LÓGICA DE CATEGORÍAS INTERMEDIAS, TEOREMAS DE REPRESENTACIÓN Y APLICACIONES A CATEGORÍAS ABELIANAS

Walter Andrés Páez Gaviria

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2015

LÓGICA DE CATEGORÍAS INTERMEDIAS, TEOREMAS DE REPRESENTACIÓN Y APLICACIONES A CATEGORÍAS ABELIANAS

Walter Andrés Páez Gaviria

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias Matemáticas

Director:
Fernando Zalamea

Línea de Investigación:
Lógica

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2015

"El amor más grande que conocí
sin querer un día pasó por mí
por la vía láctea se encontrarán
en algún planeta en algún lugar

Dónde va la gente y su corazón
Dónde van los años y este dolor
y dónde voy yo, no me importa ya
vengo de dos ríos que dan al mar

Y allí van, parte del aire
y allí van, solos, en libertad."

Fito Páez, *Parte del aire*

A mamá, papá, María, Snoopy y Lina
Los nombres siempre se repiten...

Agradecimientos

Debo este trabajo, y mucho más que él, a la enseñanza, motivación y apoyo que me ha brindado mi gran maestro y, por fortuna para mí, amigo, Fernando Zalamea. Quiero agradecer a mi familia por ser el apoyo de alguien tan a la deriva y con tantos huecos, que sin ellos seguramente ya me habrían consumido. A Lina por lo vivido y tatuado en la piel, mis sonrisas más eternas. A mis amigos, los que siguen en la montaña rusa. Por último, a mi contradicción, le doy gracias a Dios por haber sobrevivido a estas épocas y seguir con ganas absurdas de vivir.

Resumen

En este trabajo estudiaremos algunas categorías intermedias, abelianas, y sus teoremas de representación. Demostraremos teoremas de completitud para la lógica regular, coherente y clásica de primer orden. También se hará un comparación entre pretopoi y categorías abelianas.
Palabras clave: representación, completitud, intuicionismo, categorías abelianas, pretopoi.

Abstract

We are going to study some intermediate categories, abelian categories and their representation theorems. This will allow us to prove completeness theorems for regular, coherent and classical first order logic. We will end by making a comparison between pretopoi and abelian categories.
Keywords: representation, completeness, intuitionism, abelian categories, pretopoi.

Contenido

1 Introducción

En este trabajo vamos estudiar algunas categorías intermedias -de regulares a topoi, categorías abelianas y alegorías-, categorías en las que se quiere ver a los morfismos de la categoría, no como generalizaciones de las funciones entre conjuntos, sino como generalizaciones de las relaciones entre conjuntos. Siguiendo a [Freyd & Scedrov 1990]], lograremos representar cada uno de estos tipos de categorías abstractas en potencias de la categoría de conjutos. Estas representaciones nos servirán para demostrar teoremas de completitud a través de un procedimiento que asigna a cada teoría una alegoría con su información deductiva. Este procedimiento establece una correspondencia entre las categorías intermedias: de regulares a topoi, y las teorías intuicionistas intermedias: de regulares a órdenes superiores.
Dada una teoría T, podemos construir la alegoría $\mathbb{A}_T$ asociada a esta teoría. Se puede decir que esta categoría se construye a partir de elementos *sintácticos*: sus objetos son tuplas finitas de suertes del lenguaje; sus morfismos son clases de equivalencia de fórmulas cuya tupla ordenada de variables libres tiene el tipo de suerte de la concatenación de la tupla dominio con la tupla codominio. Esta categoría tiene estructura *natural* de alegoría. A partir de esta alegoría podemos formar la categoría $Map(Split(Cor(\mathbb{A}_T)))$. Las relaciones que presentan estos tres objetos (teoría, alegoría y categoría) se presentan en la Figura 1-1.
Como parte de este trabajo, presentaremos una comparación entre los topoi y las categorías abelianas. Es bien conocido que la intersección de estas dos clases de categorías es trivial: si $\mathbb{A}$ es una categoría cartesiana cerrada con objeto cero 0, entonces, para todo objeto A de esta categoría, $A \cong 0 \times A \cong 0$. A pesar de esto, se puede precisar el punto exacto a partir del cual bifurcan, tan radicalmente, estas categorías: el comportamiento del objeto inicial. El sentido de esta afirmación

Teorías intermedias	Alegorías	Categorías intermedias
Orden superior	Potencia	Topos
Primer orden	División	Logos
Coherente	Distributiva	Prelogos
Regular	Pretabular unitaria	Regular

$$T \longrightarrow \mathbb{A}_T \longrightarrow Map(Split(Cor(\mathbb{A}_T)))$$

Figura 1-1: Correspondencia entre teorías, alegorías y categorías se precisa en el siguiente párrafo.

En una respuesta a Vaughan Pratt [Freyd 1997], vía online, Freyd introdujo la teoría finitamente axiomatizable de las categorías AT, y la siguiente definición: sea 0 un objeto inicial, X un objeto de la categoría, y sean $\pi_1 : 0 \times X \to 0$ y $\pi_2 : 0 \times X \to X$ las proyecciones del producto. Diremos que X es un objeto de tipo T si π_1 es un isomorfismo, y de tipo A si π_2 es un isomorfismo. La relación de estos conceptos con el tema que nos interesa es la siguiente: *un pretopos es precisamente una categoría AT en la que todo objeto es de tipo T, y una categoría abeliana es una categoría AT en la que todo objeto es de tipo A*.

El aporte principal del autor en este trabajo ha sido el de reorganizar y demostrar en detalle los resultados necesarios para llegar al teorema de completitud de la lógica clásica de primer orden (Gödel) vía teoremas de representación de categorías intermedias, siguiendo a [Freyd & Scedrov 1990]. También se presentó una reconstrucción de lo dicho online en [Freyd 1997]. Las observaciones presentadas en la proposición 3.3.1. y el ejemplo subsiguiente son del autor.

2 Categorías intermedias y teoremas de representación

En este capítulo, siguiendo a [Freyd & Scedrov 1990], queremos hacer una exposición de los teoremas de representación de categorías intermedias, entre las categorías regulares y los topoi, en potencias de la categoría de conjuntos. Nuestra exposición intentará seguir caminos minimales de prueba. Una vez hayamos estudiado las alegorías asociadas a una teoría regular, veremos que estos teoremas de representación implicarán teoremas de completitud para las respectivas lógicas.

2.1. Representación de Cayley

Sea $\mathbb{A}$ una categoría pequeña. Un conjunto X se dice un $\mathbb{A}$**-conjunto derecho** si está dotado de una función $c : X \to Ob(\mathbb{A})$ y una operación parcial $\cdot : X \times Mor(\mathbb{A}) \to X$ que cumplen, para todo $x \in X$ y $a, b \in Mor(\mathbb{A})$, las siguientes propiedades:

- $x \cdot a$ está definido sii $c(x) = d(a)$; además, si este es el caso, entonces $c(x \cdot a) = c(a)$
- $x \cdot 1_{c(x)} = x$
- $x \cdot (ab) = (x \cdot a) \cdot b$

Aquí d y c cuando se apliquen a morfismos de una categoría indicarán el dominio y el codominio del morfismo, respectivamente.
Una función $f : X \to Y$ entre dos $\mathbb{A}$-conjuntos derechos se dice un $\mathbb{A}$**-morfismo (derecho)** si, para todo $x \in X$ y $a \in Mor(\mathbb{A})$, se cumple lo siguiente:

- $c(f(x)) = c(x)$
- $f(x \cdot a) = f(x) \cdot a$, siempre que $x \cdot a$ está definido.

De manera natural, podemos definir la categoría $\mathscr{S}_{\mathbb{A}}$, que tiene por objetos los $\mathbb{A}$-conjuntos derechos, y por morfismos los $\mathbb{A}$-morfismos.
Esta categoría resulta ser equivalente a una potencia de la categoría de conjuntos; es decir, a la categoría $\mathscr{S}^{\mathbb{A}}$. Para ver esto, consideremos el funtor $F : \mathscr{S}_{\mathbb{A}} \to \mathscr{S}^{\mathbb{A}}$ definido de la siguiente forma:

- Para cada $\mathbb{A}$-conjunto derecho X, se define el funtor $FX : \mathbb{A} \to \mathscr{S}$ que, para cada $A \in Ob(\mathbb{A})$ y $a : A \to B \in Mor(\mathbb{A})$, está dado por

$$FX(A) = \{x \in X \mid c(x) = A\},$$

$$FX(a) : FX(A) \to FX(B),\ x \mapsto x \cdot a.$$

- Para cada $\mathbb{A}$-morfismo $f : X \to Y$, a partir de las coordenadas

$$(Ff)_A : FX(A) \to FY(A),\ x \mapsto f(x),$$

para cada $A \in Ob(\mathbb{A})$, se define $Ff : FX \Rightarrow FY$. La definición de $\mathbb{A}$-morfismo garantiza que Ff es una transformación natural.

Proposición 2.1.1 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.271)**.** *F es una equivalencia de categorías.*

Demostración.

- *F es fiel y pleno:* Sean X e Y dos $\mathbb{A}$-conjuntos derechos. Vamos a ver que la función inducida $F : Hom_{\mathscr{S}_{\mathbb{A}}}(X,Y) \to Hom_{\mathscr{S}^{\mathbb{A}}}(FX,FY)$ es biyectiva. Si $f,g \in Hom_{\mathscr{S}_{\mathbb{A}}}(X,Y)$ son tales que $Ff = Fg$, es fácil ver que $f = g$; pues si $x \in X$, entonces $f(x) = (Ff)_{c(x)} = (Fg)_{c(x)} = g(x)$. Ahora, si $\varphi \in Hom_{\mathscr{S}^{\mathbb{A}}}(FX,FY)$, definimos $f : X \to Y$ mediante $f(x) = \varphi_{c(x)}(x)$, para cada $x \in X$; f es un $\mathbb{A}$-morfismo, pues φ es natural, y $Ff = \varphi$.

- *F tiene imagen representativa:* Sea $G' : \mathbb{A} \to \mathscr{S}$ un funtor covariante. Es fácil ver que G' es naturalmente isomorfo a un funtor G para el cual los valores en objetos son disyuntos dos a dos. Después de ver esto, definamos el conjunto $X = \bigcup_{A \in Ob(\mathbb{A})} GA$. Hacemos de X un $\mathbb{A}$-conjunto derecho definiendo, para cada $x \in X$ y $a \in Mor(\mathbb{A})$:

  - $c(x) = A$ sii $x \in GA$
  - $x \cdot a = Ga(x)$, siempre que $c(x) = d(a)$

  Así, $c(x \cdot a) = c(a)$. Además, $x \cdot (ab) = G(ab)(x) = ((Ga)(Gb))(x) = Gb(Ga(x)) = (x \cdot a) \cdot b$. Claramente $FX = G$.

□

Una categoría pequeña $\mathbb{A}$ se puede ver naturalmente como un $\mathbb{A}$-conjunto derecho. Al funtor $\mathscr{C} := F\mathbb{A} : \mathbb{A} \to \mathscr{S}$ lo llamamos la **representación (covariante) de Cayley** de la categoría $\mathbb{A}$. Es inmediato ver que $\mathscr{C}$ es fiel e inyectivo en objetos, pero no necesariamente pleno; de donde se sigue que $\mathbb{A}$ es isomorfa a una subcategoría de la categoría de conjuntos. Debido a lo anterior, obtenemos el siguiente metateorema.

METATEOREMA 2.1.1 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.272)**.** *Toda sentencia elemental, universalmente cuantificada en los predicados de la teoría de categorías, que es cierta para la categoría de conjuntos es cierta para todas las categorías.*

Es fácil ver que $\mathscr{C}$ preserva y refleja isomorfismos, pues refleja invertibilidad a la derecha. Por lo tanto, *podemos extender el anterior metateorema a sentencias que incluyan la invertibilidad de los morfismos como predicado primitivo.*

2.2. Representación de categorías cartesianas

Una categoría se dice **cartesiana, o finitamente completa,** si posee todos los límites finitos. Es un hecho bien conocido que una categoría es cartesiana si, y solo si, posee objeto final, todos los igualadores y productos binarios. A partir de este hecho es inmediato ver que una categoría es cartesiana si, y solo si, posee objeto final y todos los pullbacks. Un funtor entre categorías cartesianas se dice una **representación de categorías cartesianas** si preserva todos los límites finitos.

Ejemplo 2.2.1.

- *La categoría de los conjuntos es cartesiana.*
- *Las categorías de grupos, grupos abelianos, módulos sobre un anillo, y de espacios topológicos son cartesianas.*
- *Un conjunto parcialmente ordenado visto como categoría (en la forma usual) es una categoría cartesiana si y solo si el ínfimo sobre cualquier conjunto finito de elementos existe.*
- *Categorías coma de categorías cartesianas son cartesianas.*
- *Categorías de funtores con categoría codominio cartesiana son cartesianas.*

Proposición 2.2.1 ([Freyd & Scedrov 1990],1.438-1.453)**.**

a. $f : A \to B$ *es un isomorfismo si y solo si es un igualador para* $1 : B \to B$ *consigo mismo.*

b. Si un funtor refleja igualadores, entonces refleja isomorfismos.

c. Si una categoría tiene igualadores, entonces todo funtor que parta de esa categoría, preserve igualadores y refleje isomorfismos es fiel.

d. Si una categoría tiene objeto final (respect. productos binarios, igualadores, pullbacks), entonces todo funtor fiel que refleje isos, parta de esa categoría y preserve objeto final (respect. productos binarios, igualadores, pullbacks), también lo refleja.

e. Si en una categoría con pullbacks existen morfismos $f,g : A \to B$ *y* $h : B \to C$*, tales que* $fh = gh$*, entonces existe un igualador para* f *y* g*.*

f. Toda categoría con pullbacks y coigualadores tiene igualadores.

g. Un funtor que parte de una categoría cartesiana y preseva pullbacks, también preserva igualadores.

h. Un funtor que parte de una categoría cartesiana y preseva pullbacks es fiel, y refleja isos, si y solo si preserva subobjetos propios.

Demostración. *a.* Si f es un isomorfismo, es inmediato ver que es un igualador para 1_B y 1_B. Para ver la otra dirección, supongamos que f es un igualador para 1_B y 1_B. De aquí se sigue que existe un único $g : B \to A$ para el cual $gf = 1$. Por lo tanto $fgf = 1_A f$, y, como f es mónico, $fg = 1$. De donde f es un isomorfismo.

b. Consecuencia inmediata de a.

c. Hagamos primero la observación (trivial) de que, en una categoría con igualadores, dos morfismos son iguales si, y solo si, su igualador es un isomorfismo. Sea ahora $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ un funtor que parte de una categoría con igualadores, que los preserva y refleja isomorfismos. Sean $f, g : A \to B$ en $\mathbb{A}$ tales que $Ff = Fg$. Sea e un igualador para f y g. Entonces, por hipótesis, Fe es un igualador para Ff y Fg, que son iguales. Por la observación hecha al inicio, se tiene que Fe es un isomorfismo. Por lo tanto e también lo es y, nuevamente por la observación inicial, $f = g$.

d. Damos una prueba para el caso del objeto final; los demás son completamente análogos. Sea $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ un funtor fiel (y que refleja isomorfismos) que parte de una categoría con objeto final, y que lo preserva; veamos que también lo refleja. Sea $X \in Ob(\mathbb{A})$ tal que FX es un objeto final. Entonces $! : FX \to F1 = F(! : X \to 1)$ es un isomorfismo, pues $F1$ es un objeto final. Debido a que F refleja isos, tenemos que $! : X \to 1$ es un isomorfismo. Así, X es un objeto final.

e. Construya

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "n"] \arrow[ddl, bend right, "kf=kg"'] \arrow[ddr, bend left, "k"] & \\
 & P \arrow[dl, "m_1"'] \arrow[dr, "m_2"] & \\
B \arrow[dr, "\langle 1,1 \rangle"] \arrow[dd, "1"'] \arrow[ddrr, dotted, bend left, "1"] & & A \arrow[dl, "\langle f,g \rangle"'] \arrow[dd, "g"] \arrow[ddll, bend right, "f"'] \\
 & Q \arrow[dl, "l_1"'] \arrow[dr, "l_2"] & \\
B \arrow[dr, "h"'] & & B \arrow[dl, "h"] \\
 & C &
\end{tikzcd}
$$

Aquí P y Q son pullbacks. Antes de seguir hacemos la observación de que en todo el trabajo usaremos el orden de composición inverso al usual. Afirmamos que $m_2 : P \to A$ es un igualador para f y g. En efecto, como $m_1\langle 1,1\rangle = m_2\langle f,g\rangle$, entonces $m_1 = m_1 1 = m_1\langle 1,1\rangle l_1 = m_2\langle f,g\rangle l_1 = m_2 f$ y $m_1 = m_1 1 = m_1\langle 1,1\rangle l_2 = m_2\langle f,g\rangle l_2 = m_2 g$. Por lo tanto $m_2 f = m_2 g$. Sea ahora $k : X \to A$ tal que $kf = kg$. Ya que $kf\langle 1,1\rangle = \langle kf,kf\rangle = \langle kf,kg\rangle = k\langle f,g\rangle$, existe un único $n : X \to P$ tal que $nm_1 = kf = kg$ y $nm_2 = k$. Como $\langle 1,1\rangle$ es mónico, entonces m_2 también lo es. Esto, junto con lo que acabamos de demostrar, implica que m_2 es el igualador buscado.

f. Inmediato a partir de *e.*.

g. Inmediato a partir de la demostración de *e.*.

h. Demostraremos la dirección no trivial. Supongamos que $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ es un funtor que preserva pullbacks, subobjetos propios, y que $\mathbb{A}$ es cartesiana. Observe que por la parte *g.* de esta proposición, F preserva igualadores. Queremos ver que F refleja isos, lo que implicará que es fiel gracias a la parte *c.*. Sea $f : A \to B$ tal que Ff es un iso. Observe que en toda categoría cartesiana, si formamos el pullback

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d] \arrow[ddl, bend right, "1"'] \arrow[ddr, bend left, "1"] & \\
 & A \times_B A \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
A \arrow[dr, "f"'] & & A \arrow[dl, "f"] \\
 & B &
\end{tikzcd}$$

tenemos que f es un monomorfismo sii $A \to A \times_B A$ es un isomorfismo. Usando esto, vemos que al aplicar el funtor F a este diagrama, el pullback se mantiene. Por lo tanto $F(A \to A \times_B A)$ es un isomorfismo. Como $A \to A \times_B A$ es un monomorfismo, y F preserva subobjetos propios, entonces $A \to A \times_B A$ es un isomorfismo, por lo tanto f es mono. Lo anterior implica que f es iso, pues Ff es iso y F preserva subobjetos propios.

