Z}G-$homomorfismo.

Ahora para ver que $A_G \cong \mathbb{Z} \otimes_G A$ consideremos el mapeo $A_G \to \mathbb{Z} \otimes_G A$ dado por $\bar{a} \mapsto 1 \otimes a$ donde $a \in A$. Utilizando la propiedad universal del producto tensorial podemos definir un mapeo $\mathbb{Z} \otimes_G A \to A_G$ dado por $x \otimes a \mapsto x\bar{a}$. Estos mapeos son inversos entre si y son $\mathbb{Z}G-$homomorfismos. $\square$

La proposición 1.1 nos permite establecer las siguientes propiedades de los funtores $-^G$ y $-_G$.

Proposición 1.2. Sea G un grupo.

1. **Exactitud a izquierda:** Sea $0 \to A \to B \to C$ una sucesión exacta de $G-$módulos, entonces la sucesión inducida $0 \to A^G \to B^G \to C^G$ es exacta.
2. Si F es un $\mathbb{Z}G-$módulo libre con base $\{e_i\}_{i \in I}$, entoces F^G es un grupo abeliano libre.
3. **Exactitud a derecha:** Sea $A \to B \to C \to 0$ una sucesión exacta de $G-$módulos, entonces la sucesión inducida $A_G \to B_G \to C_G \to 0$ es exacta.
4. Si F es un $\mathbb{Z}G-$módulo libre con base $\{e_i\}_{i \in I}$, entoces F_G es un grupo abeliano libre con base $\{\overline{e_i}\}_{i \in I}$.

Proposición 1.3. Sea G un grupo y M un $G-$módulo. Si H es un subgrupo normal de G entonces,

(i) La acción de G en M induce una acción de G/H en $\mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}, M)$.

(ii) Existe un isomorfismo $\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, M) \cong \mathrm{Hom}_{G/H}(\mathbb{Z}, \mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}, M))$.

Demostración.

(i) Sea $g \in G$ y $\alpha : \mathbb{Z} \to M$ un homomorfimo de $\mathbb{Z}H-$módulos. Se define la acción de G/H en $\mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}, M)$ por $(\overline{g}\alpha)(x) := g\alpha(x)$ para todo $x \in \mathbb{Z}$.

Veamos que $\overline{g}\alpha : \mathbb{Z} \to M$ es un homomorfismo sobre $\mathbb{Z}H$.

Que $\overline{g}\alpha$ sea homomorfismo de grupos es consecuencia de que α es un homomorfismo de grupos y del hecho de que G actúe linealmente en M. Basta verificar que $(\overline{g}\alpha)(x) = h(\overline{g}\alpha)(x)$ para todo $h \in H$ y para todo $x \in \mathbb{Z}$. Sea $h \in H$ entonces

$$h(\overline{g}\alpha)(x) = h(g\alpha(x)) = g(\underbrace{(g^{-1}hg)}_{\in H}\alpha(x)) = g\alpha(x) = (\overline{g}\alpha)(x).$$

Así $\overline{g}\alpha$ es homomorfismo de $\mathbb{Z}H-$módulos.

Ahora veamos que en efecto esto define una acción lineal de G/H en $\mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}, M)$. Sean $g,\ l \in G$ y supongamos que existe $h \in H$ tal que $g = lh$ entonces para todo $x \in \mathbb{Z}$,

$$(\overline{g}\alpha)(x) = g\alpha(x) = (lh)\alpha(x) = l\alpha(x) = (\bar{l}\alpha)(x),$$

es decir, la acción está bien definida. Es fácil verificar las propiedades de acción y la de linealidad.

(ii) Definamos $\Phi : \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, M) \to \mathrm{Hom}_{G/H}(\mathbb{Z}, \mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}, M))$ como sigue: sea $\alpha : \mathbb{Z} \to M$ un homomorfismo de $\mathbb{Z}G-$módulos entonces

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha := \Phi(\alpha) : \mathbb{Z} &\to \mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}, M) \\ 1 &\mapsto \alpha. \end{aligned}$$

Notemos que $\Phi_\alpha \in \mathrm{Hom}_{G/H}(\mathbb{Z}, \mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}, M))$, pues para todo $x, y, z \in \mathbb{Z}$ y $g \in G$,

$$\Phi_\alpha(x+y)(z) = (x+y)\alpha(z) = x\alpha(z) + y\alpha(z) = (\Phi_\alpha(x) + \Phi_\alpha(y))(z),$$

$$(\overline{g}\Phi_\alpha(x))(z) = g(x\alpha(z)) = g\alpha(xz) = \alpha(xz) = x\alpha(z) = \Phi_\alpha(x)(z) = \Phi_\alpha(\overline{g}x)(z).$$

Por otro lado, es claro que Φ es homomorfismo de grupos abelianos inyectivo. Basta ver que Φ es sobreyectivo.

Sea $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}, M)$ un homomorfismo de $\mathbb{Z}[G/H]-$módulos, es decir, $\varphi(x) = \overline{g}\varphi(x)$ para todo $x \in \mathbb{Z}$ y para todo $g \in G$.

Consideremos $\alpha := \varphi(1) \in \mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}, M)$ y veamos que $\alpha \in \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, M)$. Sea $g \in G$ y $x \in \mathbb{Z}$ entonces

$$g\alpha(x) = g\phi(1)(x) = (\overline{g}\varphi(1))(x) = \varphi(1)(x) = \alpha(x).$$

Así $\alpha \in \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, M)$ es tal que $\Phi_\alpha = \varphi$.

□

Proposición 1.4. Sea M un $G-$módulo y sea M_0 su estructura de grupo abeliano. Entonces $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}G, M)$ (con la acción diagonal) es isomorfo a $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}G, M_0)$.

Demostración. Recordemos que la acción de G en $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}G, M)$ está dada por

$$(g\alpha)(a) = g\alpha(g^{-1}a),$$

para todo $g, a \in G$ y $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}G, M)$.

Y la acción de G en $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}G, M_0)$ está dada por

$$(g\alpha)(a) = \alpha(g^{-1}a),$$

para todo $g, a \in G$ y $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}G, M)$.

Definamos $\Lambda : \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}G, M_0) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}G, M)$ por $\Lambda_\alpha : \mathbb{Z}G \to M$, $g \mapsto g\alpha(g)$, para todo $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}G, M_0)$ y $g \in G$.

- Λ_α está bien definida y es homomorfismo de grupos abelianos,es decir, Λ_α pertenece a $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}G, M)$.
- Veamos que Λ es homorfismo de grupos abelianos.

  Sean $\alpha,\ \beta \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}G, M_0)$ entonces

  $$\Lambda_{\alpha+\beta}(g) = g(\alpha+\beta)(g) = g\alpha(g) + g\beta(g) = \Lambda_\alpha(g) + \Lambda_\beta(g).$$

- Veamos que Λ es homorfismo de grupos $G-$módulos.

  Sean $g, h \in G$ y $\alpha \in \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}G, M_0)$ entonces

$$\Lambda_{g\alpha}(h) = h(g\alpha)(h) = h\alpha(g^{-1}h) = g(g^{-1}h\alpha(g^{-1}h)) = g\Lambda_{\alpha}(g^{-1}h) = g\Lambda_{\alpha}(h).$$

  Además $\Upsilon : \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}G, M) \to \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}G, M_0)$ definida por $\Upsilon_{\alpha} : \mathbb{Z}G \to M_0$, $g \mapsto g^{-1}\alpha(g)$, para todo $\alpha \in \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}G, M)$ y $g \in G$; es tal que,

$$\Lambda_{\Upsilon\alpha}(g) = g\Upsilon_{\alpha}(g) = g(g^{-1}\alpha(g)) = \alpha(g),$$

  para todo $\alpha \in \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}G, M)$ y $g \in G$.

  Similarmente $\Upsilon \circ \Lambda = Id$.

  Por tanto $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}G, M_0) \cong \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}G, M)$.

$\square$

Proposición 1.5. Sea G un grupo y M un $G-$módulo. Si H es un subgrupo normal de G entonces,

(i) La acción de G en M induce una acción de G/H en $\mathbb{Z} \otimes M$.

(ii) Existe un isomorfismo $\mathbb{Z} \otimes_G M \cong \mathbb{Z} \otimes_{G/H} (\mathbb{Z} \otimes_H M)$.

Proposición 1.6. Sea M un $G-$módulo y sea M_0 su estructura de grupo abeliano. Entonces $\mathbb{Z}G \otimes M$ (con la acción diagonal) es isomorfo a $\mathbb{Z}G \otimes M_0$.

El ejemplo número 3 de $G-$módulos muestra, de manera particular, cómo a partir de un conjunto con una acción de G se puede construir $G-$módulos. Este razonamiento puede generalizarse y da lugar a la definición de módulo de permutaciones.

Definición 1.3. Sea X un conjunto con una acción de G. Se denomina por **módulo de permutaciones de** X al $G-$módulo $\mathbb{Z}[X]$. La acción de G en $\mathbb{Z}[X]$ está dada por la extensión de la acción de G en X de la siguiente manera,

$$g\left(\sum_{x \in X} a_x x\right) = \sum_{x \in X} a_x(gx),$$

con $g \in G$ y $a_x \in \mathbb{Z}$.

Notemos que si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una colección de conjuntos tal que G actúa en cada X_i, entonces para $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$,

$$\mathbb{Z}[X] \cong \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}[X_i].$$

Proposición 1.7. Sea X un conjunto arbitrario con una acción libre de G. Entonces $\mathbb{Z}[X]$ es un $\mathbb{Z}G-$módulo libre cuya base es el conjunto de representantes de las $G-$órbitas distintas de X.

Demostración. Sea Λ el conjunto de representantes de las $G-$órbitas distintas de X. Sea $\mathscr{O}_x = \{gx : g \in G\}$ la $G-$órbita de $x \in X$ y $G_x = \{g \in G : gx = x\}$ el estabilizador de $x \in X$.

Como la acción de G en X es libre entonces G_x es trivial para todo $x \in X$, por tanto,

$$\mathbb{Z}[X] = \mathbb{Z}\left[\bigsqcup_{x\in\Lambda} \mathscr{O}_x\right] \cong \bigoplus_{x\in\Lambda} \mathbb{Z}[\mathscr{O}_x] \cong \bigoplus_{x\in\Lambda} \mathbb{Z}[G/G_x] \cong \bigoplus_{x\in\Lambda} \mathbb{Z}[G].$$

□

Definición 1.4. Sea G un grupo y consideremos a $\mathbb{Z}$ como un $G-$módulo trivial. La función $\varepsilon : \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z}$, dada por $\varepsilon(\sum_{g\in G} a_g g) = \sum_{g\in G} a_g$, se denomina el **mapeo aumentación** y el kernel de ε, denotado por I o IG, es llamado el **ideal aumentación**.
Proposición 1.8. El mapeo aumentación es sobreyectivo y como grupo aditivo el ideal aumentación es un grupo abeliano libre con base $\{g-1 : g \in G \text{ y } g \neq 1\}$.

Demostración. Claramente para todo $a \in \mathbb{Z}$, $a1 \in \mathbb{Z}G$ pertenece a la preimagen de a mediante ε.

Sea $x = \sum_{g\in G} a_g g \in \mathbb{Z}G$ y supongamos que $x \in IG$ entonces $\sum_{g\in G} a_g = 0$, esto es

$$x = x - \left(\sum_{g\in G} a_g\right) 1 = \sum_{g\neq 1} a_g(g-1).$$

De donde tenemos que aditivamente IG es generado por $\{g-1 : g \in G \text{ y } g \neq 1\}$, ahora veamos que este conjunto es linealmente independiente. Si $\sum_{g\neq 1} a_g(g-1) = 0$ entonces $\left(-\sum_{g\neq 1} a_g\right) 1 + \sum_{g\neq 1} a_g g = 0$, pero $\mathbb{Z}G$ es un grupo libre abeliano con base G por tanto $a_g = 0$ para todo $g \neq 1$.

Así $IG = \langle g-1 : g \in G \text{ y } g \neq 1\rangle$. □

1.2. Cohomología de grupos desde el punto de vista algebraico

Definición 1.5. Sea G un grupo. Se define la **cohomología de** G como

$$H^n(G) = \operatorname{Ext}^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}), \tag{1.1}$$

donde $\mathbb{Z}$ es considerado como un $G-$módulo trivial.

Dado que la definión de cohomología de grupos se hace a través del funtor $\operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, -)$ entonces a continuación vamos a definir algunas resoluciones proyectivas de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Vale la pena mencionar que pese a lo sencillo que es definir las resoluciones estándar y bar, realizar cálculos con ellas puede ser complicado.

1.2.1. Resolución estándar

Sea G un grupo. Para $n \geq 0$ definamos F_n el grupo libre abeliano generado por las $(n+1)-$tuplas $(g_0, g_1, \ldots, g_n)$ donde $g_i \in G$ para todo i.

Definimos una acción de G en G^{n+1} dada por

$$g \cdot (g_0, g_1, \ldots, g_n) = (gg_0, gg_1, \ldots, gg_n).$$

Para todo $n \geq 0$ notemos que F_n es igual al módulo de permutaciones de G^{n+1}, es decir, $\mathbb{Z}\left[G^{n+1}\right]$. Además la acción definida arriba claramente es libre. Luego por la proposición 1.7 se tiene que F_n es un $\mathbb{Z}G-$módulo libre cuya base es el conjunto de representantes de las $G-$órbitas distintas de G^{n+1}, es decir, podemos escoger como elementos básicos a aquellos que tienen la forma $(1, g_1, \ldots, g_n)$, con $g_i \in G$ para todo i,

$$F_n = \langle (1, g_1, g_2, \ldots, g_n) | g_i \in G \text{ para todo } i = 1, \ldots, n \rangle .$$

También definimos para todo $n > 0$ el mapeo $d_n : F_n \longrightarrow F_{n-1}$ dado por

$$d_n(g_0, g_1, \ldots, g_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (g_0, \ldots, \hat{g}_i, \ldots, g_n),$$

donde $(g_0, \ldots, \hat{g}_i, \ldots, g_n)$ denota el elemento $(g_0, \ldots, g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots, g_n)$.

Estos mapeos son homomorfismos de $\mathbb{Z}G-$módulos y son tales que $d_{n-1} \circ d_n = 0$, para todo $n > 0$.

Luego (F_*, d_*),

$$\cdots \to F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \to 0$$

es un complejo de cadenas de $\mathbb{Z}G-$módulos, donde cada uno de los F_n es libre.

Veamos que al aumentar este complejo de cadenas, es decir, agregar el mapeo aumentación en el grado cero del complejo de cadenas,

$$\cdots \to F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0,$$

este es exacto.

Proposición 1.9. El complejo de cadenas de $G-$módulos

$$\mathscr{F} : \quad \cdots \to F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

es exacto.

Demostración. Para probar la exactitud, veamos que este complejo de cadenas es homotópicamente equivalente al complejo trivial. Para esto basta ver que existe una homotopía entre los homomorfismos identidad y trivial, $id, \mathbf{0} : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$.

Definimos $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ como sigue

$$h_n(g_0,\ldots,g_n) = (1,g_0,g_1,\ldots,g_n)$$

para todo $n>0$ y $h_{-1}(1)=1$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_n \arrow[r] & F_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, dotted, "h_n"'] & \cdots \arrow[r] & F_1 \arrow[r] & F_0 \arrow[r] \arrow[dl, dotted, "h_0"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[dl, dotted, "h_{-1}"'] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & F_n \arrow[r] & F_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F_1 \arrow[r] & F_0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Es fácil ver que h_* es una homotopía entre $id_{\mathscr{F}}$ y $\mathbf{0}$. $\square$

De lo anterior tenemos entonces que

$$\cdots \to F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

es una resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, esta resolución recibe el nombre de **resolución estándar**.

1.2.2. Resolución bar

Sea G un grupo y consideremos la notación

$$[g_1|g_2|\cdots|g_n] = (1,g_1,g_1g_2,\ldots,g_1g_2\cdots g_n),$$

con $g_i\in G$ para todo i. Esta notación recibe el nombre de **notación bar**.

Observemos que para $n=0$ solo hay un elemento base, el cual se denotará por $[\ ]$. En este caso es claro que F_0 se identifica con $\mathbb{Z}G$, con lo que $[\ ]=1$.

En la notación bar la base del $\mathbb{Z}G-$módulo F_n se escribe de la forma $\{[g_1|\cdots|g_n] : g_i\in G\}$ y los $\mathbb{Z}G-$homorfismos $d_n : F_n \longrightarrow F_{n-1}$ son tales que $d_n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\delta_i$ donde

$$\delta_i[g_1|\cdots|g_n] = \begin{cases} g_1[g_2|\cdots|g_n], & \text{si } i=0 \\ [g_1|\cdots|g_{i-1}|g_ig_{i+1}|g_{i+2}|\cdots|g_n], & \text{si } 0<i<n \\ [g_1|\cdots|g_{n-1}], & \text{si } i=n. \end{cases}$$

La resolución estándar escrita en estos términos recibe el nombre de **resolución bar**.

En los primeros grados esta resolución tiene la forma,

$$F_2 \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0,$$

donde $d_2([g|h]) = g[h]-[gh]+[g]$ y $d_1([g]) = g-1$.

1.2.3. Resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ con G un grupo cíclico finito de orden n

Definición 1.6. Sea G un grupo finito. El **elemento norma** N del anillo $\mathbb{Z}G$ se define como la suma $N = \sum_{g \in G} g$.

Proposición 1.10. Si G es un grupo cíclico finito de orden n generado por t entonces el complejo de cadenas

$$\cdots \to \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

es una resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, donde $t-1$ y N son los mapeos multiplicación.

Demostración. En este caso el elemento norma de $\mathbb{Z}G$ tiene la forma $N = 1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}$.

Dado que G es conmutativo entonces el anillo de grupo de G es conmutativo, por tanto los mapeos $t-1$ y N son homomorfismos de $\mathbb{Z}G-$módulos.

Ahora, notemos que $(t-1)\circ N = N \circ (t-1) = t^n - 1 = 0$ y si $x \in \mathbb{Z}G$ entonces

$$\varepsilon((t-1)x) = \varepsilon(t-1)\varepsilon(x) = 0.$$

Así tenemos un complejo de cadenas. Basta probar la exactitud.

Por la proposición 1.8 se tiene que $Im\ \varepsilon = \mathbb{Z}$ y que $Ker\ \varepsilon \subseteq Im(t-1)$.

Veamos que $Ker(t-1) \subseteq Im\,N$. Supongamos que $x = \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i \in Ker(t-1)$ entonces

$$0 = (t-1)x = (t-1)\sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i = (a_{n-1}-a_0)+(a_0-a_1)t\cdots+(a_{n-2}-a_{n-1})t^{n-1},$$

con lo que $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1}$, es decir, $x = a_0(1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}) \in Im\,N$.

Finalmente $Ker\ N \subseteq Im(t-1)$, en efecto si $x = \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i \in Ker\ N$ entonces $0 = \varepsilon(Nx) = \varepsilon(N)\varepsilon(x) = n\varepsilon(x)$, es decir, $\varepsilon(\sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i = 0$, de aquí podemos reescribir

$$x = -(t-1)\left(a_0+(a_0+a_1)t+\cdots+(a_0+\cdots+a_{n-1})t^{n-1}\right) \in Im(t-1).$$

Así

$$\cdots \to \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

es una resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. $\square$

Ejemplos. (Cohomología de grupos)

1. Sea G el grupo trivial, como $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}$ entonces una resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}$ es
$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z} \to 0.$$
Así,
$$H^n(G) = \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } n = 0 \\ 0, & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

2. Consideremos $G = \{1, \tau\}$ con $\tau^2 = 1$. Como ya vimos
$$\cdots \xrightarrow{\tau-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{1+\tau} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\tau-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0,$$
es una resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Para calcular $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ debemos computar la cohomología del siguiente complejo de cocadenas,
$$0 \to \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{(\tau-1)^*} \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{(1+\tau)^*} \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}) \to \cdots.$$
Notemos que el complejo de cocadenas anterior es isomorfo al siguiente
$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\tau-1} \mathbb{Z} \xrightarrow{1+\tau} \mathbb{Z} \to \cdots.$$
Pero dado que la acción de G sobre $\mathbb{Z}$ es trivial, entonces para todo $x \in \mathbb{Z}$ tenemos que
$$(\tau - 1)(x) = (\tau x) - x = x - x = 0$$
$$(1 + \tau)(x) = x + (\tau x) = x + x = 2x.$$
Por tanto el complejo de cocadenas toma la forma
$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbf{2}} \mathbb{Z} \to \cdots,$$
y obtenemos,
$$H^n(G) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Z}/2, & \text{si } n \text{ es par y } n > 0 \\ 0, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

3. De manera más general, consideremos G un grupo cíclico finito de orden n generado por t. Entonces una resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ es
$$\cdots \to \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0.$$
Razonando como en el ejemplo anterior resulta que se debe calcular la cohomología del siguiente complejo de cocadenas,
$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbf{n}} \mathbb{Z} \to \cdots,$$
de donde,
$$H^n(G) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Z}/n, & \text{si } n \text{ es par y } n > 0 \\ 0, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

4. Sea G un grupo cíclico infinito generado por t. Veamos que una resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ es la siguiente

$$0 \to \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0.$$

Claramente $t-1$ es un homomorfismo de $\mathbb{Z}G-$módulos. Además, notemos que para todo $p(t) = \sum_{n=-N}^{N} a(n)t^n \in \mathbb{Z}G$ se tiene que

$$\begin{aligned}(t-1)p(t) &= \sum_{n=-N}^{N} a(n)t^{n+1} - \sum_{n=-N}^{N} a(n)t^n \\ &= a(N)t^{N+1} - a(-N)t^{-N} + \sum_{n=-N+1}^{N} \big(a(n-1)-a(n)\big)t^n.\end{aligned}$$

Entonces, si $p(t) \in \mathbb{Z}G$ es tal que $(t-1)p(t) = 0$, debe tenerse $a_i = 0$, para todo entero $-N \leq i \leq N$, de donde se sigue que $(t-1)$ es inyectiva.

También es claro que $\varepsilon((t-1)p(t)) = 0$. Falta probar que $Ker\ \varepsilon \subseteq Im\ (t-1)$. Sea $p(t) \in Ker\ \varepsilon$. Entonces para todo entero $-N \leq i \leq N$ definamos $q(t) = \sum_{i=-N}^{N} b(i)t^i$, con $b(i) := \sum_{n=-N}^{i} a(n)$, y $b(i) = 0$ en otro caso. Notemos que como $\sum_{n=-N}^{N} a(n) = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}(t-1)\big(-q(t)\big) &= -b(N)t^{N+1} + b(-N)t^{-N} + \sum_{i=-N+1}^{N} \big(b(i)-b(i-1)\big)t^i \\ &= b(-N)t^{-N} + \sum_{i=-N+1}^{N} \big(b(i)-b(i-1)\big)t^i = p(t).\end{aligned}$$

El complejo de cocadenas

$$0 \to \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{(t-1)^*} \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}) \to 0$$

es tal que el homomorfismo $(t-1)^*$ se vuelve cero, ya que $\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}G-$módulo trivial. De aquí la cohomología de $G \cong \mathbb{Z}$ está dada por $H^0(G) = H^1(G) = \mathbb{Z}$ y $H^n(G) = 0$ para todo $n > 1$.

De manera análoga puede definirse la homología de un grupo G haciendo uso del funtor $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, -)$, como sigue:

Definición 1.7. Sea G un grupo. Se define la **homología de** G como

$$H_n(G) = \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}), \tag{1.2}$$

donde $\mathbb{Z}$ es considerado como un $G-$módulo trivial.

Ejemplos. (Homología de grupos)

1. Si G es el grupo trivial entonces $H_n(G) = H^n(G)$, para todo $n \geq 0$.

2. Si G es el grupo cíclico de orden n generado por t entonces la homología de G es la homología del complejo de cadenas

$$\cdots \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbf{n}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathbb{Z} \to 0.$$

Con lo que,

$$H_n(G) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Z}/n, & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0, & \text{si } n \text{ es par y } n > 0. \end{cases}$$

3. Si G es un grupo cíclico infinito entonces $H_n(G) = H^n(G)$, para todo $n \geq 0$.

1.3. Cohomología y homología de grupos con coeficientes

Definición 1.8. Sea G un grupo y A un $G-$módulo. Para todo entero $n \geq 0$ definimos la **cohomología de G con coeficientes en A** como

$$H^n(G,A) = \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},A), \tag{1.3}$$

y la **homología de G con coeficientes en A** como

$$H_n(G,A) = \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},A), \tag{1.4}$$

donde $\mathbb{Z}$ es considerado como un $G-$módulo trivial.

En general podemos calcular $H_0(G,A)$ y $H^0(G,A)$ para un grupo G y un $G-$módulo A arbitrarios.

Proposición 1.11. Sea G un grupo y A un $G-$módulo entonces

$$H^0(G,A) = A^G \text{ y } H_0(G,A) = A_G.$$

Demostración. Consideremos la resolución libre $F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$ de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Entonces

$$0 \to \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z},A) \xrightarrow{\varepsilon^*} \mathrm{Hom}_G(F_0,A) \xrightarrow{\partial_1^*} \mathrm{Hom}_G(F_1,A),$$
$$F_1 \otimes_G A \xrightarrow{\partial_1 \otimes id} F_0 \otimes_G A \xrightarrow{\varepsilon \otimes id} \mathbb{Z} \otimes_G A \to 0,$$

son exactas, luego

$$H^0(G,A) = Ker(\partial_1^*) = Im(\varepsilon^*) \cong Hom_G(\mathbb{Z},A),$$
$$H_0(G,A) = \frac{F_0 \otimes_G A}{Im(\partial_1 \otimes id)} = \frac{F_0 \otimes_G A}{Ker(\varepsilon \otimes id)} \cong \mathbb{Z} \otimes_G A.$$

Por tanto, $H^0(G,A) = A^G$ y $H_0(G,A) = A_G$ por la proposición 1.1. $\square$

Ejemplos. (Cohomología y homología de grupos con coeficientes)

1. Si G es el grupo trivial entonces para todo $G-$módulo A se tiene que
$$H^0(G,A) = H_0(G,A) = A \text{ y } H^n(G,A) = H_n(G,A) = 0, \text{ para todo } n > 0.$$

2. Sea $G = \{1, \tau\}$, con $\tau^2 = 1$ y consideremos el $G-$módulo trivial $\mathbb{Z}/2$. Para calcular la cohomología y homología de G con coeficientes en $\mathbb{Z}/2$ debemos computar la cohomología y homología del complejo
$$0 \to \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}G,\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{(\tau-1)^*} \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}G,\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{(1+\tau)^*} \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}G,\mathbb{Z}/2) \to \cdots$$
$$\cdots \to \mathbb{Z}G \otimes_G \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{(1+\tau)\otimes id} \mathbb{Z}G \otimes_G \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{(\tau-1)\otimes id} \mathbb{Z}G \otimes_G \mathbb{Z}/2 \to 0$$
respectivamente. Estos complejos de cocadenas y cadenas son isomorfos a
$$0 \to \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\mathbf{2}} \mathbb{Z}/2 \to \cdots \quad \text{y} \quad \cdots \to \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\mathbf{2}} \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathbb{Z}/2 \to 0$$
respectivamente. De aquí $H^n(G,\mathbb{Z}/2) = H_n(G,\mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$, para todo entero $n \geq 0$.