□

En busca de una representación de las categorías cartesianas en una potencia de la categoría de los conjuntos, debemos estudiar las categorías coma, y los funtores olvido asociados a estas.

Proposición 2.2.2 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.44). *a. El funtor olvido $\Sigma : \mathbb{A}/B \to \mathbb{A}$ preserva objeto final si, y solo si, B es un objeto final de $\mathbb{A}$.*

b. Si $\mathbb{C}$ es una categoría con objeto final, digamos 1, y $F : \mathbb{C} \to \mathbb{A}$ es un funtor tal que $F1 = B$, entonces existe un único funtor $F' : \mathbb{C} \to \mathbb{A}/B$ tal que $F'1 = 1 : B \to B$ y $F = F'\Sigma$.

c. Si $\mathbb{A}$ tiene pullbacks, entonces $\mathbb{A}/B$ es cartesiana y Σ es fiel, refleja isomorfismos, preserva y refleja pullbacks e igualadores.

Demostración. *a.* Supongamos que B es un objeto final. Vamos a demostrar que, inclusive, Σ es un isomorfismo de categorías. Defina el funtor $T : \mathbb{A} \to \mathbb{A}/B$ por $FA =! : A \to B$ y $F(f : A \to C) = f$. Claramente, Σ y T son inversas mutuas.

b. Defina F' mediante $F'A = F(! : A \to 1)$ y $F'(f : A \to C) = Ff$. Claramente, F' es un funtor y $F = F'\Sigma$. Además, si $G : \mathbb{C} \to \mathbb{A}/B$ es un funtor tal que $F = G\Sigma$, esto implica de manera inmediata que $G = F'$.

c. El pullback en $\mathbb{A}/B$ es el mismo pullback que en $\mathbb{A}$. A partir de esto, y de que $\mathbb{A}/B$ tiene objeto final, concluimos que $\mathbb{A}/B$ es cartesiana y que Σ preserva pullbacks. Por la proposición 2.2.1. *g.*, Σ también preserva igualadores. Σ es claramente fiel y refleja isos. De lo anterior y de la parte *d.* de la proposición 2.2.1., se sigue que también refleja pullbacks e igualadores. □

Ejemplo 2.2.2.

La categoría de los espacios topológicos junto con los homeomorfismos locales, que llamaremos $\mathscr{HL}$, no es cartesiana. Esto se debe a que no existe un espacio topológico Y tal que para todo espacio topológico X existe un único homeomorfismo local de X en Y. En efecto, si Y es un espacio tal, consideremos $X = \mathscr{P}(Y)$ con la topología trivial. Sea $f : X \to Y$ algún homeomorfismo local. Como la única hoja posible de este es X, tenemos que f es un homeomorfismo de X sobre su imagen; en particular, f es inyectivo, de donde $|X| = |\mathscr{P}(Y)| \leq |Y|$, lo cual contradice el teorema de Cantor. A pesar de no tener objeto final, la categoría $\mathscr{HL}$ sí tiene pullbacks, lo que implica que, por la parte c. de la proposición 2.2.2., la categoría de haces topológicos (espacios étalés) sobre un espacio Y es cartesiana.

Como caso particular de la parte *c.* de la anterior proposición, cualquier funtor $F : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ que envíe a cada A en $B \times A$, para algún B fijo, puede ser factorizado como lo muestra el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{A}/B \times 1 \arrow[dr, "\Sigma"] \arrow[dd, "\cong"] & \\
\mathbb{A} \arrow[ur, "F'"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & \mathbb{A} \\
& \mathbb{A}/B \arrow[ur, "\Sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

El isomorfismo de la mitad deja fijos los morfismos y está dado en objetos por la composición posterior con el isomorfismo π_B. Al funtor Δ lo llamamos el **funtor diagonal**.

Proposición 2.2.3 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.442)**.** *Si $\mathbb{A}$ es una categoría cartesiana pequeña, entonces la representación de Cayley preserva y refleja pullbacks e igualadores.*

Demostración. Sea el siguiente diagrama un pullback en $\mathbb{A}$.

$$\begin{tikzcd} A \times_C B \arrow[r, "l_2"] \arrow[d, "l_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Queremos demostrar que el siguiente diagrama también es un pullback; pero en este caso, en $\mathscr{S}$.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}(A \times_C B) \arrow[r, "\mathscr{C}l_2"] \arrow[d, "\mathscr{C}l_1"'] & \mathscr{C}B \arrow[d, "\mathscr{C}g"] \\ \mathscr{C}A \arrow[r, "\mathscr{C}f"'] & \mathscr{C}C \end{tikzcd}$$

Esto último es equivalente a demostrar que la función $\langle \mathscr{C}l_1, \mathscr{C}l_2 \rangle : \mathscr{C}(A \times_C B) \to \mathscr{C}A \times_{\mathscr{C}C} \mathscr{C}B$, dada por $x \mapsto (xl_1, xl_2)$, es una biyección. Sean $x_1, x_2 \in \mathscr{C}(A \times_C B)$ tales que $(x_1 l_1, x_1 l_2) = \langle \mathscr{C}l_1, \mathscr{C}l_2 \rangle(x_1) = \langle \mathscr{C}l_1, \mathscr{C}l_2 \rangle(x_2) = (x_2 l_1, x_2 l_2)$. Entonces $x_1 l_1 = x_2 l_1$ y $x_1 l_2 = x_2 l_2$. De donde $x_1 = x_2$, ya que l_1 y l_2 forman un par mónico. Con esto, hemos demostrado la inyectividad de la función; nos queda por ver sobreyectividad. Sea $(x_1, x_2) \in \mathscr{C}A \times_{\mathscr{C}C} \mathscr{C}B$, entonces, por construcción de los pullbacks en $\mathscr{S}$, tenemos que $x_1 \in \mathscr{C}A$, $x_2 \in \mathscr{C}B$ y $x_1 f = x_2 g$ en $\mathbb{A}$; de donde $d(x_1)$ y $d(x_2)$ son iguales, digamos a E. Por la propiedad que define a los pullbacks, tenemos que existe un único $\langle x_1, x_2 \rangle : E \to A \times_C B$ tal que $\langle x_1, x_2 \rangle l_1 = x_1$ y $\langle x_1, x_2 \rangle l_2 = x_2$. Así, $\langle x_1, x_2 \rangle \in \mathscr{C}(A \times_C B)$ y $\langle \mathscr{C}l_1, \mathscr{C}l_2 \rangle(\langle x_1, x_2 \rangle) = (\langle x_1, x_2 \rangle l_1, \langle x_1, x_2 \rangle l_2) = (x_1, x_2)$, como se ilustra en el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, dashed, "\langle x_1, x_2 \rangle"] \arrow[drr, bend left, "x_2"] \arrow[ddr, bend right, "x_1"'] & & \\ & A \times_C B \arrow[r, "l_2"] \arrow[d, "l_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Hemos demostrado que $\mathscr{C}$ preserva pullbacks; como este funtor es fiel, por la parte *g.* de la proposición 2.2.1, tenemos que también preserva igualadores; y, por la parte *d.* de la misma proposición, tenemos que refleja pullbacks e igualadores. $\square$

Sea $\mathbb{A}$ una categoría cartesiana pequeña, entonces $\mathscr{C}1 \cong Ob(\mathbb{A})$ en $\mathscr{S}$. Podemos factorizar $\mathscr{C}$ como $\mathbb{A} \xrightarrow{\mathscr{C}'} \mathscr{S}/\mathscr{C}1 \xrightarrow{\cong} \mathscr{S}/Ob(\mathbb{A}) \xrightarrow{\Sigma} \mathscr{S}$. Como $\mathscr{C}$ es fiel y refleja isos, lo mismo le sucede a $\mathscr{C}'$. Ahora, por la parte *c.* de la proposición 2.2.2., tenemos que $\mathscr{S}/Ob(\mathbb{A})$ es cartesiana y Σ que refleja pullbacks. Como $\mathscr{C}$ preserva pullbacks, lo anterior implica que $\mathscr{C}'$ los preserva. Puesto que $\mathscr{C}'$ también preserva objetos finales, tenemos que $\mathscr{C}'$ es una representación cartesiana fiel (y que refleja isos). Por lo tanto, lo mismo sucede con el funtor $F = \mathbb{A} \xrightarrow{\mathscr{C}'} \mathscr{S}/\mathscr{C}1 \xrightarrow{\cong} \mathscr{S}/Ob(\mathbb{A}) \xrightarrow{\simeq} \mathscr{S}^{Ob(\mathbb{A})}$. Así, hemos demostrado el siguiente teorema.

TEOREMA 2.2.1 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.442, Teorema de Representación de Categorías Cartesianas)**.** *Toda categoría cartesiana pequeña puede ser fielmente representada en una potencia de la categoría de conjuntos.*

En esta representación, las coordenadas resultan ser los funtores representables; e.d., $Hom_{\mathbb{A}}(A,-) = \mathbb{A} \xrightarrow{F} \mathscr{S}^{Ob(\mathbb{A})} \xrightarrow{\pi_A} \mathscr{S}$, para cada $A \in Ob(\mathbb{A})$. Así, para cada categoría cartesiana pequeña, los funtores representables (covariantes) conforman una familia colectivamente fiel de representaciones cartesianas. Usando esta familia, obtenemos el siguiente metateorema para las categorías cartesianas.

METATEOREMA 2.2.1 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.444)**.** *Cualquier sentencia de Horn, en los predicados de la teoría de categorías cartesianas, cierta para la categoría de conjuntos, es cierta para todas las categorías cartesianas.*

Demostración. Supongamos que existe una categoría cartesiana $\mathbb{A}$ en la cual no es cierta alguna sentencia de Horn en los predicados de la teoría de categorías cartesianas, digamos, la clausura universal de $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \to \varphi$. Por lo tanto, existe un contraejemplo que satisface $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, pero no φ. Podemos hallar una subcategoría cartesiana pequeña que contenga a todos los objetos y morfismos involucrados en el contraejemplo. Tenemos que los funtores representables de esta categoría conforman una familia colectivamente fiel de representaciones cartesianas. Por lo tanto, alguno de ellos trasladará el contraejemplo a la categoría de conjuntos.

□

2.3. Representación de categorías regulares: el teorema de Henkin-Lubkin

2.3.1. Categorías preregulares, regulares y capitales

Diremos que un subobjeto $j : B' \rightarrowtail B$ **permite** a $f : A \to B$ si existe $g : A \to B'$ tal que $f = gj$; i.e., si f se puede factorizar a través de j.

Ejemplo 2.3.1.

- *En las categorías de conjuntos, grupos, módulos sobre un anillo, espacios topológicos $j : B' \rightarrowtail B$ permite a $f : A \to B$ si y solo si $f(A) \subset j(B')$.*

- *En un conjunto parcialmente ordenado, $x \leq y$ permite exactamente a todos los morfismos $z \leq y$ para los cuales $z \leq x$.*

Dado un morfismo $f : A \to B$, definimos una función monótona creciente $f^* : Sub(B) \to Sub(A)$ tomando pullback a través de f como se ilustra en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} f^*(B') \arrow[r, tail] \arrow[d] & A \arrow[d, "f"] \\ B' \arrow[r, tail] & B. \end{tikzcd}$$

Ejemplo 2.3.2.
- *En las categorías de conjuntos, grupos, módulos sobre un anillo, espacios topológicos la función f^* corresponde a f^{-1}.*
- *En un conjunto parcialmente ordenado, el pullback a través de $x \leq y$ se realiza al tomar el ínfimo con x.*

Proposición 2.3.1 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.51)**.** *a. En una categoría con pullbacks, $j : B' \rightarrowtail B$ permite a $f : A \to B$ si, y solamente si, el subobjeto $f^*(B')$ es* ***entero****, e.d., $f^*(B') = A$ (como subobjetos de A).*

b. Si $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ es un funtor fiel que refleja isos, parte de una categoría con pullbacks, y los preserva, entonces refleja permisividad, i.e., si $F(j : B' \rightarrowtail B)$ permite a $F(f : A \to B)$, entonces $j : B' \rightarrowtail B$ permite a $f : A \to B$.

Demostración. *a.* ($\Rightarrow$) Supongamos que $j : B' \rightarrowtail B$ permite a $f : A \to B$. Entonces existe $g : A \to B'$ tal que $f = gj$. Queremos demostrar que el siguiente diagrama es un pullback.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B' \arrow[r, "j"'] & B \end{tikzcd}$$

Sean $l_1 : C \to B$ y $l_2 : C \to A$, tales que $l_1 j = l_2 f$. Entonces $l_2 g j = l_2 1 f = l_2 f = l_1 j$. Como j es un monomorfismo, obtenemos que $l_2 g = l_1$. Así, el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[dr, "l_2"] \arrow[drr, bend left, "l_2"] \arrow[ddr, bend right, "l_1"'] & & \\ & A \arrow[r, "1"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B' \arrow[r, "j"'] & B \end{tikzcd}$$

Es claro que l_2 es el único morfismo que hace el diagrama conmutativo. Por lo tanto, el primer diagrama es un pullback y $f^*(B') = A$ como subobjetos de A. ($\Leftarrow$) Inmediato.

b. Sean $j : B' \rightarrowtail B$ y $f : A \to B$ en $\mathbb{A}$. Supongamos que $F(j : B' \rightarrowtail B)$ permite a $F(f : A \to B)$. Formemos el siguiente pullback en $\mathbb{A}$.

$$\begin{tikzcd} f^*(B') \arrow[r, tail] \arrow[d] & A \arrow[d, "f"] \\ B' \arrow[r, tail, "j"'] & B \end{tikzcd}$$

Como F preserva pullbacks, el siguiente diagrama es un pullback en $\mathbb{B}$.

$$\begin{tikzcd} F(f^*(B')) \arrow[r, tail] \arrow[d] & FA \arrow[d, "Ff"] \\ FB' \arrow[r, tail, "Fj"'] & FB \end{tikzcd}$$

Por lo que acabamos de hacer y por la parte *a.* de esta proposición, tenemos que $F(f^*(B')) = f^*(FB') = FA$ (como subobjetos de FA). Lo que implica que $f^*(B') = A$ (como subobjetos de A), pues F refleja isomorfismos. Nuevamente, por la parte *a.* de esta proposición, esto implica que $j : B' \rightarrowtail B$ permite a $f : A \to B$.

$\square$

La **imagen** de un morfismo $f : A \to B$, si existe, se define como el subobjeto de B más pequeño que permite a f. Diremos que una categoría tiene imágenes si todo morfismo tiene imagen. En este caso, podemos definir una función monótona creciente $\exists_f : Sub(A) \to Sub(B)$ que envía $A' \rightarrowtail A$ en la imagen de $A' \rightarrowtail A \xrightarrow{f} B$.

Queremos hacer un pequeño paréntesis en nuestra exposición para explicar el sentido de la notación anterior. Consideremos una estructura $\mathscr{M}$ para un lenguaje $\mathscr{L}$. El conjunto definible asociado a una fórmula $\varphi(\overline{x})$ es por definición $[\varphi(\overline{x})] := \{\overline{m} \in M^{l(\overline{x})} \mid \mathscr{M} \models \varphi(\overline{m})\}$, donde $l(\overline{x})$ es la longitud de la tupla finita $\overline{x}$. Para una fórmula $\varphi(x,y)$ podemos pensar a los cuantificadores $\exists x$ y $\forall x$ como operando sobre el definible $[\varphi(x,y)] \subset M \times M$ a través de

$$\exists[\varphi(x,y)] := [\exists x \varphi(x,y)] = \{m \in M \mid \langle n,m \rangle \in [\varphi(x,y)] \text{ para algún } n \in M\}$$

$$\forall[\varphi(x,y)] := [\forall x \varphi(x,y)] = \{m \in M \mid \langle n,m \rangle \in [\varphi(x,y)] \text{ para todo } n \in M\}.$$

Usando el último miembro de las anteriores cadenas de igualdades podemos definir un par de funciones monótonas $\exists, \forall : \mathscr{P}(M \times M) \to \mathscr{P}(M)$. Si consideramos $p : M \times M \to M$ como la segunda proyección, tenemos que $p^* : \mathscr{P}(M) \to \mathscr{P}(M \times M)$ es una función monótona. Es fácil comprobar que se tiene la siguiente cadena de adjunciones (definición de los cuantificadores según Lawvere)

$$\exists \dashv p^* \dashv \forall.$$

En virtud de las anteriores adjunciones de Galois y de la proposición siguiente, se tiene que $\exists = \exists_p$. Esta es la razón que nos sugiere tomar esa notación.

Proposición 2.3.2 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.51)**.** *Si $\mathbb{A}$ es una categoría con pullbacks e imágenes, y $f : A \to B$ es un morfismo de esta categoría, entonces $\exists_f \dashv f^*$, e.d., para todo $A' \in Sub(A)$ y $B' \in Sub(B)$ se tiene que $\exists_f(A') \subset B'$ si, y solo si, $A' \subset f^*(B')$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que $\exists_f(A') \subset B'$. Como la imagen inversa es una función monótona, tenemos que $f^*(\exists_f(A')) \subset f^*(B')$. Por lo tanto, es suficiente ver que $A' \subset f^*(\exists_f(A'))$. Esto es claro, pues por la definición de $\exists_f$ y f^* tenemos que existe el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, tail] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& f^*(\exists_f(A')) \arrow[r, tail] \arrow[d] & A \arrow[d, "f"] \\
& \exists_f(A') \arrow[r, tail] & B.
\end{tikzcd}$$

($\Leftarrow$) Supongamos que $A' \subset f^*(B')$. Entonces, por la monotonicidad de la función $\exists_f$, tenemos que $\exists_f(A') \subset \exists_f(f^*(B'))$. Por lo tanto, es suficiente ver que $\exists_f(f^*(B')) \subset B'$. Lo cual es inmediato, pues B' permite a $f^*(B') \rightarrowtail A \xrightarrow{f} B$, como lo atestigua el siguiente pullback.

$$\begin{tikzcd}
f^*(B') \arrow[r, tail] \arrow[d] & A \arrow[d, "f"] \\
B' \arrow[r, tail] & B
\end{tikzcd}$$

$\square$

Es claro que la relación de adjunción, expuesta en la proposición anterior, es equivalente a cualquiera de las dos siguientes afirmaciones:

- Para cada $A' \in Sub(A)$, $\exists_f(A')$ es el mínimo subobjeto $B' \in Sub(B)$ tal que $A' \subset f^*(B')$.
- Para cada $B' \in Sub(B)$, $f^*(B')$ es el máximo subobjeto $A' \in Sub(A)$ tal que $\exists_f(A') \subset B'$.

Proposición 2.3.3 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.511)**.** *a. Si $\mathbb{A}$ es una categoría con imágenes y $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ es un funtor fiel que refleja isomorfismos y preserva imágenes, entonces cumple la siguiente propiedad: si $B' \rightarrowtail B$, que permite $f : A \to B$, es tal que $FB' \to FB$ es imagen de Ff, entonces $B' \rightarrowtail B$ es imagen de $f : A \to B$.*

a. Si $\mathbb{A}$ es una categoría con pullbacks e imágenes y $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ es un funtor fiel que refleja isomorfismos y preserva pullbacks e imágenes, entonces refleja imágenes.

Demostración. *a.* Inmediato.

b. Sea $B' \rightarrowtail B$, que permite $f : A \to B$, tal que $FB' \to FB$ es imagen de Ff. Construyamos $\exists_f A$ y $\exists_f A \cap B'$. Tenemos que existen únicos $\exists_f A \cap B' \rightarrowtail \exists_f A$ y $\exists_f A \cap B' \rightarrowtail B'$. Por hipótesis, $\exists_{Ff} FA = F(\exists_f A)$ y $F(\exists_f A \cap B') = \exists_{Ff} FA \cap FB'$. Por lo tanto $\exists_{Ff} FA = FB'$ (como subobjetos), y $F(\exists_f A \cap B' \rightarrowtail \exists_f A)$ y $F(\exists_f A \cap B' \rightarrowtail B)$ son isomorfismos. Así, $\exists_f A \cap B' \rightarrowtail \exists_f A$ y $\exists_f A \cap B' \rightarrowtail B'$ son isos y $B' \rightarrowtail B$ es una imagen de $f : A \to B$.

□

Un morfismo $f : A \to B$ se dice una **cubierta** si $\exists_f (A) = B$.

Proposición 2.3.4 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.512)**.** *a. La clase de cubiertas de una categoría con pullbacks es cerrada bajo composición y cancelación izquierda; i.e., si $A \to B \to C$ es una cubierta, entonces $B \to C$ también lo es.*

b. Toda cubierta mónica es un isomorfismo.

Demostración. a. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos cubiertas. Veamos que fg también lo es. Supongamos que existe el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C' \arrow[r, tail, "j"'] & C \end{tikzcd}$$

Construyamos el siguiente pullback.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\ & g^*(C') \arrow[r, tail, "k"] \arrow[d, "l"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C' \arrow[r, tail, "j"'] & C \end{tikzcd}$$

Como f es una cubierta, tenemos que k es un isomorfismo. De donde se sigue que g se factoriza a través de j (usando $k^{-1}l$). Así, j es un isomorfismo, pues g es una cubierta. Con esto hemos demostrado lo que queríamos. La segunda observación de esta parte *a.* es inmediata.

b. Esto es inmediato.

□

Una colección de morfismos $\{A_i \to B\}_{i\in I}$ se dice **cubriente** si ningún subobjeto propio de B los permite a todos. Una colección de morfismos $\{A_i \xrightarrow{l_i} B\}_{i\in I}$ se dice **epimórfica** si se cancelan colectivamente; e.d., si para todo par de morfismos $f,g : B \to C$ tales que, para todo $i \in I$, $l_i f = l_i g$, se tiene que $f = g$.

Proposición 2.3.5 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.514)**.** *En una categoría con igualadores, toda familia cubriente es epimórfica.*

Demostración. Supongamos que $\{A_i \xrightarrow{l_i} B\}_{i\in I}$ es una familia cubriente y que $f,g : B \to C$ son morfismos tales que, para todo $i \in I$, $l_i f = l_i g$. Sea $E \rightarrowtail B \rightrightarrows C$ un igualador para f y g. Por las hipótesis hechas y la definición de igualador, tenemos que $E \rightarrowtail B$ permite a todos los morfismos l_i; por lo tanto, es un isomorfismo. De aquí se sigue que $f = g$. □

Ejemplo 2.3.3.
- *En un conjunto parcialmente ordenado, todo los morfismos son epimorfismos; sin embargo, las únicas cubiertas son las identidades.*
- *En una categoría de álgebras ecuacionalmente definidas, las cubiertas coinciden con los morfismos sobreyectivos. Se puede demostrar que en la categoría de grupos, epimorfismo implica homomorfismo sobreyectivo y, por lo tanto, cubierta.*
- *En la categoría de anillos, la inclusión $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ es un epimorfismo, pero no una cubierta; de hecho, es un bimorfismo (monomorfismo y epimorfismo) que no es isomorfismo.*

Una categoría se dice **preregular** si es cartesiana y los pullbacks transfieren cubiertas. Una categoría se dice **regular** si es preregular y tiene imágenes. Una **representación de categorías preregulares** es un funtor que preserva productos finitos, igualadores y cubiertas.

Proposición 2.3.6 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.52)**.** *a. Una categoría con pullbacks tiene imágenes si, y solo si, todo morfismo tiene factorización cubierta-mono.*

b. Toda representación de categorías preregulares preserva imágenes.

Demostración. *a.* ($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathbb{A}$ tiene imágenes. Sea $f : A \to B$. Entonces f se puede factorizar como $A \to \exists_f(A) \rightarrowtail B$. De la definición de imagen se sigue inmediatamente que $A \to \exists_f(A)$ es una cubierta.

($\Leftarrow$) Sea $f = A \to B' \rightarrowtail B$ una factorización cubierta-mono del morfismo f. Queremos ver que $B' \rightarrowtail B$ es una imagen de f. Supongamos que $B'' \rightarrowtail B$ también permite a f. Entonces existe el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& B' \cap B'' \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & B'' \arrow[d, tail] \\
& B' \arrow[r, tail] & B.
\end{tikzcd}$$

Como $A \to B'$ es cubierta, entonces $B' \cap B'' \rightarrowtail B'$ es un isomorfismo; invirtiendo este último y componiendo con $B' \cap B'' \to B''$, obtenemos que $B' \subset B''$ y que, por lo tanto, $B' \rightarrowtail B$ es una imagen para f.

b. Esto es inmediato.

□

En una categoría preregular, un objeto A se dice **bien soportado** si $A \to 1$ es una cubierta; y se dice **bien punteado** si la colección de todos sus puntos genéricos es cubriente, i.e., si $\{1 \xrightarrow{f} A\}$ es cubriente. El objeto se dice **proyectivo** si su funtor representable covariante preserva cubiertas.
Que un objeto esté bien punteado, quiere decir que las funciones que parten de este están determinadas por la acción sobre sus puntos genéricos.
Una categoría preregular se dice **capital** si todo objeto bien soportado está bien punteado.

Proposición 2.3.7 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.524-26)**.** *a. En una categoría preregular, si toda cubierta con codominio P tiene una inversa a la izquierda, entonces P es proyectivo.*

b. En una categoría capital, el objeto final es proyectivo y, por lo tanto, su funtor representable $(1,-)$*, que escribiremos como* Γ *y llamaremos* ***funtor de secciones globales****, es una representación de categorías preregulares.*

Demostración. *a.* Sean $A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{g} P$, con f cubierta. Tome el pullback de los anteriores morfismos.

$$\begin{tikzcd}
A \times_B P \arrow[r, "r"] \arrow[d, "l"'] & P \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Por preregularidad, r es una cubierta y, por hipótesis, existe $h : P \to A \times_B P$ tal que $hr = 1$. De $rg = lf$, obtenemos $g = 1g = hrg = hlf$. Por lo tanto, P es proyectivo.

b. Para este punto usaremos el ítem anterior. Sea $A \to 1$ una cubierta. Vamos a ver que A tiene un punto. Si $A \to 1$ es mónico, hemos terminado; por lo tanto, supongamos que no lo es. Tomando el par núcleo de este morfismo, obtenemos el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, tail] \arrow[drr, bend left, "1"] \arrow[ddr, bend right, "1"'] & & \\
& A \times A \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\
& A \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Debido a que estamos en una categoría preregular, las dos proyecciones del producto son cubiertas. Puesto que $A \to 1$ no es mónico, entonces $A \rightarrowtail A \times A$ no es un isomorfismo, por lo tanto $A \times A$ tiene un subobjeto propio. $A \times A$ está bien soportado, pues $A \times A \to 1$ es una cubierta por ser composición de cubiertas, lo que implica que $A \times A$ está bien punteado pues estamos en una categoría capital. Por lo tanto, existe $1 \to A \times A$ que no permite a $A \rightarrowtail A \times A$. Componiendo el punto $A \times A$ con alguna de las proyecciones obtenemos un punto de A.

□

Si consideramos la categoría de haces sobre un espacio topológico X, tenemos que X con la identidad como proyección es el objeto final de esta categoría y que, para cualquier haz E sobre X, el conjunto $Hom_{Sh(X)}(X,E)$ consta de todas las secciones globales del haz E. De aquí proviene la terminología usada en la anterior proposición.

2.3.2. El lema Coma

Dada una categoría $\mathbb{A}$ con productos finitos, y un objeto B de esta categoría, considere el funtor $B \times - : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$; este lo podemos factotorizar como $\mathbb{A} \xrightarrow{\Delta} \mathbb{A}/B \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{A}$, donde Δ es el funtor diagonal. El Lema Coma afirma que si $\mathbb{A}$ es una categoría preregular, entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:

i. También lo es $\mathbb{A}/B$.

ii. Δ es una representación de categorías preregulares.

iii. Δ es fiel (y refleja isos) si y solamente si B está bien soportado.

La demostración de este lema se sigue de la siguiente proposición:

Proposición 2.3.8 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.531-34)**.** *Sea $\mathbb{A}$ preregular.*

a. $\Sigma : \mathbb{A}/B \to \mathbb{A}$ *preserva y refleja cubiertas y pullbacks.*

b. Si $\mathbb{A}$ tiene imagénes, entonces $\mathbb{A}/B$ tiene imágenes.

c. $B \times - : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ *preserva cubiertas.*

d. *En una categoría preregular, si B está bien soportado, entonces $B \times -$ es fiel y refleja isomorfismos.*

e. *Si B no está bien soportado, entonces Δ no refleja isomorfismos.*

Demostración. *a.* Por la parte *c.* de la proposición 2.2.2., tenemos que Σ es fiel, refleja isomorfismos, y preserva y refleja pullbacks e igualadores; por la proposición 2.3.3., solo nos resta ver que Σ preserva cubiertas. Supongamos que el morfismo f de $\mathbb{A}/B$, mostrado en el siguiente diagrama, es una cubierta.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & A_2 \arrow[dl] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Vamos a ver que f, visto como morfismo de $\mathbb{A}$, también es una cubierta. Sea $A_1 \to A_2' \rightarrowtail A_2$ una factorización de f. Entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& A_1 \arrow[dl] \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[ddr] & \\
A_2' \arrow[r, tail] \arrow[drr] & A_2 \arrow[dr] & \\
& & B.
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, f es una cubierta en $\mathbb{A}$.

b. Sea f un morfismo de $\mathbb{A}/B$. Su factorización cubierta-mono en $\mathbb{A}$, usando imágenes en $\mathbb{A}$, se puede ver como una factorización cubierta-mono en $\mathbb{A}/B$.

c. El siguiente diagrama es un pullback en cualquier categoría con productos binarios

$$\begin{tikzcd}
B \times A_1 \arrow[r] \arrow[d] & B \times A_2 \arrow[d] \\
A_1 \arrow[r] & A_2.
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, si $\mathbb{A}$ es preregular, tenemos que $B \times A_1 \to B \times A_2$ es una cubierta si $A_1 \to A_2$ lo es.

d. Supongamos que B está bien soportado, e.d., que $! : B \to 1$ es una cubierta. Observemos que, para cualquier objeto A, la proyección $B \times A \to A$ es una cubierta. Esto se sigue del siguiente pullback y de la estabilidad de las cubierta:

$$\begin{array}{ccc} B \times A & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

Sea $A' \rightarrowtail A$ tal que $B \times A' \rightarrowtail B \times A$ es un isomorfismo. Como $(B \times A' \to A' \rightarrowtail A) = (B \times A' \to B \times A \to A)$ y los morfismos a la derecha de esta igualdad son cubiertas, entonces $A' \rightarrowtail A$ es una cubierta y por lo tanto un isomorfismo. Es fácil ver que $B \times -$ preserva pullbacks y acabamos de ver que preserva subobjetos propios; esto implica que $B \times -$ es fiel y refleja isomorfismos.

e. Supongamos que B no está bien soportado. Entonces existe $B \to A \rightarrowtail 1$, donde $A \rightarrowtail 1$ no es un isomorfismo. Queremos ver que $B \times A \rightarrowtail B \times 1$ es un isomorfismo. Pero esto es claro, pues $B \times A \rightarrowtail B \times 1 = Ker(1_{B\times 1}, 1_{B\times 1})$. Como Σ refleja isomorfismos, y $B \times A \rightarrowtail B \times 1 = \Sigma(\Delta(A \rightarrowtail 1))$, entonces $\Delta(A \rightarrowtail 1)$ es un isomorfismo. De esto se desprende que Δ no refleja isomorfismos.

$\square$

Vemos ahora que la prueba del Lema Coma ya está terminada: i. y ii. se siguen de la parte *c.* de la proposición 2.2.2. y de las partes *a.,b.* y *c.* de la anterior proposición; iii. se sigue de las partes *d.* y *e.* de la anterior proposición.

2.3.3. El lema de Capitalización

El Lema de Capitalización afirma que toda categoría pequeña (pre)regular puede ser fielmente representada (mediante una representación fiel y que preserva isos) en una categoría pequeña (pre)regular capital.
Para esta prueba introduciremos un marco general. Sea $\mathscr{C}$ una categoría cuyos objetos son categorías preregulares pequeñas (no necesariamente todas) y cuyos morfismos son representaciones fieles (no necesariamente todas) de categorías preregulares que reflejan isos. Observe que una categoría tal debe ser localmente pequeña.
Diremos que $\mathscr{C}$ satisface:

- la **condición de equivalencia** si y solo si para cada $\mathbb{A} \in Ob(\mathscr{C})$ y cada equivalencia $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ se tiene que $\mathbb{B} \in Ob(\mathscr{C})$ y $F \in Mor(\mathscr{C})$.
- la **condición coma** si y solo si para cada $\mathbb{A} \in Ob(\mathscr{C})$ y $B \in Ob(\mathbb{A})$ bien soportado se tiene que $\mathbb{A}/B \in Ob(\mathscr{C})$ y $\Delta : \mathbb{A} \to \mathbb{A}/B \in \mathscr{C}$.

- la **condición de unión** si y solo si cumple lo siguiente:

  Dada una categoría $\mathbb{A}$ y una familia $\mathscr{F}$ de subcategorías de $\mathbb{A}$ tales que

  1. $\mathscr{F}$ es una familia dirigida hacia arriba ordenada por la inclusión,
  2. $\bigcup \mathscr{F} = \mathbb{A}$,
  3. $\mathbb{A}' \in Ob(\mathscr{C})$ para todo $\mathbb{A}' \in \mathscr{F}$,
  4. $\mathbb{A}' \hookrightarrow \mathbb{A}'' \in Mor(\mathscr{C})$ para todos los $\mathbb{A}', \mathbb{A}'' \in \mathscr{F}$ que cumplen la contenencia,

  se tiene que $\mathbb{A} \in Ob(\mathscr{C})$ y $\mathbb{A}' \hookrightarrow \mathbb{A} \in Mor(\mathscr{C})$ para todo $\mathbb{A}' \in \mathscr{F}$. En tal caso diremos que $\mathbb{A}$ es la **unión dirigida** de la familia $\mathbb{F}$.

Ejemplo 2.3.4. *Si tomamos a $\mathscr{C}$ como la categoría de todas las categorías pequeñas preregulares o regulares con las representaciones regulares fieles que reflejan isos, es fácil ver que $\mathscr{C}$ satisface las condiciones de equivalencia y unión; el lema Coma asegura la condición coma.*

Lema 2.3.1 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.54, Lema de Capitalización)**.** *Si $\mathscr{C}$ es una categoría de categorías pequeñas preregulares y representaciones fieles (que preservan isos) que satisface las condiciones de equivalencia, coma y unión, entonces, para cada $A \in Ob(\mathscr{C})$, existe una categoría capital $\underline{\mathbb{A}} \in Ob(\mathscr{C})$ y una representación fiel (que preserva isos) de categorías preregulares $\mathbb{A} \to \underline{\mathbb{A}} \in Mor(\mathscr{C})$.*

Demostración. Dividimos en tres pasos esta demostración.
Paso 1. Dado $B \in Ob(\mathbb{A})$ bien soportado, podemos considerar a $\mathbb{A}$ como una subcategoría de $\mathbb{A}/B$ de la siguiente forma: consideremos la función $T : Seq(Ob(\mathbb{A})) \to (\mathbb{A})$, $\langle A_1, \ldots, A_n \rangle \mapsto A_1 \times \ldots \times A_n$. Definamos una categoría $\mathbb{A}'$ fundada en $\mathbb{A}$ a través de la función T, con funtor olvido $U : \mathbb{A}' \to \mathbb{A}$. El funtor inclusión $V : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ claramente satisface $UV \cong 1$ y $VU \cong 1$, por lo tanto, U y V son equivalencias. Observe que los productos en $\mathbb{A}'$ se hallan concatenando y que en esa categoría se cumple una ley de cancelación: si $B \times A = B \times A'$, entonces $A = A'$. Podemos identificar al funtor $\Delta : \mathbb{A} \to \mathbb{A}/B$ (ver página 9) con el funtor $\mathbb{A} \xrightarrow{V} \mathbb{A}' \xrightarrow{\Delta} \mathbb{A}'/B$, donde $B \times - : \mathbb{A}' \xrightarrow{\Delta} \mathbb{A}'/B \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{A}'$. Como B está bien soportado, por el lema Coma tenemos que $\Delta : \mathbb{A}' \to \mathbb{A}'/B$ es una representación fiel de categorías (pre)regulares que además es inyectiva en objetos y, por lo tanto, separa morfismos; finalmente podemos identificar $\mathbb{A}$ con la imagen de $V\Delta$.