3. Sea G un grupo cíclico finito de orden n generado por t y sea A un $G-$módulo arbitrario. Razonando como en ejemplos anteriores nuestro cálculo se reduce a realizar el cómputo de la cohomología y homología de los siguientes complejos
$$0 \to A \xrightarrow{t-1} A \xrightarrow{N} A \to \cdots \quad \text{y} \quad \cdots \to A \xrightarrow{N} A \xrightarrow{t-1} A \to 0.$$
Si $n \geq 1$ es impar entonces
$$H_n(G,A) = H^{n+1}(G,A) = \frac{Ker(t-1)}{Im\, N} = \frac{A^G}{Im\, N}.$$
Si $n \geq 2$ es par entonces
$$H_n(G,A) = H^{n-1}(G,A) = \frac{Ker\, N}{Im(t-1)}.$$
Pero podemos darle una mejor caracterización a esas cohomologías y homologías. Notemos que para todo $a \in A$ y $t^i \in G$ con $0 \leq i \leq (n-1)$
$$N(t^i a) = (1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1})(t^i a) = N(a),$$
$$t^i N(a) = t^i(1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1})(a) = N(a),$$
esto es $Im(N) \subseteq A^G$.

Definamos $\overline{N} : A_G \to A^G$ por $\overline{N}(\overline{a}) = N(a)$ para todo $\overline{a} \in A_G$. $\overline{N}$ así definido es un $\mathbb{Z}G-$homomorfismo y se le denomina el **mapeo norma**, así en términos del mapeo norma
$$\frac{A^G}{Im\, N} = Coker(\overline{N}) \quad \text{y} \quad \frac{Ker\, N}{Im(t-1)} = Ker(\overline{N}).$$

En resumen, si $n \geq 1$ es impar,

$$H_n(G,A) = H^{n+1}(G,A) = Coker(\overline{N})$$

y si $n \geq 2$ es par,

$$H_n(G,A) = H^{n-1}(G,A) = Ker(\overline{N}).$$

4. Si G es un grupo cíclico finito de orden n generado por t y consideramos al $G-$módulo trivial $\mathbb{Z}/n$, entonces $(\mathbb{Z}/n)^G = (\mathbb{Z}/n)_G = \mathbb{Z}/n$ y para todo $\overline{x} \in \mathbb{Z}/n$

   $$\overline{N}(\overline{x}) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} t^i\right)(\overline{x}) = \sum_{i=0}^{n-1} t^i\overline{x} = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{x} = n\overline{x} = 0.$$

   Así, por el ejemplo anterior, si $m \geq 1$ es impar entonces

   $$H_m(G,A) = H^{m+1}(G,A) = Coker(\overline{N}) = \mathbb{Z}/n$$

   y si $m \geq 2$ es par entonces

   $$H_m(G,A) = H^{m-1}(G,A) = Ker(\overline{N}) = \mathbb{Z}/n.$$

   Es decir, $H^m(G,\mathbb{Z}/n) = H_m(G,\mathbb{Z}/n) = \mathbb{Z}/n$ para todo entero $m \geq 0$.

5. Sea G un grupo cíclico de orden infinito generado por t y sea A un $G-$módulo arbitrario, entonces $H^1(G,A) = A_G$, $H_1(G,A) = A^G$ y $H^n(G,A) = H_n(G,A) = 0$, para todo $n > 1$.

1.3.1. H^* y H_* como funtores de una variable

Dado un grupo fijo G las nociones de cohomología y homología de G con coeficientes están dadas en términos de los funtores $\mathrm{Ext}^*_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},-)$ y $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}G}_*(\mathbb{Z},-)$. Esto significa que estos objetos pueden verse como funtores en la variable de los coeficientes. Es decir, podemos definir funtores $H^*(G,-)$ y $H_*(G,-)$ que van de la categoría $G-\mathrm{Mod}$ a la categoría de los grupos abelianos Ab.

El funtor $H^*(G,-)$ se define como sigue (de manera análoga se define el funtor $H_*(G,-)$),

$$G-\mathrm{Mod} \xrightarrow{H^*(G,-)} \mathrm{Ab}$$

$$\begin{array}{ccc} A & & H^*(G,A) \\ \varphi\Big\downarrow & \longmapsto & \Big\downarrow\varphi^* \\ B & & H^*(G,B), \end{array}$$

donde φ^* definido así: sea $\cdots \to F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$ una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Suprimimos $\mathbb{Z}$, cambiamos a ε por el mapeo trivial y luego aplicamos los funtores $\operatorname{Hom}_G(-,A)$ y $\operatorname{Hom}_G(-,B)$, con lo cual se obtiene

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_G(F_0,A) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\tau_0"] & \cdots \arrow[r] & \operatorname{Hom}_G(F_n,A) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\tau_n"] & \operatorname{Hom}_G(F_{n+1},A) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\tau_{n+1}"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_G(F_0,B) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \operatorname{Hom}_G(F_n,B) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_G(F_{n+1},B) \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

Luego definimos un homomorfismo de complejos de cocadenas

$$\tau : \operatorname{Hom}_G(F,A) \longrightarrow \operatorname{Hom}_G(F,B)$$

dado por $\tau_n(f) = \varphi \circ f$, para todo $f \in \operatorname{Hom}_G(F_n,A)$ y para todo entero $n \geq 0$. El homomorfismo inducido en cohomología por τ es el homomorfismo buscado

$$\varphi^* : H^*(G,A) \longrightarrow H^*(G,B).$$

Estos funtores, además de ser funtores covariantes, tienen las siguientes propiedades:
Teorema 1.12. Sea G un grupo. Entonces:

1. Existe un isomorfismo natural $H^0(G,A) \cong A^G$.
2. Existe un isomorfismo natural $H_0(G,A) \cong A_G$.
3. Para toda sucesión exacta corta $0 \to A \to B \to C \to 0$ de $G-$módulos y cada entero n existe un homomorfismo de grupos natural $\delta^n : H^n(G,C) \longrightarrow H^{n+1}(G,A)$ tal que la siguiente sucesión

   $$0 \to A^G \to B^G \to C^G \xrightarrow{\delta^1} H^1(G,A) \to H^1(G,B) \to H^1(G,C) \xrightarrow{\delta^2} H^2(G,A) \to \cdots$$

   es exacta larga.
4. Para toda sucesión exacta corta como en 3. y cada entero n existe un homomorfismo de grupos natural $\Delta^n : H_n(G,C) \longrightarrow H_{n-1}(G,A)$ tal que la siguiente sucesión

   $$\cdots \to H_2(G,C) \xrightarrow{\Delta_2} H_1(G,A) \to H_1(G,B) \to H_1(G,C) \xrightarrow{\Delta_1} A_G \to B_G \to C_G \to 0$$

   es exacta larga.
5. Si Q es un $G-$módulo inyectivo entonces $H^n(G,Q) = 0$ si $n > 0$.
6. Si P es un $G-$módulo proyectivo entonces $H_n(G,P) = 0$ si $n > 0$.

Demostración. Probaremos las propiedades impares ya que las pruebas de las pares son similares.

1. En la proposición 1.11 vimos que $H^0(G,A) \cong A^G$, entonces basta probar que este isomorfismo es natural. Para ello debemos ver que el isomorfismo definido en la proposición 1.1 entre $\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z},A)$ y A^G es natural. Es decir, debemos demostrar que si $\varphi : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo de $G-$módulos, entonces el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z},A) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\varphi^*"'] & A^G \arrow[d, "\varphi^G"] \\ \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z},B) \arrow[r, "\cong"] & B^G \end{tikzcd}$$

conmuta, pero esto es claro.

3. Sea $\cdots \to F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$ una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}G$. Dade que los F_i son proyectivos, por tanto planos, tenemos que la siguiente sucesión

$$0 \to \mathrm{Hom}_G(F,A) \to \mathrm{Hom}_G(F,B) \to \mathrm{Hom}_G(F,C) \to 0.$$

es una sucesión exacta corta de complejos de cadenas. Luego por el lema de la serpiente tenemos lo deseado.

5. Si $\cdots \to F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$ es una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}G$ y Q es inyectivo entonces

$$0 \to \mathrm{Hom}_G(F_0,Q) \to \mathrm{Hom}_G(F_1,Q) \to \cdots \to \mathrm{Hom}_G(F_n,Q) \to \cdots$$

es exacta de grado 1 en adelante.

□

De manera informal podemos decir que las propiedades 3. y 4. miden qué tan lejos están los funtores $-^G$ y $-_G$ de ser exactos.

1.3.2. H^* y H_* como funtores de dos variables

En el caso en el que no se fije un grupo (así como se hizo para definir el funtor anterior) las definiciones de cohomología y homología de grupos con coeficientes pueden verse como funtores de dos variables, tanto en la variable de los grupos como el la variable de los coeficientes, estos funtores los denotaremos por H^* y H_*.

Sea $\mathscr{A}$ la siguiente categoría: Los objetos son parejas (G,A), donde G es un grupo y A es un $G-$módulo; los morfismos son parejas $(\varphi, f) : (G,A) \longrightarrow (G',B)$, donde $\varphi : G \longrightarrow G'$ es un homomorfismo de grupos y $f : B \longrightarrow A$ es un homomorfismo de $G-$módulos, considerando a B como $G-$módulo por restricción de escalares vía φ. Esto quiere decir que la propiedad de $G-$equivarianza se escribe de la forma

$$f(\varphi(g)b) = gf(b) \quad \text{para todo } g \in G \text{ y } b \in B.$$

El funtor H^* va de la categoría $\mathscr{A}$ a la categoría Ab y es tal que,

$$\mathscr{A} \xrightarrow{\quad H^* \quad} \mathrm{Ab}$$

$$\begin{tikzcd}
(G,A) \arrow[d, "(\varphi,f)"'] & & H^*(G,A) \\
(G',B) \arrow[r, phantom, "\longmapsto"] & & H^*(G',B), \arrow[u, "(\varphi,f)^*"']
\end{tikzcd}$$

donde $(\varphi,f)^* : H^*(G',B) \longrightarrow H^*(G,A)$ se construye así: sean $F \to \mathbb{Z} \to 0$ y $F' \to \mathbb{Z} \to 0$ resoluciones proyectivas de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ y $\mathbb{Z}G'$ respectivamente y tomemos un levantamiento de la identidad $\tau : F \longrightarrow F'$ tal que τ_n sea homomorfismo de $G-$módulos para todo entero $n \geq 0$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(F_0,A) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(F_n,A) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(F_{n+1},A) \arrow[r] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{G'}(F'_0,B) \arrow[r] \arrow[u, dotted, "\mathrm{Hom}(\tau,f)_0"] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{G'}(F'_n,B) \arrow[r] \arrow[u, dotted, "\mathrm{Hom}(\tau,f)_n"] & \mathrm{Hom}_{G'}(F'_{n+1},B) \arrow[r] \arrow[u, dotted, "\mathrm{Hom}(\tau,f)_{n+1}"] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

Entonces tenemos un homomorfismo de complejos de cocadenas

$$\mathrm{Hom}(\tau,f) : \mathrm{Hom}_{G'}(F',B) \to \mathrm{Hom}_G(F,A)$$

dado por $\mathrm{Hom}(\tau,f)_n(\alpha) = f \circ \alpha \circ \tau_n$, para todo $\alpha \in \mathrm{Hom}_{G'}(F'_n,B)$ y todo entero $n \geq 0$.

El homomorfismo de grupos abelianos

$$(\varphi,f)^* : H^*(G',B) \longrightarrow H^*(G,A),$$

es el homomorfismo inducido en cohomología por $\mathrm{Hom}(\tau,f)$.

De manera similar definimos la categoría $\mathscr{B}$ cuyos objetos son los mismos de la categoría $\mathscr{A}$ y cuyos morfismos son parejas $(\varphi,f) : (G,A) \longrightarrow (G',B)$, donde $\varphi : G \longrightarrow G'$ es un homomorfismo de grupos y $f : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo de $G-$módulos, es decir, $f(ga) = \varphi(g)f(a)$ para todo $g \in G$ y $a \in A$.

En este caso el funtor H_* va de la categoría $\mathscr{B}$ a la categoría Ab y es tal que,

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{B} \arrow[r, "H_*"] & \mathrm{Ab}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(G,A) \arrow[d, "(\varphi,f)"'] & & H_*(G,A) \arrow[d, "(\varphi,f)_*"] \\
(G',B) & \longmapsto & H_*(G',B),
\end{tikzcd}
$$

donde $(\varphi,f)_* : H_*(G,A) \longrightarrow H_*(G',B)$ es el homomorfismo de grupos inducido por el homomorfismo de cadenas

$$\tau \otimes f : F \otimes_G A \to F' \otimes_{G'} B,$$

y donde F, F' y τ están definidos como se hizo anteriormente.

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_n \otimes_G A \arrow[r] \arrow[d, dotted, "(\tau\otimes f)_n"] & \cdots \arrow[r] & F_1 \otimes_G A \arrow[r] \arrow[d, dotted, "(\tau\otimes f)_1"] & F_0 \otimes_G A \arrow[r] \arrow[d, dotted, "(\tau\otimes f)_0"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & F'_n \otimes_{G'} B \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F'_1 \otimes_{G'} B \arrow[r] & F'_0 \otimes_{G'} B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Y además $(\tau \otimes f)_n(x \otimes a) = \tau(x) \otimes f(a)$ para todo $x \in F$, $a \in A$ y entero $n \geq 0$.

Proposición 1.13. Sea G un grupo, sea H un subgrupo normal de G y sea A un $G-$módulo, entonces existe una acción de G/H en $H^*(H,A)$ y $H_*(H,A)$.

Demostración. La prueba se hará para $H^*(H,A)$ dado que la prueba para $H_*(H,A)$ es similar.

Sea $g \in G$ fijo y consideremos el homomorfismo $(\varphi,f) : (H,A) \longrightarrow (H,A)$ en la categoría $\mathscr{A}$ dado por $\varphi(h) = g^{-1}hg$ para todo $h \in H$ y $f(a) = ga$ para todo $a \in A$.

Notemos que φ es el homomorfismo conjugación y f es tal que

$$f(\varphi(h)a) = f((g^{-1}hg)a) = h(ga) = hf(a)$$

para todo $h \in H$ y $a \in A$, por tanto, f es un homomorfismo de $H-$módulos.

Ahora sea $\cdots \to F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$ una resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[G]$, observemos que esta resolución también es una resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}H$. Y tomaremos el levantamiento de la identidad $\tau : F \to F$ dado por $\tau_n(x) = g^{-1}x$ para todo $x \in F_n$ y notemos que $\tau(hx) = g^{-1}(hx) = g^{-1}hg(g^{-1}x) = \varphi(h)\tau(x)$.

Entonces el homorfismo de cocadenas $\mathrm{Hom}(\tau, f) : \mathrm{Hom}_H(F,A) \to \mathrm{Hom}_H(F,A)$ está dado por $\mathrm{Hom}(\tau, f)_n(\alpha) = g\alpha(g^{-1}x)$, para todo $\alpha \in \mathrm{Hom}_H(F_n,A)$, con lo que el homomorfismo inducido en las cohomologías es

$$\begin{aligned}(\varphi, f)^* : H^n(H,A) &\to H^n(H,A)\\ [\alpha] &\mapsto [\alpha_g],\end{aligned}$$

donde $\alpha_g(x) = g\alpha(g^{-1}x)$, para todo $x \in Ker(d^*_{n+1})$.

Para todo $n \geq 0$ se define la acción de G/H en $H^n(H,A)$ por $\overline{g}[\alpha] := [\alpha_g]$ para todo $g \in G$ y $[\alpha] \in H^n(H,A)$.

Para la buena definición, sean $g, l \in G$ tales que existe $h \in H$ con $g = lh$ entonces,

$$\alpha_g(x) = g\alpha(g^{-1}x) = lh\alpha(h^{-1}l^{-1}x) = l\alpha(l^{-1}x) = \alpha_l(x),$$

es decir, $\overline{g}[\alpha] = \overline{l}[\alpha]$.

Las condiciones de acción se verifican fácilmente. $\square$

1.4. $G-$CW complejos

Sea $n \geq 0$ un entero. Sea G un grupo y sean X y A espacios topológicos. Supongamos que A tiene una acción de G y sea $\{H_j\}_{j\in J}$ una familia de subgrupos de G con funciones $G-$equivariantes $\varphi_j : G/H_j \times \mathbb{S}^{n-1}_j \longrightarrow A$ para todo $j \in J$.

Se dice que el espacio X **se obtiene de** A **adjuntando la familia de** $n-$**celdas equivariantes** $\{G/H_j \times \mathbb{D}^n_j\}_{i\in J}$ **de tipo** $\{G/H_j\}_{j\in J}$ si X es el pushout,

$$\begin{tikzcd}
\bigsqcup_{j\in J} G/H_j \times \mathbb{S}^{n-1}_j \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook] & A \arrow[d] \\
\bigsqcup_{j\in J} G/H_j \times \mathbb{D}^n_j \arrow[r, "\Phi"] & X,
\end{tikzcd}$$

donde $\mathbb{S}^{n-1}$ y $\mathbb{D}^n$ tienen la acción trivial de G y,

$$\varphi = \bigsqcup_{j\in J} \varphi_j \quad \text{y} \quad \Phi = \bigsqcup_{j\in J} \Phi_{j,n}$$

con $\Phi_{j,n} : G/H_j \times \mathbb{D}^n_j \to X$ igual a la compuesta

$$G/H_j \times \mathbb{D}^n_j \xrightarrow{\quad i \quad} \left(\bigsqcup_{j\in J} G/H_j \times \mathbb{D}^n_j\right) \sqcup A \xrightarrow{\quad \pi \quad} X.$$

La imagen de $G/H_j \times \mathbb{D}^n_j$ mediante $\Phi_{j,n}$ recibe el nombre de $n-$**celda cerrada** y la imagen de $G/H_j \times int(\mathbb{D}^n_j)$ mediante $\Phi_{j,n}$ recibe el nombre de $n-$**celda abierta**, donde $int(\mathbb{D}^n_j)$ denota el interior de $\mathbb{D}^n_j$.

Las funciones $\varphi_j : G/H_j \times \mathbb{S}_j^{n-1} \longrightarrow A$ y $\Phi_{j,n} : G/H_j \times \mathbb{D}_j^n \longrightarrow X$ son llamadas **función de adjunción** y **función característica** respectivamente.

Definición 1.9. Sea G un grupo y sea X un espacio topológico. X se dice $G-$**CW complejo** si X tiene una acción de G y una filtración de espacios $G-$invariantes

$$X^0 \subseteq X^1 \subseteq \cdots \subseteq X^n \subseteq \cdots \subseteq X$$

que satisfacen las siguientes propiedades,

1. $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$
2. X^0 es un conjunto discreto con la acción de G, es decir, los puntos de X^0 se reunen en las $G-$órbitas disjuntas, $X^0 = \bigsqcup_{j \in J_0} G/H_j$, para algunos subgrupos $H_j \subseteq G$ y $j \in J_0$
3. Para cada $n > 0$, el espacio X^n se obtiene de X^{n-1} adjuntando la familia de $n-$celdas equivariantes $\{G/H_j \times \mathbb{D}_j^n\}_{j \in J_n}$ de tipo $\{G/H_j\}_{j \in J_n}$, es decir, para cada $j \in J_n$ existen funciones continuas y $G-$equivariantes $\varphi_j : G/H_j \times \mathbb{S}_j^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}$ y

   $$X^n = \left(\left(\bigsqcup_{i \in J_n} G/H_j \times \mathbb{D}_j^n \right) X^{n-1} \right) / \sim$$

   donde $x \sim \varphi_j(x)$ para todo $x \in G/H_j \times \mathbb{S}_j^{n-1}$. En otras palabras, como dijimos antes, X^n es el pushout del siguiente diagrama

   $$\begin{tikzcd} \bigsqcup_{j \in J_n} G/H_j \times \mathbb{S}_j^{n-1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook] & X^{n-1} \arrow[d] \\ \bigsqcup_{j \in J_n} G/H_j \times \mathbb{D}_j^n \arrow[r, "\Phi"] & X^n. \end{tikzcd}$$

   El subespacio X^n es llamado el $n-$**esqueleto** de X.
4. X tiene la topología del colímite con respecto a la filtración $\{X^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, es decir, $U \subseteq X$ es abierto si y solo si para todo entero $n \geq 0$, $U \cap X^n$ es abierto en X^n.

Es natural preguntarse si existe una relación entre CW complejos y $G-$CW complejos. La respuesta a esta pregunta es sí. Cuando el grupo G es discreto (que es el caso en este trabajo) y actúa celularmente en el CW complejo entonces estos dos conceptos son equivalentes como veremos a continuación. Por tal razón usaremos ambas definiciones dependiendo de cuál sea en cada momento la más conveniente.

Definición 1.10. Sea G un grupo y sea X un CW complejo con una acción de G. Se dice que G **actúa celularmente en** X si se verifica lo siguiente:

1. Para cada $g \in G$ y para cada $n-$celda abierta σ de X, la traslación a izquierda $g\sigma$ es de nuevo una $n-$celda abierta de X.

2. Si una celda es invariante por algún $g \in G$, entonces este elemento actúa como la identidad en esta celda, es decir, si $g\sigma = \sigma$, entonces $gx = x$ para todo $x \in \sigma$.

Proposición 1.14. Sea G un grupo y X un espacio topológico. X es un CW complejo con una acción celular de G si y solo si X es un $G-$CW complejo con $n-$esqueleto X^n.

Demostración. Supongamos que X es un CW complejo con una acción celular de G.

Notemos que como la acción de G en X es celular entonces para cada entero $n \geq 0$ se tiene que G actúa en X^n, es decir, X^n es un subespacio de X que a su vez tiene la acción de G, de aquí X tiene la topología del colímite con respecto a X^n. Basta ver que X^n se obtiene de X^{n-1} adjuntado $n-$celdas equivariantes.

Dado que X es un CW complejo entonces para todo $n > 0$ tenemos el siguiente diagrama pushout,

$$\begin{tikzcd} \bigsqcup_{i\in I} \mathbb{S}_i^{n-1} \arrow[r, "\bigsqcup_{i\in I}\psi_i"] \arrow[d, hook] & X^{n-1} \arrow[d] \\ \bigsqcup_{i\in I} \mathbb{D}_i^n \arrow[r, "\bigsqcup_{i\in I}\Psi_{i,n}"] & X^n. \end{tikzcd}$$

Dado que $\bigsqcup_{i\in I} \mathbb{S}_i^{n-1} \cong I \times \mathbb{S}^{n-1}$ entonces equivalentemente tenemos el siguiente diagrama pushout,

$$\begin{tikzcd} I \times \mathbb{S}^{n-1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook] & X^{n-1} \arrow[d] \\ I \times \mathbb{D}^n \arrow[r, "\Phi"] & X^n, \end{tikzcd}$$

donde $\varphi(i,s) = \psi_i(s)$ y $\Phi(i,x) = \Psi_i(x)$ para todo $i \in I$, $s \in \mathbb{S}^{n-1}$ y $x \in \mathbb{D}^n$.

Como G actúa celularmente en X entonces G actúa en el conjunto indexante I: Si $i \in I$ y $g \in G$ se define $gi = j$ donde $j \in I$ es tal que $g\Psi_{i,n}(int(\mathbb{D}_i^n)) = \Psi_{j,n}(int(\mathbb{D}_i^n))$. Esta acción permite descomponer a I en $G-$órbitas disjuntas $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Dado que G es discreto, para cada $\alpha \in A$ tenemos el homeomorfismo $I_\alpha \cong G/H_\alpha$ para $H_\alpha = \{g \in G : gi_\alpha = i_\alpha\}$ el estabilizador de $i_\alpha \in I_\alpha$.

Para todo $\alpha \in A$ definamos la función $\Phi'_\alpha : G/H_\alpha \times \mathbb{D}_\alpha^n \to X^n$ por $\Phi'_\alpha(gH_\alpha, x) = g\Phi(i_\alpha, x)$. La buena definición de Φ' es consecuencia de que para todo $\alpha \in A$ los elementos de H_α dejan fijas a las celdas abiertas, luego por la condición 2. de la definición de acción celular, para $h \in H_\alpha$, $i_\alpha \in I_\alpha$ y $x \in int(\mathbb{D}^n)$ se tiene que $h\Phi(i_\alpha, x) = \Phi(i_\alpha, x)$. Observemos que lo que resulta de la definición de esta función no es más que un reordenamiento de las celdas, aprovechando que la acción de G las permuta. Luego la continuidad de la función Φ'_α es resultado de la continuidad de Ψ_i.

Las funciones Φ'_α restringen a las funciones de adjunción $\varphi'_\alpha : G/H_\alpha \times \mathbb{S}^{n-1}_\alpha \to X^{n-1}$. Faltaría probar que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\bigsqcup_{\alpha\in A} G/H_\alpha \times \mathbb{S}^{n-1}_\alpha \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, hook] & X^{n-1} \arrow[d] \\
\bigsqcup_{\alpha\in A} G/H_\alpha \times \mathbb{D}^{n}_\alpha \arrow[r, "\Phi'"] & X^{n},
\end{tikzcd}$$

es pushout donde sus funciones son $G-$equivariantes. Pero esto se tiene dado que el primer diagrama de esta prueba lo es. $\square$

Definición 1.11. Un $G-$CW complejo X se dice **libre** si la acción de G en X es libre. También se dice que G **permuta las celdas de X libremente**.