Paso 2. Decimos que la categoría $\mathbb{A}'$ es una **capitalización relativa** de la categoría $\mathbb{A}$ si cumple lo siguiente:

- $\mathbb{A} \subset \mathbb{A}'$;
- para todo $B' \rightarrowtail B \in Mor(\mathbb{A})$ propio, con B bien soportado, existe $x : 1 \to B \in Mor(\mathbb{A}')$ tal que $B' \rightarrowtail B$ no permite a x.

Dada una extensión $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$ para la cual el funtor inclusión refleja isos, definimos $Cap(\mathbb{A},\mathbb{B})$ como el conjunto de todos los objetos B de $\mathbb{A}$ para los que se cumple: para todo $B' \rightarrowtail B \in Mor(\mathbb{A})$ propio existe $x : 1 \to B \in Mor(\mathbb{A}')$ tal que $B' \rightarrowtail B$ no permite a x. Por lo tanto $\mathbb{B}$ es una capitalización relativa de $\mathbb{A}$ si y solo si $Cap(\mathbb{A},\mathbb{B})$ contiene a todos los objetos bien soportados de $\mathbb{A}$. Observe que si $\mathbb{B},\mathbb{B}' \in Ob(\mathscr{C})$ son extensiones de $\mathbb{A}$ cuyos funtores inclusión reflejan isos y $\mathbb{B} \hookrightarrow \mathbb{B}' \in Mor(\mathscr{C})$, entonces $Cap(\mathbb{A},\mathbb{B}) \subset Cap(\mathbb{A},\mathbb{B}')$.
Construimos la capitalización relativa de $\mathbb{A}$ de la siguiente forma:

i. Colocamos un buen orden sobre $Ob(\mathbb{A})$.

ii. Definimos $\mathbb{A}_0 = \mathbb{A}$.

Supongamos que se ha definido $\mathbb{A}_\alpha \in Ob(\mathscr{C})$ y $\mathbb{A} \hookrightarrow \mathbb{A}_\alpha \in Mor(\mathscr{C})$. Si $\mathbb{A}_\alpha$ es una capitalización relativa de $\mathbb{A}$, hemos terminado. De lo contrario, sea B el primer objeto bien soportado de $\mathbb{A}$ que no está en $Cap(\mathbb{A},\mathbb{A}_\alpha)$, observe que B también está bien soportado en $\mathbb{A}_\alpha$. Tomemos $\mathbb{A}_{\alpha+1} := \mathbb{A}'_\alpha/B$, entonces $\mathbb{A}_{\alpha+1} \in Ob(\mathscr{C})$ y $(\mathbb{A}_\alpha \hookrightarrow \mathbb{A}_{\alpha+1}) = (\mathbb{A}_\alpha \xrightarrow{V\Delta} \mathbb{A}'_\alpha/B) \in Mor(\mathscr{C})$, debido al *Paso 1.* y las condiciones de equivalencia y coma.

Si β es un ordinal límite, hacemos $\mathbb{A}_\beta := \bigcup_{\alpha<\beta} \mathbb{A}_\alpha$. La condición de unión implica que $\mathbb{A}_\beta \in Ob((C))$ y $\mathbb{A}_\alpha \hookrightarrow \mathbb{A}_\beta \in Mor(\mathscr{C})$ para cada $\alpha < \beta$.

Como $Ob(\mathbb{A})$ es un conjunto, el anterior proceso terminará en a lo sumo $|Ob(\mathbb{A})|$ pasos. Para comprobar que la extensión de $\mathbb{A}$ obtenida al final de este proceso es una capitalización relativa, es suficiente demostrar que, en el paso sucesor, $B \in Cap(\mathbb{A},\mathbb{A}_{\alpha+1})$. Identificaremos $\mathbb{A}_\alpha$ y $\mathbb{A}'_\alpha$ a través de la equivalencia V, como fue descrito en el *Paso 1.* Contruyamos un punto genérico de $\Delta(B)$ en $\mathbb{A}_{\alpha+1}$ mediante

$$\begin{tikzcd} \Delta(1) = B \times 1 \arrow[rr, "\langle \pi_B, \pi_B \rangle"] \arrow[dr, "\pi_B"'] & & B \times B = \Delta(B) \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Sea $j : B' \rightarrowtail B$ propio en $\mathbb{A}_\alpha$, y supongamos que $\Delta(j)$ permite al anterior punto genérico en $\mathbb{A}_{\alpha+1}$, entonces existe h tal que el siguiente diagrama conmuta en $\mathbb{A}_\alpha$

$$\begin{tikzcd} B \times 1 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\langle \pi_B, \pi_B \rangle"] \arrow[ddr, "\pi_B"'] & & B \times B' \arrow[dl, "1 \times j"'] \arrow[ddl, "\pi_B"] \\ & B \times B \arrow[d, "\pi_1"] & \\ & B & \end{tikzcd}$$

Consideremos el morfismo $\langle 1,!\rangle : B \to B\times 1$, entonces

$$\langle 1,!\rangle h\pi_{B'}j = \langle 1,!\rangle h(1\times j)\pi_2 = \langle 1,!\rangle\langle \pi_B,\pi_B\rangle\pi_2 = \langle 1,!\rangle\pi_B = 1.$$

Por lo tanto $B\subset B'$ como subobjetos en $\mathbb{A}_\alpha$, esto implica que j es un isomorfismo. Hemos llegado a una contradicción, pues por hipótesis j no es un iso, lo que nos permite concluir la demostración de este paso.

Paso 3. Tomemos una cadena ascendente $\mathbb{A}=\mathbb{A}_0\subset\mathbb{A}_1\subset\mathbb{A}_2\subset\ldots\in\mathscr{C}$, tal que $\mathbb{A}_{i+1}$ es una capitalización relativa de $\mathbb{A}_i$ para cada $i<\omega$. Tomando $\underline{\mathbb{A}}=\bigcup_{i<\omega}\mathbb{A}_i\in\mathscr{C}$, obtenemos la capitalización buscada $\mathbb{A}\subset\underline{\mathbb{A}}\in\mathscr{C}$.

□

2.3.4. El teorema de Henkin-Lubkin

En esta sección concluimos el análisis correspondiente a las categorías preregulares y regulares con un teorema de representación y su correspondiente metateorema.

TEOREMA 2.3.1 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.55, Teorema de representación de categorías preregulares, Henkin-Lubkin)**.** *Toda categoría preregular pequeña puede ser fielmente representada en una potencia de la categoría de conjuntos.*

Demostración. Sea $\mathbb{A}$ una categoría preregular pequeña. Para cada objeto B de $\mathbb{A}$ definamos el funtor $F_B=\mathbb{A}\xrightarrow{\Delta}\mathbb{A}/B\to\underline{\mathbb{A}/B}\xrightarrow{\Gamma}\mathscr{S}$, donde $\mathbb{A}/B\to\underline{\mathbb{A}/B}$ es una capitalización. Como $\underline{\mathbb{A}/B}$ es capital, por la proposición 2.3.7. *b.* Γ es una representación de categorías preregulares. También sabemos que Δ es una representación de categorías preregulares y que es fiel sii B esta bien soportado. Para ver que $\langle F_B\rangle:\mathbb{A}\to\mathscr{S}^{Ob(\mathbb{A})}$ es fiel, gracias a la proposición 2.2.1. *h.* es suficiente ver que preserva subobjetos propios.
Sea $j:B'\rightarrowtail B$ propio. Por un argumento de reducción al absurdo similar al usado en el final del *Paso 2.* del lema de capitalización, se puede demostrar que $\Delta(j)$ es propio y que $\Delta(B)$ está bien soportado en $\mathbb{A}/B$. Tenemos que $\Delta(j)$ y $\Delta(B)$ siguen siendo propio y bien soportado, respectivamente, en $\underline{\mathbb{A}/B}$. Como $\underline{\mathbb{A}/B}$ es capital, $\Delta(B)$ está bien punteado, por lo tanto existe $x:\Delta(1)\to\Delta(B)$ en $\underline{\mathbb{A}/B}$, que no permite a $\Delta(j)$. Lo anterior implica que $\Gamma(j)=(1,B')\xrightarrow{j_*}(1,B)$ es un subobjeto propio, pues si fuera iso, entonces existiría $h\in(1,B')$ tal que $j_*(h)=hj=x$, lo cual no es posible.
En conclusión, cada F_B es una representación de categorías preregulares que preserva subobjetos propios. Lo que nos permite afirmar que $\langle F_B\rangle$ preserva subobjetos propios y por lo tanto es una representación de categorías preregulares, fiel y que refleja isos.
Hacemos la observación de que si $\mathbb{A}$ es regular, entonces $\langle F_B\rangle_{B\subset 1}$ es una representación de categorías regulares, fiel, que refleja isos.

□

METATEOREMA 2.3.1 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.551)**.** *Cualquier sentencia de Horn, en los predicados de la teoría de categorías regulares, cierta para la categoría de conjuntos, es cierta para todas las categorías regulares.*

2.4. Representación de prelogoi

El último tipo de categorías intermedias que estudiaremos en este trabajo serán los prelogoi, que son categorías en las que los retículos de subobjetos son distributivos y los funtores de imagen inversa son homomorfismos de retículos. Estas categorías corresponden al fragmento de la lógica intuicionista que se denomina lógica coherente, razón por la cual también se suelen llamar categorías coherentes.

2.4.1. Definiciones básicas

Un **prelogos** es una categoría regular en la cual todos los retículos de subobjetos son distributivos acotados y para cada morfismo $f : A \to B$ el funtor imagen inversa $f^* : Sub(B) \to Sub(A)$ es un homomorfismo de retículos acotados. Una **representación de prelogoi** es un funtor entre dos prelogos que es una representación de categorías regulares y preserva uniones finitas (supremos finitos de subobjetos). Observe que las uniones inducen uniones en los retículos de relaciones.
A la operación que toma el supremo de dos subobjetos la llamaremos unión.

Ejemplo 2.4.1.

- *La categoría de conjuntos es un prelogos.*
- *Las categorías de haces sobre un espacio topológico dado son prelogoi.*
- *Un conjunto parcialmente ordenado es un prelogos si y solo si es un retículo distributivo acotado.*

Proposición 2.4.1 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.62)**.** *Si A_1 y A_2 son subobjetos de un objeto A en un prelogos, entonces el siguiente pullback es también un pushout*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \cap A_2 \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & A_2 \arrow[d, tail] \\
A_1 \arrow[r, tail] & A_1 \cup A_2
\end{tikzcd}$$

Demostración. En esta demostración nos referiremos a las relaciones en una categoría regular, expuestas en la sección 4.1. de este trabajo. Sean

$$\begin{tikzcd} A_1 \cap A_2 \arrow[r, tail, "\overline{x}"] \arrow[d, tail, "\overline{y}"'] & A_2 \arrow[d, tail, "y"] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\ A_1 \arrow[r, tail, "x"] \arrow[drr, bend right, "f"] & A_1 \cup A_2 & \\ & & B. \end{tikzcd}$$

Defina $h = x^o f \cup y^o g$. Es fácil comprobar que h es una aplicación, $xh = f$ y $yh = g$. Por ejemplo,

$$xh = x(x^o f \cup y^o g) = xx^o f \cup xy^o g = f \cup \overline{y}^o \overline{x} g = f \cup \overline{y}^o \overline{y} f = (1 \cup \overline{y}^o \overline{y}) f = f.$$

La unicidad de h se sigue del hecho de que x e y forman una familia cubriente. $\square$

De lo anterior se sigue inmediatamente que si A_1 y A_2 son subobjetos de un objeto A en un prelogos, tales que $A_1 \cap A_2 = 0$ y $A_1 \cup A_2 = A$, entonces A es un coproducto de A_1 y A_2. Un coproducto con las anteriores propiedades se dice disyunto. Más explícitamente, dado $\iota_i : A_i \to A_1 + A_2$ coproducto, este se dice **disyunto** si las inyecciones ι_i son monomorfismos y $A_1 \cap A_2 = 0$; en este caso, escribiremos el coproducto como $A_1 \sqcup A_2$. Diremos que un prelogos es **positivo** si tiene coproductos disyuntos.

Proposición 2.4.2 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.624-1.631)**.** *a. En un prelogos positivo todo morfismo $f : A \to B_1 \sqcup B_2$ se puede expresar como $f_1 \sqcup f_2 : A_1 \sqcup A_2 \to B_1 \sqcup B_2$, donde $A_i = f^*(B_i)$.*

b. Si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son prelogoi positivos y $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ es una representación de categorías regulares, entonces F es una representación de prelogoi sii preserva coproductos disyuntos y objeto final .

c. Cualquier prelogos positivo pequeño se puede representar fielmente en un prelogos positivo capital.

d. En un prelogos, todo subobjeto complementado de un objeto proyectivo es proyectivo.

e. En un prelogos capital, los subobjetos complementados de 1 *son proyectivos.*

Demostración. *a.* Tome los pullbacks

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, tail] \arrow[d, "f_i"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B_i \arrow[r, tail] & B_1 \sqcup B_2 \end{tikzcd}$$

Como $f^* : Sub(B_1 \sqcup B_2) \to Sub(A)$ es un homomorfismo de retículos acotados, vemos que $A_1 \cap A_2 = 0$ y $A_1 \cup A_2 = A$, entonces A es un coproducto de A_1 y A_2. El resto se sigue de usar los morfismos f_i dados en el pullback.

b. Es claro que toda representación de prelogoi preserva coproductos disyuntos; veamos el recíproco. Sean ahora A_1 y A_2 subobjetos de A. Estos inducen un morfismo $h : A_1 \sqcup A_2 \to A$. Es fácil ver que $\exists_h(A_1 \sqcup A_2)$ es la unión de A_1 y A_2. De aquí se sigue que F es una representación de prelogoi.

c. En el lema de Capitalización, tome $\mathscr{C}$ como la categoría de todos los prelogoi pequeños positivos con las representaciones de prelogoi. La parte *a.* afirma que esta categoría satisface la condición coma. Es fácil ver que también satisface las condiciones de equivalencia y unión, por lo tanto el lema de Capitalización aplica.

d. Sean A_1 y A_2 subobjetos de A objeto proyectivo, tales que $A_1 \cap A_2 = 0$ y $A_1 \sqcup A_2 = A$, y $f : B \to A_1$ una cubierta, entonces se puede extender a una cubierta $f \sqcup 1 : B \sqcup A_2 \to A_1 \sqcup A_2 = A$. Por lo tanto existe $h : A_1 \sqcup A_2 \to B \sqcup A_2$ tal que $h(f \sqcup 1) = 1 \sqcup 1$. Debido a que el coproducto es disyunto, este debe llevar a A_1 en B a través de un morfismo $g : A_1 \to B$ tal que $g \sqcup 1 = h$. Así $h(f \sqcup 1) = (g \sqcup 1)(f \sqcup 1) = gf \sqcup 1 = 1 \sqcup 1$. De donde $gf = 1$ y A_1 es proyectivo.

e. Inmediato a partir de *d.* y la proposición 2.3.7. *b.*

□

2.4.2. Teorema de representación de prelogoi positivos

Obtendremos nuestro último teorema de representación de categorías intermedias como consecuencia de la consideración de filtros sobre el álgebra booleana de subobjetos complementados del objeto final de un prelogos positivo. En la siguiente sección eliminaremos la hipótesis de positividad.

Sea $\mathbb{C}$ un prelogos pequeño positivo capital. Dado un filtro $\mathscr{F} \subset ComplSub(1)$, donde $ComplSub(1)$ es el álgebra booleana de subobjetos complementados del objeto final, definamos el funtor $\Gamma_{\mathscr{F}} = Colim_{A \in \mathscr{F}} Hom_{\mathbb{C}}(A, -)$. Recuerde que en un álgebra booleana los filtros primos y los ultrafiltros coinciden. Tenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.4.3 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.634). *El funtor $\Gamma_{\mathscr{F}}$ es una representación de prelogoi si y solo si $\mathscr{F}$ es un ultrafiltro sobre $ComplSub(1)$.*

Demostración. Por la parte *e.* de la anterior proposición, sabemos que si $A \in ComplSub(1)$, entonces el funtor representable $Hom_{\mathbb{C}}(A, -)$ es una representación de categorías regulares. Es fácil ver que el colímite de un sistema de representaciones regulares es una representación regular, por lo tanto $\Gamma_{\mathscr{F}}$ es una representación regular. Por la parte *b.* de la anterior proposición, es suficiente demostrar que $\Gamma_{\mathscr{F}}$ preserva coproductos disyuntos si y solo si $\mathscr{F}$ es un ultrafiltro.

Observe que $\Gamma_{\mathscr{F}}(0) = \emptyset$ sii $0 \notin \mathscr{F}$. Supongamos ahora que $\mathscr{F}$ es un ultrafiltro, por lo tanto es un filtro primo. Queremos ver que $\Gamma_{\mathscr{F}}(A_1 \sqcup A_2) = \Gamma_{\mathscr{F}}(A_1) \sqcup \Gamma_{\mathscr{F}}(A_2)$. Observe primero que como Γ_F preserva pullbacks y $\Gamma_{\mathscr{F}}(0) = \emptyset$, entonces $\Gamma_{\mathscr{F}}(A_1) \cap \Gamma_{\mathscr{F}}(A_2) = \emptyset$. Sea $x \in \Gamma_{\mathscr{F}}(A_1 \sqcup A_2)$ representado por un morfismo $f : B \to A_1 \sqcup A_2$, con $B \in \mathscr{F}$. Por la proposición 2.4.2. *a.*, f puede ser representado como $f_1 \sqcup f_2 : f^*(A_1) \sqcup f^*(A_2) \to A_1 \sqcup A_2$. Como $\mathscr{F}$ es primo entonces $f^*(A_i) \in \mathscr{F}$ para

algún i. Por lo que x está en $\Gamma_{\mathscr{F}}(A_i)$, para algún i. Con esto hemos demostrado que $\Gamma_{\mathscr{F}}(A_1 \sqcup A_2) \subset \Gamma_{\mathscr{F}}(A_1) \sqcup \Gamma_{\mathscr{F}}(A_2)$. La otra contenencia es inmediata.
Para ver el recíproco, observe que si A es subobjeto conplementado de 1 y A' es su complemento, entonces $\emptyset = \Gamma_{\mathscr{F}}(0) = \Gamma_{\mathscr{F}}(A \cap A') = \Gamma_{\mathscr{F}}(A) \cap \Gamma_{\mathscr{F}}(A')$ y $1 = \Gamma_{\mathscr{F}}(1) = \Gamma_{\mathscr{F}}(A \sqcup A') = \Gamma_{\mathscr{F}}(A) \sqcup \Gamma_{\mathscr{F}}(A')$. Por lo tanto, $\Gamma_{\mathscr{F}}(A) = 1$ y $\Gamma_{\mathscr{F}}(A') = \emptyset$, o $\Gamma_{\mathscr{F}}(A) = \emptyset$ y $\Gamma_{\mathscr{F}}(A') = 1$. Como $\Gamma_{\mathscr{F}}(U) = 1$ sii $U \in \mathscr{F}$, se obtiene que $\mathscr{F}$ es un ultrafiltro sobre $ComplSub(1)$.

□

TEOREMA 2.4.1 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.635, Teorema de representación de prelogoi positivos)**.** *Todo prelogos positivo pequeño se puede representar fielmente en una potencia de la categoría de conjuntos.*

Demostración. Sea $\mathbb{C}$ un prelogos positivo pequeño. Gracias a la proposición 2.4.2. *c.* podemos suponer que también es capital. Consideremos los funtores $\Gamma_{\mathscr{F}} : \mathbb{C} \to \mathscr{S}$ para cada filtro primo sobre $ComplSub(1)$. Vamos a ver que estos funtores son las coordenadas de una representación de prelogoi que es fiel y refleja isos. Por las proposiciónes 2.2.1. *h.* y 2.4.3., es suficiente ver que ese funtor preserva subobjetos propios.
Sea $A' \rightarrowtail A$ un subobjeto propio. Es fácil ver que el objeto $A \sqcup 1$ está bien soportado. Sea $x : 1 \to A \sqcup 1$ un punto que no permite a $A' \sqcup 1 \rightarrowtail A \sqcup 1$. Formemos el siguiente pullback

$$\begin{array}{ccc} B & \rightarrowtail & 1 \\ {\scriptstyle y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle x} \\ A & \rightarrowtail & A \sqcup 1 \end{array}$$

Es claro que $B \in ComplSub(1)$ y que y no permite a $A' \rightarrowtail A$. Formemos otro pullback

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{y} & A \end{array}$$

Como y no permite a $A' \rightarrowtail A$, vemos que $C \subsetneq B$. Sea $\mathscr{I}$ el ideal formado por los subobjetos complementados de 1 contenidos en C. Como $B \notin \mathscr{I}$, el teorema del ideal primo nos dice que existe un filtro primo $\mathscr{F}$ sobre $ComplSub(1)$ tal que $B \in \mathscr{F}$ y $\mathscr{F} \cap \mathscr{I} = \emptyset$. Así, y representa un elemento de $\Gamma_{\mathscr{F}}(A)$ que no está en $\Gamma_{\mathscr{F}}(A')$. Con lo que concluimos la demostración del teorema. □

METATEOREMA 2.4.1 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.636)**.** *Cualquier sentencia de Horn en los predicados de la teoría de los prelogoi cierta para la categoría de conjuntos es cierta para todos los prelogoi positivos.*

2.4.3. Teorema de representación de prelogoi

Para extender los resultados anteriores al caso de prelogoi que no necesariamente sean positivos, demostraremos que todo prelogos se puede representar fielmente en un prelogos positivo.

Proposición 2.4.4 ([Freyd & Scedrov 1990], 2.217)**.** *Todo prelogos pequeño se puede representar fielmente en un prelogos pequeño positivo.*

Demostración. Sea $\mathbb{C}$ un prelogos pequeño. Definamos la positivización de $\mathbb{C}$ como la categoría $Pos(\mathbb{C})$ que tiene por objetos a las tuplas finitas de objetos de $\mathbb{C}$ de longitud uno en adelante. Aquí una tupla se considerará el coproducto de los elementos de la tupla, por lo que solo necesitamos definir los morfismos que tienen como dominio una tupla de longitud uno: un morfismo $f : \langle A \rangle \to \langle B_1, \ldots, B_n \rangle$ consta de una descomposición de A en subobjetos $\{A_i\}_{i=1}^n$ disyuntos dos a dos y con unión igual a A, y una familia de morfismos $\{f_i : A_i \to B_i\}_{i=1}^n$. la imagen de este morfismo será $\langle \bigsqcup_{i=1}^n \exists_{f_i}(A_i) \rangle$. La composición se define de la forma obvia. El coproducto de dos tuplas $\langle A_1, \ldots, A_m \rangle$ y $\langle B_1, \ldots, B_m \rangle$ es su concatenación y su producto es la tupla de longitud mn con entradas $A_i \times B_j$. La inclusión es el funtor que a cada objeto lo envía en una tupla de longitud uno. Es fácil, pero largo, comprobar que $Pos(\mathbb{C})$ es un prelogos positivo y que la inclusión de $\mathbb{C}$ en él es una representación de prelogoi fiel, que refleja isos. $\square$

Tenemos como corolarios de la sección anterior y de la última proposición, los siguientes resultados:

TEOREMA 2.4.2 (Teorema de representación de prelogoi)**.** *Todo prelogos pequeño se puede representar fielmente en una potencia de la categoría de conjuntos.*

METATEOREMA 2.4.2. *Cualquier sentencia de Horn en los predicados de la teoría de los prelogoi cierta para la categoría de conjuntos es cierta para todos los prelogoi.*

3 Categorías abelianas, construcciones características y teoremas de representación

3.1. Definiciones básicas

Una categoría se dice **casi aditiva** si tiene objeto cero, productos finitos, coproductos finitos y una operación binaria entre morfismos $+$ que satisface las siguientes condiciones:

- $x+y$ está definido sii $d(x)=d(y)$ y $c(x)=c(y)$
- $c(x+y)=c(x)$ y $d(x+y)=d(x)$ siempre que $x+y$ esté definido
- $x+0=x$
- $x+y=y+x$
- $x+(y+z)=(x+y)+z$
- $z(x+y)=zx+zy$ y $(x+y)z=xz+yz$.

La siguiente proposición nos da una caracterización interesante de las categorías casi aditivas.

Proposición 3.1.1 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.591)**.** *Una categoría con objeto cero, productos finitos y coproductos finitos es casi aditiva si, y solo si, para cada par de objetos A y B, el morfismo $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right):A+B\to A\times B$ es un isomorfismo.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sean $(A\times B,\pi_1,\pi_2)$ y $(A+B,\iota_1,\iota_2)$ producto y coproducto, respectivamente, de A y B. Afirmamos que $\pi_1\iota_1+\pi_2\iota_2$ es la inversa de $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. En efecto, $(\pi_1\iota_1+\pi_2\iota_2)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)=\pi_1\iota_1\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)+\pi_2\iota_2\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)=\pi_1\langle 1,0\rangle+\pi_2\langle 0,1\rangle=\langle\pi_1,\pi_2\rangle=1$; y $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)(\pi_1\iota_1+\pi_2\iota_2)=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\pi_1\iota_1+\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\pi_2\iota_2=\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\iota_1+\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\iota_2=\left(\begin{smallmatrix}\iota_1\\\iota_2\end{smallmatrix}\right)=1$. La última y penúltima igualdad de cada cadena de igualdades se sigue de las propiedades universales del producto y el coproducto, respectivamente.
($\Leftarrow$) Dados cualesquiera dos objetos A y B, tenemos por hipótesis que $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ es un isomorfismo, de aquí se sigue que existe un objeto $A\oplus B$ tal que la parte superior del siguiente diagrama forma un coproducto, y la inferior un producto, ambos de A y B.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "\langle 1,0\rangle"'] & & B \arrow[dl, "\langle 0,1\rangle"] \\
& A \oplus B \arrow[dl, "\binom{1}{0}"] \arrow[dr, "\binom{0}{1}"'] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

A continuación definimos dos operaciones binarias en el conjunto de morfismos de A en B.

$$x \bigtriangleup y := A \xrightarrow{\langle 1,1\rangle} A \oplus A \xrightarrow{\binom{x}{y}} B$$

$$x \bigtriangledown y := A \xrightarrow{\langle x,y\rangle} B \oplus B \xrightarrow{\binom{1}{1}} B$$

Estas operaciones cumplen las siguientes propiedades:

a. $x \bigtriangleup 0 = x = 0 \bigtriangleup x$ y $x \bigtriangledown 0 = x = 0 \bigtriangledown x$

b. $(x \bigtriangleup y)z = xz \bigtriangleup yz$ y $z(x \bigtriangledown y) = zx \bigtriangledown zy$

c. $(u \bigtriangledown v) \bigtriangleup (x \bigtriangledown y) = (u \bigtriangleup x) \bigtriangledown (v \bigtriangleup y)$.

Tomando $v = y = 0$ en *c.*, vemos que $u \bigtriangledown x = u \bigtriangleup x$, e.d., las operaciones $\bigtriangledown$ y $\bigtriangleup$ coinciden. A esta operación la llamaremos $+$. De todo lo anterior se sigue que una categoría $\mathbb{A}$ con esas operaciones es casi aditiva: tomando $v = 0$ en *c.*, vemos que $+$ es asociativa; y tomando $u = y = 0$ en *c.*, vemos que $+$ es conmutativa.

$\square$

Una categoría **aditiva** es una categoría casi aditiva en la cual, para cada par de objetos A y B, el conjunto de morfismos de A en B es un grupo abeliano.

Proposición 3.1.2 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.591)**.** *Una categoría es aditiva si y solo si es casi aditiva y, para cada par de objetos A y B y morfismo $x : A \to B$, el morfismo $\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : A \oplus B \to A \oplus B$ es un isomorfismo.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $x : A \to B$. Supongamos que existe $y : A \to B$ tal que $x + y = 0$, entonces $\left(\begin{smallmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1}$, pues $\left(\begin{smallmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
($\Leftarrow$) Sea $x : A \to B$ y $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1}$. Por lo tanto, $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & ax+b \\ c & cx+d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$; de donde $a = 1$ y $0 = ax + b = x + b$.

$\square$

Una categoría bicartesiana se dice **abeliana** si satisface todas las sentencias de Horn en los predicados bicartesianos que son válidas en la categoría de grupos abelianos.

Ejemplo 3.1.1. *Puesto que la categoría de los grupos es aditiva y regular, y en una categoria bicartesiana todo esto se puede expresar como sentencias de Horn en los predicados bicartesianos, tenemos que toda categoría aditiva y regular es abeliana. Sin embargo, hay ejemplos de categorías aditivas que no son abelianas: la categoría de módulos finitamente generados sobre un anillo no noetheriano, la categoría de los módulos filtrados sobre un anillo, la categoría de los espacios de Banach y la categoría de los espacios de Hilbert son ejemplos de categorías aditivas no abelianas; además, el primero de los anteriores ejemplos nos muestra que no toda categoría aditiva y regular es abeliana. Más adelante veremos que lo que le falta a una categoría aditiva para ser abeliana son ciertas condiciones de exactitud (Barr).*

3.2. Representación de categorías abelianas y definiciones equivalentes

TEOREMA 3.2.1 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.592, Teorema de Representación de Categorías Abelianas)**.** *Toda categoría abeliana pequeña se puede representar fielmente en la categoría de grupos abelianos*

Demostración. Sea $\mathbb{A}$ una categoría abeliana pequeña. Como $\mathbb{A}$ solo tiene un valor (clase de equivalencia de objetos subterminales), gracias a los resultados del capítulo uno podemos construir una representación fiel (y que refleja isomorfismos) de categorías regulares $T : \mathbb{A} \to \underline{\mathbb{A}} \xrightarrow{\Gamma} \mathscr{S}$. Para cada objeto A tenemos que los siguientes morfismos conforman un objeto grupo en $\mathbb{A}$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "!"] & A & A \oplus A \arrow[l, "\binom{1}{1}"'] \\ & A \arrow[u, "-1"] & \end{tikzcd}$$

Esto se sigue de la conmutatividad de los siguientes diagramas:
-Asociatividad:

$$\begin{tikzcd} A \oplus A \oplus A \arrow[r, "\binom{1}{1} \times 1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "1 \times \binom{1}{1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)"'] & A \oplus A \arrow[d, "\binom{1}{1}"] \\ A \oplus A \arrow[r, "\binom{1}{1}"'] & A \end{tikzcd}$$

-Conmutatividad:

$$\begin{tikzcd} A \oplus A \arrow[rr, "\langle \pi_2, \pi_1 \rangle = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[dr, "\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"'] & & A \oplus A \arrow[dl, "\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

-Existencia de elemento neutro:

$$\begin{tikzcd} 0 \oplus A \arrow[rr, "\langle 0, \pi_2 \rangle = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[dr, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"'] & & A \oplus A \arrow[dl, "\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

-Existencia de inversos:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\langle 1, 1 \rangle"] \arrow[d, "!"'] & A \oplus A \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] \\ 0 \arrow[r, "1"'] & A \end{tikzcd}$$

Además, para cada $x : A \to B$ se tiene que los siguientes diagramas también conmutan:

$$\begin{tikzcd} A \oplus A \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "x \oplus x = \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{smallmatrix}\right)"'] & A \arrow[d, "x"] \\ B \oplus B \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"'] & B \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "!"] \arrow[d, "1"'] & A \arrow[d, "x"] \\ 0 \arrow[r, "!"'] & B \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "-1"] \arrow[d, "x"'] & A \arrow[d, "x"] \\ B \arrow[r, "-1"'] & B \end{tikzcd}$$

Por lo anterior, podemos factorizar T de la siguiente forma, donde U es el funtor olvido:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "T'"'] & & \mathscr{S} \\ & Ab \arrow[ur, "U"'] & \end{tikzcd}$$

Como U es una representación fiel de categorías regulares que preserva isomorfismos, entonces T' también lo es. Además T' preserva coproductos finitos, pues preserva productos finitos, y los productos finitos y coproductos finitos coinciden en $\mathbb{A}$ y Ab. Por lo tanto, solo nos resta ver que T' preserva conúcleos. Esto se sigue de las siguientes dos observaciones: en primer lugar, que la imagen de todo morfismo en una categoría abeliana puede construirse como el núcleo de su conúcleo, puesto que esto es cierto en Ab y se puede expresar como una sentencia de Horn en los predicados bicartesianos; en segundo lugar, que la anterior condición caracteriza a los conúcleos en Ab. Por todo lo anterior, tenemos que T' es la representación buscada.

□

A continuación, basados en parte de la demostración anterior, vamos a demostrar una serie de caracterizaciones de las categorías abelianas que incluye todas las definiciones usuales encontradas en los libros.
Diremos que un subobjeto es **normal** si es el núcleo de algún morfismo. Tenemos la primera caracterización:

Proposición 3.2.1 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.593)**.** *$\mathbb{A}$ es una categoría pequeña abeliana sii es una categoría regular aditiva en la cual todo subobjeto es normal.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Ya habíamos visto que toda categoría abeliana es regular aditiva. Lo que falta se sigue del hecho de que en Ab todo subobjeto es normal. ($\Leftarrow$) Sea $\mathbb{A}$ una categoría pequeña regular y aditiva, en la cual todo subobjeto es normal. Por la demostración del teorema anterior, existe una representación regular, fiel, que preserva isomorfismos, $T : \mathbb{A} \to Ab$. Si podemos demostrar que $\mathbb{A}$ es bicartesiana y que T es una representación bicartesiana, se seguirá inmediatamente que $\mathbb{A}$ es abeliana, pues satisfará todas las sentencias de Horn en los predicados bicartesianos válidas en Ab. Bajo el mismo argumento de la anterior proposición, podemos afirmar que $\mathbb{A}$ tiene coproductos finitos, y que T los preserva. Nos resta demostrar que $\mathbb{A}$ tiene conúcleos, y que T los preserva.
Comenzaremos considerando monomorfismos. Sean $x : A \rightarrowtail B$ e $y : B \to C$ tales que x es un núcleo de y. Por hipótesis, y se puede factorizar como ab, con a cubierta y b monomorfismo. Es fácil ver que x es un núcleo de $a : B \to D$. Vamos a demostrar que a es un conúcleo de x. Como a es una cubierta, por un resultado del capítulo anterior, tenemos que a es un coigualador y, por lo tanto, un conúcleo de un morfismo $c : E \to B$. De donde se sique que $ca = 0$ y que existe un único morfismo d tal que $dx = c$. Supongamos que $w : B \to X$ es un morfismo tal que $xw = 0$, entonces $cw = dxw = 0$. Por lo tanto, existe un único $e : D \to X$ tal que $ae = w$. De lo cual se sigue que a es un conúcleo de x. De todo lo anterior se sigue que $\mathbb{A}$ tiene conúcleos, pues dado $x : A \to B$, este se puede factorizar como $x = ab$, con a cubierta y b monomorfismo. Sabemos que podemos construir el conúcleo de b, pero este necesariamente será también un conúcleo para x.

Para ver que T preserva conúcleos es suficiente observar que si tenemos $A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{f} C$ en Ab, tales que ι es un núcleo para f, entonces, por el primer teorema de isomorfía para grupos, existe el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "\iota"] & B \arrow[rrr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & & C \\
& & B/\iota(A) \arrow[r, "\cong"] & Imf \arrow[ur, tail] &
\end{tikzcd}$$

De donde obtenemos que $cok(f) = (\pi : B \to B/A) = coker(\iota : A \to B) = coker(ker(f))$. Esta fue la construcción que se dio de los conúcleos en $\mathbb{A}$, por lo tanto T preserva conúcleos. $\square$

El siguiente teorema involucra un concepto cuya definición remite a la sección 4.1. de este trabajo. Una categoría regular se dice **efectiva** si toda relación de equivalencia se puede tabular mediante un par núcleo.