Ejemplos. ($G-$CW complejos)

1. Sea G el grupo cíclico finito de orden n con generador t. Si consideramos a $\mathbb{S}^1$ con la estructura de CW complejo que se muestra en la figura 1.1, entonces G actúa en $\mathbb{S}^1$ por rotaciones de $2\pi/n$ radianes. Esta acción es celular, de hecho es libre, por tanto, $\mathbb{S}^1$ es un $\mathbb{Z}/n-$CW complejo libre.

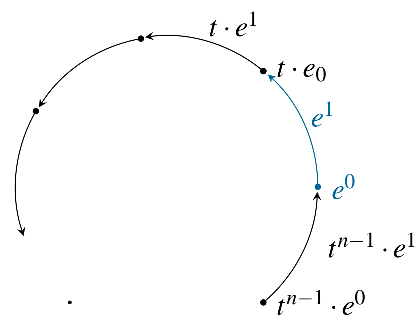


Figura 1.1: Estructura de $\mathbb{Z}/n-$CW complejo para $\mathbb{S}^1$

2. Sea $G=\mathbb{Z}$ el grupo de los enteros escrito multiplicativamente $\{t^m : m\in\mathbb{Z}\}$ el grupo cíclico infinito generado por t y consideremos $X=\mathbb{R}$. Veamos que $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{Z}-$CW complejo.

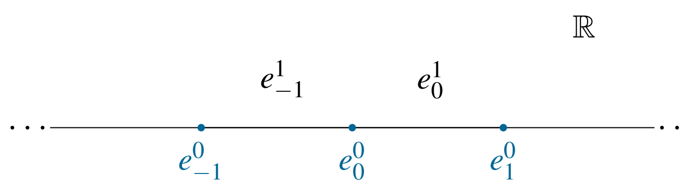


Figura 1.2: Estructura de CW complejo para $\mathbb{R}$

Como podemos ver en la figura 1.2, X tiene estructura de CW complejo con una $0-$celda e^0_n por cada $n\in\mathbb{Z}$ y una $1-$celda e^0_n por cada $n\in\mathbb{Z}$, donde para todo $n\in\mathbb{Z}$ los mapeos adjunción están dados por

$$\begin{aligned}\varphi_n : \mathbb{S}^0_n &\to X^0\\ -1 &\mapsto e^0_n\\ 1 &\mapsto e^0_{n+1}\end{aligned}$$

Entonces definimos la acción de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$ como la traslación, $t \cdot x = x+1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Notemos que esta acción es celular y es libre, de donde, $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{Z}-$CW complejo libre.

3. Consideramos a G como el grupo libre generado por un conjunto arbitrario S, es decir, $G = F(S)$. Definamos el espacio X como el complejo simplicial de dimensión 1 cuyos vértices son los elementos de G y los $1-$simplejos son pares $\{g, gs\}$ con $g \in G$ y $s \in S$.

   La acción de traslación a izquierda de G en sí mismo induce una acción simplicial de G en X. Es decir, este espacio X así definido es un $F(S)-$CW complejo.

   En el caso en el que S tenga un elemento entonces estamos en el ejemplo anterior. Cuando $S = \{s, t\}$, entonces el espacio X luce como el siguiente árbol:

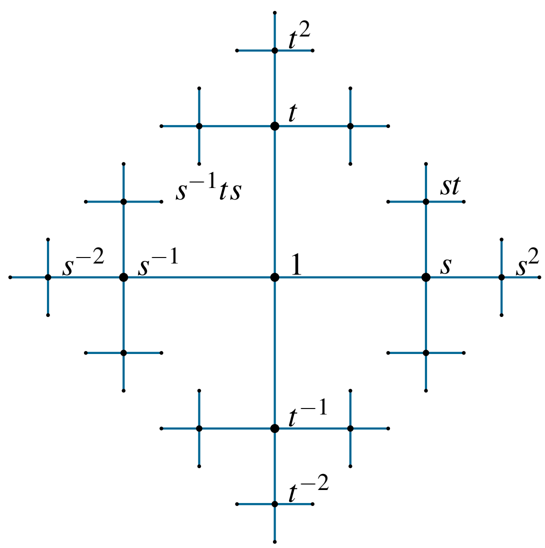


Figura 1.3: $F(S)-$CW complejo para $S = \{s, t\}$

1.5. Espacio Clasificante

Definición 1.12. Sea G un grupo. El **espacio clasificante de** G, denotado por BG, es un CW complejo Y que verifica las siguientes condiciones:

1. Y es conexo.
2. El grupo fundamental de Y es isomorfo al grupo G, $\pi_1(Y) \cong G$.

3. La cubierta universal de Y es contráctil.

El espacio Y también es llamado $K(G,1)-$**complejo** o **espacio de Eilenberg-MacLane de tipo** $K(G,1)$. Esto se debe a que la condición 3. es equivalente a que los grupos de homotopía de Y son triviales para grado mayor o igual que 2.

$$\pi_i(K(G,1)) = \begin{cases} G, & \text{si } i = 1 \\ 0, & \text{si } i > 1. \end{cases}$$

Ejemplos. (Espacios clasificantes)

1. Sea $G = \mathbb{Z}$, notemos que $\mathbb{S}^1$ es un CW complejo conexo, $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ y además su cubierta universal es $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$, es decir, $\pi_i(\mathbb{S}^1) = 0$ si $i \geq 2$. Esto demuestra que $B\mathbb{Z} = \mathbb{S}^1$.

2. Sea $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y consideremos el espacio $\mathbb{R}P^\infty$. Este espacio es un CW complejo conexo, $\pi_1(\mathbb{R}P^\infty) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. También sabemos que $p : \mathbb{S}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}P^\infty$ es la cubierta universal y como $\pi_i(\mathbb{S}^\infty) = 0$ para todo i, se sigue que $\pi_i(\mathbb{S}^\infty) = 0$ para todo $i > 1$.

   Por tanto $\mathbb{R}P^\infty$ es el espacio clasificante de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

3. Sea $G = F(S)$ el grupo libre generado por un conjunto arbitrario S y consideremos a $Y = \bigvee_{s\in S} \mathbb{S}^1_s$. Y es un CW complejo con una $0-$celda y con tantas $1-$celdas como elementos en S.

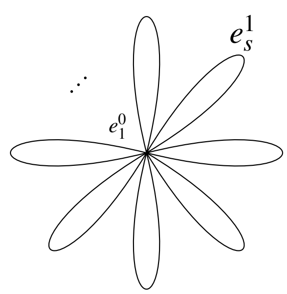


Figura 1.4: Estructura de CW complejo para $Y = \bigvee_{s\in S} \mathbb{S}^1_s$

Veamos que Y es el espacio clasificante de G, es decir, veamos que el grupo fundamental de Y es el grupo libre generado por S y que el espacio recubridor universal de Y es contráctil.

Por teorema de Seifert-Van Kampen el grupo fundamental de Y es el grupo libre generado por S, es decir, $\pi_1(Y) = F(S)$.

Dado que Y es un CW complejo de dimensión 1, por la proposición 1.21, que veremos más adelante, su espacio recubridor universal X tiene estructura de CW complejo de dimensión 1, es decir, su complejo de cadenas celular tiene la forma

$$0 \to C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \to 0,$$

de donde $H_i(X) = 0$ para $i > 1$. Adicionalmente, X es el espacio recubridor universal de Y, por tanto $H_1(X) = 0$. Por el teorema de Whitehead tenemos que X es homotópicamente equivalente a un punto, es decir, X es contráctil.

Para el caso de $S = \{s,t\}$, el espacio Y es el conocido espacio de "la figura ocho", es decir, $Y = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ y tenemos que su espacio clasificante es el espacio mostrado en la figura 1.3 del ejemplo 3 de $G-$CW complejos.

A continuación se mostrará una manera de construir el espacio clasificante de un grupo G utilizando las técnicas de conjuntos simpliciales del apéndice.

1.5.1. Existencia del espacio clasificante

Proposición 1.15. Sea G es un grupo y denotemos por EG a la realización geométrica del conjunto simplicial $EG_\bullet$ (ver ejemplo 4 de espacios simpliciales del apéndice). Entonces existe una acción de G en EG libre y propiamente discontinua.

Demostración. Sea $g \in G$ y $[(g_0,\dots,g_n),t] \in EG$ con $g_i \in G$ y $t \in \Delta_n$ definimos

$$g[(g_0,\dots,g_n),t] := [(gg_0,g_1,\dots,g_n),t)],$$

esta acción está bien definida y además es libre. En efecto, sea $\omega \in EG$ y sea $g \in G$, por la proposición A.2 tenemos que ω es igual a un único elemento con representante no–degenerado, esto quiere decir que, dada la definición de ser no–degenerado y de los mapeos degeneración, $\omega = [(g_0,\dots,g_n),t]$ donde $g_1,\dots,g_n \neq 1$ y $t \in int(\Delta_n)$.

Supongamos que $g[(g_0,\dots,g_n),t] = [(g_0,\dots,g_n),t]$ entonces

$$[(gg_0,\dots,g_n),t] = [(g_0,\dots,g_n),t] \quad \Rightarrow \quad ((gg_0,\dots,g_n),t) \sim ((g_0,\dots,g_n),t)$$

pero estos elementos son no–degenerados entonces debe tenerse

$$((gg_0,\dots,g_n),t) = ((g_0,\dots,g_n),t),$$

de donde $gg_0 = g_0$, es decir, $g = 1$.

La prueba de que esta acción es propiamente discontinua es consecuencia del teorema 8.2, capítulo 8 de [10]. $\square$

Corolario 1.16. Sea BG la realización geométrica del conjunto simplicial $BG_\bullet$. Entonces existe un homeomorfismo $EG/G \cong BG$.

Demostración. Recordemos que EG/G es el conjunto

$$EG/G = \left\{ \mathscr{O}_{[(1,g_1,\dots,g_n),t]} : g_1,\dots,g_n \in G \text{ y } t \in \Delta_n \right\},$$

donde las $G-$órbitas son $\mathscr{O}_{[(1,g_1,\dots,g_n),t]} = \Big\{[(g,g_1,\dots,g_n),t] : g \in G\Big\}$.

Definamos $\psi : EG \longrightarrow BG$ por $\psi\big([(g_0,g_1,\dots,g_n),t]\big) = [(g_1,\dots,g_n),t]$. ψ es continua y es tal que

$$\psi\big(g[(g_0,g_1,\dots,g_n),t]\big) = \psi\big([(g_0,g_1,\dots,g_n),t]\big).$$

Luego por la propiedad universal del cociente existe una función continua $\Psi : EG/G \longrightarrow BG$ definida por $\Psi\big(\mathscr{O}_{[(1,g_1,\dots,g_n),t]}\big) = [(g_1,\dots,g_n),t]$. Además Ψ es un homeomorfismo. $\square$

Proposición 1.17. Sea $f_\bullet : EG_\bullet \longrightarrow EG_\bullet$ definido por $f_n(g_0,\dots,g_n) = (1,\dots,1)$, para todo $n \geq 0$. Existe una homotopía simplicial $h_\bullet$ entre $f_\bullet$ y la función simplicial identidad.

Demostración. Definamos para todo $n \geq 0$ y para todo $0 \leq i \leq n$

$$h_i : EG_n \longrightarrow EG_{n+1}$$

$$h_i(g_0,\dots,g_n) = (\underbrace{1,\dots,1}_{(i+1)\text{-veces}}, g_0\cdots g_i, g_{i+1},\dots,g_n).$$

Probaremos algunas de las condiciones de la definición de homotopía simplicial, dado que las otras son similares:

$\partial_0(h_0(g_0,\dots,g_n)) = \partial_0(1,g_0,\dots,g_n) = (g_0,\dots,g_n).$

$\partial_{n+1}(h_n(g_0,\dots,g_n)) = \partial_{n+1}(\underbrace{1,\dots,1}_{(n+1)\text{-veces}}, g_0\cdots g_n) = (\underbrace{1,\dots,1}_{(n+1)\text{-veces}}).$

Sea $i < j$ entonces, veamos que $\partial_i(h_j(g_0,\dots,g_n)) = h_{j-1}(\partial_i(g_0,\dots,g_n))$.

$$\partial_i(h_j(g_0,\dots,g_n)) = \partial_i(\underbrace{1,\dots,1}_{(j+1)\text{-veces}}, g_0\cdots g_j, g_{j+1},\dots,g_n) = (\underbrace{1,\dots,1}_{j\text{-veces}}, g_0\cdots g_j, g_{j+1},\dots,g_n).$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
h_{j-1}(\partial_i(g_0,\dots,g_n)) &= h_{j-1}\left(\begin{cases} (g_0g_1,g_2,\dots,g_n) & i=0 \\ (g_0,\dots,g_ig_{i+1},\dots,g_j,\dots,g_n) & 0<i<j-1 \\ (g_0,\dots,g_{j-1}g_j,\dots,g_n) & i=j-1 \end{cases}\right) \\
&= \begin{cases} (\underbrace{1,\dots,1}_{j\text{-veces}}, g_0g_1\cdots g_j, g_{j+1},\dots,g_n) & i=0 \\ (\underbrace{1,\dots,1}_{j\text{-veces}}, g_0\cdots g_ig_{i+1}\cdots g_j, g_{j+1},\dots,g_n) & 0<i<j-1 \\ (\underbrace{1,\dots,1}_{j\text{-veces}}, g_0\cdots g_{j-1}g_j, g_{j+1},\dots,g_n) & i=j-1 \end{cases} \\
&= (\underbrace{1,\dots,1}_{j\text{-veces}}, g_0\cdots g_j, g_{j+1},\dots,g_n).
\end{aligned}$$

Veamos que $\partial_{j+1}(h_{j+1}(g_0,\ldots,g_n)) = \partial_{j+1}(h_j(g_0,\ldots,g_n))$.

$$\begin{aligned}
\partial_{j+1}(h_{j+1}(g_0,\ldots,g_n)) &= \partial_{j+1}(\underbrace{1,\ldots,1}_{(j+2)\text{-veces}},g_0\cdots g_{j+1},g_{j+2},\ldots,g_n) \\
&= (\underbrace{1,\ldots,1}_{(j+1)\text{-veces}},g_0\cdots g_{j+1},g_{j+2},\ldots,g_n) \\
\partial_{j+1}(h_j(g_0,\ldots,g_n)) &= \partial_{j+1}(\underbrace{1,\ldots,1}_{(j+1)\text{-veces}},g_0\cdots g_j,g_{j+1},\ldots,g_n) \\
&= (\underbrace{1,\ldots,1}_{(j+1)\text{-veces}},g_0\cdots g_jg_{j+1},g_{j+2},\ldots,g_n).
\end{aligned}$$

Si $i \leq j$, verifiquemos que $s_i(h_j(g_0,\ldots,g_n)) = h_{j+1}(s_i(g_0,\ldots,g_n))$.

$$\begin{aligned}
s_i(h_j(g_0,\ldots,g_n)) &= s_i(\underbrace{1,\ldots,1}_{(j+1)\text{-veces}},g_0\cdots g_j,g_{j+1},\ldots,g_n) \\
&= (\underbrace{1,\ldots,1}_{(j+1)\text{-veces}},1,g_0\cdots g_{j+1},g_{j+2},\ldots,g_n)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
h_{j+1}(s_i(g_0,\ldots,g_n)) &= h_{j+1}(g_0,\ldots,g_j,1,g_{j+1},\ldots,g_n) \\
&= (\underbrace{1,\ldots,1}_{(j+2)\text{-veces}},g_0\cdots g_j1,g_{j+1},\ldots,g_n).
\end{aligned}$$

Así $f_\bullet$ y la identidad son homotópicas. □

Proposición 1.18. El espacio EG es contráctil.

Demostración. Sea $X_\bullet$ el espacio simplicial definido por $X_n = \{x_0\}$ con x_0 un punto fijo y con mapeos cara y degeneración triviales. Observemos que la realización geométrica de $X_\bullet$ es un punto.

Definamos las funciones simpliciales $\alpha_\bullet : EG_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ y $\beta_\bullet : X_\bullet \longrightarrow EG_\bullet$, como la función simplicial trivial y $\beta_n(x_0) = (1,\ldots,1)$ para todo $n \geq 0$, respectivamente. Entonces tenemos que $|\alpha_\bullet| : EG \longrightarrow \{\star\}$ y $|\beta_\bullet| : \{\star\} \longrightarrow EG$ son las funciones triviales.

Es claro que $|\alpha_\bullet| \circ |\beta_\bullet| = id_\star$, falta ver que $|\beta_\bullet| \circ |\alpha_\bullet| \approx id_{EG}$. Pero recordemos lo siguiente, la proposición 1.17 nos dice que hay una homotopía simplicial entre $\beta_\bullet \circ \alpha_\bullet$ y la función simplicial identidad, entonces por el corolario A.7 nos queda que $|\beta_\bullet| \circ |\alpha_\bullet|$ y id_{EG} son homotópicas en el sentido topológico.

Así hemos probado que el espacio EG es homotópicamente equivalente a un punto, es decir, EG es contráctil. □

En resumen tenemos que la función cociente $\pi : EG \to EG/G$ define es un espacio recubridor cuyo grupo de transformaciones de Deck es isomorfo al grupo G y cuyo espacio total EG es contráctil. Esto demuestra que $EG/G \cong BG$ es el espacio clasificante de G, ya que

- BG es conexo.
- $\pi_1(BG) \cong G$.
- La cubierta universal de BG es contráctil.

1.6. Cohomología de grupos desde el punto de vista topológico

Definición 1.13. Sea G un grupo. Definimos la **cohomología de** G como

$$H^n(G) = H^n(BG;\mathbb{Z}), \tag{1.5}$$

donde $H^n(BG;\mathbb{Z})$ es la cohomología singular (o celular) del espacio topológico BG.
Ejemplos. (Cohomología de grupos)

1. Sea G el grupo trivial, entonces el espacio clasificante de G es el espacio topológico de un punto, así $H^n(G)$ es $\mathbb{Z}$ en grado cero y trivial en otro caso.
2. Sea $G = \mathbb{Z}$ el grupo cíclico infinito. El espacio clasificante de $\mathbb{Z}$ es $\mathbb{S}^1$, entonces
$$H^n(\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } n = 0 \text{ o } n = 1 \\ 0, & si\ n > 1. \end{cases}$$
3. Sea $G = F(S)$ con S un conjunto arbitrario de orden k, el espacio clasificante de G es $BF(S) = \bigvee_{i=1}^{k} \mathbb{S}^1$, el complejo de cadenas celular de $BF(S)$ es
$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}e_i^1 \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathbb{Z}e^0 \to 0.$$
Entonces
$$H^n(F(S)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } n = 0 \\ \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}, & \text{si } n = 1 \\ 0, & si\ n > 1 \end{cases}$$

Similamente tenemos la definición de homología de grupo desde el punto de vista topológico.
Definición 1.14. Definimos la **homología de** G como

$$H_n(G) = H_n(BG;\mathbb{Z}). \tag{1.6}$$

1.7. Equivalencia entre las definiciones algebraica y topológica de cohomología de grupos

Proposición 1.19. Si X es un $G-$CW complejo entonces el complejo de cadenas celular $C_*(X)$ es un complejo de cadenas sobre $\mathbb{Z}G$.

Demostración. Dado que X es un $G-$CW complejo, entonces X es un CW complejo con una acción celular de G. Sea

$$\cdots \to C_k(X) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}(X) \to \cdots \to C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \to 0$$

el complejo de cadenas celular de X, donde $C_k(X)$ es el grupo abeliano libre generado por las $n-$celdas no equivariantes de X, es decir, $C_k(X) = \bigoplus_{i\in I_k} \mathbb{Z}e_i^k$, donde $e_i^k = f_{i,k}(int(\mathbb{D}_i^k))$ con $f_{i,k} : \mathbb{D}_i^k \longrightarrow X^k$ la función característica.

Consideremos $\Gamma_k = \{e_i^k : i \in I_k\}$ el conjunto de las $k-$celdas de X. Como G actúa celularmente en X entonces podemos definir una acción de G en Γ_k, de donde tenemos que el módulo de permutaciones de Γ_k es un $G-$módulo, pero $\mathbb{Z}[\Gamma_k] = C_k(X)$. Por lo tanto $C_k(X)$ es un $\mathbb{Z}G-$módulo, donde la acción está dada por

$$g\left(\sum_{i\in I_k} n_i e_i^k\right) = \sum_{i\in I_k} n_i e_{gi}^k,$$

para todo $g \in G$ y $\sum_{i\in I_k} n_i e_i^k \in C_k(X)$.

Veamos que ∂_k es un $\mathbb{Z}G-$homomorfismo. Recordemos que para todo generador $e_i^k \in C_k(X)$ se define $\partial_k(e_i^k) = \sum_{j\in I_{k-1}} d_{i,j} e_j^{k-1}$ donde $d_{i,j}$ es el grado de la compuesta de la función adjunción $\varphi_i : \mathbb{S}_i^{k-1} \longrightarrow X^{k-1}$ con la proyección $p_j : X^{k-1} \longrightarrow X^{k-1}/(X^{k-1} - int(e_j^{k-1}))$.

Sea $g \in G$ y e_i^k una $k-$celda entonces

$$\partial_k(ge_i^k) = \partial_k(e_{gi}^k) = \sum_{l\in I_{k-1}} d_{gi,l} e_l^{k-1},$$
$$g\partial_k(e_i^k) = g \sum_{j\in I_{k-1}} d_{i,j} e_j^{k-1} = \sum_{j\in I_{k-1}} d_{i,j} e_{gj}^{k-1}.$$

Probemos que $d_{i,j} = d_{gi,gj}$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}_i^{k-1} \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "g"] & X^{k-1} \arrow[r, "p_j"] \arrow[d, "g"] & X^{k-1}/(X^{k-1} - int(e_j^{k-1})) \arrow[d, "g"] \\
\mathbb{S}_{gi}^{k-1} \arrow[r, "\varphi_{gi}"] & X^{k-1} \arrow[r, "p_{gj}"] & X^{k-1}/(X^{k-1} - int(e_{gj}^{k-1})).
\end{tikzcd}$$

El diagrama inducido en homología es tal que todas las columnas son isomorfismos

$$\begin{array}{ccccc} H_{k-1}(\mathbb{S}_i^{k-1}) & \xrightarrow{(\varphi_i)_*} & H_{k-1}(X^{k-1}) & \xrightarrow{(p_j)_*} & H_{k-1}(\mathbb{S}_j^{k-1}) \\ \downarrow{\scriptstyle g_*} & & \downarrow{\scriptstyle g_*} & & \downarrow{\scriptstyle g_*} \\ H_{k-1}(\mathbb{S}_{gi}^{k-1}) & \xrightarrow{(\varphi_{gi})_*} & H_{k-1}(X^{k-1}) & \xrightarrow{(p_{gj})_*} & H_{k-1}(\mathbb{S}_{gj}^{k-1}). \end{array}$$

Luego el grado de $p_j \circ \varphi_i$ es igual al grado de $p_{gj} \circ \varphi_{gi}$, es decir, $d_{i,j} = d_{gi,gj}$. Lo cual prueba que $\partial_k(ge_i^k) = g\partial_k(e_i^k)$. □

1.7.1. Resoluciones libres de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ vía $G-$CW complejos y espacios recubridores

Proposición 1.20. Sea X un $G-$CW complejo libre y contráctil. Entonces el complejo de cadenas celular de X aumentado es una resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

Demostración. Por la proposición 1.19 tenemos que el complejo de cadenas celular de X aumentado

$$\cdots \to C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \to \cdots \to C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0.$$

es un complejo de cadenas de $G-$módulos, entonces debemos ver que es exacto y que cada $C_k(X)$ es libre.

Dado que X es contráctil, entonces X es homotópicamente equivalente a un punto, es decir, $H_0(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ y $H_n(X;\mathbb{Z})$ es trivial para todo $n > 0$, lo cual prueba la exactitud.

Vimos que $C_k(X)$ es el módulo de permutaciones del conjunto de $n-$celdas de X. Por hipótesis, la acción de G en este conjunto de celdas es libre, entonces por la proposición 1.7 tenemos que $C_k(X)$ es un $G-$módulo libre cuya base es el conjunto de representantes de las $G-$órbitas (de celdas) distintas. En otras palabras, si $\Phi_{i,k} : G \times int(\mathbb{D}_i^k) \longrightarrow X^k$ es una función característica de X como $G-$CW complejo entonces las $k-$celdas equivariantes de X tienen la forma $\Phi_{i,k}(G \times int(\mathbb{D}_i^k))$ con $i \in I_k$ y la base para $C_k(X)$ como $G-$módulo es $\{\Phi_{i,k}(\{1\} \times int(\mathbb{D}_i^k))\}_{i \in I_k}$. Entonces nos queda que

$$\cdots \to C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \to \cdots \to C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0.$$

es una resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. □

Ejemplo 1. Consideremos el grupo de los enteros $\mathbb{Z}$ y el espacio topológico $\mathbb{R}$, en el ejemplo 2 de $G-$CW complejos vimos que $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{Z}-$CW complejo libre y además ya es conocido que es contráctil.

Dada la estructura de $\mathbb{R}$ como CW complejo, tenemos que su complejo de cadenas celular es

$$0 \to \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{Z}e_n^1 \xrightarrow{\partial_1} \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{Z}e_n^0 \to 0,$$

donde $\partial_1(e_n^1) = e_{n+1}^0 - e_n^0$.

La acción de $\mathbb{Z}$ en el conjunto de celdas está dada por $t \cdot e_n^j = e_{n+1}^j$ con $j = 0, 1$. Es esta acción la que le da al complejo de cadenas celular anterior la estructura de resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$.

En cuanto a la estructura de $C_j(\mathbb{R}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{Z}e_n^j$ como $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]-$módulos, con $j = 0, 1$. Notemos que $\{e_n^j : n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}e_0^j$, es decir, solo hay un elemento en la base de $C_j(\mathbb{R})$ como $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]-$módulo, con lo que, $C_j(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}[\mathbb{Z}]\, e_0^j$ y la resolución libre toma la forma,

$$0 \to \mathbb{Z}[\mathbb{Z}]\, e_0^1 \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}]\, e_0^0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0.$$

Proposición 1.21. Sea $p : X \longrightarrow Y$ un espacio recubridor. Si Y es un CW complejo entonces X es un CW complejo.

Demostración. Una prueba de este resultado puede encontrarse en [3], Teorema 8.10, capítulo 4. $\square$

Lema 1.22. Sea Y un CW complejo y un espacio de Eilenberg-MacLane de tipo $K(G,1)$ y sea $p : X \longrightarrow Y$ el espacio recubridor universal de Y. Entonces el complejo de cadenas celular aumentado de X es una resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

Demostración. Como $p : X \longrightarrow Y$ es el espacio recubridor universal de Y entonces tenemos lo siguiente: X es contráctil, el grupo de transformaciones de Deck de p es isomorfo al grupo fundamental del espacio base y la acción de $\pi_1(Y)$ en las fibras es libre y transitiva.