Proposición 3.2.2 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.594)**.** *$\mathbb{A}$ es abeliana sii es efectiva, regular y aditiva.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Esto ya se demostró.
$(\Leftarrow)$ Usando el argumento del Teorema 3.2.1, tenemos que existe una representación regular, bicartesiana, fiel, que refleja isos, $T : \mathbb{A} \to Ab$; por lo tanto, toda sentencia de Horn sobre aplicaciones y relaciones en los predicados de las categorías regulares para morfismos y las operaciones de composición, reciprocación e intersección que se tienen para relaciones binarias en la categorías Ab es válida en $\mathbb{A}$.
En Ab toda endorelación reflexiva es una relación de equivalencia. En efecto, sea A un grupo abeliano y R un subgrupo de $A \times A$ tal que $\Delta = \{(a,a) \mid a \in A\} \leq R$. De lo anterior se sigue que: si $(a,b) \in R$, entonces $(b,a) = (a+b, a+b) - (a,b) \in R$; si $(a,b),(b,c) \in R$, entonces $(a,c) = (a,a) + (b,c) - (b,a) \in R$. De donde se sigue que R es una relación de equivalencia en Ab. Por lo observado en el anterior párrafo tenemos que esto también es cierto en $\mathbb{A}$.
Para demostrar que $\mathbb{A}$ es abeliana, vamos a ver que todo subobjeto es normal.
Sea $x : A \rightarrowtail B$ un monomorfismo de $\mathbb{A}$. Tenemos que los morfismos $\binom{0}{1}, \binom{-x}{1} : A \oplus B \to B$ forman un par mónico; esto se debe a que si $(a_i, b_i) : C \to A \oplus B$, con $i = 1,2$, son morfismos tales que $(a_1,b_1)\binom{0}{1} = b_1 = b_2 = (a_2,b_2)\binom{0}{1}$ y $(a_1,b_1)\binom{-x}{1} = a_1(-x) + b_1 = a_2(-x) + b_2 = (a_2,b_2)\binom{-x}{1}$, entonces $-(a_1x) = a_1(-x) = a_2(-x) = -(a_2x)$ y $a_1x = a_2x$, de donde $a_1 = a_2$, pues x es mono. También tenemos que la relación que este par mónico tabula es reflexiva, lo cual se puede ver usando el morfismo $(0,1) : B \to A \oplus B$. Por todo lo anterior, se debe tener que esta relación es de equivalencia y, puesto que $\mathbb{A}$ es efectiva, tenemos que existe un morfismo $z : B \to C$ tal que el siguiente diagrama es un pullback.

$$\begin{tikzcd} A\oplus B \arrow[r, "\binom{-x}{1}"] \arrow[d, "\binom{0}{1}"'] & B \arrow[d, "z"] \\ B \arrow[r, "z"'] & C \end{tikzcd}$$

Así, $\binom{0}{z} = \binom{0}{1}z = \binom{-x}{1}z = \binom{-(xz)}{z}$; de donde $xz = 0$. Sea $w : D \to B$ tal que $wz = 0$. Sabemos que existe un único morfismo $(a,b) : D \to A \oplus B$ para el cual el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "0"'] \arrow[d, "(a,b)"] \arrow[dr, "w"] & \\ B & A\oplus B \arrow[l, "\binom{0}{1}"] \arrow[r, "\binom{-x}{1}"'] & B \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $b = 0$ y $w = a(-x)+b = a(-x) = (-a)x$; además, $-a$ es el único morfismo que satisface $w = (-a)x$, pues x es mono. Todo lo anterior muestra que x es el núcleo de z. Por consiguiente, en virtud de la proposición anterior, concluimos que $\mathbb{A}$ es abeliana. □

Dada una categoría $\mathbb{A}$ con objeto cero, núcleos y conúcleos, tenemos que para cada morfismo $x : A \to B$ y elección de núcleos y conúcleos existe un único θ tal que

$$x = A \to coker(ker(x)) \xrightarrow{\theta} ker(coker(x)) \to B.$$

Diremos que $\mathbb{A}$ es **exacta** si θ siempre es un isomorfismo.

Proposición 3.2.3 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.597)**.** *$\mathbb{A}$ es exacta sii tiene objeto cero y todo morfismo $A \to B$ se factoriza como $A \to I \to B$, con $A \to I$ conúcleo y $I \to B$ núcleo.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Inmediato.
($\Leftarrow$) Vamos a ver que la categoría tiene conúcleos. Sea $A \to B$ un morfismo cualquiera con factorización $A \to I \to B$, $A \to I$ conúcleo y $I \to B$ núcleo. Supongamos que $I \to B$ es un núcleo del morfismo $B \to D$. Factoricemos $B \to D$ como $B \to C \to D$ donde $B \to C$ es un conúcleo y $C \to D$ es un núcleo. Claramente, $I \to B$ es un núcleo de $B \to C$. Sea $B \to C$ un conúcleo de $E \to B$, entonces existe un único $E \to I$ tal que $E \to B = E \to I \to B$. Usando lo anterior vamos a demostrar que $B \to C = coker(I \to B)$. Sea $B \to X$ tal que $I \to B \to X = 0$, entonces $E \to B \to X = 0$. Por lo tanto existe un único $X \to C$ tal que $B \to C = B \to X \to C$. Por lo que $B \to C = coker(I \to B)$. De aquí se sigue fácilmente que $B \to C = coker(A \to B)$.
Como la hipótesis de esta dirección de la proposición es autodual, vemos que la construcción dual a la que acabamos de hacer nos permite llegar a núcleos.
Es fácil ver que dado $x : A \to B$, el morfismo θ en $x = A \to coker(ker(x)) \xrightarrow{\theta} ker(coker(x)) \to B$ es un isomorfismo.

□

Proposición 3.2.4 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.597)**.** $\mathbb{A}$ *es abeliana sii es exacta con productos binarios o coproductos binarios.*

Demostración. ($\Rightarrow$) es suficiente ver que dado $x : A \to B$, el morfismo θ en $x = A \to coker(ker(x)) \xrightarrow{\theta} ker(coker(x)) \to B$ es un isomorfismo. Lo cual en la categoría de grupos es simplemente el primer teorema de isomorfía, por lo cual es válido en toda categoría abeliana.
($\Leftarrow$) Sea $\mathbb{A}$ una categoría exacta con productos. A partir de la definición de categoría exacta se sigue que si $A \rightarrowtail B$ es un monomorfismo y $B \to C$ es su conúcleo, entonces $A \rightarrowtail B$ es un núcleo de $B \to C$. Dualmente si $B \rightarrowtail C$ es un epimorfismo y $A \to B$ es su núcleo, entonces $B \rightarrowtail C$ es un conúcleo de $A \to B$.
Para cualquier objeto A sea $y : A \times A \to C = coker(\langle 1,1\rangle : A \to A \times A)$ y $\theta = A \xrightarrow{\langle 1,0\rangle} A \times A \xrightarrow{y} C$. Consideremos $x : ker(\theta) \rightarrowtail A$. Como $\langle 1,1\rangle$ es mono, por la observación hecha anteriormente, $\langle 1,1\rangle = ker(y)$. Como $x\langle 1,0\rangle y = 0$ sabemos que existe un único x' tal que $x'\langle 1,1\rangle = x\langle 1,0\rangle$. Por lo tanto $x = x' = 0$ y $ker(\theta) = 0$.
Sea ahora $z : C \to coker(\theta)$. Puesto que $\langle 1,0\rangle : A \to A \times A$ es un núcleo de $\pi_2 : A \times A \to A$ y π_2 es un epimorfismo, tenemos que $\pi_2 = coker(\langle 1,0\rangle)$. Como $\langle 1,0\rangle yz = 0$, existe un único z' tal que $\pi_2 z' = yz$. Observe que $z' = 1z' = \langle 1,1\rangle \pi_2 z' = \langle 1,1\rangle yz = 0z = 0$. Por lo tanto $\pi_2 z' = yz = 0$, de donde $z = 0$ pues y es epi.
Por definición de categoría exacta tenemos que θ es un iso. Definamos $s_A = y\theta^{-1} : A \times A \to A$, los cuales forman las coordenadas de una transformación natural $s : C \to 1_{\mathbb{A}}$, donde $C : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es el funtor que toma el cuadrado de cada objeto, i.e., a un objeto A lo envía en $A \times A$; observe que s_A sigue siendo un conúcleo de $\langle 1,1\rangle$. Usando estos morfismos obtenemos una operación binaria en $\mathbb{A}(A,B)$ que cada par de morfismos x,y asigna el morfismo $x - y = \langle x,y\rangle s_B$.
Tenemos las siguientes ecuaciones:

- $x - 0 = \langle x,0\rangle s_B = x\langle 1,0\rangle s_B = x$
- $x - x = \langle x,x\rangle s_B = x\langle 1,1\rangle s_B = 0$
- $z(x-y) = z\langle x,y\rangle s_B = \langle zx,zy\rangle s_B = zx - zy$
- $(x-y)z = \langle x,y\rangle s_B z = \langle x,y\rangle(z \times z)s_C = \langle xz,yz\rangle s_C = xz - yz.$

Para $a,b : A \to B$ y $c,d : B \to C$ tenemos la siguiente ecuación

- $(ac-ad)-(bc-bd) = (ac-bc)-(ad-bd)$

pues $(ac-ad)-(bc-bd) = a(c-d)-b(c-d) = (a-b)(c-d) = (a-b)c-(a-b)d = (ac-bc)-(ad-bd)$.
Sean $u,v,x,y : A \to B$. Tomando $a = \langle u,v\rangle$, $b = \langle x,y\rangle$, $c = \pi_1$ y $d = \pi_2$, tenemos que la anterior ecuación se convierte en

- $(u-v)-(x-y) = (u-x)-(v-y)$

Definamos $x+y = x-(0-y)$. Tenemos las siguientes ecuaciones:

- $x+0 = x-(0-0) = x-0 = x$
- $0+x = 0-(0-x) = (x-x)-(0-x) = (x-0)-(x-x) = x-0 = x$
- $(u+v)+(x+y) = (u-(0-v))-(0-(x-(0-y))) = (u-0)-((0-v)-(x-(0-y))) = (u-0)-((0-x)-(v-(0-y))) = (u-(0-x))-(0-(v-(0-y))) = (u+x)+(v+y)$.

De la misma forma que en la proposición 3.1.1. estas ecuaciones implican la asociatividad y conmutatividad de la operación $+$. $\mathbb{A}(A,B)$ es un grupo abeliano debido a que $(0-x)+x = (0-x)-(0-x) = 0$. También es fácil ver que $+$ distribuye a la izquierda y a la derecha, por lo que $\mathbb{A}$ es aditiva y tiene coproductos binarios que coinciden con los productos. Puesto que $\mathbb{A}$ es exacta, tiene núcleos y conúcleos, vemos que es bicartesiana y tiene imágenes. Además, si $x : A \rightarrowtail B$ es mono y $B \to C$ es su conúcleo, ya vimos que x es un núcleo para $B \to C$, por lo tanto todo subobjeto es normal. En virtud de la proposición 3.2.1. resta ver que $\mathbb{A}$ es regular.
Dado un cuadrado

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{v} & C \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle y} \\ B & \xrightarrow[x]{} & D \end{array}$$

Tenemos lo siguiente:

- El cuadrado conmuta sii $\langle u,v\rangle\binom{x}{-y} = 0$.
- El cuadrado es un pullback sii $\langle u,v\rangle$ es un núcleo de $\binom{x}{-y}$.

  ($\Rightarrow$) Como el cuadrado conmuta, entonces $\langle u,v\rangle\binom{x}{-y} = 0$. Sea $w = \langle\alpha,\beta\rangle : W \to B\oplus C$ tal que $w\binom{x}{-y} = \langle\alpha,\beta\rangle\binom{x}{-y} = \alpha x - \beta y = 0$, entonces $\alpha x = \beta y$. Por lo tanto existe un único δ tal que $\delta u = \alpha$ y $\delta v = \beta$, lo que es equivalente a $\delta\langle u,v\rangle = \langle\alpha,\beta\rangle$.

  ($\Leftarrow$) Supongamos que $\langle u,v\rangle$ es un núcleo de $\binom{x}{-y}$, entonces $\langle u,v\rangle\binom{x}{-y} = 0$, por lo tanto el cuadrado conmuta. Sean α y β tales que $\alpha x = \beta y$, entonces $\langle\alpha,\beta\rangle\binom{x}{-y} = 0$, por lo que existe un único δ tal que $\delta\langle u,v\rangle = \langle\alpha,\beta\rangle$, que es equivalente $\delta u = \alpha$ y $\delta v = \beta$.

- El cuadrado es un pushout sii $\binom{x}{-y}$ es un conúcleo de $\langle u,v\rangle$. El argumento es similar al del ítem anterior.

Si el cuadrado es un pullback y x es una cubierta, entonces $\langle u,v\rangle$ es un núcleo de $\binom{x}{-y}$, este último siendo también una cubierta debido a que $x = \langle 1,0\rangle\binom{x}{-y}$. Lo anterior y las observaciones hechas al inicio de esta demostración implican que $\binom{x}{-y}$ es un conúcleo de $\langle u,v\rangle$, por lo que el cuadrado es también un pushout. Consideremos $p : C \to coker(v)$, entonces $0 = vp = u0$. Por lo que existe un único z tal que $xz = 0$ y $yz = p$; pero x es epi, de donde $z = 0 = p$. Como $coker(v) = 0$, la definición de categoría exacta implica que v es una cubierta. $\square$

En su famoso artículo el *Tohoku* [Grothendieck 1957], Grothendieck definió un categoría abeliana como una categoría aditiva $\mathbb{C}$ que satisface los siguientes dos axiomas:

AB1). Cualquier morfismo admite un núcleo y un conúcleo.

AB2). Sea u un morfismo en $\mathbb{C}$, entonces el morfismo canónico $\overline{u} : Coim\,u \to Im\,u$ es un isomorfismo.

Aquí $Coim\,u = coker(ker(u))$ e $Im\,u = ker(coker(u))$. Vemos que el teorema anterior implica la equivalencia de la definición usada en este trabajo con la de Grothendieck, el cual adicionalmente propuso otros axiomas que permiten llegar a categorías abelianas con propiedades muy interesantes, como la suficiencia de inyectivos. La siguiente sección sera un breve comentario a esto.

3.3. Las condición AB5 de Grothendieck y el retículo de subobjetos de una categoría abeliana

En adición a los axiomas que definen una categoría abeliana, Grothendieck consideró los siguientes axiomas:

AB3). Para cualquier familia $(A_i)_{i\in I}$ de objetos de $\mathbb{C}$, la suma directa (el coproducto) de los A_i existe.

AB4). El axioma AB3) es satisfecho y la suma directa de una familia de monomorfismos es un monomorfismo.

AB5). El axioma AB3) es satisfecho, y si $(A_i)_{i\in I}$ es una familia dirigida creciente de subobjetos de $A \in \mathbb{C}$, y B es cualquier subobjeto de A, tenemos que $(\sum_{i\in I} A_i) \cap B = \sum_{i\in I}(A_i \cap B)$.

AB6). El axioma AB3) se cumple y para cualquier $A \in \mathbb{C}$ y cualquier familia $(B^j)_{j\in J}$ de familias dirigidas crecientes $B^j = (B^j_i)_{i\in I_j}$ de subobjetos B^j de A, tenemos que:

$$\bigcap_{j\in J}(\sum_{i\in I_j} B^j_i) = \sum_{(i_j)\in\prod I_j}(\bigcap_{j\in J} B^j_{i_j}).$$

En el *Tohoku*, Grothendieck demuestra que toda categoría abeliana que posea un generador y que satisfaga el axioma AB5), tiene suficientes inyectivos, i.e., todo objeto es el dominio de un monomorfismo con codominio un objeto inyectivo. Gracias a iteraciones de esta idea, Grothendieck logró reconstruir las propiedades homológicas de un espacio a partir de funtores derivados.
Los anteriores axiomas involucran propiedades sobre los retículos de subobjetos de objetos de una categoría abeliana. En el caso general estos retículos satisfacen la ley de modularidad pues dado $f : A \to B$, las adjunciones $\exists_f$ y f^* son tales que para cualesquiera $A' \in Sub(A)$ y $B' \in Sub(B)$, se tiene $f^*(\exists_f(A') + B') = A' + f^*(B)$. Aquí $+$ corresponde al supremo de los dos subobjetos, el cual

en una categoría abeliana se construye tomando la imagen del morfismo que parte del coproducto de ellos con coordenadas iguales a los subobjetos.
Considerando algunos de los axiomas de Grothendieck podemos obtener un resultado sencillo pero interesante.

Proposición 3.3.1. *Sean $\mathbb{C}$ una categoría abeliana que posee un generador y satisface $AB5$), y A un objeto de la categoría. Tenemos que $Sub(A)$ es un álgebra de Heyting si y solo si es un retículo distributivo.*

Demostración. Demostramos la dirección no trivial. Supongamos que $Sub(A)$ es un retículo distributivo. La construcción de la implicación es la estándar. Dados $B,C \in Sub(A)$, defina

$$(B \Rightarrow C) = \sum \{D \in Sub(A) \,|\, B \cap D \subset C\}.$$

Esta suma existe debido que toda categoría con generador está bien potenciada y a que la familia $\Theta = \{D \in Sub(A) \,|\, B \cap D \subset C\}$ es dirigida creciente. En efecto, observe que si $D_1, D_2 \in \Theta$, entonces $B \cap (D_1 + D_2) = (B \cap D_1) + (B \cap D_2) \subset C$, por lo que $D_1 + D_2 \in \Theta$. $\square$

Una categoría que satisface las hipótesis de la anterior proposición se llama una categoría de **Grothendieck**.

Ejemplo 3.3.1. *Como la categoría de grupos abelianos satisface las hipótesis de la proposición anterior, tenemos que el retículo de subgrupos de un grupo localmente cíclico es un álgebra de Heyting, pues Ore demostró que el retículo de subgrupos de un grupo es distributivo si y solo si es localmente cíclico.*

4 Categorías de relaciones y alegorías

En este capítulo presentaremos sucintamente la teoría de alegorías de Freyd. Como motivación, y ejemplo central, estudiaremos primero la categoría de relaciones de una categoría regular. Durante todo el capítulo estaremos trabajando en una categoría regular arbitraria, a menos que se diga lo contrario.

4.1. La alegoría de relaciones de una categoría regular

4.1.1. Relaciones en categorías regulares

Una **relación** R de A en B es un subobjeto $\langle f, g\rangle : R \rightarrowtail A \times B$. Se dice que f y g forman un **par mónico** y tabulan la relación R. La clase de todas las relaciones de A en B se denotará $Rel(A,B)$. También se puede proceder a la inversa: definiendo en primer lugar un par mónico y posteriormente la noción de relación.
Dados dos morfismos $x : T \to A$ e $y : T \to B$ que llamaremos T-objetos de A y B y escribiremos como $x \in_T A$ e $y \in_T B$, respectivamente, decimos que x está R relacionado con y, lo que escribimos como xRy o $\langle x, y\rangle \in_T R$, si y solo si existe un (único) morfismo $T \to R$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\langle f,g\rangle"] & & A \times B \\ & T \arrow[ul] \arrow[ur, "\langle x,y\rangle"'] & \end{tikzcd}$$

Es fácil ver que dadas dos relaciones R y S de A en B, se tiene que $R \subset S$ si y solo si se cumple que xSy siempre que xRy, para todo objeto T, $x \in_T A$, $y \in_T B$.

Si R es una relación de A en B tabulada por f y g, y S es una relación de B en C tabulada por p y q, podemos definir una relación de A en C que llamaremos la **composición** de R y S, y notaremos como RS, de la siguiente forma:

- Forme el pullback

$$\begin{array}{ccc} R\times_B S & \xrightarrow{v} & S \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ R & \xrightarrow[g]{} & B \end{array}$$

- Considere el morfismo $\langle uf, vq\rangle : R\times_B S \to A\times C$
- Tome la imagen del anterior morfismo; es decir, en una factorización

$$\begin{tikzcd} R\times_B S \arrow[rr, "\langle uf, vq\rangle"] \arrow[dr, "h"'] & & A\times C \\ & RS \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

  con h cubierta y j mono, tome j como RS.

La siguiente proposición nos muestra que la composición posee una cara familiar a la que estamos acostumbrados en la categoría de conjuntos.

Proposición 4.1.1. *La relación RS anteriormente definida es la única relación de A en C tal que para todo objeto T, x y z T- objetos de A y C, respectivamente, se tiene que $xRSz$ sii existe una cubierta $u : U \to T$ y un U-objeto y tales que $uxRy$ e $ySuz$.*

Demostración. Ver [McLarty], teorema 25.4. □

Gracias a la proposición anterior tenemos que la composición se puede ver como una función que preserva el orden.
Dada una relación R de A en B tabulada por f y g, llamaremos R^o a la relación de B en A tabulada por g y f, es decir, al subobjeto $\langle g, f\rangle : R \rightarrowtail B\times A$. R^o se llama el **recíproco** de R y la operación unaria $(-)^o$ se llama **reciprocación**. Se comprueba fácilmente que

- $R^{oo} = R$
- $(RS)^o = S^o R^o$
- $(R\cap S)T \subset RT \cap ST$
- $(R\cap S)^o = S^o \cap R^o$

Aquí $\cap$ corresponde a la intersección de subobjetos.

Proposición 4.1.2 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.563)**.** *a. Si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son categorías regulares y $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ es una representación de categorías regulares, entonces las funciones inducidas $Rel(A,B) \to Rel(FA,FB)$, $(\langle f,g\rangle : R \rightarrowtail A\times B) \mapsto (\langle Ff,Fg\rangle : FR \rightarrowtail FA\times FB)$, preservan composición, reciprocación e intersección. Si F es fiel y refleja isos, entonces reflejan composición, reciprocación e intersección.*

b. Cualquier sentencia de Horn en los predicados de la teoría de categorías regulares para morfismos y operaciones de composición, reciprocación e intersección para relaciones, cierta para relaciones binarias entre conjuntos, es cierta para relaciones en cualquier categoría regular.

Demostración. *a.* Inmediato a partir de cómo se definió la composición, reciprocación e intersección de relaciones en una categoría regular.

b. Aplique el teorema de Henkin-Lubkin y la parte *a.* de esta proposición.

□

Como corolario de la anterior proposición tenemos otras dos propiedades válidas en toda categoría regular:

- $R(ST) = (RS)T$
- $RS \cap T \subset (R \cap TS^o)S$.

4.1.2. La categoría de relaciones de una categoría regular

Dada una categoría regular $\mathbb{C}$, definimos la **categoría de relaciones** de la categoría $\mathbb{C}$ como la categoría $Rel(\mathbb{C})$ que posee los mismos objetos que $\mathbb{C}$ y cuyos morfismos son las relaciones definidas en la sección anterior. Observe que las identidades corresponden a las relaciones tabuladas con solo identidades de $\mathbb{C}$.

Podemos definir un funtor fiel $\Xi : \mathbb{C} \to Rel(\mathbb{C})$, que llamaremos el funtor gráfico, el cual es la identidad en objetos y manda a cada morfismo f en la relación $\langle 1, f\rangle$. Este funtor es inyectivo en morfismos y objetos, lo que nos permite ver la categoría $\mathbb{C}$ como una subcategoría (que usualmente no es plena) de la categoría $Rel(\mathbb{C})$. Una relación, es decir, un morfismo de $Rel(\mathbb{C})$ se dirá una **aplicación** si es un morfismo de la subcategoría $\mathbb{C}$; esto es equivalente a que se puede tabular mediante 1 y f para algún morfismo f de $\mathbb{C}$. Observe que una relación $\langle g, f\rangle : R \rightarrowtail B\times A$ es una aplicación si y solo si f es un iso.

Dada una relación R, decimos que es **entera** si $1 \subset RR^o$, y que es **simple** si $R^oR \subset 1$. Es inmediato observar que una relación en la categoría de conjuntos es una aplicación si y solo si es entera y simple; este resultado se mantiene en este ámbito general.

Proposición 4.1.3 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.564)**.** *Sea $\langle f,g\rangle : R \rightarrowtail A\times B$ una relación. Tenemos que*

a. *R es entera si y solo si f es una cubierta.*

b. *R es simple si y solo si x es mono.*

c. *R es una aplicación si y solo si es entera y simple.*

d. *Si R es tal que para todas las representaciones de categorías regulares $F : \mathbb{A} \to \mathscr{S}$ se cumple que FR es una aplicación, entonces R es una aplicación.*

Demostración. *a.* ($\Rightarrow$) Supongamos que R es entera. Como $1 \subset RR^o$, entonces $1_A RR^o 1_A$. Por la proposición 4.1.1. existen $u : U \to A$ e $y : U \to B$ tales que uRy. Por lo tanto existe h tal que

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\langle f,g\rangle"] & & A\times B \\ & U \arrow[ul, "h"] \arrow[ur, "\langle u,y\rangle"'] & \end{tikzcd}$$

De donde $u = hf$ y, por la proposición 2.3.4. *a.*, f es cubierta.

($\Leftarrow$) Supongamos que f es una cubierta. Queremos ver que $1 \subset RR^o$, lo que equivale a ver que para cada $x : T \to A$ existen $u : U \to T$ cubierta y $y : U \to B$ tales que $uxRy$. Para esto, tome el siguiente pullback

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h"'] & T \arrow[d, "x"] \\ R \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

Luego u es una cubierta y tomando $y = hg$, hemos encontrado lo que necesitamos.

b. Similar al ítem anterior.

c. Inmediato a partir de *a.* y *b.*

d. Se obtiene usando el teorema de Henkin-Lubkin y el ítem anterior.

$\square$

Es fácil demostrar que en toda categoría los coigualadores son cubiertas. En las categorías regulares se tiene el recíproco de esta afirmación. La demostración de esto ilustra cómo el uso de la categoría de relaciones de una categoría regular puede devolver información sobre la categoría original.

Proposición 4.1.4 ([Freyd & Scedrov 1990], 1.565-66)**.** *En cualquier categoría regular se tiene que*

a. El pullback de cubiertas es pushout.

b. Toda cubierta es un coigualador.

Demostración. *a.* Consideremos el siguiente pullback

$$\begin{tikzcd}
 & A \times_C B \arrow[dl, "l"'] \arrow[dr, "r"] & \\
A \arrow[dr, "x"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & & B \arrow[dl, "y"'] \arrow[ddl, bend left, "v"] \\
 & C \arrow[d, "R"] & \\
 & D &
\end{tikzcd}$$

Supongamos que $lu = rv$. Queremos ver que la relación $R = (\Xi(x)^o u) \cap (\Xi(y)^o v)$ es una aplicación, para lo cual es suficiente demostrarlo en la categoría de conjuntos, en virtud de la parte *d.* de la anterior proposición. Observe que en la categoría de conjuntos las funciones son iguales a su gráfico, por lo que $R = (x^o u) \cap (y^o v)$. Procedemos a demostrar que R es función.

- R es simple. Supongamos que $(a,b),(a,c) \in R$. Luego existen $c_1, c_2, \overline{c_1}, \overline{c_2}$ tales que $(a,c_1),(a,c_2) \in x^o$, $(c_1,b),(c_2,c) \in u$, $(a,\overline{c_1}),(a,\overline{c_2}) \in y^o$, $(\overline{c_1},b),(\overline{c_2},c) \in u$. De donde $x(c_1) = x(c_2) = a = y(\overline{c_1}) = y(\overline{c_2})$, $u(c_1) = b = v(\overline{c_1})$ y $u(c_2) = c = v(\overline{c_2})$. Así, $(c_1,\overline{c_2}) \in A \times_C B$ y $b = u(c_1) = u(l(c_1,\overline{c_2})) = v(r(c_1,\overline{c_2})) = v(\overline{c_2}) = c$. Por lo tanto R es simple.
- R es entera. Sea $c \in C$. Como x e y son sobreyectivas, existen a y b tales que $x(a) = c$ y $y(b) = c$. De donde $(a,b) \in A \times_C B$ y $u(a) = u(l(a,b)) = v(r(a,b)) = v(b)$. Como $(c,a) \in x^o$ y $(a,u(a)) \in u$, entonces $(c,u(a)) \in x^o u$; de la misma forma se obtiene que $(c,v(b)) \in y^o v$. Por lo tanto $(c,u(a)) = (c,v(b)) \in x^o u \cap y^o v$ y R es entera.

Resta verificar que $xR = u$ y $yR = v$, pues la unicidad es inmediata. Sea $a \in A$, entonces $(x(a),u(a)) \in x^o u$. Como l es sobre, existe $b \in B$ tal que $(a,b) \in A \times_C B$. Luego $x(a) = y(b)$, $u(a) = v(b)$ y $(x(a),u(a)) = (y(b),v(b)) \in y^o v$, de donde $(x(a),u(a)) \in R$.

b. Usando la parte *a.* vemos que toda cubierta es el coigualador de su par núcleo.

□

4.2. Alegorías

Hemos visto que la categoría de relaciones de una categoría regular posee dos operaciones adicionales entre morfismos, que satisfacen ciertas propiedades, a decir, la reciprocación y la intersección. Las alegorías de Freyd son la generalización adecuada del comportamiento relacional de las categorías regulares, en particular, de la de conjuntos. Aquí los morfismos no intentan representar a las funciones entre conjuntos sino a las relaciones. Es este entorno relacional el que permite, partiendo de un ámbito sintáctico como lo son las teorías lógicas, llegar a un entorno sintético que permite transformar los teoremas de representación anteriormente demostrados en teoremas de completitud. En el desarrollo de esta sección haremos una breve exposición técnica de lo enunciado en este párrafo.

4.2.1. Definiciones básicas

Una **alegoría** $\mathbb{A}$ es una categoría con una operación unaria $(-)^o$ llamada **reciprocación**, y una operación binaria $\cap$ entre morfismos con mismo dominio y codominio, llamada **intersección**, que satisface los siguientes axiomas:

- Si $R \in \mathbb{A}(A,B)$, entonces $R^o \in \mathbb{A}(B,A)$
- $R^{oo} = R$
- $1_A^o = 1_A$ para todo objeto A
- $R \cap (S \cap T) = (R \cap S) \cap T$ (asociatividad)
- $R \cap S = S \cap R$ (conmutatividad)
- $R \cap R = R$ (idempotencia)
- $(RS)^o = S^o R^o$
- $R(S \cap T) \subset RS \cap RT$
- $RS \cap T \subset (R \cap TS^o)S$ (modularidad).

En los anteriores axiomas, $\subset$ es el orden definido en cada Hom a través de $R \subset S$ si y solo si $R \cap S = R$.

Ejemplo 4.2.1.

- *La categoría de relaciones de una categoría regular es una alegoría.*
- *Dado un local $\mathscr{V}$, definimos la categoría de relaciones $\mathscr{V}$-valuadas $Rel_{\mathscr{V}}$, que tiene como objetos todos los conjuntos y como morfismos las matrices con valores en $\mathscr{V}$, es decir, un morfismo f del conjunto I en J es una función $f : I \times J \to \mathscr{V}$. La operación de reciprocación se toma como la transposición, la de intersección como la toma de ínfimo entrada a entrada,*

y la composición como la multiplicación de matrices, tomando el supremo como la operación de suma y el ínfimo como la de producto. Así, si $f : I \to J$ y $g : J \to K$ son relaciones $\mathscr{V}$-valuadas, la relación $fg : I \to K$ está definida mediante $(fg)_{i,k} = \bigvee_j (f_{i,j} \wedge g_{j,k})$. Es fácil verificar que $Rel_{\mathscr{V}}$ es una alegoría.

- *Dado un retículo $\mathscr{L}$, lo podemos considerar como una categoría con un solo objeto y con sus elementos por morfismos. Si la composición se toma como el supremo, la intersección como el ínfimo y la reciprocación como la identidad, entonces $\mathscr{L}$ es una alegoría si y solo si es un retículo modular.*

Las siguientes son consecuencias inmediatas de los axiomas que satisface una alegoría:

- $R \subset S$ implica $R^o \subset S^o$
- $S \subset T$ implica $RS \subset RT$
- $R \subset S$ implica $RT \subset ST$
- $(R \cap S)T \subset RT \cap ST$
- $RS \cap T \subset R(S \cap R^oT)$
- $R \subset RR^oR$.

A continuación recordamos las propiedades básicas que puede satisfacer una relación en la categoría de conjuntos, esta vez consideradas en el caso general de una alegoría.
Un endomorfismo R se dice:

- **reflexivo** si $1 \subset R$;
- **simétrico** si $R^o \subset R$;
- **transitivo** si $RR \subset R$;
- **relación de equivalencia** si es reflexivo, simétrico y transitivo;
- **coreflexivo** si $R \subset 1$.

El **dominio relacional** de un morfismo R se define como $Dom(R) = 1 \cap RR^o$.

Proposición 4.2.1 ([Freyd & Scedrov 1990], 2.12). *a. Todo morfismo reflexivo y transitivo es idempotente.*

b. Todo morfismo simétrico y transitivo es idempotente.

c. Todo morfismo coreflexivo es un idempotente simétrico.

d. *Si R y S son coreflexivos, entonces $RS = R \cap S$.*

e. *Si $R : A \to B$, entonces para todo $S \subset 1_A$ se tiene que $Dom(R) \subset S$ si y solo si $R \subset SR$.*

f. *$Dom(RS) \subset Dom(R)$.*

g. *$Dom(R \cap S) = 1 \cap SR^o$.*

Demostración. *a.* Inmediato.

b. $R \subset RR^oR \subset R^3 \subset R^2$.

c. $R \subset RR^oR \subset 1R^o1 \subset R^o$ y $R \subset RR^oR \subset R1R = R^2$.

d. Por coreflexividad, es claro que $RS \subset R \cap S$. Para la otra dirección, observe que $A \cap B \subset (A \cap B)^2 \subset AB$.

e. $(\Rightarrow)$ Si $Dom(R) \subset S$, entonces $R = 1R \cap R \subset (1 \cap RR^o)R \subset SR$. $(\Leftarrow)$ Si $R \subset SR$, entonces $Dom(R) = 1 \cap RR^o \subset 1 \cap ARR^o \subset A(A^o \cap RR^o) \subset AA^o \subset A$.

f. Inmediato a partir de *e.*

g. $Dom(R \cap S) \subset 1 \cap (R \cap S)(R \cap S)^o \subset 1 \cap RS^o$,

$1 \cap RS^o \subset 1 \cap (1 \cap (1 \cap RS^o)) \subset 1 \cap (1 \cap (S \cap R)S^o) \subset 1 \cap (S \cap R)((S \cap R)^o \cap S^o) = Dom(R \cap S)$.

□

4.2.2. La categoría de aplicaciones de una alegoría

En la sección 5.1.2. habíamos visto que toda categoría regular se podía considerar como una subcategoría de su categoría de relaciones, y que las relaciones que cumplían el análogo de la definición de función en este ámbito general resultaban ser los morfismos de la categoría regular original. Allá partíamos de una categoría regular y llegábamos a una alegoría, a partir de la cual podíamos recuperar la categoría. Acá partiremos de una alegoría y llegaremos a una categoría, a partir de la cual podremos recuperar la alegoría original siempre y cuando la alegoría se comporte adecuadamente. El transito entre alegorías y categorías aquí descrito logra dar resultados interesantes en ambos lados del movimiento.

Diremos que un morfismo R es

- **entero** si $1 \subset RR^o$,
- **simple** si $R^oR \subset 1$,
- una **aplicación** si es entero y simple.

Es fácil ver que la composición de morfismos enteros, simples y aplicaciones, es un morfismo entero, simple o una aplicación, respectivamente. Además, de la parte *f.* de la anterior proposición vemos que RS entero implica R entero. Es fácil ver que si F es simple, entonces $F(R \cap S) = FR \cap FS$.

En base a los anteriores comentarios, podemos asociar a cada alegoría $\mathbb{A}$ una categoría $Map(\mathbb{A})$ llamada la **categoría de aplicaciones** de la alegoría, que tiene por objetos los mismos que $\mathbb{A}$ y por morfismos a las aplicaciones. La mitad del comentario hecho al inicio de esta sección se puede resumir en: $\mathbb{C} \cong Map(Rel(\mathbb{C}))$ para toda categoría regular $\mathbb{C}$.
De aquí en adelante usaremos minúsculas para las aplicaciones.

Proposición 4.2.2 ([Freyd & Scedrov 1990], 2.13)**.** *a. $f \subset g$ implica $f = g$.*

b. Si f y f^o son aplicaciones, entonces f es un isomorfismo y $f^{-1} = f^o$.

c. Si R es un isomorfismo, entonces R es una aplicación y $R^{-1} = R^o$.

d. los isomorfismos en una alegoría y su categoría de aplicaciones coinciden.

Demostración. *a.* Si $f \subset g$, entonces $f^o \subset g^o$. Luego $g = 1g \subset ff^og \subset fg^og \subset f$.

b. Si f^o es una aplicación, entonces ff^o y f^of son aplicaciones. Como $1 \subset ff^o$ y $f^of \subset 1$, por la parte *a.* concluimos que $1 = ff^o$ y $f^of = 1$.

c. Puesto que RR^{-1} y $R^{-1}R$ son enteros, R también lo es. R es simple: $R^oR \subset R^oRR^{-1}R \subset R^oRR^{-1}(R^{-1})^oR^{-1}R \subset R^o(R^{-1})^o \subset (R^{-1}R)^o = 1$.

d. Inmediato a partir de los items anteriores.