Pero de un lado, el espacio base es un espacio de Eilenberg-MacLane de tipo $K(G,1)$, con lo que $\pi_1(Y) \cong G$. Y por otro lado, dado que Y es un CW complejo entonces por la proposición 1.21 tenemos que X hereda la estrutura de CW complejo, donde las celdas de X son las componentes conexas de $p^{-1}(\sigma)$ para todo σ una celda de Y.

De lo anterior, X es un CW complejo contráctil con una acción celular de G, de aquí, por la proposición 1.20, el complejo de cadenas celular aumentado de X es una resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. $\square$

Ejemplo 2. Sea $G = F(S)$ el grupo libre generado por un conjunto arbitrario S, vimos que el espacio clasificante de G es $Y = \bigvee_{s\in S} \mathbb{S}_s^1$ y que el complejo de cadenas celular X, del espacio recubridor universal de Y, es $0 \to C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \to 0$,entonces la resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ inducida por X es

$$0 \to C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0.$$

Vimos que $C_k(X)$ es un $\mathbb{Z}G-$módulo libre cuya base es el conjunto de representantes de las $G-$órbitas distintas de X, pero cada $G-$órbita de $k-$celdas de X corresponde a una $k-$celda del espacio base Y, por la manera en que se le dio la estructura de CW complejo a X y porque G actúa libre y transitivamente sobre las fibras.

- $C_0(X)$ es generado como $\mathbb{Z}G-$módulo por un representante de la $G-$órbita que corresponde a la única cero celda de Y, esto es, $C_0(X) = \mathbb{Z}Gx_0$.
- Para $C_1(X)$ como $\mathbb{Z}G-$módulo hay un elemento base por cada $1-$celda e_s^1 para todo $s \in S$, como podemos escoger cualquier representante de la $G-$órbita que vive sobre e_s^1 entonces podemos tomar una 1celda con punto inicial x_0 y punto final sx_0. Así $C_1(X) = \bigoplus_{s\in S} \mathbb{Z}Gf_s^1$.
- Finalmente $\partial_1(f_s^1) = sx_0 - x_0 = (s-1)x_0$ para toda $1-$celda f_s^1 y $\varepsilon(g) = 1$ para todo $g \in G$.

De donde, la resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ se ve así $0 \to \bigoplus_{s\in S} \mathbb{Z}Gf_s^1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}Gx_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$.

Utilicemos esta resolución libre para calcular la cohomología de $F(S)$ desde el punto de vista algebraico. Quitando el término en grado -1 y aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_G(-,\mathbb{Z})$ el complejo de cadenas toma la forma

$$0 \to \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}Gx_0, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_1^*} \mathrm{Hom}_G\left(\bigoplus_{s\in S} \mathbb{Z}[G]f_s^1, \mathbb{Z}\right) \to 0.$$

Después de algunos procedimientos algebraicos nos queda,

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbf{0}} \bigoplus_{s\in S} \mathbb{Z} \to 0,$$

de donde

$$H_n(F(S)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } n = 0 \\ \bigoplus_{s\in S} \mathbb{Z}, & \text{si } n = 1 \\ 0, & si\ n > 1. \end{cases}$$

Ejemplo 3. Si en ejemplo anterior S tiene un único elemento s, es decir, $G = \langle s \rangle$. Entonces la resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ toma la forma

$$0 \to \mathbb{Z}Gf_s^1 \xrightarrow{s-1} \mathbb{Z}Gx_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0.$$

Notemos que en este caso $X = \mathbb{R}$ donde s actúa por traslación $x \mapsto x+1$:

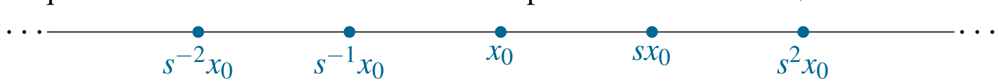


Figura 1.5: Acción de traslación del grupo $G = \langle s \rangle$ en $\mathbb{R}$

Como podemos observar, hemos llegado a la estructura de $G-$CW complejo de $\mathbb{R}$ con G un grupo cíclico infinito así como en el ejemplo 2 de $G-$CW complejos.

Lema 1.23. Sea G un grupo y sea X un $G-$CW complejo libre entonces

$$\mathrm{Hom}(C_*(X/G),\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_G(C_*(X),\mathbb{Z}) \quad \text{y} \quad C_*(X/G) \cong C_*(X) \otimes_G \mathbb{Z}$$

donde X/G es el espacio cociente inducido por la acción de G.

Demostración. En primer lugar notemos que X/G es un CW complejo. En efecto, sea

$$X^0 \subseteq X^1 \subseteq \cdots \subseteq X^k \subseteq \cdots \subseteq X$$

la filtración $G-$invariante de X. Como X es un $G-$CW complejo libre, entonces el espacio X^k se obtiene de X^{k-1} adjuntado la familia de celdas equivariantes $\{G \times \mathbb{D}_i^k\}_{i\in I_k}$. Sean $\varphi_i : G \times \mathbb{S}_i^{k-1} \longrightarrow X^{k-1}$ y $\Phi_{i,n} : G \times \mathbb{D}_i^k \longrightarrow X^k$ las funciones adjunción y característica, respectivamente.

Para X/G consideremos la filtración

$$X^0/G \subseteq X^1/G \subseteq \cdots \subseteq X^k/G \subseteq \cdots \subseteq X/G,$$

y para cada $k > 0$ definamos las funciones $\psi_i : \mathbb{S}_i^{k-1} \longrightarrow X^{k-1}/G$ y $\Psi_{i,k} : \mathbb{D}_i^k \longrightarrow X^k/G$ por $\psi_i(s) = [\varphi_i(1,s)]$ y $\Psi_{i,k}(d) = [\Phi_{i,k}(1,d)]$, para todo $i \in I_k$. Estas funciones son continuas y se prueba sin dificultad que X^k/G es el pushout del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\bigsqcup_{i\in I_k} \mathbb{S}_i^{k-1} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, hook] & X^{k-1}/G \arrow[d, hook] \\
\bigsqcup_{i\in I_k} \mathbb{D}_i^{k} \arrow[r, "\Psi"] & X^{k}/G.
\end{tikzcd}$$

Ahora probemos que $C_*(X/G) \cong C_*(X) \otimes_G \mathbb{Z}$. Consideremos homomorfismo de grupos abelianos

$$\begin{aligned} \tau_k : C_k(X) \otimes_G \mathbb{Z} &\to C_k(X/G) \\ e_i^k \otimes 1 &\mapsto [e_i^k] \end{aligned}$$

inducido por la proyección $\pi : C_k(X) \longrightarrow C_k(X/G)$, $e_i^k \mapsto [e_i^k]$.

Como $C_k(X) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}-$módulo libre con base $\{e_i^k \otimes 1\}_{i\in I_k}$, $C_k(X/G)$ es un $\mathbb{Z}-$módulo libre con base $\{[e_i^k]\}_{i\in I_k}$ y τ_k es un homomorfismo de $\mathbb{Z}-$módulos libres que envía base en base, entonces φ_k es un isomorfismo. Luego, definimos el homomorfismo de complejos cadenas $\tau_* = \{\tau_k\}_{k\geq 0}$ y obtenemos que $C_*(X/G) \cong C_*(X) \otimes_G \mathbb{Z}$.

De manera similar se prueba que $\mathrm{Hom}(C_*(X/G),\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_G(C_*(X),\mathbb{Z})$. □

Teorema 1.24 (Equivalencia de las definiciones de cohomología de grupos). Sea Y un CW complejo y un espacio de Eilenberg-MacLane de tipo $K(G,1)$ entonces

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \cong H^*(Y;\mathbb{Z}) \quad \text{y} \quad \mathrm{Tor}_*^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \cong H_*(Y;\mathbb{Z})$$

Demostración. Sea $p : X \longrightarrow Y$ el espacio recubridor universal de Y. Como Y es un CW complejo y un espacio de Eilenberg-MacLane de tipo $K(G,1)$ entonces por la proposición 1.20 tenemos que el complejo de cadenas celular aumentado de X es una resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Además, tenemos que p induce un homeomorfismo entre el espacio cociente X/G y el espacio Y.

Por lo anterior y por el lema 1.23 tenemos que

$$\mathrm{Hom}(C_*(Y),\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_G(C_*(X),\mathbb{Z}) \quad \text{y} \quad C_*(Y) \cong C_*(X) \otimes_G \mathbb{Z}$$

de donde claramente

$$H^*(Y;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Ext}^*_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \quad \text{y} \quad H_*(Y;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}G}_*(\mathbb{Z},\mathbb{Z}).$$

□

El Teorema 1.24 demuestra que las definiciones algebraica y topológica de cohomología y homología de grupo coinciden.

Capítulo 2

Sucesión Espectral de Lyndon-Hochschild-Serre

En este capítulo se toman como referencia los libros J. Rotman [14] y C. A. Weibel [16]. Esta sección incluye la definición de sucesión espectral en cohomología, la definición de convergencia de una sucesión espectral, la construcción de una sucesión espectral a través de parejas exactas y cómo calcular la cohomología del complejo total asociado a un complejo doble. Todo lo anterior como nociones preliminares para definir la cohomología de un grupo con coeficientes en un complejo de cadenas y entender la construcción de la sucesión espectral de *Lyndon–Hochschild–Serre*.

2.1. Sucesiones espectrales

Definición 2.1. Sea $\{(E_r, d_r)\}_{r\geq 1}$ una sucesión de $R-$módulos bigraduados diferenciales, es decir, cada E_r es una colección $(E_r^{p,q})_{p,q\in\mathbb{Z}}$ de $R-$módulos y cada $d_r : E_r \to E_r$ es un $R-$homomorfismo tal que $d_r \circ d_r = 0$.

$\{(E_r, d_r)\}_{r\geq 1}$ se dice **sucesión espectral en cohomología** (o simplemente sucesión espectral) si se verifica lo siguiente:

1. Para todo $r \geq 1$ el bigrado de $d_r : E_r \to E_r$ es $(r, 1-r)$.
2. Para todo p, q y $r \geq 1$ existe un isomorfismo

$$E_{r+1}^{p,q} \cong H^{p,q}(E_r, d_r) = \frac{Ker(d_r^{p,q})}{Im(d_r^{p-r,q-1+r})}.$$

El término E_r recibe el nombre de $r-$**página de** $\{(E_r, d_r)\}_{r\geq 1}$.

Una sucesión espectral se dice **acotada** si existe $r \geq 1$ tal que para todo $n \in \mathbb{Z}$ existe solamente un número finito de módulos no triviales $E_r^{p,q}$ tales que $p+q=n$.

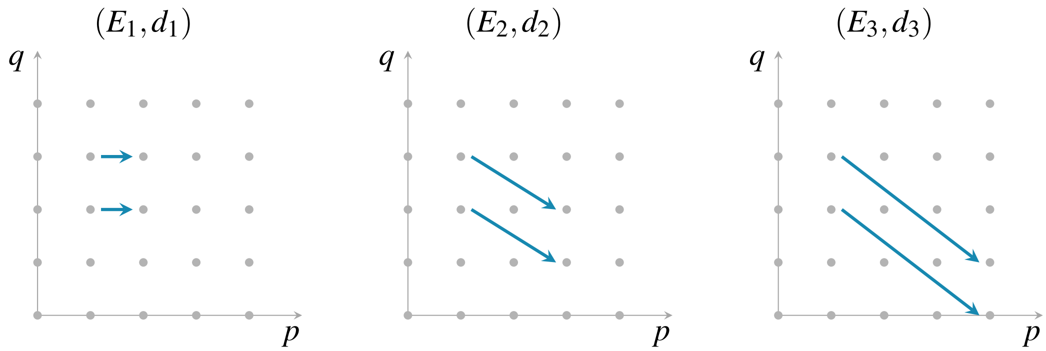


Figura 2.1: Páginas de una sucesión espectral en cohomología

Nota 2. Sea $\{(E_r,d_r)\}_{r\geq 1}$ una sucesión espectral.

Por definición se tiene que $E_2 = H(E_1,d_1) = \dfrac{Z_2}{B_2}$ donde Z_2 y B_2 son los $R-$módulos bigraduados

$$Z_2^{p,q} := Ker(d_1^{p,q}) \quad \text{y} \quad B_2^{p,q} := Im(d_1^{p-1,q}) \tag{2.1}$$

para todo $p,\ q \in \mathbb{Z}$ y $B_2 \subseteq Z_2$.

Similarmente $E_3 = H(E_2,d_2) = \dfrac{Z(E_2)}{B(E_2)}$ con

$$Z(E_2)^{p,q} := Ker(d_2^{p,q}) \quad \text{y} \quad B(E_2)^{p,q} := Im(d_2^{p-2,q+1}). \tag{2.2}$$

Dado que $Z(E_2)$ y $B(E_2)$ son R–submódulos bigraduados de $E_2 = \dfrac{Z_2}{B_2}$ se tiene que $Z(E_2) \cong \dfrac{Z_3}{B_2}$ y $B(E_2) \cong \dfrac{B_3}{B_2}$ donde Z_3 y B_3 son R–submódulos bigraduados de Z_2 que contienen a B_2 y $B_3 \subseteq Z_3$.

De lo anterior se tiene que $E_2 \cong \dfrac{Z_2}{B_2}$ y $E_3 \cong \dfrac{Z_3}{B_3}$ con $B_2 \subseteq B_3 \subseteq Z_3 \subseteq Z_2 \subseteq E_1$.

Iterando el procedimiento anterior se obtiene una cadena de R–submódulos bigraduados de E_1,

$$B_2 \subseteq B_3 \subseteq \cdots \subseteq B_r \subseteq \cdots \subseteq Z_r \subseteq \cdots \subseteq Z_3 \subseteq Z_2 \subseteq E_1, \tag{2.3}$$

tal que $E_{r+1} \cong \dfrac{Z_{r+1}}{B_{r+1}}$.

Definición 2.2. Sea $\{(E_r,d_r)\}_{r\geq 1}$ una sucesión espectral. Se definen los R–módulos bigraduados

$$Z_\infty = \bigcap_{r\geq 1} Z_r \quad \text{y} \quad B_\infty = \bigcup_{r\geq 1} B_r.$$

Se tiene que $B_\infty \subseteq Z_\infty$ entonces se define el **término límite** por $E_\infty = \dfrac{Z_\infty}{B_\infty}$.

Proposición 2.1. Sea $\{(E_r,d_r)\}_{r\geq 1}$ una sucesión espectral en cohomología.

1. $E_{r+1} = E_r$ si y sólo si $Z_{r+1} = Z_r$ y $B_{r+1} = B_r$.
2. Si $E_{r+1} = E_r$ para todo $r \geq s$ entonces $E_s = E_\infty$.

Definición 2.3. Se dice que una sucesión espectral $\{(E_r,d_r)\}_{r\geq 1}$ acotada **converge a un** $R-$**módulo graduado** H (o **converge a** H) y se denota por

$$E_2^{p,q} \Rightarrow H^{p+q},$$

si existe una filtración decreciente $\{F^pH\}_{p\in\mathbb{Z}}$ de H tal que

1. Para todo $n \in \mathbb{Z}$ existen enteros $s = s(n)$ y $t = t(n)$ tales que
$$\{0\} = F^tH^n \subseteq \cdots \subseteq F^pH^n \subseteq F^{p-1}H^n \subseteq \cdots \subseteq F^sH^n = H^n,$$
es decir, $\{F^pH\}_{p\in\mathbb{Z}}$ es una **filtración acotada**.
2. Para todo p, q
$$E_\infty^{p,q} \cong \frac{F^pH^{p+q}}{F^{p+1}H^{p+q}} =: Gr^{p,q}H.$$

Donde el módulo bigraduado $Gr\,H = (Gr^{p,q}H)$ recibe el nombre de **módulo graduado asociado a** H. Un elemento de $Gr^{p,q}H$ se dice que tiene **grado de filtración** p, **grado complementario** q y **grado total** $p+q$.

La convergencia de una sucesión espectral en cohomología esquematizarse como en la siguiente figura:

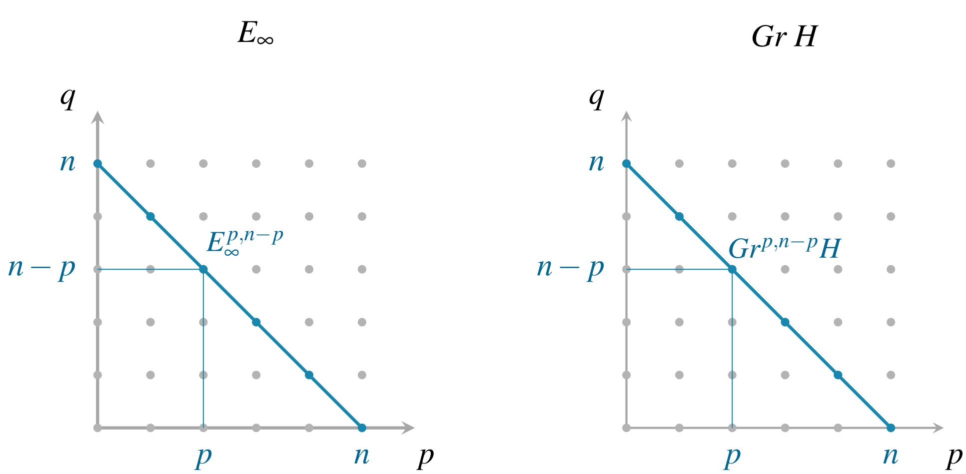


Figura 2.2: Convergencia de una sucesión espectral en cohomología $\{(E_r, d_r)\}_{r\geq 1}$ a un módulo graduado H.

Notemos que cuando se dice que "una sucesión espectral en cohomología converge a H" quiere decir que el término límite de la sucesión espectral es isomorfo al módulo graduado asociado a H. Esto significa que en general no se conoce el $R-$módulo graduado H, de hecho, sólo se conocen los cocientes $F^*H^n/F^{*+1}H^n$ de la filtración de $H = (H^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ y notemos que estos cocientes los podemos organizar en las siguientes sucesiones exactas:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & F^{s+1}H^n & \hookrightarrow & H^n & \twoheadrightarrow & \dfrac{H^n}{F^{s+1}H^n} & \longrightarrow & 0, \\[2ex]
0 & \longrightarrow & F^{s+2}H^n & \hookrightarrow & F^{s+1}H^n & \twoheadrightarrow & \dfrac{F^{s+1}H^n}{F^{s+2}H^n} & \longrightarrow & 0, \\[2ex]
 & & & & \vdots & & & & \\[2ex]
0 & \longrightarrow & F^{t-2}H^n & \hookrightarrow & F^{t-3}H^n & \twoheadrightarrow & \dfrac{F^{t-3}H^n}{F^{t-2}H^n} & \longrightarrow & 0, \\[2ex]
0 & \longrightarrow & F^{t-1}H^n & \hookrightarrow & F^{t-2}H^n & \twoheadrightarrow & \dfrac{F^{t-2}H^n}{F^{t-1}H^n} & \longrightarrow & 0.
\end{array}
$$

De donde tenemos que H_n está determinado por $F^{s+1}H^n$ y el cociente $H^n/F^{s+1}H^n$, es decir, H_n está determinado de manera única salvo por una extensión de $H^n/F^{s+1}H^n$ por $F^{s+1}H^n$. A su vez F^kH^n está determinado de manera única salvo por una extensión de $F^kH^n/F^{k+1}H^n$ por $F^{k+1}H^n$ para todo entero $s < k < t$. En otras palabras, para calcular a H_n deben solucionarse estos sucesivos problemas de extensión de grupos.

Definición 2.4. Sean $\{(E_r, d_r)\}_{r\geq 1}$ y $\{(\overline{E}_r, \overline{d}_r)\}_{r\geq 1}$ sucesiones espectrales. Un **homomorfismo de sucesiones espectrales** $\varphi : \{(E_r, d_r)\}_{r\geq 1} \longrightarrow \{(\overline{E}_r, \overline{d}_r)\}_{r\geq 1}$ es una colección de funciones $\{\varphi_r : E_r \longrightarrow \overline{E}_r\}_{r\geq 1}$ tales que $\overline{d}_r \circ f_r = f_r \circ d_r$ y cada $f_{r+1}^{p,q}$ es el mapeo inducido en cohomología por $f_r^{p,q}$.

Proposición 2.2. Sea $\varphi : E \longrightarrow \overline{E}$ un homomorfismo de sucesiones espectrales. Supongamos que existe un $r \geq 1$ tal que para todo $p, q \in \mathbb{Z}$ se tiene que $\varphi_r : E_r^{p,q} \longrightarrow \overline{E}_r^{p,q}$ es un isomorfismo. Entonces para todo $k \geq r$ y para todo $p, q \in \mathbb{Z}$ se tiene que $\varphi_k : E_k^{p,q} \longrightarrow \overline{E}_k^{p,q}$ es un isomorfismo. Más aún, si E_r y $\overline{E}_r$ son acotadas., entonces $\varphi_\infty : E_\infty^{p,q} \longrightarrow \overline{E}_\infty^{p,q}$ es un isomorfismo.

2.2. Existencia de sucesiones espectrales

Definición 2.5. Sean D y E módulos bigraduados sobre un anillo R con homomorfismos bigraduados α, β y γ como en el siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\alpha"] & & D \arrow[dl, "\beta"] \\ & E \arrow[ul, "\gamma"] & \end{tikzcd}$$

Decimos que $\mathscr{C} = (D, E, \alpha, \beta, \gamma)$ es una **pareja exacta** si este diagrama es exacto en cada vértice, es decir, si $Im\,\alpha = Ker\,\beta$, $Im\,\beta = Ker\,\gamma$ y $Im\,\gamma = Ker\,\alpha$.

Proposición 2.3. Sea C un complejo de cocadenas y sea $\{F^pC\}_{p\in\mathbb{Z}}$ una filtración decreciente (i.e. $F^{p+1}C \subseteq F^pC$). Entonces existe una pareja exacta $\mathscr{C} = (D, E, \alpha, \beta, \gamma)$ asociada a la filtración, tal que los bigrados de α, β y γ son $(-1,1)$, $(0,0)$ y $(1,0)$ respectivamente.

Demostración. Para abreviar denotemos por F^p a F^pC.

Para cada $p \in \mathbb{Z}$ fijo tenemos una sucesión exacta corta,

$$0 \to F^{p+1} \xrightarrow{j^{p+1}} F^p \xrightarrow{\pi^p} F^p/F^{p+1} \to 0,$$

donde j^{p+1} es la inclusión y π^p es la proyección.

Por el lema de la serpiente tenemos una sucesión exacta larga en cohomología,

$$\begin{aligned} \cdots \to H^n(F^{p+1}) \xrightarrow{\alpha_n} H^n(F^p) \xrightarrow{\beta_n} H^n(F^p/F^{p+1}) \xrightarrow{\gamma_n} \\ H^{n+1}(F^{p+1}) \xrightarrow{\alpha_{n+1}} H^{n+1}(F^p) \xrightarrow{\beta_{n+1}} H^{n+1}(F^p/F^{p+1}) \xrightarrow{\gamma_{n+1}} \cdots, \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde $\alpha_n := j_n^{p+1}$, $\beta_n := \pi_n^p$ y γ_n es el homomorfismo conexión.

Podemos escribir a (2.4) como,

$$\begin{aligned} \cdots \to H^{p+q}(F^{p+1}) \xrightarrow{\alpha} H^{p+q}(F^p) \xrightarrow{\beta} H^{p+q}(F^p/F^{p+1}) \xrightarrow{\gamma} \\ H^{p+q+1}(F^{p+1}) \xrightarrow{\alpha} H^{p+q+1}(F^p) \xrightarrow{\beta} H^{p+q+1}(F^p/F^{p+1}) \xrightarrow{\gamma} \cdots, \end{aligned} \tag{2.5}$$

y definir

$$D = (D^{p,q}), \text{ donde } D^{p,q} := H^{p+q}(F^p), \tag{2.6}$$

$$E = (E^{p,q}), \text{ donde } E^{p,q} := H^{p+q}(F^p/F^{p+1}). \tag{2.7}$$

Entonces para $q \in \mathbb{Z}$ fijo, (2.5) toma la forma,

$$\cdots \to D^{p+1,q-1} \xrightarrow{\alpha} D^{p,q} \xrightarrow{\beta} E^{p,q} \xrightarrow{\gamma} D^{p+1,q} \xrightarrow{\alpha} D^{p,q+1} \xrightarrow{\beta} E^{p,q+1} \xrightarrow{\gamma} \cdots. \tag{2.8}$$

Por tanto $\mathscr{C} = (D, E, \alpha, \beta, \gamma)$ es una pareja exacta y claramente los bigrados de α, β y γ son $(-1,1)$, $(0,0)$ y $(1,0)$ respectivamente. $\square$

Proposición 2.4. Sea $\mathscr{C} = (D, E, \alpha, \beta, \gamma)$ una pareja exacta.

(i) Si se define d por $\beta \circ \gamma$ se tiene que (E, d) es un módulo bigraduado diferencial.

(ii) Existe una pareja exacta $\mathscr{C}_2 = (D_2, E_2, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ con $E_2 = H(E, d)$. Esta pareja exacta recibe el nombre de **pareja derivada**.

Demostración. En el libro [14] se encuentra la prueba de esta proposición: ver proposición 10.9, capítulo 10. □

Definición 2.6. Sea $\mathscr{C} = (D, E, \alpha, \beta, \gamma)$ una pareja exacta.

Se denota por $\mathscr{C}_r = (D_r, E_r, \alpha_r, \beta_r, \gamma_r)$ a la $r-$**ésima pareja derivada de** $\mathscr{C}$, definida de manera inductiva, como la pareja derivada de la $(r-1)-$ésima pareja derivada $\mathscr{C}_{r-1}$.

Corolario 2.5. Sea C un complejo de cocadenas con filtración decreciente $\{F^pC\}_{p\in\mathbb{Z}}$. Sea $\mathscr{C} = (D, E, \alpha, \beta, \gamma)$ la pareja exacta asociada a la filtración. Entonces la $r-$ésima pareja derivada de $\mathscr{C}$ verifica lo siguiente:

1. Los bigrados de α_r, β_r y γ_r son $(-1, 1)$, $(r-1, 1-r)$ y $(1, 0)$ respectivamente.

2. El $R-$módulo bigraduado diferencial (E_r, d_r) es tal que el bigrado de d_r es $(r, 1-r)$ y existe un isomorfismo $E_{r+1} \cong Ker(d_r)/Im(d_r)$.

3. $D_r^{p,q} = Im(\alpha_{p+1,q-1})(\alpha_{p+2,q-2})\cdots(\alpha_{p+r-1,q-r+1})$, es decir,
$$D_r^{p,q} = Im(j^{p+1} j^{p+2} \cdots j^{p+r-1})_* : H^n(F^{p+r-1}) \to H^n(F^p)$$
en términos de la pareja exacta de la proposición 2.3.

Corolario 2.6. Para todo complejo de cocadenas con un filtración decreciente existe una sucesión espectral en cohomología.

Definición 2.7. Sea C un complejo de cocadenas con filtración decreciente $\{F^pC\}_{p\in\mathbb{Z}}$ y sea $i^p : F^pC \to C$ el homomorfismo inclusión, se define
$$\Phi^p H^n(C) := Im(i_*^p),$$
donde $i_*^p : H^n(F^pC) \to H^n(C)$ es el homomorfismo de grupos inducido por i^p. Estos grupos forman una filtración decreciente $\{\Phi^p H^n(C)\}_{p\in\mathbb{Z}}$, la cual recibe el nombre de **filtración inducida de** $H^n(C)$.

Nota 3. Si $\{F^pC\}_{p\in\mathbb{Z}}$ es una filtración decreciente acotada de un complejo de cocadenas C, entonces la filtración inducida de la cohomología de C también es acotada y con las mismas cotas.

En efecto, si existen enteros s y t tales que $F^tC = \{0\}$ y $F^sC = C$, entonces $Im(i_*^t) = 0$ y $Im(i_*^s) = C$, por lo tanto $\Phi^t H^n(C) = 0$ y $\Phi^s H^n(C) = H^n(C)$. De esta manera, para todo $n \in \mathbb{Z}$ existen s y t enteros tales que
$$\{0\} = \Phi^t H^n(C) \subseteq \cdots \subseteq \Phi^p H^n(C) \subseteq \Phi^{p-1} H^n(C) \subseteq \cdots \subseteq \Phi^s H^n(C) = H^n(C).$$

Teorema 2.7. Sea C un complejo de cocadenas con $\{F^pC\}_{p\in\mathbb{Z}}$ una filtración decreciente acotada, entonces la sucesión espectral en cohomología asociada a esta filtración es tal que,

1. Para todo p, q existe $r \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $E_\infty^{p,q} = E_r^{p,q}$.
2. $E_2^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}(C)$.

Demostración.

1. Sean s y t enteros tales $F^t = \{0\}$ y $F^s = C$.

   Si $p < s$ entonces $F^p = F^{p+1}$, y $F^p/F^{p+1} = 0$. Por definición, $E_1^{p,q} = H^{p+q}(F^p/F^{p+1})$, entonces $E_1^{p,q} = 0$.

   Notemos que $E_r^{p,q}$ es un subcociente de $E_1^{p,q}$, es decir, $E_r^{p,q} = \dfrac{Ker(d_{r-1}^{p,q})}{Im(d_{r-1}^{p-r+1,q-2+r})}$ con $Im(d_{r-1}^{p-r+1,q-2+r}) \subseteq Ker(d_{r-1}^{p,q}) \subseteq E_1^{p,q}$ entonces $E_r^{p,q} = 0$ para todo r.

   Similarmente si $p > t$ entonces $F^p = 0$ y $E_r^{p,q} = 0$ para todo r.

   Recordemos que el bigrado de d_r es $(r, 1-r)$.

   Entonces para todo p, q fijos $d_r(E_r^{p,q}) \subseteq E_r^{p+r,q+1-r}$, luego si r es lo suficientemente grande como para que $p - r < s$ y $p + r > t$ entonces $E_r^{p-r,q-1+r} = 0$ y $E_r^{p+r,q+1-r} = 0$. Así $Im(d_r^{p-r,q-1+r}) = 0$ y $Ker(d_r^{p,q}) = E_r^{p,q}$. De donde $E_{r+1}^{p,q} = E_r^{p,q}$, así por proposición 2.1. $E_r = E_\infty$.

2. Consideremos la sucesión exacta obtenida de la $r-$ésima pareja derivada:

   $$D_r^{p-r+2,*} \xrightarrow{\alpha_r} D_r^{p-r+1,*} \xrightarrow{\beta_r} E_r^{p,q} \xrightarrow{\gamma_r} D_r^{p+1,q}.$$

   Del corolario 2.4.

   $$D_r^{p,q} = Im(j^{p+1} j^{p+2} \cdots j^{p+r-1})_* : H^n(F^{p+r-1}) \to H^n(F^p).$$

   Entonces
   $$D_r^{p-r+1,*} = Im(j^{p-r+2} \cdots j^p)_* \subseteq H^n(F^{p-r+1}),$$
   y
   $$D_r^{p-r+2,*} = Im(j^{p-r+3} \cdots j^{p+1})_* \subseteq H^n(F^{p-r+2}).$$

   Supongamos que r es lo suficientemente grande tal que $p - r + 1 < s$ entonces se tiene que $F^{p-r+1} = F^s = C$ de donde $j^{p-r+2} \cdots j^p = i^p : F^p \to C$, con lo que

   $$D_r^{p-r+1,*} = \Phi^p H^n(C).$$

   De la misma manera $D_r^{p-r+2,*} = \Phi^{p+1} H^n(C)$ para r suficientemente grande.

   Ahora, $D_r^{p+1,q} = Im(j^{p+2} \cdots j^{p+r})_* : H^n(F^{p+r}) \to H^n(F^{p+1})$ pero si r es suficientemente grande entonces $p + r > t$ de donde $F^{p+r} = 0$ y así $D_r^{p+1,q} = 0$.

En resumen la sucesión exacta corta toma la forma,

$$\Phi^{p+1}H^n(C) \to \Phi^p H^n(C) \to E_r^{p,q} \to 0,$$

con lo que $\Phi^p H^n(C)/\Phi^{p+1}H^n(C) \cong E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}$, para r suficientemente grande. Así tenemos que $\{(E_r, d_r)\}$ converge a la cohomología de C.

$\square$

2.3. Sucesión espectral asociada a un complejo doble

Definición 2.8. Un **complejo doble** (M, d', d'') consiste de un $R-$módulo bigraduado M y dos $R-$homomorfismos $d', d'' : M \to M$ tales que

1. Los bigrados de d' y d'' son $(1,0)$ y $(0,1)$ respectivamente. Además $d' \circ d' = 0$ y $d'' \circ d'' = 0$.

2. $d' \circ d'' + d'' \circ d' = 0$.

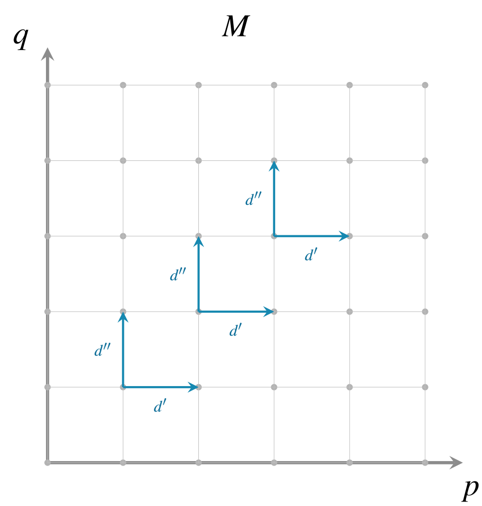


Figura 2.3: Complejo doble (M, d', d'')

La condición 1. de la definición anterior significa que las filas y las columnas de la figura 2.3 son complejos de cocadenas. Y la condición 2. quiere decir que cada cuadrado de la figura 2.3 anticonmuta.
Definición 2.9. Un complejo doble (M, d', d'') se dice **complejos doble en el primer cuadrante** si $M^{p,q} = \{0\}$ si p o q es negativo.
Definición 2.10. Si (M, d', d'') es un complejo doble. El **complejo total asociado a** M, denotado por TM, es el complejo de cocadenas cuyo término de grado n se define por

$$(TM)^n = \bigoplus_{p+q=n} M^{p,q}$$

y los diferenciales $\partial^n : (TM)^n \to (TM)^{n+1}$ dados por

$$\partial^n = \sum_{p+q=n} (d'_{p,q} + d''_{p,q}).$$

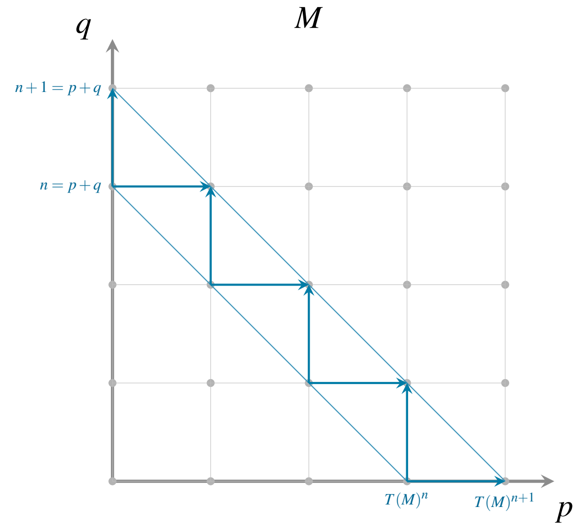


Figura 2.4: Complejo total TM

Observemos que el término $n-$ésimo del complejo total es la suma de los módulos que están sobre la antidiagonal n de la figura 2.4, y el diferencial ∂^n es la suma de los homomorfismos que salen de los puntos de la antidiagonal n.

Las condiciones $d' \circ d' = 0$, $d'' \circ d'' = 0$ y $d' \circ d'' + d'' \circ d' = 0$ implican que $\partial \circ \partial = 0$.
Ejemplo 4. Sean (A, α) y (B, β) complejos no-negativos de cadenas y cocadenas de módulos sobre un anillo R respectivamente.

Definamos el complejo doble $(\mathrm{Hom}_R(A,B), d', d'')$ como sigue:

$$\mathrm{Hom}_R(A,B)^{p,q} := \mathrm{Hom}_R(A_q, B^p), \text{ para todo } p, q \geq 0.$$

y

$$d'_{p,q} = \beta^p_{*q} \quad \text{y} \quad d''_{p,q} = (-1)^p \alpha^{*p}_q$$

donde la notación β^p_{*q} y α^{*p}_q significan lo siguiente:

Sea $\beta^p : B^p \to B^{p+1}$ un homomorfismo en el complejo de cocadenas, β^p_{*q} denota el homomorfismo que resulta de aplicar el funtor $\mathrm{Hom}_R(A_q, -)$ a β^p, así

$$\begin{aligned} \beta^p_{*q} : \mathrm{Hom}_R(A_q, B^p) &\to \mathrm{Hom}_R(A_q, B^{p+1}) \\ f &\mapsto \beta^p_{*q}(f) = \beta^p \circ f. \end{aligned}$$

Análogamente, sea $\alpha_q : A^q \to B^{q-1}$ un homomorfismo en el complejo de cadenas, α^{*p}_q denota el homomorfismo que resulta de aplicar el funtor $\mathrm{Hom}_R(-, B^p)$ a α_q, así

$$\begin{aligned} \alpha^{*p}_q : \mathrm{Hom}_R(A_{q-1}, B^p) &\to \mathrm{Hom}_R(A_q, B^p) \\ f &\mapsto \alpha^{*p}_q(f) = f \circ \alpha_q. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R(A_{q+1},B^p) & \xrightarrow{d'} & \mathrm{Hom}_R(A_{q+1},B^{p+1}) \\ \uparrow{\scriptstyle d''} & & \uparrow{\scriptstyle d''} \\ \mathrm{Hom}_R(A_q,B^p) & \xrightarrow{d'} & \mathrm{Hom}_R(A_q,B^{p+1}) \end{array}$$

Una pregunta natural después de definir el complejo total asociado a un complejo doble (M,d',d'') es ¿cómo calcular la cohomología de $T(M)$?. La respuesta a esta pregunta es: puede construirse sucesiones espectrales que converjan a la cohomología de TM, de manera más precisa, vamos a encontrar dos filtraciones decrecientes de este complejo de cocadenas y analizaremos las sucesiones espectrales asociadas a dichas filtraciones. Esto para finalmente conocer no precisamente la cohomología de TM, sino los módulos graduados asociados a $H^*(TM)$ provenientes de las dos filtraciones mencionadas. De donde tendremos que el cálculo de $H^*(TM)$ queda sujeto a la solución de los problemas de extensión de grupos de los que ya habíamos hablado.

Definición 2.11. Sea (M,d',d'') un complejo doble.

1. La **filtración vertical** de TM es la filtración decreciente $\{{}^vF^pTM\}_{p\in\mathbb{Z}}$, tal que el término de grado n del subcomplejo ${}^vF^pTM$ está dado por,

$$^vF^p(TM)^n = \bigoplus_{i\geq p} M^{i,n-i} = M^{p,q} \oplus M^{p+1,q-1} \oplus \cdots .$$

2. La **filtración horizontal** de TM es la filtración decreciente $\{{}^hF^qTM\}_{q\in\mathbb{Z}}$, tal que el término de grado n del subcomplejo ${}^hF^qTM$ está dado por,

$$^hF^q(TM)^n = \bigoplus_{j\geq q} M^{n-j,j} = M^{p,q} \oplus M^{p-1,q+1} \oplus \cdots .$$

Está definición puede esquematizarse de la siguiente manera:

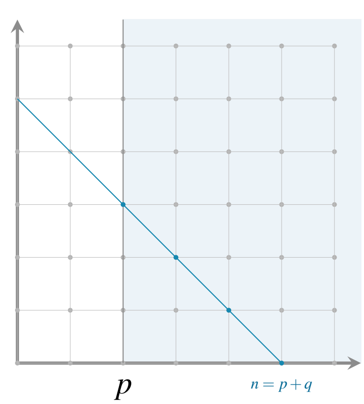


Figura 2.5: Filtración Vertical

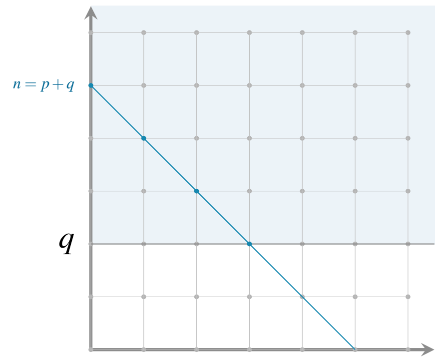


Figura 2.6: Filtración Horizontal

El término de ${}^vF^pTM$ de grado n es la suma directa de los $M_{i,n-i}$ que se encuentran a la derecha de la línea vertical en p, ver 2.5. Y el término de ${}^hF^qTM$ de grado n es la suma directa de los $M_{n-j,j}$ que se encuentran arriba de la línea horizontal en q, ver 2.6.

Tenemos el complejo de cocadenas $TM = ((TM)^n, \partial^n)$ con dos filtraciones decrecientes $\{{}^vF^pTM\}_{p\in\mathbb{Z}}$ y $\left\{{}^hF^qTM\right\}_{q\in\mathbb{Z}}$. Entonces por cada filtración existen una sucesión espectral en cohomología, denotadas por $\{({}^vE_r, d_r)\}_{r\geq 1}$ y $\{({}^hE_r, d_r)\}_{r\geq 1}$.

Proposición 2.8. Sea (M, d', d'') un complejo doble en el primer cuadrante y sean ${}^vE_r$ y ${}^hE_r$ las sucesiones espectrales asociadas a la fitración vertical y horizontal respectivamente.

1. Las filtraciones vertical y horizontal son acotadas.
2. Para todo p, q existe $r \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que
$$ {}^vE_\infty^{p,q} = {}^vE_r^{p,q} \quad \text{y} \quad {}^hE_\infty^{p,q} = {}^hE_r^{p,q}. $$
3. ${}^vE_2^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}(TM)$ y ${}^hE_2^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}(TM)$.

Demostración. Para la filtración vertical. Sea $n \geq 0$.

Notemos que ${}^vF^0(TM)^n = (TM)^n$ entonces ${}^vF^p(TM)^n = (TM)^n$ para todo $p \leq 0$. También ${}^vF^{n+1}(TM)^n = \{0\}$ así ${}^vF^p(TM)^n = \{0\}$ para todo $p \geq (n+1)$. Por tanto las cotas son $s(n) = 0$ y $t(n) = n+1$.

Similarmente para la filtración horizontal las cotas son $s(n) = 0$ y $t(n) = n+1$.

Entonces 2. y 3. se siguen del Teorema 2.7.

□

Nota 4. La proposición 2.8 nos dice que las sucesiones espectrales ${}^vE_r$ y ${}^hE_r$ convergen al mismo módulo graduado $H(TM)$. Eso no significa que ${}^vE_\infty \cong {}^hE_\infty$, ya que las filtraciones inducidas $\{{}^v\Phi^pH(TM)\}$ y $\left\{{}^h\Phi^pH(TM)\right\}$ no necesariamente son iguales.

Nota 5. Sea (M, d', d'') un complejo doble en el primer cuadrante y sea ${}^vE_r$ la sucesión espectral asociada a la filtración decreciente $\{{}^vF^pTM\}_{p\in\mathbb{Z}}$. Calculemos el término ${}^vE_2$ de esta sucesión espectral.

Para hacer más sencilla la notación suprimiremos el superíndice v y denotaremos por F^p a ${}^vF^pTM$.

Recordemos que por construcción $E_1^{p,q} = H^n(F^p/F^{p+1})$ con $n := p+q$.

Veamos cómo es el complejo de cocadenas F^p/F^{p+1}.

Sabemos que $(F^p/F^{p+1})^n = (F^p)^n/(F^{p+1})^n$ donde

$$\begin{aligned}(F^p)^n &= M^{p,n-p} \oplus M^{p+1,n-p-1} \oplus M^{p+2,n-p-2} \oplus \cdots \oplus M^{n,0} \\ (F^{p+1})^n &= M^{p+1,n-p-1} \oplus M^{p+2,n-p-2} \oplus \cdots \oplus M^{n,0},\end{aligned}$$

es decir, $(F^p/F^{p+1})^n \cong M^{p,n-p}$.

El diferencial $\overline{\partial^n} : (F^p/F^{p+1})^n \to (F^p/F^{p+1})^{n+1}$ está definido por $[z] \mapsto [\partial^n(z)]$. Si tomamos $[z] \in (F^p/F^{p+1})^n$ con representante $z \in M^{p,n-p}$ entonces

$$\overline{\partial^n}([z]) = [(d'_{p,n-p} + d''_{p,n-p})(z)] = [d''_{p,n-p}(z)],$$

donde la última igualdad se da porque $Im(d'_{p,n-p}) \subseteq (F^{p+1})^{n+1}$.

De lo anterior se tiene que el complejo de cocadenas F^p/F^{p+1} es isomorfo al complejo de cocadenas $(M^{p,*}, d'')$ que correponde al complejo ubicado en la columna $p-$ésima de M. Así

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(F^p/F^{p+1}) \cong H^q(M^{p,*}).$$

Denotemos por $H^v(M)$ al módulo bigraduado definido por $H^v(M)^{p,q} = H^q(M^{p,*})$. $H^v(M)$ tiene estructura de módulo bigraduado diferencial si se define $\overline{d'}$ de bigrado $(1,0)$ de la siguiente manera: para q fijo,

$$\begin{aligned}\overline{d'}_p : H^q(M^{p,*}) &\to H^q(M^{p+1,*}) \\ [z] &\mapsto [d'_{p,q}(z)].\end{aligned}$$

Se puede probar que el homomorfismo $\overline{d'}_p : H^q(M^{p,*}) \to H^q(M^{p+1,*})$ coincide con el homomorfismo $d_1^{p,q} : E_1^{p,q} \to E_1^{p+1,q}$, ver proposición 10.17, capítulo 10, [14]. Con lo que

$$E_2^{p,q} \cong H^{p,q}(E_1, d_1) = \frac{Ker(d_1^{p,q})}{Im(d_1^{p-1,q})} \cong \frac{Ker(\overline{d'}_p)}{Im(\overline{d'}_{p-1})} = H^p(H^v(M)^{*,q}).$$

Al módulo bigraduado $H^p(H^v(M)^{*,q})$ lo denotamos por $H^hH^v(M)$.

En resumen, la sucesión espectral ${}^vE_r$ asociada a la filtración decreciente $\{{}^vF^pTM\}_{p\in\mathbb{Z}}$ es tal que

$${}^vE_1^{p,q} \cong H^v(M)^{p,q} = H^q(M^{p,*}).$$

y

$${}^vE_2^{p,q} \cong H^hH^v(M)^{p,q} = H^p(H^v(M)^{*,q}).$$

Lo anterior se puede resumir en el siguiente teorema.
Teorema 2.9. Sea (M,d',d'') un complejo doble en el primer cuadrante, entonces

$$^{v}E_1^{p,q} \cong H^v(M)^{p,q} = H^q(M^{p,*}).$$

y

$$^{v}E_2^{p,q} \cong H^p(H^v(M)^{*,q}) \Rightarrow H^{p+q}(TM).$$

Nota 6. De manera análoga podemos calcular el término $^{h}E_2$ de la sucesión espectral $^{h}E_r$.

En este caso, el complejo de cocadenas F^p/F^{p+1} es isomorfo al complejo de cocadenas $(M^{*,p},d')$ que correponde al complejo ubicado en la fila $p-$ésima de M. Así

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(F^p/F^{p+1}) \cong H^q(M^{*,p}).$$

Se denota por $H^h(M)$ al módulo bigraduado definido por $H^h(M)^{p,q} = H^q(M^{*,p})$. $H^h(M)$ tiene estructura de módulo bigraduado diferencial si para q fijo se define $\overline{d''}$ de bigrado $(0,1)$ por,

$$\begin{aligned} \overline{d''}_p : H^q(M^{*,p}) &\to H^q(M^{*,p+1}) \\ [z] &\mapsto [d''_{p,q}(z)]. \end{aligned}$$

Este homomorfismo $\overline{d''}_p : H^q(M^{*,p}) \to H^q(M^{*,p+1})$ coincide con $d_1^{p,q} : E_1^{p,q} \to E_1^{p+1,q}$. Con lo que

$$E_2^{p,q} \cong H^{p,q}(E_1,d_1) = \frac{Ker(d_1^{p,q})}{Im(d_1^{p-1,q})} \cong \frac{Ker(\overline{d''}_p)}{Im(\overline{d''}_{p-1})} = H^p(H^h(M)^{q,*}).$$

Al módulo bigraduado $H^p(H^h(M)^{q,*})$ lo denotamos por $H^vH^h(M)$.

Así la sucesión espectral $^{h}E_r$ asociada a la filtración decreciente $\left\{^{h}F^pTM\right\}_{p\in\mathbb{Z}}$ es tal que

$$^{h}E_1^{p,q} \cong H^h(M)^{p,q} = H^q(M^{*,p}).$$

y

$$^{h}E_2^{p,q} \cong H^vH^h(M)^{p,q} = H^p(H^h(M)^{q,*}).$$

Teorema 2.10. Sea (M,d',d'') un complejo doble en el primer cuadrante, entonces

$$^{h}E_1^{p,q} \cong H^h(M)^{p,q} = H^q(M^{*,p}).$$

y

$$^{h}E_2^{p,q} \cong H^p(H^h(M)^{q,*}) \Rightarrow H^{p+q}(TM).$$

2.4. Cohomología de grupos con coeficientes en un complejo de cocadenas

Definición 2.12. Sea G un grupo y sea C un complejo de cocadenas de $G-$módulos no-negativo. Se define la **cohomología de G con coeficientes en C** por

$$H^*(G;C) := H^*(T\operatorname{Hom}_G(F,C)), \tag{2.9}$$

donde $T\operatorname{Hom}_G(F,G)$ denota el complejo total asociado al complejo doble $\operatorname{Hom}_G(F,C)$ definido por $\{\operatorname{Hom}_G(F_q,C^p)\}_{p,q\geq 0}$ con $\cdots \to F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$ una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

Proposición 2.11. Sea C un complejo de cocadenas no-negativo de $G-$módulos tal que $H^q(G,C^p) = 0$, para todo $q > 0$ y para todo $p \geq 0$. Entonces existe una sucesión espectral en cohomología tal que

$$E_2^{p,q} = H^p(G;H^q(C)) \Rightarrow H^{p+q}(\operatorname{Hom}_G(\mathbb{Z},C)). \tag{2.10}$$

Demostración. Sea $\cdots \to F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$ una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ y consideremos el complejo doble $\operatorname{Hom}_G(F,C) = \{\operatorname{Hom}_G(F_q,C^p)\}_{p,q\geq 0}$. Asociado a este complejo doble tenemos un complejo total $T\operatorname{Hom}_G(F,C)$.

Primero calculemos la sucesión espectral asociada a la filtración vertical:

$$\begin{aligned}
{}^vE_1^{p,q} &= H^q(\operatorname{Hom}_G(F,C)_{p,*}) = H^q(\operatorname{Hom}_G(F,C^p)) = H^q(G,C^p)\\
&= \begin{cases} 0, & \text{si } q \neq 0 \\ H^q(G,C^p) & \text{si } q = 0 \end{cases} \cong \begin{cases} 0, & \text{si } q \neq 0 \\ \operatorname{Hom}_G(\mathbb{Z},C^p) & \text{si } q = 0. \end{cases}\\
{}^vE_2^{p,q} &= \begin{cases} 0, & \text{si } q \neq 0 \\ H^p(\operatorname{Hom}_G(\mathbb{Z},C)) & \text{si } q = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Como la 2-página está concentrada en la fila $q = 0$ se tiene que ${}^vE_\infty = {}^vE_2$ y que

$${}^vE_2^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}(T\operatorname{Hom}_G(F,C)) = H^{p+q}(\operatorname{Hom}_G(\mathbb{Z},C)). \tag{2.11}$$

Ahora calculemos la sucesión espectral asociada a la filtración horizontal:

$$\begin{aligned}
{}^hE_1^{p,q} &= H^q(\operatorname{Hom}_G(F,C)_{*,p}) = H^q(\operatorname{Hom}_G(F_p,C)) \cong \operatorname{Hom}_G(F_p,H^q(C)).\\
{}^hE_2^{p,q} &= H^p(\operatorname{Hom}_G(F,H^q(C))) = H^p(G,H^q(C)).
\end{aligned}$$

De aquí,

$${}^hE_2^{p,q} = H^p(G,H^q(C)) \Rightarrow H^{p+q}(T\operatorname{Hom}_G(F,C)) \tag{2.12}$$

De lo anterior podemos concluir que

$$E_2^{p,q} = H^p(G;H^q(C)) \Rightarrow H^{p+q}(\operatorname{Hom}_G(\mathbb{Z},C)). \tag{2.13}$$

□

2.5. Sucesión espectral de Lyndon-Hochschild-Serre

Teorema 2.12 (Sucesión espectral de Lyndon-Hochschild-Serre en cohomología). Sea

$$1 \to H \to G \to Q \to 1,$$

una extensión de grupos y sea M un $G-$módulo, entonces existe una sucesión espectral en cohomología de la forma

$$E_2^{p,q} = H^p(Q;H^q(H,M)) \Rightarrow H^{p+q}(G,M).$$

Demostración. Sea $\cdots \to F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$ una resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ y consideremos $C := \mathrm{Hom}_H(F,M)$ el complejo de cocadenas no-negativo de $Q-$módulos.

Notemos que por la proposición 1.3,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_G(F,M) &\cong \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z},\mathrm{Hom}(F,M))\\ &\cong \mathrm{Hom}_Q(\mathbb{Z},\mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z},\mathrm{Hom}(F,M))) \cong \mathrm{Hom}_Q(\mathbb{Z},C),\end{aligned}$$

entonces $H^*(G,M) \cong H^*(\mathrm{Hom}_Q(\mathbb{Z},C))$.

También tenemos que la acción de Q en $H^*(H,M)$ dada en la proposición 1.13 es la misma que hereda $H^*(H,M)$ de la acción de Q en C.

Si se prueba que $H^q(Q,C^p) = 0$ para todo $q > 0$ y para todo $p \geq 0$, entonces nos encontraríamos en las hipótesis de la proposición 2.11, por tanto existe una sucesión espectral en cohomología tal que

$$E_2^{p,q} = H^p(Q;H^q(C)) \Rightarrow H^{p+q}(\mathrm{Hom}_Q(\mathbb{Z},C)),$$

es decir,

$$E_2^{p,q} = H^p(Q;H^q(H,M)) \Rightarrow H^{p+q}(G,M).$$

Veamos que $H^q(Q,\mathrm{Hom}_H(F_p,M)) = 0$ para todo $q > 0$ y para todo $p \geq 0$. Dado que F_p es un $\mathbb{Z}G-$módulo libre se tiene que $H^q(Q,\mathrm{Hom}_H(F_p,M)) \cong \bigoplus_{i\in I} H^q(Q,\mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}G,M))$, entonces basta ver que $H^q(Q,\mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}G,M)) = 0$ para todo $q > 0$.

Observemos que por la proposición 1.4,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z},\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}G,M)) &\cong \mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z},\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}G,M_0))\\ &\cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}\otimes_H \mathbb{Z}G,M_0) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Ind}_H^G \mathbb{Z},M_0)\\ &\cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}Q\otimes\mathbb{Z},M_0) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}Q,M_0).\end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned}H^q(Q,\mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}G,M)) &\cong H^q(Q,\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}Q,M_0))\\ &= H^q(Q,\mathrm{Coind}_{\{1\}}^Q M_0) \cong H^q(\{1\},M_0) = 0\end{aligned}$$

para $q > 0$. □

La sucesión espectral del teorema 2.12 recibe el nombre de sucesión espectral de *Lyndon–Hochschild–Serre* en cohomología, también hay un versión en homología cuya construcción se hace de manera similar.

Proposición 2.13. Sean $1 \to H \to G \to Q \to 1$ y $1 \to H' \to G' \to Q' \to 1$ extensiones de grupos y sea (α, β, γ) un homomorfismo entre estas extensiones de grupos,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & G & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\beta} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ 0 & \longrightarrow & H' & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & Q' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Entonces la sucesión espectral de *Lyndon–Hochschild–Serre* es funtorial respecto a este homomorfismo, es decir, existe $\varphi : \{\overline{E}_r\}_{r\geq 1} \longrightarrow \{E_r\}_{r\geq 1}$ un homomorfismo de sucesiones espectrales donde $\{E_r\}_{r\geq 1}$ y $\{\overline{E}_r\}_{r\geq 1}$ son las sucesiones espectrales de *Lyndon–Hochschild–Serre* asociadas a la primera y segunda extensión de grupos respectivamente.

Demostración. Utilizando el hecho de que la cohomología de grupos es un funtor en dos variables puede verse que existe un homomorfismo del complejo doble asociado a la extensión dos al complejo doble asociado a la extensión uno. Este homomorfismo induce un homomorfismo en los complejos totales y por tanto en sus filtraciones. Así existe el homomorfismo entre las sucesiones espectrales. $\square$

Capítulo 3

Cohomología de Productos Semidirectos

Los resultados de este capítulo son tomados del artículo [1] de los autores A. Adem, J. Ge, J. Pan y N. Petrosyan y del artículo [2] de A. Adem y J. Pan. La finalidad de este capítulo es calcular la cohomología del producto semidirecto de $\mathbb{Z}^n$ con $\mathbb{Z}/p$ con p un número primo, $\Gamma = \mathbb{Z}^n \rtimes \mathbb{Z}/p$. La idea es construir una resolución libre sobre el anillo de grupo de Γ tal que la sucesión espectral de *Lyndon–Hochschild–Serre* asociada a la extensión de $\mathbb{Z}/p$ por $\mathbb{Z}^n$ colapse en el término E_2. Esto requiere la introducción del concepto de *acción* $G-$*compatible*.

3.1. Resoluciones libres sobre un producto semidirecto

Sean H, K grupos y $\phi : K \longrightarrow \mathrm{Aut}(H)$ un homomorfismo de grupos. Recordemos que el producto cartesiano $H \times K$ bajo la operación

$$(h,k)\cdot(h',k') = \big(h\phi(k)(h'),kk'\big)$$

para todo $h,h' \in H$ y $k,k' \in K$, es el grupo llamado **producto semidirecto de** H **con** K **relativo a** ϕ, el cual se denota por $H \rtimes_\phi K$ o simplemente $H \rtimes K$.

Definición 3.1. Sea G un grupo. Decimos que un $G-$módulo M se llama $\mathbb{Z}G-$**retículo** si M es un $\mathbb{Z}-$módulo libre .

Ejemplos. ($\mathbb{Z}G-$retículos)

1. Claramente $\mathbb{Z}^n$ considerado como $G-$módulo trivial es un $\mathbb{Z}G-$retículo finitamente generada.

2. Sea S_r el grupo de permutaciones de r elementos y sea M el grupo abeliano libre generado por $m_1,m_2,\ldots,m_r$.

   M es un $\mathbb{Z}G-$retículo de rango r donde la acción lineal de S_r en $\mathbb{Z}^r$ está dada por,

$$\sigma\cdot(m_1^{a_1}m_2^{a_2}\cdots m_r^{a_r}) = m_{\sigma(1)}^{a_1}m_{\sigma(2)}^{a_2}\cdots m_{\sigma(r)}^{a_r},$$

con $\sigma \in S_r$ y $a_1, a_2, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$.

Sea M un $\mathbb{Z}G-$retículo y sea $\Gamma = M \rtimes G$, donde G actúa en M vía el homomorfismo de grupos $\phi : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(M)$. Para todo $g \in G$ y $m \in M$ escribiremos gm en lugar de $\phi(g)(m)$ para denotar la acción de G en M. Esta acción puede extenderse linealmente a una acción de G en el álgebra de grupo RM, donde R es un anillo conmutativo y unitario. De aquí en adelante R denotará $\mathbb{Z}$ el anillo de los enteros o $\mathbb{Z}_{(p)}$ el anillo de los enteros localizado en el ideal primo generado por el entero p.

Definición 3.2. Sea G un grupo y M un $\mathbb{Z}G-$retículo. Sea $\varepsilon : F \longrightarrow R$ una resolución libre de R sobre RM, se dice que F **admite una acción de G compatible con ϕ** o que **existe una acción compatible de G en F** si para todo $g \in G$ existe un homomorfismo de cadenas que preserva aumentación $\tau(g) : F \longrightarrow F$ tal que

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, dotted, "\tau(g)_n"] & \cdots \arrow[r] & F_1 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\tau(g)_1"] & F_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dotted, "\tau(g)_0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & F_n \arrow[r, "d_n"] & \cdots \arrow[r] & F_1 \arrow[r] & F_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

1. $\tau(g)[u \cdot f] = (gu) \cdot [\tau(g)(f)]$ para todo $u \in RM$ y $f \in F$.
2. $\tau(gg') = \tau(g) \circ \tau(g')$ para todo $g, g' \in G$.
3. $\tau(1) = 1_F$.

Si tal acción existe podemos dotar a F de estructura de complejo de cadenas de $\Gamma-$módulos como sigue. Si $(m, g) \in \Gamma$ y $f \in F_n$ se define

$$(m,g) \cdot f = m \cdot \tau(g)(f).$$

Que esta asignación verifique los axiomas de acción es una consecuencia de las condiciones 1., 2. y 3. de la definición 3.2. La $\Gamma-$equivarianza de los homomorfismos se prueba utilizando el hecho de que $\tau(g)$ es un homomorfismo de cadenas que preserva aumentación para todo $g \in G$. Lo anterior puede resumirse en la siguiente proposición.

Proposición 3.1. Sea G un grupo y M un $\mathbb{Z}G-$retículo. Si $\varepsilon : F \longrightarrow R$ es una resolución libre de R sobre RM que admite una acción de G compatible, entonces $\varepsilon : F \longrightarrow R$ es un complejo de cadenas de $\Gamma-$módulos.

Notemos también que para todo $G-$módulo P, la acción de G en P puede extenderse a una acción de Γ en P vía la proyección canónica $\pi : \Gamma \longrightarrow G$. Este hecho sumado a la proposición 3.1 dan lugar a la construcción de una resolución libre de R sobre el anillo de grupo del producto semidirecto $M \rtimes G$.

Proposición 3.2. Sea G un grupo y M un $\mathbb{Z}G-$retículo, si $\varepsilon : F \longrightarrow R$ es una resolución libre de R sobre RM que admite una acción de G compatible y $\varepsilon' : P \longrightarrow R$ es una resolución libre de R sobre RG, entonces $\varepsilon' \otimes \varepsilon : P \otimes F \longrightarrow R$ es una resolución libre de R sobre $R\Gamma$.

Demostración. Dado que para todo $i \geq 0$ y $j \geq 0$ los módulos P_i y F_j son $\Gamma-$módulos, podemos dotar a $P_i \otimes F_j$ con la estructura de $\Gamma-$módulo utilizando la acción diagonal,

$$(m,g)(p \otimes f) = (gp) \otimes \big(m \cdot \tau(g)(f)\big),$$

donde $(m,g) \in \Gamma$, $p \in P_i$ y $f \in F_j$.

Para probar que $P_i \otimes F_j$ es libre observemos que $P_i \cong RG^{m_i}$ y $F_j \cong RM^{n_j}$ con $m_i, n_j \in \mathbb{N}$, de donde

$$P_i \otimes F_j \cong (RG \otimes RM)^{m_i n_j} \cong (R[\Gamma/M] \otimes RM)^{m_i n_j} \cong (R\Gamma \otimes_M RM)^{m_i n_j} \cong R\Gamma^{m_i n_j}.$$

Por último, utilizando el teorema de Künneth tenemos que $\varepsilon' \otimes \varepsilon : P \otimes F \longrightarrow R$ es un complejo de cadenas exacto.

Esto demuestra que $\varepsilon \otimes \varepsilon' : P \otimes F \longrightarrow \Gamma$ es una resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $R\Gamma$. □

Definición 3.3. Sea M un grupo y sea $\varepsilon : E \longrightarrow R$ una resolución libre de R sobre RM. Se dice que E es una **resolución especial** si los homomorfismos frontera del complejo de cocadenas $\mathrm{Hom}_M(E,R)$ son triviales. En el caso de $R = \mathbb{Z}$ si $H^i(M) \cong \mathrm{Hom}_M(E_i,\mathbb{Z})$ para todo $i \geq 0$.

Ejemplos. (Resoluciones especiales)

1. Consideremos el grupo de los enteros. En el ejemplo 4 de cohomología de grupos vimos que
$$0 \to \mathbb{Z}[\mathbb{Z}] \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0,$$
es una resolución especial de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$.

2. Sea $L = \mathbb{Z}^n$ y denotemos a la resolución especial del ejemplo anterior por E. Consideremos el complejo de cadenas $F = \underbrace{E \otimes \cdots \otimes E}_{n-\text{veces}}$ y notemos que al aplicar la proposición 3.2 de manera inductiva a la acción trivial de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}^{n-1}$ obtenemos que F es una resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}^n]$.

   Dada la forma en la que está definida la resolución E se tiene que
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}^n}(F,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}^n}(E,\mathbb{Z}) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}^n}(E,\mathbb{Z}).$$

   Como $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}^n}(E,\mathbb{Z})$ tiene diferenciales triviales entonces $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}^n}(F,\mathbb{Z})$ tiene diferenciales triviales, probando que $E \otimes \cdots \otimes E$ es una resolución especial de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}^n]$.

Teorema 3.3. Sea $\varepsilon : F \longrightarrow R$ una resolución especial de R sobre $R[\mathbb{Z}^n]$ y supongamos que existe una acción compatible de G en F. Entonces para todo entero $k \geq 0$ tenemos que

$$H^k(\mathbb{Z}^n \rtimes G; R) = \bigoplus_{i+j=k} H^i(G, H^j(\mathbb{Z}^n; R)).$$

Demostración. Sea $\varepsilon' : P \longrightarrow \mathbb{Z}$ es una resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, por la proposición 3.2 tenemos que $\varepsilon' \otimes \varepsilon : P \otimes F \longrightarrow \mathbb{Z}$ es una resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}\Gamma$. Entonces la cohomología de $\mathbb{Z}^n \rtimes G$ se calcula como la cohomología del complejo de cocadenas $\mathrm{Hom}_\Gamma(P \otimes F, \mathbb{Z})$.

Notemos que

$$\mathrm{Hom}_\Gamma((P\otimes F)_k,\mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{i+j=k} \mathrm{Hom}_\Gamma(P_i\otimes F_j,\mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{i+j=k} \mathrm{Hom}_G(P_i,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}^n}(F_j,\mathbb{Z})).$$

El último isomorfismo está dado por,

$$\Omega : \mathrm{Hom}_G(P_i,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}^n}(F_j,\mathbb{Z})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Gamma(P_i\otimes F_j,\mathbb{Z})$$

$\Omega(\varphi)(p\otimes f) = \varphi(p)(f)$, con $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(P_i,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}^n}(F_j,\mathbb{Z}))$, $p\in P_i$ y $f\in F_j$. Claramente Ω es un isomorfismo de grupos abelianos, basta ver que es $\Gamma-$equivariante.

Sea $(m,g)\in\Gamma$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(P_i,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}^n}(F_j,\mathbb{Z}))$, $p\in P_i$ y $f\in F_j$, y denotemos por $\Omega_\varphi := \Omega(\varphi)$ y $\varphi_p := \varphi(p)$ entonces

$$\begin{aligned}\Omega_\varphi((m,g)(p\otimes f)) &= \Omega_\varphi((gp)\otimes\big(m\tau(g)_j(f)\big)) = \varphi_{gp}(m\tau(g)_j(f))\\ &= \varphi_{gp}(\tau(g)_j(f)) = g\varphi_p(\tau(g)_j(f))\\ &= \varphi_p(\tau(g^{-1})\tau(g)_j(f)) = \varphi_p(f) = \Omega_\varphi(p\otimes f).\end{aligned}$$

Por lo tanto podemos calcular la cohomología de Γ calculando la cohomología del complejo total asociado al doble complejo $\mathrm{Hom}_G(P,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}^n}(F,\mathbb{Z}))$.

Dado que F es una resolución especial, $H^j(\mathbb{Z}^n) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}^n}(F_j,\mathbb{Z})$, con lo que el doble complejo $\mathrm{Hom}_G(P,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}^n}(F,\mathbb{Z}))$ tiene la forma,

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(P_2,H^0(\mathbb{Z}^n)) \arrow[u] \arrow[r, "\mathbf{0}"] & \mathrm{Hom}_G(P_2,H^1(\mathbb{Z}^n)) \arrow[u] \arrow[r, "\mathbf{0}"] & \mathrm{Hom}_G(P_2,H^2(\mathbb{Z}^n)) \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(P_1,H^0(\mathbb{Z}^n)) \arrow[u] \arrow[r, "\mathbf{0}"] & \mathrm{Hom}_G(P_1,H^1(\mathbb{Z}^n)) \arrow[u] \arrow[r, "\mathbf{0}"] & \mathrm{Hom}_G(P_1,H^2(\mathbb{Z}^n)) \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(P_0,H^0(\mathbb{Z}^n)) \arrow[u] \arrow[r, "\mathbf{0}"] & \mathrm{Hom}_G(P_0,H^1(\mathbb{Z}^n)) \arrow[u] \arrow[r, "\mathbf{0}"] & \mathrm{Hom}_G(P_0,H^2(\mathbb{Z}^n)) \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & .
\end{tikzcd}$$

Como los homomorfismo frontera horizontales son triviales y la cohomología de las verticales es $H^*(G,H^\#(\mathbb{Z}^n))$ entonces

$$H^k(\Gamma) = H^k\left(T\,\mathrm{Hom}_G(P,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}^n}(F,\mathbb{Z}))\right) = \bigoplus_{i+j=k} H^i(G,H^j(\mathbb{Z}^n)).$$

$\square$

El Teorema 3.3 es un resultado clave en el cálculo de la cohomología de productos semidirectos ya que este afirma que a partir de una resolución especial de M que admita una acción de G compatible, la sucesión espectral de *Lyndon–Hochschild–Serre* en cohomología asociada a la extensión de G por M colapsa en el término E_2 y colapsa sin problemas de extensión.

3.2. Construcción de acciones compatibles

Lema 3.4. Sea $\varepsilon_i : F_i \longrightarrow R$ una resolución proyectiva de R sobre $R[M_i]$ para $i = 1,2$ entonces $\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2 : F_1 \otimes F_2 \longrightarrow R$ es una resolución proyectiva de R sobre $R[M_1 \times M_2]$. Además, si G actúa compatiblemente en F_i por τ_i para $i = 1,2$, entonces existe una acción compatible de G en $F_1 \otimes F_2$ dada por $\tau(g)(f_1 \otimes f_2) = \tau_1(g)(f_1) \otimes \tau_2(g)(f_2)$.

Demostración. Por el teorema de Künneth tenemos que $\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2$ es un complejo de cadenas exacto. Consideremos $F_{1,i} \otimes F_{2,j}$ para $i, j \geq 0$, por la definición de proyectividad tenemos que $F_{1,i}$ y $F_{2,j}$ son sumandos directos de módulos libres sobre $R[M_1]$ y $R[M_2]$ respectivamente, es decir,

$$\bigoplus_{\alpha} R[M_1] = F_{1,i} \oplus Q_{1,i} \quad \text{y} \quad \bigoplus_{\beta} R[M_2] = F_{2,j} \oplus Q_{2,j}.$$

Así $(F_{1,i} \otimes F_{2,j}) \oplus Q \cong \bigoplus_{\alpha,\beta} R[M_1] \otimes R[M_2]$ con $Q = (F_{1,i} \otimes F_{2,j}) \oplus (Q_{1,i} \otimes (F_{2,j} \oplus Q_{2,j}))$ y como $R[M_1] \otimes R[M_2] \cong R[M_1 \times M_2]$, tenemos que $F_{1,i} \otimes F_{2,j}$ es proyectivo sobre $R[M_1 \times M_2]$.

Es fácil probar que se satisfacen las propiedades de acción compatible. $\square$

Lema 3.5. Sea $G = G_1 \times G_2$, sea M un RG_i-módulo para $i = 1,2$ y sea $\varepsilon : F \longrightarrow R$ una resolución proyectiva de R sobre RM. Si existe τ_i una acción compatible de G_i en F tal que $\tau_1(g_1) \circ \tau_2(g_2) = \tau_2(g_2) \circ \tau_1(g_1)$, entonces existe una acción compatible de G en M dada por $\tau((g_1, g_2)) = \tau_1(g_1) \circ \tau_2(g_2)(f)$.

Lema 3.6. Sean M un $\mathbb{Z}G_1-$retículo finitamente generado, $\pi : G_2 \longrightarrow G_1$ un homomorfismo de grupos y $\varepsilon : F \longrightarrow R$ una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ sobre RM. Si G_1 actúa compatiblemente en F por τ' entonces existe una acción compatible de G_2 en F definida por $\tau(g)(f) = \tau'(\pi(g))(f)$.

3.2.1. Acciones compatibles de $\mathbb{Z}/p$ en la resolución libre de Koszul

Un ejemplo de resolución especial de suma importancia para nuestro propósito está dado por el complejo de Koszul cuando se toma el anillo RL con L un grupo abeliano libre finitamente generado.

Sea L un grupo abeliano libre con base $\{x_1, \ldots, x_n\}$. La sucesión $(x_1 - 1, \ldots, x_n - 1)$ de elementos de RL es una sucesión regular en RL, esto implica que el complejo de Koszul asociado a la sucesión regular $(x_1 - 1, \ldots, x_n - 1)$ es una resolución libre de $RL/(x_1 - 1, \cdots, x_n - 1) \cong R$.

Recordemos que en este caso el complejo de Koszul tiene la forma

$$K(x_1-1,\ldots,x_n-1): \quad 0 \to K_n \to \cdots \to K_p \xrightarrow{d_p} K_{p-1} \to \cdots \to K_1 \xrightarrow{d_1} K_0 \to 0,$$

donde K_p es el $RL-$módulo libre de rango $\binom{n}{p}$ con base

$$\mathscr{B}_p = \{a_{i_1} \wedge \cdots \wedge a_{i_p} | 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n\}$$

y los diferenciales están dados por

$$d_p(a_{i_1} \wedge \cdots \wedge a_{i_p}) = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1}(x_{i_j}-1)a_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{a_{i_j}} \wedge \cdots \wedge a_{i_p}.$$

Es decir, $K(x_1-1,\ldots,x_n-1)$ tiene la forma

$$0 \to RLa_1 \wedge \cdots \wedge a_n \xrightarrow{d_n} \cdots \to \bigoplus_{i=1}^{n} RLa_i \xrightarrow{d_1} RL \to 0.$$

Abreviaremos $K(x_1-1,\ldots,x_n-1)$ por K. Veamos que $\varepsilon : K \longrightarrow R$ es una resolución especial de R sobre RL, en otras palabras veamos que el complejo de cocadenas

$$0 \to \mathrm{Hom}_{RL}(RL,R) \xrightarrow{d_1^*} \mathrm{Hom}_{RL}\left(\bigoplus_{i=1}^{n} RLa_i, R\right) \to \cdots \xrightarrow{d_n^*} \mathrm{Hom}_{RL}(RLa_1 \wedge \cdots \wedge a_n, R) \to 0$$

tiene homomorfismos triviales. Sea $f : K_{p-1} \longrightarrow R$ un $RL-$homorfismo entonces

$$\begin{aligned}
d_p^*(f)(a_{i_1} \wedge \cdots \wedge a_{i_p}) &= f(d_p(a_{i_1} \wedge \cdots \wedge a_{i_p}))\\
&= \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} f\left((x_{i_j}-1)a_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{a_{i_j}} \wedge \cdots \wedge a_{i_p}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} (x_{i_j}-1) f(a_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{a_{i_j}} \wedge \cdots \wedge a_{i_p})\\
&= \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} \left(x_{i_j} f(a_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{a_{i_j}} \wedge \cdots \wedge a_{i_p}) - f(a_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{a_{i_j}} \wedge \cdots \wedge a_{i_p})\right) = 0.
\end{aligned}$$

Teorema 3.7. Sea G un grupo, sea $L = \langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ un $\mathbb{Z}G-$retículo finitamente generado y sea K la resolución especial de R sobre RL dada por el complejo de Koszul asociado a la sucesión regular $(x_1-1,\ldots,x_n-1)$ donde con base $\{x_1,\ldots,x_n\}$. Supongamos que hay un homomorfismo de grupos $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(K_1)$ tal que $d_1 \circ \tau(g)(a) = gd_1(a)$ para todo $g \in G$ y $a \in K_1$ con $d_1 : K_1 \longrightarrow RL$, $d_1(a_i) = x_i - 1$. Entonces τ puede extenderse a todo K, con lo que existe un acción de G compatible con $K(x_1-1,\ldots,x_n-1)$.

Demostración. Para todo $g \in G$ queremos definir $\tau(g) : K \longrightarrow K$ un homomorfismo de cadenas que preserva aumentación y que cumpla las propiedades de acción compatible. Primero notemos que $\tau(g)$ actúa en $K_0 = RL$ vía la acción original de G, es decir, $\tau(g)(u) = gu$ para todo $u \in K_0$. Luego definamos $\tau(g)$ en la base de K como $RL-$módulo graduado de la siguiente manera, $\tau(g)(a_{i_1} \wedge \cdots \wedge a_{i_p}) = \tau(g)(a_{i_1}) \wedge \cdots \wedge \tau(g)(a_{i_p})$ para $a_{i_1} \wedge \cdots \wedge a_{i_p} \in K_p$ y si $u \in RL$ y $x \in K_p$ se define $\tau(g)(ux) = (gu)\tau(g)(x)$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & RLa_1 \wedge \cdots \wedge a_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, dotted, "\tau(g)_n"] & \cdots \arrow[r] & \bigoplus_{i=1}^n RLa_i \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dotted, "\tau(g)_1"] & RL \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dotted, "\tau(g)_0"] & R \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & RLa_1 \wedge \cdots \wedge a_n \arrow[r, "d_n"] & \cdots \arrow[r] & \bigoplus_{i=1}^n RLa_i \arrow[r, "d_1"] & RL \arrow[r, "\varepsilon"] & R \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Es fácil ver que $\tau(g)$ preserva aumentación. La conmutatividad del segundo cuadrado en el diagrama de arriba está dada por la hipótesis, por tanto, debemos ver la conmutatividad para $2 \leq p \leq n$. Sean $u \in RL$ y $a_{i_1} \wedge \cdots \wedge a_{i_p} \in K_p$ un elemento generador, entonces

$$\begin{aligned}
\tau(g)(d_p(u \cdot a_{i_1} \wedge \cdots \wedge a_{i_p})) &= \tau(g)\left(u \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1}(x_{i_j} - 1)a_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{a_{i_j}} \wedge \cdots \wedge a_{i_p}\right) \\
&= (gu) \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} \tau(g) \left((x_{i_j} - 1)a_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{a_{i_j}} \wedge \cdots \wedge a_{i_p}\right) \\
&= (gu) \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} g(x_{i_j} - 1)\tau(g)\left(a_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{a_{i_j}} \wedge \cdots \wedge a_{i_p}\right) \\
&= (gu) \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} g(x_{i_j} - 1)\tau(g)(a_{i_1}) \wedge \cdots \wedge \tau(g)(\widehat{a_{i_j}}) \wedge \cdots \wedge \tau(g)(a_{i_p}) \\
&= (gu) \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} \tau(g)(x_{i_j} - 1)\tau(g)(a_{i_1}) \wedge \cdots \wedge \widehat{\tau(g)(a_{i_j})} \wedge \cdots \wedge \tau(g)(a_{i_p}) \\
(*) \quad &= (gu)d_p(\tau(g)(a_{i_1}) \wedge \cdots \wedge \tau(g)(a_{i_p})) \\
&= d_p((gu)\tau(g)(a_{i_1}) \wedge \cdots \wedge \tau(g)(a_{i_p})) \\
&= d_p(\tau(g)(u \cdot a_{i_1} \wedge \cdots \wedge a_{i_p})).
\end{aligned}$$

Dado que los homomorfismos frontera son derivaciones y que $d_1 \circ \tau(g)(a) = gd_1(a)$ para todo $g \in G$ y $a \in K_1$ entonces puede probarse por inducción la igualdad (*). Ahora, las propiedades de acción compatible en grado cero se verifican con facilidad y en grado uno se cumplen por hipótesis. Para grados superiores notemos que $\tau(g)$ por definición para todo entero $0 < p \leq n$ satisface que $\tau(g)(ux) = (gu)\tau(g)(xu)$ para todo $u \in RL$ y para todo $x \in K_p$.

Que $\tau(g_1g_2) = \tau(g_1)\tau(g_2)$ es consecuencia de que esta propiedad se cumpla en grado uno, pues si $u \in RL$ y $a_{i_1} \wedge \cdots \wedge a_{i_p} \in K_p$ un generador, entonces

$$\begin{aligned}
\tau(g_1g_2)(u\cdot(a_{i_1}\wedge\cdots\wedge a_{i_p})) &= (g_1g_2u)\tau(g_1g_2)(a_{i_1}\wedge\cdots\wedge a_{i_p})\\
&= (g_1g_2u)(\tau(g_1g_2)(a_{i_1})\wedge\cdots\wedge\tau(g_1g_2)(a_{i_p}))\\
&= (g_1g_2u)(\tau(g_1)\tau(g_2)(a_{i_1})\wedge\cdots\wedge\tau(g_1)\tau(g_2)(a_{i_p}))\\
&= \tau(g_1)((g_2u)\cdot(\tau(g_2)(a_{i_1})\wedge\cdots\wedge\tau(g_2)(a_{i_p})))\\
&= \tau(g_1)\tau(g_2)(u\cdot(a_{i_1}\wedge\cdots\wedge a_{i_p})).
\end{aligned}$$

De manera similar se prueba que $\tau(1_G) = 1_K$. Esto demuestra que $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(K_1)$ puede extenderse a todo K, dando como resultado una acción de G compatible en K. $\square$

Es importante resaltar que la prueba del Teorema 3.7 utiliza como hecho principal que el complejo de Koszul sea un álgebra diferencial graduada, ya que es de esta manera como se puede extender el homomorfismo τ.

Teorema 3.8. Sea $\phi : G \longrightarrow S_n$ un homomorfismo de grupos, donde S_n es el grupo de permutaciones de n elementos. Supongamos que L es un $\mathbb{Z}G-$retículo de rango n vía este homomorfismo, es decir, L es un **módulo de permutación**. Entonces el complejo de Koszul K admite una acción G compatible.

Demostración. Por el lema 3.6 basta probar que K admite una acción S_n compatible. Supongamos que la base de L es $\{x_1,\ldots,x_n\}$ entonces la acción de G en L está dada por

$$g(x_1^{r_1}\cdots x_n^{r_n}) = x_{\sigma(1)}^{r_1}\cdots x_{\sigma(n)}^{r_n},$$

donde $\sigma = \phi(g)$ y $g \in G$.

Definamos la función $\tau : S_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(K_1)$ como sigue, sea $a_i \in K_1$ un generador, si $\sigma \in S_n$ y $u \in RL$ se define $\tau(\sigma)(a_i) = a_{\sigma(i)}$ y $\tau(\sigma)(ua_i) = (\sigma u)\tau(\sigma)(a_i)$.

τ está bien definida dado que $\tau(\sigma)$ es un automorfismo con inversa $\tau(\sigma^{-1})$ para todo $\sigma \in S_n$. Además, para todo $\sigma,\gamma \in S_n$

$$\tau(\sigma\gamma)(ua_i) = ((\sigma\gamma)u)a_{\sigma(\gamma(i))} = (\sigma(\gamma u))\tau(\sigma)(a_{\gamma(i)}) = \tau(\sigma)((\gamma u)a_{\gamma(i)}) = \tau(\sigma)\tau(\sigma)(ua_i).$$

Finalmente, $d_1(\tau(\sigma)(ua_i)) = \sigma(d_1(ua_i))$. En efecto

$$\begin{aligned}
d_1(\tau(\sigma)(ua_i)) &= d_1((\sigma u)a_{\sigma(i)}) = (\sigma u)d_1(a_{\sigma(i)}) = (\sigma u)(x_{\sigma(i)}-1)\\
&= (\sigma u)\sigma(x_i-1) = \sigma(u(x_i-1)) = \sigma(ud_1(a_i)) = \sigma(d_1(ua_i)).
\end{aligned}$$

Esto demuestra que τ verifica las hipótesis del Teorema 3.7, en consecuencia existe una acción de S_n compatible en K. $\square$

Teorema 3.9. Sea G el grupo cíclico finito de orden n, $G = \langle t : t^n = 1\rangle$ y consideremos L un $\mathbb{Z}G-$retículo de rango $n-1$, donde la acción de G está dada por $\zeta : G \longrightarrow GL_{n-1}(\mathbb{Z})$

$$\zeta(t) = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sea $x_1,\ldots,x_{n-1}$ la base canónica de L en la cual la acción de arriba es representada por la matriz A. Entonces el complejo de Koszul asociado a $(x_1-1,\ldots,x_{n-1}-1)$ admite una acción de G compatible con ζ.

Demostración. La acción de G en L está dada por $tx_1 = x_{n-1}^{-1}$ y $tx_k = x_{k-1}x_{n-1}^{-1}$ para todo $1 \leq k \leq (n-1)$. Definamos $\tau : G \longrightarrow Aut(K_1)$ por

$$\tau(t)(a_1) = -x_{n-1}^{-1}a_{n-1}, \quad \tau(t)(a_k) = -x_{n-1}^{-1}(a_{n-1}-a_{k-1}) \quad \text{y} \quad \tau(t)(ua) = (tu)\tau(t)(a),$$

con $1 < k \leq (n-1)$, $u \in RL$ y $a \in K_1$. Y se define $\tau(t^j) = \tau(t)^j$ para $1 \leq j \leq (n-1)$.

$\tau(t)$ es un automorfismo con inversa dada por

$$\tau(t)^{-1}(a_1) = x_1^{-1}(a_2-a_1), \quad \tau(t)^{-1}(a_k) = x_1^{-1}(a_{k+1}-a_1),$$

y $\tau(t)^{-1}(ua) = (t^{n-1}u)\tau(t)^{-1}(a)$ con $u \in RL$, $a \in K_1$ y para $1 < k \leq (n-1)$. Por definición τ es homomorfismo de grupos, veamos que $\tau(t)^n = id_L$ y que $d_1(\tau(t)(a_i)) = td_1(a_i)$.

Abreviemos τ en lugar de $\tau(t)$ y para todo $i \notin \{1,2,\ldots,(n-1)\}$ adoptemos la convención $x_i = 1$ y $a_i = 0$. Para probar que $\tau(t)^n = id_L$ utilizaremos que $tx_k^{-1} = (tx_k)^{-1}$ y las siguientes igualdades, las cuales pueden demostrarse por inducción:

- $t^r \cdot x_1 = x_{n-r}^{-1}x_{n-(r-1)}$ y $\tau^r(a_1) = x_{n-r}^{-1}(a_{n-(r-1)}-a_{n-r})$ para todo $1 \leq r \leq (n-1)$.
- Sea $1 < k \leq (n-1)$ entonces $t^r \cdot x_k = x_{k-r}x_{n-r}^{-1}$ y $\tau^r(a_k) = x_{n-r}^{-1}(a_{k-r}-a_{n-r})$ para todo $1 \leq r \leq k$.

Notemos que $\tau^n(ua) = (t^n u)\tau^n(a) = u\tau^n(a)$ y que

$$\begin{aligned} \tau^n(a_1) &= \tau(\tau^{n-1}(a_1)) = \tau(x_1^1(a_2-a_1)) = (tx_1^{-1})(\tau(a_2)-\tau(a_1)) \\ &= (x_{n-1}^{-1})^{-1}(-x_{n-1}^{-1}(a_{n-1}-a_1)+x_{n-1}^{-1}a_{n-1}) = a_1, \\ \tau^n(a_k) &= \tau^{n-k}(\tau^k(a_k)) = -\tau^{n-k}(x_{n-k}^{-1}a_{n-k}) = -(t^{n-k}x_{n-k}^{-1})\tau^{n-k}(a_{n-k}) \\ &= -(x_k^{-1})^{-1}x_k^{-1}(-a_k) = a_k, \end{aligned}$$

así $\tau(t)^n = id_L$. Adicionalmente para $1 < k \leq (n-1)$,

$$\begin{aligned} d_1(\tau(t)(a_1)) &= d_1(-x_{n-1}^{-1}a_{n-1}) = -x_{n-1}^{-1}(x_{n-1}-1) = x_{n-1}^{-1}-1 = t(x_1-1) = td_1(a_1), \\ d_1(\tau(t)(a_k)) &= d_1(-x_{n-1}^{-1}(a_{n-1}-a_{k-1})) = -x_{n-1}^{-1}(x_{n-1}-1-x_{k-1}+1) \\ &= x_{k-1}x_{n-1}^{-1}-1 = t(x_k-1) = td_1(a_k). \end{aligned}$$

Por el Teorema 3.7 se demuestra el resultado. □

Proposición 3.10. Sea G el grupo cíclico finito de orden n y sea L un $\mathbb{Z}G-$retículo tal que $L \cong M \oplus IG^t$, donde M es un módulo de permutación. Entonces la resolución de Koszul admite una acción G compatible.

Demostración. Este resultado se sigue de primero aplicar los Teoremas 3.8 y 3.9 a los módulos M e IG respectivamente y luego utilizar el lema 3.4. □

Proposición 3.11. Sea G el grupo cíclico finito de orden p con p primo. Entonces,

1. Consideremos el anillo $R = \mathbb{Z}_{(p)}$. Para R solo existen tres clases de isomorfismo distintas de $RG-$retículos indescomponibles, a saber, el módulo trivial R, el ideal aumentación IG y el anillo de grupo RG.

2. Si L un $\mathbb{Z}G-$retículo finitamente generado entonces existe un $\mathbb{Z}G-$homomorfismo $f : L' \longrightarrow L$ tal que

   - L' es una representación de tipo (r,s,t), es decir, L' es un $\mathbb{Z}G-$retículo isomorfo a $\mathbb{Z}^r \oplus IG^s \oplus \mathbb{Z}G^t$.
   - $f \otimes id : L' \otimes R \longrightarrow L \otimes R$ es un isomorfismo.

Demostración. Para esta prueba ver [5] y [6]. □

El siguiente teorema es el punto central de esta tesis. Este resultado fue descubierto y publicado por A. Adem, J. Ge, J. Pan y N. Petrosyan en el artículo [1].

Teorema 3.12 (Cálculo de la cohomología de un producto semidirecto)**.** Sea $G = \mathbb{Z}/p$, con p primo, sea L un $\mathbb{Z}G-$retículo finitamente generado y sea $\Gamma = L \rtimes G$ el producto semidirecto asociado, entonces para cada $k \geq 0$

$$H^k(\Gamma, \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{i+j=k} H^i(G, \wedge^j(L^*)) \tag{3.1}$$

donde $\bigwedge^j(L^*)$ denota la $j-$ésima potencia exterior del módulo dual $L^* = Hom(L, \mathbb{Z})$.

Demostración. **Paso 1:** Veamos que el resultado es cierto para la cohomología con coeficientes en el anillo $R = \mathbb{Z}_{(p)}$, es decir, veamos que

$$H^k(\Gamma, R) \cong \bigoplus_{i+j=k} H^i(G, \wedge^j(L^* \otimes R)).$$

Si L es de la forma $R^r \oplus RG^s \oplus IG^t$ entonces por la proposición 3.10 la resolución de Koszul admite una acción compatible de G. Luego por el Teorema 3.3 se tiene el resultado.

Si L no se descompone de esa manera entonces por la proposición 3.11 existe un homomorfismo de $\mathbb{Z}G-$módulos $f : L' \longrightarrow L$ tal que L' es de tipo (r,s,t) y f es un isomorfismo después de tensorizar con R.

Sea $\Gamma' = L' \rtimes G$. El homomorfismo f induce un homomorfismo de grupos $\widehat{f} : \Gamma' \longrightarrow \Gamma$ definido por $\widehat{f}(l', g) = (f(l'), g)$ para todo $l' \in L'$ y $g \in G$. Además, los homomorfismos $f, \widehat{f}$ y id_G definen un homomorfismo de extensiones de grupos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \Gamma' \arrow[r] \arrow[d, "\widehat{f}"] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & \Gamma \arrow[r] & G \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por la funtorialidad de la sucesión espectral *Lyndon–Hochschild–Serre*, proposición 2.13, tenemos que existe un homomorfismo de sucesiones espectrales $\varphi_r : E_r \to \overline{E}_r$ para todo $r \geq 0$, donde E_r y $\overline{E}_r$ representan las sucesiones espectrales de *Lyndon–Hochschild–Serre* asociadas a Γ y Γ' respectivamente.

Notemos que $H^j(L,R) \cong H^j(L',R)$. En efecto, por el resultado principal del capítulo 1 tenemos que $H^1(L,\mathbb{Z}) \cong H^1(BL;\mathbb{Z})$ donde BL es el espacio clasificante de L, es decir, $BL \cong (\mathbb{S}^1)^n$ donde n es el rango de L. De aquí $H^1(L,\mathbb{Z}) \cong L \cong Hom(L,\mathbb{Z})$. Por otro lado como $f \otimes id : L' \otimes R \longrightarrow L \otimes R$ es un isomorfismo entonces existe un isomorfismo entre $H^1(L) \otimes R$ y $H^1(L') \otimes R$. Pero por el teorema de coeficientes universales y el hecho de que R es plano como grupo abeliano tenemos que $H^1(L,R) \cong H^1(L) \otimes R$ (similarmente para $H^1(L',R)$). Esto es $H^1(L,R) \cong H^1(L',R)$.

Ahora observemos que $H^j(L,\mathbb{Z}) \cong H^j((\mathbb{S}^1)^n,\mathbb{Z}) \cong \wedge^j H^1((\mathbb{S}^1)^n;\mathbb{Z}) \cong \wedge^j H^1(L,\mathbb{Z})$. Entonces $H^j(L,R) \cong \wedge^j H^1(L) \otimes R \cong \wedge^j H^1(L') \otimes R \cong H^j(L',R)$ como se quería.

Lo anterior implica que $E_2^{ij} = H^i(G,H^j(L,R)) \cong H^i(G,H^j(L',R)) = \overline{E}_2^{ij}$, entonces por el teorema de comparación de sucesiones espectrales, proposición 2.2, tenemos que todas las páginas E_r y $\overline{E}_r$ son isomorfas para $r \geq 2$ y que sus términos límite también son isormofos, es decir,

$$\bigoplus_{i+j=k} H^i(G,H^j(L,R)) \cong \bigoplus_{i+j=k} H^i(G,H^j(L',R))$$

equivalentemente

$$\bigoplus_{i+j=k} H^i(G,\wedge^j L^* \otimes R) \cong \bigoplus_{i+j=k} H^i(G,\wedge^j L'^* \otimes R).$$

Esto demuestra el resultado para la cohomología de Γ con coeficientes en $R = \mathbb{Z}_{(p)}$.

Paso 2: Ahora veamos que el resultado es cierto para coeficientes en $\mathbb{Z}$.

De manera similar al paso 1, si L es de tipo (r,s,t) entonces se sigue el resultado. Además, dado que $H^k(G,M)$ para $k > 0$ no tiene $q-$torsión para q un número primo distinto de p y M un $G-$módulo arbitrario (ver teorema 10.3, capítulo III del libro [4]), tenemos que tampoco $H^k(\Gamma,\mathbb{Z})$ tiene $q-$torsión para $k > 0$. En otras palabras,

$$H^k(\Gamma,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{a_k} \oplus (\mathbb{Z}/p)^{b_{k,1}} \oplus (\mathbb{Z}/p^2)^{b_{k,2}} \oplus \cdots \oplus (\mathbb{Z}/p^r)^{b_{k,r}}.$$

Si L no es de tipo (r,s,t) entonces por el paso 1, tenemos que $H^k(\Gamma,R)\cong H^k(\Gamma',R)$.

Por el teorema de coeficientes universales $H^k(\Gamma',R)\cong H^k(\Gamma',\mathbb{Z})\otimes R$, entonces

$$H^k(\Gamma,R)\cong H^k(\Gamma',\mathbb{Z})\otimes R\cong\left(\mathbb{Z}^{a_k}\oplus(\mathbb{Z}/p)^{b_{k,1}}\oplus(\mathbb{Z}/p^2)^{b_{k,2}}\oplus\cdots\oplus(\mathbb{Z}/p^r)^{b_{k,r}}\right)\otimes R.$$

Puede demostrarse que $(\mathbb{Z}/p^r)^{b_{k,r}}\otimes R\cong(\mathbb{Z}/p^r)^{b_{k,r}}$, con lo que

$$H^k(\Gamma,R)\cong R^{a_k}\oplus(\mathbb{Z}/p)^{b_{k,1}}\oplus(\mathbb{Z}/p^2)^{b_{k,2}}\oplus\cdots\oplus(\mathbb{Z}/p^r)^{b_{k,r}}.$$

Ahora, como $H^k(\Gamma,\mathbb{Z})$ es un grupo abeliano finitamente generado tenemos que

$$H^k(\Gamma,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}^{\alpha_k}\oplus(\mathbb{Z}/p)^{\beta_{k,1}}\oplus(\mathbb{Z}/p^2)^{\beta_{k,2}}\oplus\cdots\oplus(\mathbb{Z}/p^r)^{\beta_{k,r}}\oplus\bigoplus_{\substack{q\neq p\\ q\text{ primo}}}\mathbb{Z}/q^{\gamma_k},$$

entonces $H^k(\Gamma,\mathbb{Z})\otimes R\cong R^{\alpha_k}\oplus(\mathbb{Z}/p)^{\beta_{k,1}}\oplus(\mathbb{Z}/p^2)^{\beta_{k,2}}\oplus\cdots\oplus(\mathbb{Z}/p^r)^{\beta_{k,r}}$. Pero recordemos que $H^k(\Gamma,\mathbb{Z})\otimes R\cong H^k(\Gamma,R)$, esto es $a_k=\alpha_k$ y $b_{k,j}=\beta_{k,j}$ para todo $1\leq j\leq r$.

Veamos que $H^k(\Gamma,\mathbb{Z})$ no tiene $q-$torsión para $q\neq p$ primo. Como $|G|=p$ es invertible en $\mathbb{Z}_{(q)}$ y por tanto invertible en $H^j(L,\mathbb{Z}_{(q)})$ entonces por el corolario (10.2), capítulo III de [4],

$$E_2^{ij}=H^i(G,H^j(L,\mathbb{Z}_{(q)}))=\begin{cases}0, & \text{si } i>0\\ H^j(L,\mathbb{Z}_{(q)})^G & \text{si } i=0,\end{cases}$$

es decir, $H^k(\Gamma,\mathbb{Z})$ no tiene $q-$torsión, esto implica que

$$H^k(\Gamma,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}^{a_k}\oplus(\mathbb{Z}/p)^{b_{k,1}}\oplus(\mathbb{Z}/p^2)^{b_{k,2}}\oplus\cdots\oplus(\mathbb{Z}/p^r)^{b_{k,r}}\cong H^k(\Gamma',\mathbb{Z}).$$

Lo cual completa la demostración. □

Ejemplo 5. Sea $G=\{1,g\}$ con $g^2=1$ y sea $L=\langle t\rangle$. L un $\mathbb{Z}G-$retículo con la acción del signo. Por el teorema anterior,

$$H^k(\mathbb{Z}\rtimes\mathbb{Z}/2)=\bigoplus_{i+j=k}H^i(\mathbb{Z}/2,H^j(\mathbb{Z})),$$

donde $\mathbb{Z}/2$ actúa trivialmente en $H^0(\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$ y por multiplicación por -1 en $H^1(\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$. Luego

$$H^i(\mathbb{Z}/2,H^0(\mathbb{Z}))=\begin{cases}\mathbb{Z}, & \text{si } i=0\\ \mathbb{Z}/2, & \text{si } i \text{ es par}, i>0\\ 0, & \text{si } i \text{ es impar}\end{cases},\quad H^i(\mathbb{Z}/2,H^1(\mathbb{Z}))=\begin{cases}0, & \text{si } i \text{ es par}\\ \mathbb{Z}/2, & \text{si } i \text{ es impar}\end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cccccc}
q & & & & & & \\
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & \mathbb{Z}/2 & 0 & \mathbb{Z}/2 & 0 & \mathbb{Z}/2 \\
0 & \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z}/2 & 0 & \mathbb{Z}/2 & 0 \\
\hline
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \quad p
\end{array}$$

$$E_2 = E_\infty$$

De donde,

$$H^k(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2, & \text{si } k \text{ es par, } k > 0 \ . \\ 0, & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Apéndice A

Conjuntos Simpliciales

Este apéndice tiene por objetivo estudiar los conceptos básicos de conjuntos simpliciales con el propósito mostrar una manera de construir el espacio clasificante de un grupo discreto. Esta sección del trabajo fue tomada de los libros [10] y [11] del autor J. P. May.

A.1. Definiciones

Definición A.1. Un **conjunto simplicial** es una colección de espacios $\{X_n\}_{n\geq 0}$ tal que para cada $n \geq 0$ existen funciones

$$\begin{aligned} \partial_i : X_n &\longrightarrow X_{n-1}, \quad 0 \leq i \leq n \\ s_j : X_n &\longrightarrow X_{n+1}, \quad 0 \leq j \leq n \end{aligned}$$

que verifican las siguientes identidades,

$$\begin{aligned} \partial_i \partial_j &= \partial_{j-1} \partial_i \qquad \text{si } i < j \\ s_i s_j &= s_{j+1} s_i \qquad \text{si } i \leq j \\ \partial_i s_j &= \begin{cases} s_{j-1}\partial_i, & \text{si } i < j \\ id, & \text{si } i = j \text{ o } i = j+1 \\ s_j \partial_{i-1}, & \text{si } i > j+1 \end{cases} \end{aligned}$$

Un conjunto simplicial se denota por $X_\bullet$, las funciones ∂_i y s_i se denominan **mapeos cara** y **mapeos degeneración** respectivamente y las identidades reciben el nombre de **identidades simpliciales**. Los elementos de X_n se llaman n–**simplejos**.
Ejemplos. (Conjuntos Simpliciales)

1. Sean $X_\bullet, Y_\bullet$ conjuntos simpliciales se define el producto cartesiano de conjuntos simpliciales por $X_\bullet \times Y_\bullet = \{X_n \times Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con mapeos cara y degeneración definidos de manera clara.

2. Sea X un conjunto arbitrario. Definimos el conjunto simplicial $EX_\bullet$ de la siguiente manera, $EX_n = X^{n+1}$, $\partial_i : EX_n \longrightarrow EX_{n-1}$ es tal que

$$\partial_i(x_1,\dots,x_{n+1}) = (x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_{n+1})$$

y $s_i : EX_n \longrightarrow EX_{n+1}$ se define por

$$s_i(x_1,\dots,x_{n+1}) = (x_1,\dots,x_i,x_i,x_{i+1},\dots,x_{n+1}).$$

3. Sea G un grupo discreto. Definimos el conjunto simplicial $BG_\bullet$ de la siguiente manera, $BG_n = G^n$,

$$\partial_i : BG_n \longrightarrow BG_{n-1} \quad \text{y} \quad s_i : BG_n \longrightarrow BG_{n+1}$$

definidos así

$$\partial_i(g_1,\dots,g_n) = \begin{cases} (g_2,\dots,g_n), & \text{si } i=0 \\ (g_0,\dots,g_ig_{i+1},\dots,g_n), & \text{si } 0<i<n \\ (g_0,\dots,g_{n-1}), & \text{si } i=n \end{cases}$$
$$s_i(g_1,\dots,g_n) = (g_1,\dots,g_i,1,g_{i+1},\dots,g_n).$$

4. Sea G un grupo discreto. Definimos el conjunto simplicial $EG_\bullet$ de la siguiente manera, $EG_n = G^{n+1}$ y para todo $0 \le i \le n$ sean,

$$\partial_i : EG_n \longrightarrow EG_{n-1} \quad \text{y} \quad s_i : EG_n \longrightarrow EG_{n+1}$$

los mapeos cara y degeneración definidos por,

$$\partial_i(g_0,\dots,g_n) = \begin{cases} (g_0,\dots,g_ig_{i+1},\dots,g_n), & \text{si } 0\le i\le n-1 \\ (g_0,\dots,g_{n-1}), & \text{si } i=n \end{cases}$$
$$s_i(g_0,\dots,g_n) = (g_0,\dots,g_i,1,g_{i+1},\dots,g_n)$$

5. Sea Δ la categoría cuyos objetos son conjuntos de la forma $[m] := \{0,1,\dots,m\}$ con $m \in \mathbb{N}$ y los morfismos son funciones crecientes.

   Para cada $r \ge 0$ consideremos el funtor contravariante $\mathrm{Hom}(-,[r]) : \Delta \to \mathit{Set}$ tal que $\mathrm{Hom}(-,[r])\,(f : [n] \longrightarrow [m]) = f^* : \mathrm{Hom}([m],[r]) \longrightarrow \mathrm{Hom}([n],[r])$ donde f^* se define por $f^*(\alpha) = \alpha \circ f$.

   Sean $\delta_i : [n-1] \longrightarrow [n]$ y $\sigma_i : [n+1] \longrightarrow [n]$ con $0 \le i \le n$ definidas por

$$\delta_i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j<i \\ j+1 & \text{si } j\ge i \end{cases} \qquad \sigma_i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j\le i \\ j-1 & \text{si } j>i. \end{cases}$$

   Esto define entonces el conjunto simplicial $\Delta[r]$ para $r \ge 0$, con $\Delta[r]_n := \mathrm{Hom}([n],[r])$ y para todo $0 \le i \le n$ los mapeos cara y degeneración son

$$\partial_i := \delta_i^* : \Delta[r]_n \longrightarrow \Delta[r]_{n-1} \qquad s_i := \sigma_i^* : \Delta[r]_n \longrightarrow \Delta[r]_{n+1}.$$

Definición A.2. Un $n-$simplejo x se denomina **degenerado** si existe un $(n-1)-$simplejo y y existe s_i tales que $x = s_i(y)$. En otro caso x se dice **no–degenerado**.
Proposición A.1. Todo punto $x_n \in X_n$ puede escribirse de manera única como

$$x_n = s_{j_p} \cdots s_{j_1}(x_{n-p}),$$

donde $x_{n-p} \in X_{n-p}$ es no–degenerado y $0 \leq j_1 < \cdots < j_p < n$.

Demostración. Supongamos que $x_n \in X_n$ es un $n-$simplejo degenerado entonces se tiene que $x_n = s_j(x_{n-1})$ para algún mapeo degeneración s_j y algún $x_{n-1} \in X_{n-1}$. Si x_{n-1} es no–degenerado terminamos, pero si x_{n-1} es degenerado entonces por inducción tendremos que

$$x_n = s_{j_p} \cdots s_{j_1}(x_{n-p})$$

para algún $x_{n-p} \in X_{n-p}$ no–degenerado. Notemos que este procedimiento se detiene porque no existen simplejos de dimensión menor que cero.

En cuanto a la unicidad, supongamos que x y y son simplejos no–degenerados (no necesariamente de la misma dimensión) y supongamos que para composiciones de mapeos degeneración A y B

$$Ax = By.$$

Supongamos que $A = s_{j_p} \cdots s_{j_1}$ y $D = \partial_{j_1} \cdots \partial_{j_p}$ entonces utilizando las identidades simpliciales tenemos que $DA = id$ luego $x = DBy$. Usando las identidades simpliciales para mover los mapeos degeneración a la izquierda nos queda $x = B'D'y$ donde D' es una composición de mapeos cara y B' es una composición de mapeos degeneración.

Por hipótesis x es no–degenerado luego $x = D'y$ con lo que x es una cara de y. De manera análoga se ve que y es una cara de x. Por tanto x debe ser igual a y. □

A.2. Realización Geométrica

Recordemos que el n–simplejo estándar es el espacio

$$\Delta^n = \left\{ (t_0, \ldots, t_n) : \ 0 \leq t_i \leq 1, \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

y para todo $0 \leq i \leq n$ tenemos los mapeos

$$\delta_i : \Delta_n \longrightarrow \Delta_{n+1} \quad \text{y} \quad \sigma_i : \Delta_n \longrightarrow \Delta_{n-1}$$

definidos por

$$\delta_i(t_0, \ldots, t_n) = (t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_n)$$
$$\sigma_i(t_0, \ldots, t_n) = (t_0, \ldots, t_i + t_{i+1}, \ldots, t_n).$$

llamados mapeo cocara y codegeneración, respectivamente.

Definición A.3. Sea $X_\bullet$ un conjunto simplicial. Consideremos a X_n con la topología discreta y a Δ_n con la topología de subespacio de $\mathbb{R}^{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se define la **realización geométrica de $X_\bullet$** como

$$|X_\bullet| := \left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \times \Delta_n \right) \Big/ \sim$$

donde

$$(\partial_i(x), t) \sim (x, \delta_i(t)), \quad x \in X_n,\ t \in \Delta_{n-1},$$

y

$$(s_i(x), t) \sim (x, \sigma_i(t)), \quad x \in X_n,\ t \in \Delta_{n+1}.$$

Denotamos a $[(x,t)]$ por $[x,t]$ para todo $x \in X_n$ y para todo $t \in \Delta_n$.

El conjunto $|X_\bullet|$ puede dotarse de una topología. Definamos

$$F_k|X_\bullet| = Im\left\{ \bigsqcup_{n=0}^{k} X_n \times \Delta_n \hookrightarrow |X_\bullet| \right\}.$$

Entonces

$$F_0|X_\bullet| \subset F_1|X_\bullet| \subset \cdots \subset F_k|X_\bullet| \subset \cdots \subset |X_\bullet|$$

definen una filtración para $|X_\bullet|$.

Se define $\mathscr{U} \subseteq |X_\bullet|$ abierto si y solo si $\mathscr{U} \cap F_k|X_\bullet|$ es abierto para todo k.

Lema A.2. Todo punto $[x_n, t_n] \in |X_\bullet|$ es igual a un único punto no–degenerado.

Demostración. Recordemos que un punto $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ de Δ^n se dice **interior** si $n = 0$ o si $0 < t_i < 1$ para todo i.

Observemos que todo punto $u_n \in \Delta_n$ puede escribirse de manera única como

$$u_n = \delta_{i_q} \cdots \delta_{i_1}(u_{n-q}),$$

donde $u_{n-q} \in \Delta_{n-q}$ es un punto interior y $0 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n$.

Sea $[x_n, t_n] \in |X_\bullet|$. Por la observación anterior y por las relaciones de la realización geométrica tenemos que

$$[x_n, t_n] = [x_n, \delta_{i_q} \cdots \delta_{i_1}(t_{n-q})] = [\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_q}(x_n), t_{n-q}],$$

donde $t_{n-q} \in int(\Delta_{n-q})$. Por otro lado, por la proposición A.1 $\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_q}(x_n) := x_{n-q} \in X_{n-q}$ puede escribirse de la forma $x_{n-q} = s_{j_p} \cdots s_{j_1}(x_{n-q-p})$ con $x_{n-q-p} \in X_{n-q-p}$ no–degenerado.

Entonces

$$[x_n, t_n] = [x_{n-q}, t_{n-q}] = [s_{j_p} \cdots s_{j_1}(x_{n-q-p}), t_{n-q}] = [x_{n-q-p}, \sigma_{j_1} \cdots \sigma_{j_p}(t_{n-q})].$$

Notemos que $x_{n-q-p} \in X_{n-q-p}$ es no–degenerado y como $t_{n-q} \in int(\Delta_{n-q})$ entonces

$$\sigma_{j_1} \cdots \sigma_{j_p}(t_{n-q}) \in int(\Delta_{n-q-p}),$$

de donde $[x_n, t_n]$ es igual a un punto no–degenerado. La unicidad se sigue de la proposición A.1 y de la observación inicial. $\square$

Teorema A.3. Sea $X_\bullet$ un conjunto simplicial entonces $|X_\bullet|$ es un CW–complejo con una n–celda por cada elemento no–degenerado en X_n.

Demostración. Recordemos que $F_0|X_\bullet| \subset F_1|X_\bullet| \subset \cdots \subset F_k|X_\bullet| \subset \cdots \subset |X_\bullet|$ es una filtración para $|X_\bullet|$ donde

$$F_k|X_\bullet| = Im\left\{\bigsqcup_{n=0}^{k} X_n \times \Delta_n \hookrightarrow |X_\bullet|\right\}.$$

para todo $k \geq 0$.

Calculemos $A := F_q|X_\bullet| - F_{q-1}|X_\bullet| \subseteq X_q \times \Delta_q$. Sea $a \in A$ entonces $a = [x_q, t_q]$ con $x_q \in X_q$ y $t_q \in \Delta_q$, esto ya que $F_q|X_\bullet| = \left(\bigsqcup_{n=0}^{q} X_n \times \Delta_n\right) / \sim$.

Notemos lo siguiente, si $x_q = s_j(x_{q-1})$ para algún $s_j : X_{q-1} \longrightarrow X_q$ y algún $x_{q-1} \in X_{q-1}$ entonces $[x_q, t_q] = [x_{q-1}, \sigma_j(t_q)]$. Es decir, si x_q es degenerado entonces $[x_q, t_q]$ proviene de un elemento del "paso anterior de la filtración" $F_{q-1}|X_\bullet|$. Por tanto $[x_q, t_q]$ debe ser tal que $x_q \in X_q - s_j(X_{q-1})$ para todo $0 \leq j \leq (q-1)$.

De manera similar si $t_q = \delta_i(t_{q-1})$ para algún $\delta_i : \Delta_{q-1} \longrightarrow \Delta_q$ y algún $t_{q-1} \in \Delta_{q-1}$ entonces $[x_q, t_q] = [\partial_i(x_q), t_{q-1}]$. Es decir, si t_{q-1} no es un punto interior entonces $[x_q, t_q]$ proviene de una clase del "paso anterior de la filtración" $F_{q-1}|X_\bullet|$. Por tanto $[x_q, t_q]$ debe ser tal que $t_q \in \Delta_q - Fr(\Delta_q)$ con $Fr(\Delta_q)$ la frontera de Δ_q.

Esto demuestra que

$$A = \Big\{[x_q, t_q] : \ x_q \in X_q - s_j(X_{q-1}) \text{ para todo } 0 \leq j \leq (q-1) \text{ y } t_q \in \Delta_q - Fr(\Delta_q)\Big\}.$$

Ahora definamos el conjunto de las $q-$celdas. Por cada elemento en $X_q - s_j(X_{q-1})$ con $0 \leq j \leq (q-1)$ tendremos una $q-$celda. Identificamos a $\mathbb{D}^q$ con Δ_q y definimos el mapeo característico $\Psi_{x_q} : \{x_q\} \times Fr(\Delta_p) \to F_{q-1}|X_\bullet|$, como la compuesta,

$$\{x_q\} \times \Delta_q \xrightarrow{\ i\ } X_q \times \Delta_q \xrightarrow{\ \pi\ } F_q|X_\bullet|.$$

Y definimos ψ_{x_q}, el mapeo adjunción, como la restricción del mapeo Ψ_{x_q} a $\{x_q\} \times Fr(\Delta_p)$. Estos mapeos claramente son continuos y como ya sabemos a qué es igual $F_q|X_\bullet| - F_q|X_\bullet|$ entonces el mapeo Ψ_{x_q} es inyectivo en el interior de Δ_q.

Es sencillo verificar que el siguiente diagrama es pushout,

$$\begin{tikzcd}
\bigsqcup_{\substack{x \in X_q - s_j(X_{q-1}) \\ 0 \leq j \leq (q-1)}} \{x\} \times Fr(\Delta_q) \arrow[r, "\sqcup \psi_x"] \arrow[d, hook] & F_{q-1}|X_\bullet| \arrow[d] \\
\bigsqcup_{\substack{x \in X_q - s_j(X_{q-1}) \\ 0 \leq j \leq (q-1)}} \{x\} \times \Delta_q \arrow[r, "\sqcup \Psi_x"] & F_q|X_\bullet|
\end{tikzcd}$$

□

Definición A.4. Sean $X_\bullet$, $Y_\bullet$ conjuntos simpiciales. Una **función simplicial** $f_\bullet : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ es una colección de funciones $\{f_n : X_n \longrightarrow Y_n\}_{n\geq 0}$ tales que conmutan con los mapeos cara y degeneración, es decir,

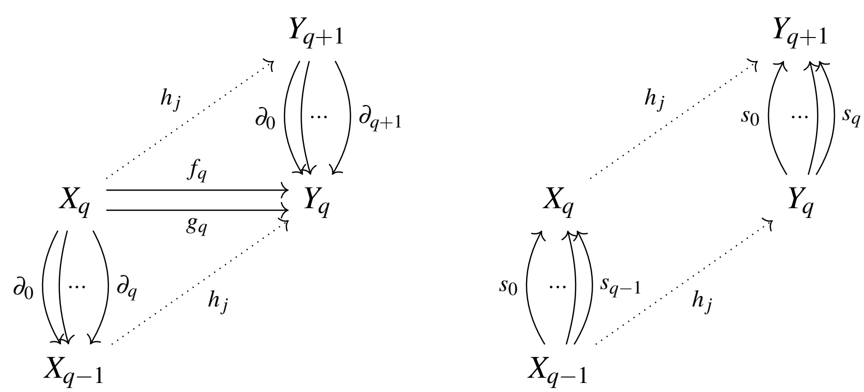
$$f_{n-1}\partial_i = \partial_i f_n \qquad \text{y} \qquad f_{n+1}s_j = s_j f_n.$$

$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[r, "\partial_i"] \arrow[d, "f_n"'] & X_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ Y_n \arrow[r, "\partial_i"] & Y_{n-1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_n \arrow[r, "s_j"] \arrow[d, "f_n"'] & X_{n+1} \arrow[d, "f_{n+1}"] \\ Y_n \arrow[r, "s_j"] & Y_{n+1} \end{tikzcd}$$

Definición A.5. Sean $f_\bullet, g_\bullet : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ funciones simpiciales. Se dice que $f_\bullet$ es **homotópica** a $g_\bullet$ si existen funciones $h_j : X_q \longrightarrow Y_{q+1}$ si para todo $0 \leq j \leq q$ tales que

$$\partial_0 h_0 = f_q, \qquad \partial_{q+1}h_q = g_q$$
$$\partial_i h_j = \begin{cases} h_{j-1}\partial_i & \text{si } i < j \\ \partial_j h_{j-1} & si\ i = j > 0 \\ h_j \partial_{i-1} & \text{si } i > j+1 \end{cases}$$
$$s_i h_j = \begin{cases} h_{j+1}s_i & \text{si } i \leq j \\ h_j s_{i-1} & \text{si } i > j, \end{cases}$$

$h_\bullet$ se llama una **homotopía de $f_\bullet$ a $g_\bullet$** y se denota por $f_\bullet \simeq g_\bullet$.



Proposición A.4. Sean $f_\bullet, g_\bullet : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ funciones simpliciales. Entonces $f_\bullet \simeq g_\bullet$ si y solo si existe una función simplicial $F_\bullet : X_\bullet \times \Delta[1] \longrightarrow Y_\bullet$ tal que para todo $n \geq 0$,

$$F_n(x, C_0) = g_n(x) \quad \text{y} \quad F_n(x, C_1) = f_n(x).$$

Donde C_0 y C_1 en $\Delta[1]_n$ representan los homomorfismos $C_0 : [n] \to [1]$ constante en 0 y $C_1 : [n] \to [1]$ constante en 1, respectivamente.

Demostración. Supongamos que $f_\bullet \simeq g_\bullet$ y sea $n \geq 0$. Dado que $\Delta[1]_n$ tiene $(n+2)$ elementos y a excepción de C_0 y C_1 los otros n pueden escribirse como

$$s_{n-1}\cdots s_{i+1}s_{i-1}\cdots s_0(id), \quad \text{con} \quad 0 \leq i \leq (n-1),$$

donde $id : [1] \to [1]$ es la identidad en $\Delta[1]_1$. Entonces para todo $x \in X_n$ definamos

$$F_n : X_n \times \Delta[1]_n \longrightarrow Y_n$$

por

$$\begin{aligned}
&F_n(x, C_0) = g_n(x)\\
&F_n(x, C_1) = f_n(x)\\
&F_n(x, s_{n-1}\cdots s_{i+1}s_{i-1}\cdots s_0(id)) = \partial_{i+1}h_i(x),
\end{aligned}$$

para $0 \leq i \leq (n-1)$. Puede verse que $F_\bullet$ conmuta con los mapeos cara y degeneración.

Recíprocamente sea $n \geq 0$ y sea $0 \leq i \leq n$ se define $h_i : X_n \longrightarrow Y_{n+1}$ por

$$h_i(x) = F_{n+1}(s_i(x), s_{n-1}\cdots s_{i+1}s_{i-1}\cdots s_0(id)).$$

Puede verse que $h_\bullet$ verifica las identidades de homotopía simplicial. $\square$

Proposición A.5. Sea $f_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ una función simplicial, entonces $f_\bullet$ induce una función continua $|f_\bullet| : |X_\bullet| \to |Y_\bullet|$ definida por $|f_\bullet|[x,t] = [f_n(x), t]$ para todo $x \in X_n$ y para todo $t \in \Delta_n$.

Teorema A.6. Sean $X_\bullet$, $Y_\bullet$ conjuntos simpliciales entonces existe una biyección entre

$$|X_\bullet \times Y_\bullet| \quad \text{y} \quad |X_\bullet| \times |Y_\bullet|.$$

Demostración. Sean $\pi_1 : X_\bullet \times Y_\bullet \to X_\bullet$ y $\pi_2 : X_\bullet \times Y_\bullet \to Y_\bullet$ la primera y segunda proyección respectivamente, entonces tenemos las funciones

$$\begin{aligned}
|\pi_1| : |X_\bullet \times Y_\bullet| &\to |X_\bullet| \\
[(x,y),t] &\mapsto [x,t]
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
|\pi_2| : |X_\bullet \times Y_\bullet| &\to |Y_\bullet| \\
[(x,y),t] &\mapsto [y,t].
\end{aligned}$$

Consideremos

$$\begin{aligned}
\eta := |\pi_1| \times |\pi_2| : |X_\bullet \times Y_\bullet| &\to |X_\bullet| \times |Y_\bullet| \\
[(x,y),t] &\mapsto ([x,t],[y,t]).
\end{aligned}$$

y

$$\bar{\eta} : |X_\bullet| \times |Y_\bullet| \to |X_\bullet \times Y_\bullet|$$

definida como sigue. Sean $[x_p, u_p] \in |X_\bullet|$ y $[y_q, v_q] \in |Y_\bullet|$ no–degenerados con $u_p = (t_0, \ldots, t_p)$ y $v_q = (t'_0, \ldots, t'_q)$. Definamos

$$u^m = \sum_{i=0}^{m} t_i \quad \text{y} \quad v^n = \sum_{j=0}^{n} t'_j$$

con $0 \leq m \leq p$ y $0 \leq n \leq q$.

Si tomamos los elementos diferentes en $\{u^m\} \cup \{v^n\}$ podemos ordenarlos de manera creciente para obtener una sucesión $0 < a_0 < \cdots < a_r = 1$ y definir un elemento del interior de Δ_r de la siguiente manera.

Haciendo $t_i'' = a_i - a_{i-1}$, con $0 \leq i \leq r$ y tomando $a_{-1} := 0$. Es claro que $0 < t_i'' < 1$ para todo i y $\sum_{i=0}^{r} t_i'' = a_r = 1$. De donde tenemos que el elemento $w_r := (t_0'', \ldots, t_r'') \in int(\Delta_r)$.

Ahora escojamos los índices i tales que $a_i \notin \{u^m\}$ digamos $i_1, \ldots, i_{r-p}$ y similarmente escojamos los índices j tales que $a_j \notin \{v^n\}$ digamos $j_1, \ldots, i_{r-q}$. Entonces el conjunto de los $\{i_\alpha\}$ y de los $\{j_\beta\}$ son disjuntos y

$$u_p = \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_{r-p}}(w_r) \quad \text{y} \quad v_q = \sigma_{j_1} \cdots \sigma_{i_{r-q}}(w_r).$$

Definimos entonces

$$\bar{\eta}([x_p, u_p], [y_q, v_q]) := \left[\left(s_{i_{r-p}} \cdots s_{i_1}(x_p), s_{j_{r-q}} \cdots s_{j_1}(y_q) \right), w_r \right]$$

Veamos que $\bar{\eta}$ es inversa de η:

-
$$\begin{aligned}
\eta(\bar{\eta}([x_p, u_p], [y_q, v_q])) &= \eta\left(\left[\left(s_{i_{r-p}} \cdots s_{i_1}(x_p), s_{j_{r-q}} \cdots s_{j_1}(y_q) \right), w_r \right] \right) \\
&= ([s_{i_{r-p}} \cdots s_{i_1}(x_p), w_r], [s_{j_{r-q}} \cdots s_{j_1}(y_q), w_r]) \\
&= ([x_p, \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_{r-p}}(w_r)], [y_q, \sigma_{j_1} \cdots \sigma_{j_{r-q}}(w_r)]) \\
&= ([x_p, u_p], [y_q, v_q]).
\end{aligned}$$

- Sea $[(x, y), t] \in |X_\bullet \times Y_\bullet|$ entonces este es igual a un elemento cuyo representante es no–degenerado, es decir, $[(x, y), t] = [(x_n, y_n), w_n]$ con x_n, y_n no–degenerados y $w_n \in int(\Delta_n)$, entonces
$$\bar{\eta}(\eta([(x_n, y_n), w_n])) = \bar{\eta}([x_n, w_n], [y_n, w_n]) = [(x_n, y_n), w_n].$$

Así existe una biyección entre $|X_\bullet \times Y_\bullet|$ y $|X_\bullet| \times |Y_\bullet|$. □

Ahora bien, queremos que $\eta : |X_\bullet \times Y_\bullet| \to |X_\bullet| \times |Y_\bullet|$ sea un homeomorfismo.

Es claro que $\eta : |X_\bullet \times Y_\bullet| \to |X_\bullet| \times |Y_\bullet|$ es continua. Además, tenemos que $\bar{\eta}$ es continua en cada celda del producto de los CW complejos $|X_\bullet| \times |Y_\bullet|$. Por la proposición A.1 del apéndice de [7], tenemos que $\bar{\eta}$ es continua en todo subespacio compacto de $|X_\bullet| \times |Y_\bullet|$. Y, se puede demostrar que todo CW complejo es un espacio topológico **compactamente generado** y utilizar el lema 46.4, capítulo 46 de [12] para concluir que $\bar{\eta} : |X_\bullet| \times |Y_\bullet| \to |X_\bullet \times Y_\bullet|$ es continua en $|X_\bullet| \times |Y_\bullet|$.

Así η es biyectiva continua con inversa continua, de donde tenemos que $|X_\bullet \times Y_\bullet|$ y $|X_\bullet| \times |Y_\bullet|$ son homeomorfos.

Corolario A.7. Una homotopía simplicial $H_\bullet : X_\bullet \times \Delta[1] \to Y_\bullet$ induce una homotopía topológica $|H_\bullet| \circ \bar{\eta} : |X_\bullet| \times [0, 1] \longrightarrow |Y_\bullet|$.

Bibliografía

[1] Alejandro Adem, Jianquan Ge, Jianzhong Pan, and Nansen Petrosyan. Compatible actions and cohomology of crystallographic groups. *Journal of Algebra*, 320(1):341–353, 2008.

[2] Alejandro Adem and Jianzhong Pan. Toroidal orbifolds, gerbes and group cohomology. *Transactions of the American Mathematical Society*, 358(9):3969–3983, 2006.

[3] Glen E Bredon. *Topology and geometry*, volume 139. Springer Science & Business Media, 1993.

[4] Kenneth S Brown. *Cohomology of groups*, volume 87. Springer Science & Business Media, 2012.

[5] LS Charlap and AT Vasquez. Compact flat riemannian manifolds ii: The cohomology of $\mathbb{Z}_p-$manifolds. *American Journal of Mathematics*, 87(3):551–563, 1965.

[6] Charles-W Curtis and Irving Reiner. *Methods of representation theory. Vol. I.* John Wiley & Sons, Inc., Princeton University Press, 1980.

[7] Allen Hatcher. *Algebraic topology. 2002*, volume 606.

[8] Saunders Mac Lane. Origins of the cohomology of groups. *Enseign. Math.(2)*, 24(1-2):1–29, 1978.

[9] William S Massey. *Algebraic topology: an introduction.* 1987.

[10] J Peter May. *Classifying spaces and fibrations*, volume 155. American Mathematical Soc., 1975.

[11] J Peter May. *Simplicial objects in algebraic topology*. University of Chicago Press, 1993.

[12] James Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Inc, 2000.

[13] James R Munkres. *Elements of algebraic topology*, volume 7. Addison-Wesley Reading, 1984.

[14] Joseph Rotman. *An introduction to homological algebra*. Springer Science & Business Media, 2008.

[15] Tammo tom Dieck. *Transformation groups*, volume 8. Walter de Gruyter, 1987.

[16] Charles A Weibel. *An introduction to homological algebra*. Number 38. Cambridge university press, 1995.

Lista de Símbolos

(M,d',d'') complejo doble

$[g_1|g_2|\cdots|g_n]$ elemento base de F_n en la resolución bar

$\mathbb{Z}[X]$ módulo de permutaciones

$\mathrm{Hom}_G(A,B)$ conjunto de $\mathbb{Z}G-$homomorfismos de A a B

$\mathscr{C}=(D,E,\alpha,\beta,\gamma)$ pareja exacta

$\mathscr{C}_r=(D_r,E_r,\alpha_r,\beta_r,\gamma_r)$ $r-$ésima pareja derivada de $\mathscr{C}$

$\varepsilon:\mathbb{Z}G\longrightarrow\mathbb{Z}$ mapeo aumentación

$\mathbb{Z}G$ o $\mathbb{Z}[G]$ anillo del grupo G

$\{(E_r,d_r)\}_{r\geq 1}$ sucesión espectral en cohomología

${}_{\mathbb{Z}G}\mathrm{Mod}$ categoría de los $\mathbb{Z}G-$módulos a izquierda

$A\otimes_G B$ producto tensorial sobre $\mathbb{Z}G$ de A y B

A^G invariantes del $G-$módulo A

A_G coinvariantes del $G-$módulo A

BG espacio clasificante del grupo G

E_∞ término límite de una sucesión espectral

E_r $r-$página de una sucesión espectral en cohomología

$G-\mathrm{Mod}$ categoría de los $G-$módulos a izquierda

$H\rtimes K$ producto semidirecto de H con K

$H^*(G,-)$ cohomología de grupo como funtor en los coeficientes

$H_*(G,-)$ homología de grupo como funtor en los coeficientes

I o IG ideal aumentación

$K(G,1)$ espacio de Eilenberg-MacLane

N elemento norma

RG o $R[G]$ anillo de grupo G sobre R

TM complejo total asociado al complejo doble M

Índice alfabético