□

En analogía con lo definido en el caso de las categorías regulares, decimos que un par de aplicaciones f y g **tabulan** un morfismo R, y que R es **tabular** si $f^og = R$ y $ff^o \cap gg^o = 1$. Una alegoría en la que todos los morfismos sean tabulares se dice una alegoría **tabular**.

Ejemplo 4.2.2.
- *La alegoría de relaciones de una categoría regular es tabular.*
- *Si $\mathscr{V}$ es un local conexo, entonces $Rel_{\mathscr{V}}$ no es tabular.*

Proposición 4.2.3 ([Freyd & Scedrov 1990], 2.14)**.** *a. Si $ff^o \cap gg^o = 1$, entonces f y g forman un par mónico en la categoría de aplicaciones.*

b. Si f, g tabulan R, entonces $x^oy \subset R$ sii existe (un único) h tal que $x = hf$ e $y = hg$.

c. Las tabulaciones en una alegoría son únicas salvo un único isomorfismo.

d. Si un morfismo coreflexivo R es tabular, entonces existe una aplicación mónica h tal que $R = h^oh$.

e. $xf = yg$ *sii* $x^o y \subset fg^o$.

Demostración. *a.* Si $hf = h'f$ y $hg = h'g$, entonces $h = h1 = h(ff^o \cap gg^o) = hff^o \cap hgg^o = h'ff^o \cap h'gg^o = h'(ff^o \cap gg^o) = h'1 = h'$.

b. ($\Rightarrow$) Suponga que $x^o y \subset f^o g$. Defina $h = xf^o \cap yg^o$. Es fácil ver que h satisface la conclusión de esta dirección.

($\Leftarrow$) Si $x = hf$ e $y = hg$, entonces $x^o y = f^o h^o hg \subset f^o g$.

c. Se sigue de *b.*

d. Se sigue de *b.*

e. ($\Rightarrow$) Suponga que $xf = yg$, entonces $x^o y \subset x^o ygg^o = x^o xfg^o \subset fg^o$.

($\Leftarrow$) Suponga que $x^o y \subset fg^o$, entonces $yg \subset xx^o yg \subset xfg^o g \subset xf$. Por la proposición 5.2.2. *a.* tenemos que $xf = yg$.

$\square$

Cuando trabajamos con una alegoría tabular podemos recuperar la alegoría a través de la alegoría de relaciones de la categoría de aplicaciones. Esta última categoría no necesariamente resulta regular: su posible carencia será la de un objeto final.

Proposición 4.2.4 ([Freyd & Scedrov 1990], 2.147)**.** *Si* $\mathbb{A}$ *es una alegoría tabular, entonces* $Map(\mathbb{A})$ *tiene pullbacks, igualadores, imágenes y estas son estables bajo pullbacks.*

Demostración. 1. *Existencia de pullbacks.* Dadas $f : A \to C$ y $g : B \to C$ aplicaciones, sean x e y aplicaciones tales que tabulen fg^o. Afirmamos que el siguiente diagrama es un pullback en $Map(\mathbb{A})$.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "y"] \arrow[d, "x"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

De la parte *e.* de la anterior proposición, obtenemos que el diagrama conmuta. Sean $a : Q \to A$ y $b : Q \to B$ aplicaciones tales que $af = bg$, entonces $a^o b \subset fg^o$. Por la parte *b.* de la anterior proposición, tenemos que existe una única aplicación h tal que $a = hx$ y $b = hy$.

2. *Existencia de igualadores.* Dadas $f, g : A \to B$ aplicaciones, tenemos que $Dom(f \cap g)$ es coreflexivo y tabular, por lo tanto, por la parte *d.* de la anterior proposición, existe una aplicació h mono tal que $h^o h = Dom(f \cap g)$. Como $h^o h = Dom(f \cap g) \subset fg^o$, entonces $hf = hg$. Sea j una aplicación tal que $jf = jg$, luego $j^o j \subset fg^o$. Como $j^o j \subset 1$, entonces $j^o j \subset 1 \cap fg^o = Dom(f \cap g)$. Por lo tanto existe un único k tal que $j = kh$.

3. *Existencia de imágenes.* Sea $f : A \to B$ una aplicación. Como $Dom(f^o)$ es un morfismo coreflexivo tabular, entonces existe una aplicación mono $h : C \to B$ tal que $h^o h = Dom(f^o)$. De $f^o f \subset Dom(f^o)$ se sigue que existe una única aplicación $g : A \to C$ tal que $f = gh$. Vamos a ver que esta es una factorización cubierta-mono de f. Sean $\overline{g}$ y $\overline{h}$ aplicaciones tales que h es mono y $f = \overline{g}\overline{h}$. Luego $h^o h = 1 \cap \overline{h}^o \overline{g}^o \overline{g}\overline{h} \subset \overline{h}^o \overline{g}^o \overline{g}\overline{h} \subset \overline{h}^o \overline{h}$. Como $\overline{h}$ es mono, entonces, por la parte *a.* de la anterior proposición, $\overline{h}\overline{h}^o = 1$, lo que implica que $\overline{h}$ tabula $\overline{h}^o \overline{h}$. Así, existe una única aplicación j tal que $h = j\overline{h}$. Por lo tanto h es la imagen de f.

4. *Las imágenes son estables.* Para demostrar esto observemos primero que una aplicación g es una cubierta sii g^o es entero. En efecto, si g es una cubierta, entonces 1 es su imagen, y por lo tanto tabula $Dom(g^o)$, de donde $1 = Dom(g^o) \subset g^o g$. Recíprocamente, si $1 \subset g^o g$, entonces $Dom(g^o) = 1$ y 1 tabula ese morfismo. Con esta observación obtenemos la estabilidad de las imágenes: sean f y g aplicaciones con g cubierta, si x e y forman un pullback de las dos aplicaciones anteriores, entonces tabulan fg^o, de donde $x^o y = fg^o$. Como g^o es entera, entonces $fg^o = x^o y$ también lo es. De aquí se sigue que x^o es entero, y por lo tanto x es una cubierta.

□

Vemos que la tabularidad de una alegoría asegura que la categoría de aplicaciones llega a ser casi regular. En busca de condiciones para completar la regularidad, es decir, la existencia de objeto final, se realiza la siguiente definición.
Un objeto U de una alegoría se dice una **unidad** si 1_U es su máximo endomorfismo y todo objeto es el dominio de un morfismo entero con codominio U. Una alegoría con unidad se dice **unitaria**.

Ejemplo 4.2.3.
- *La alegoría de relaciones de una categoría regular es unitaria: las unidades son precisamente los objetos finales de la categoría.*
- *$Rel_{\mathscr{V}}$ es unitaria: los singletons son las unidades.*

Proposición 4.2.5 ([Freyd & Scedrov 1990], 2.15)**.** *a. Toda unidad es un objeto final en la categoría de aplicaciones.*

b. La categoría de aplicaciones de una alegoría tabular unitaria es regular.

Demostración. *a.* Observemos que si U es una unidad y $Cor(U)$ es el semiretículo de morfismos coreflexivos sobre U, entonces $Dom : (A,U) \to Cor(U)$ es un isomorfismo de semiretículos de (A,U) sobre un ideal de $Cor(U)$, para cada objeto A. En efecto, $Dom(R) \subset Dom(S)$ y la proposición 4.2.1. *e.* implican que $R \subset Dom(S)R \subset SS^o R \subset S$. Ahora, si $S \subset Dom(R)$, entonces $Dom(SR) \subset Dom(S) \subset S$ pues S es coreflexivo, y $S \subset S(Dom(R))S \subset S \cap SRR^o S \subset Dom(SR)$, por lo tanto $S = Dom(SR)$. Ahora solo nos resta ver que el ideal sobre el cual Dom es un isomorfismo es todo $Cor(U)$, lo cual se sigue de que por hipótesis existe un $R \in (A,U)$ entero, para el cual necesariamente $Dom(R) = 1$. Con esto hemos demostrado que Dom es también sobre

En base a todo lo anterior, existe una única aplicación $!_A : A \to U$ y es precisamente el único morfismo para el cual $Dom(!_A) = 1$.

b. Inmediato a partir de lo anterior y de la proposición 4.2.4.

□

Observe que si U es una unidad, entonces $!_A !_B^o$ es el máximo de (A, B).
Una **representación de alegorías** es un funtor entre alegorías que preserva reciprocación e intersección. La representación se dice **unitaria** si preserva unidades. Dada una representación unitaria de alegorías unitarias $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, esta induce una representación de categorías regulares $Map(F) : Map(\mathbb{A}) \to Map(\mathbb{B})$ pues las aplicaciones y tabulaciones fueron definidas ecuacionalmente usando las operaciones de reciprocación e intersección.
Lo que habíamos afirmado al inicio de esta sección tiene su expresión completa en el siguiente teorema.

TEOREMA 4.2.1 ([Freyd & Scedrov 1990], 2.154)**.** *La categoría de alegorías pequeñas unitarias tabulares es isomorfa a la categoría de categorías pequeñas regulares.*

Demostración. El funtor que lleva una alegoría pequeña unitaria tabular en su categoría de relaciones, es el inverso del funtor que lleva una categoría pequeña regular en su alegoría de relaciones. □

4.2.3. Representación de alegorías unitarias tabulares

Vamos a traducir el teorema de Henkin-Lubkin en un teorema de representación de alegorías que implica el teorema de completitud para teorías regulares.

TEOREMA 4.2.2 (Teorema de representación de alegorías unitarias tabulares)**.** *Toda alegoría pequeña unitaria y tabular puede ser fielmente representada en una potencia de la alegoría de conjuntos.*

Demostración. Sea $\mathbb{A}$ una alegoría pequeña unitaria tabular. Luego $\mathbb{C} = Map(\mathbb{A})$ es una categoría pequeña regular tal que $\mathbb{A} \cong Rel(\mathbb{C})$. Por el teorema de Henkin-Lubkin, existe una representación fiel de categorías regulares, que refleja isos $\mathbb{C} \to \mathscr{S}^{Ob(\mathbb{C})}$, la cual induce una representación unitaria fiel de alegorías $Rel(\mathbb{C}) \to Rel(\mathscr{S}^{Ob(\mathbb{C})}) \xrightarrow{\cong} Rel(\mathscr{S})^{Ob(\mathbb{C})}$. □

4.2.4. Reflexión tabular de una alegoría

En esta sección remitimos a las construcciones y hechos mencionados en el apéndice de escisión de idempotentes.

Proposición 4.2.6 ([Freyd & Scedrov 1990], 2.162-63)**.** *a. Si R y S escinden un idempotente simétrico, entonces $S = R^o$.*

b. Un morfismo coreflexivo A es un idempotente que se escinde si, y solo si, existe una aplicación h tal que $h^o h = A$, $hh^o = 1$, i.e., sii A es tabular.

c. Una relación de equivalencia E es un idempotente que se escinde si, y solo si, existe una aplicación f tal que $ff^o = E$ y $f^o f = 1$.

Demostración. *a.* Supongamos que $SR = 1$ y $(RS)^o = RS$. Observe que

$$R^o = (SR)R^o \subset SS^o(SR)R^o = SS^oR^o = S(RS)^o = SRS = S,$$

$$S^o = S^o(SR) \subset S^o(SR)R^oR = S^oR^oR = (RS)^oR = RSR = R.$$

b. ($\Rightarrow$) Sea A un morfismo coreflexivo, idempotente, que se escinde, entonces, por la parte *a.*, existe un morfismo S tal que $A = S^oS$ y $SS^o = 1$. Solo resta ver que S es simple. En efecto, como $S \subset SS^oS = SA \subset S$, luego $S = SS^oS$, de donde $S^oS = S^oSS^oS = A^2 \subset A \subset 1$. ($\Leftarrow$) Inmediato.

c. Similar a la parte *b.*

□

Dada una alegoría $\mathbb{A}$ y una clase $\mathscr{I}$ de idempotentes simétricos de la alegoría, podemos definir de forma obvia una estructura de alegoría en la categoría $Split(\mathscr{I})$ a partir de las operaciones de alegoría en $\mathbb{A}$. Si $\mathscr{I}$ contiene todos los morfismos identidad de $\mathbb{A}$, sabemos que la inclusión $F : \mathbb{A} \to Split(\mathscr{I})$ es un funtor fiel y pleno, el cual también resulta ser una representación de alegorías. Si tomamos $\mathscr{I}$ como el conjunto de morfismos coreflexivos, $Cor(\mathbb{A})$, la propiedad universal de F implicará que para cualquier alegoría tabular $\mathbb{B}$ y representación de alegorías $G : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, existe un único funtor (salvo isomorfismos naturales) $Split(Cor(\mathbb{A})) \to \mathbb{B}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & Split(Cor(\mathbb{A})) \arrow[dr] & \\ \mathbb{A} \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "G"'] & & \mathbb{B}. \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, lo único que le falta a $Split(Cor(\mathbb{A}))$ para ser la reflexión tabular de $\mathbb{A}$ es ser tabular. En busca de condiciones que impliquen lo anterior, se plantea la siguiente definición.
Diremos que una alegoría es **pretabular** si todo morfismo está contenido en un morfismo tabular.

Proposición 4.2.7 ([Freyd & Scedrov 1990], 2.165-2.167)**.** *a. Una alegoría es tabular si y solo si es pretabular y todos los morfismos coreflexivos se escinden.*

b. Si $\mathbb{A}$ es pretabular, entonces $Split(Cor(\mathbb{A}))$ es pretabular.

c. Si $\mathbb{A}$ es pretabular, entonces $Split(Cor(\mathbb{A}))$ es la reflexión tabular de $\mathbb{A}$.

Demostración. *a.* En virtud de la anterior proposición, es claro que toda categoría tabular es pretabular y que todos los morfismos coreflexivos se escinden. Resta demostrar el recíproco. Sea R un morfismo de la alegoría; vamos a construir una tabulación de este. Por hipótesis existen aplicaciones f y g tales que $R \subset f^o g$ y $ff^o \cap gg^o = 1$. Como $S = 1 \cap fRg^o$ es coreflexivo, entonces se escinde, de donde existe una aplicación h tal que $A = h^o h$ y $hh^o = 1$. Afirmamos que hf y hg tabulan a R. En efecto,

$$(hf)^o(hg) = f^o h^o hg \subset f^o fRg^o g \subset R,$$

$$R = R \cap f^o g \subset f^o(1 \cap fRg^o)g = f^o h^o hg = (hf)^o(hg).$$

Finalmente, observe que

$$(hf)(hf)^o \cap (hg)(hg)^o = hff^o h^o \cap hgg^o h^o = h(ff^o \cap gg^o)h^o = hh^o = 1.$$

b. Sea $S : R_1 \to R_2$ un morfismo de $Split(Cor(\mathbb{A}))$. Como $\mathbb{A}$ es pretabular, existen aplicaciones f y g tales que $S \subset f^o g$ y $ff^o \cap gg^o$. Haga $T = Dom(fR_1) \cap Dom(gR_2)$, entonces es fácil ver que TfR_1 y TgR_2 tabulan $S : R_1 \to R_2$.

c. Se sigue inmediatamente a partir de *a.*,*b.* y los comentarios hechos antes de esta proposición. □

Por todo lo anterior, dada una alegoría pretabular unitaria $\mathbb{A}$, esta se puede considerar como una subalegoría plena (es decir, una subcategoría cuyo funtor de inclusión es una representación de alegorías fiel y plena) de la alegoría tabular y unitaria $Split(Cor(\mathbb{A}))$. Como $Rel(Map(Split(Cor(\mathbb{A})))) \cong Split(Cor(\mathbb{A}))$, vemos que $\mathbb{A}$ se puede considerar como una subalegoría plena de una alegoría de la forma $Rel(\mathbb{C})$ para alguna categoría regular $\mathbb{C}$.

4.2.5. Alegorías distributivas

Una alegoría se dice **distributiva** si posee adicionalmente una operación unaria parcial sobre morfismos y una operación binaria definida entre morfismos con mismo dominio y codominio, notadas como 0_R y $R \cup S$, respectivamente, tales que:

- $d(0_R) = d(R)$, $c(0_R) = c(R)$
- $R \cup R = R$ (idempotencia)
- $R \cup S = S \cup R$ (conmutatividad)
- $R \cup (S \cup T) = (R \cup S) \cup T$ (asociatividad)
- $0_R \cup S = S$ siempre que esté definido
- $R \cup (S \cap R) = R = (R \cup S) \cap R$

- $R0_S = 0_{RS}$
- $R(S \cup T) = RS \cup RT$
- $R \cap (S \cup T) = (R \cap S) \cup (R \cap T)$ (distributividad)

Ejemplo 4.2.4. *Si $\mathbb{C}$ es un prelogos, entonces $Rel(\mathbb{C})$ es una alegoría distributiva.*

Proposición 4.2.8 ([Freyd & Scedrov 1990], 2.212)**.** *Si $\mathbb{A}$ es una alegoría tabular, unitaria y distributiva, entonces $Map(\mathbb{A})$ es un prelogos.*

Demostración. Por las proposiciones 4.2.4. y 4.2.5., sabemos que $Map(\mathbb{A})$ es una categoría regular. Por la proposición 4.2.3., tenemos que dado un objeto A, la función $Sub_{Map(\mathbb{A})}(A) \to Cor(A)$, $h \mapsto h^o h$, es un isomorfismo de órdenes (con inversa monótona). Puesto que $Cor(A)$ tiene uniones, entonces $Sub_{Map(\mathbb{A})}(A)$ también. Bajo esta correspondencia es fácil ver que dado $f : B \to A$ y $A' \in Sub_{Map(\mathbb{A})}(A)$, viéndolo en $Cor(A)$, tenemos que $f^*(A') = 1 \cup fA'f^o$, de donde se sigue que f^* es un homomorfismo de retículos acotados. □

TEOREMA 4.2.3 (Teorema de representación de alegorías distributivas unitarias tabulares)**.** *Toda alegoría distributiva pequeña unitaria y tabular puede ser fielmente representada en una potencia de la alegoría de conjuntos.*

Demostración. Es esencialmente la misma prueba del teorema 4.2.2., usando esta vez el teorema de representación de prelogoi. □

4.3. La alegoría asociada a una teoría intuicionista y teoremas de completitud

En esta sección construiremos la alegoría $\mathbb{A}_T$ asociada a una teoría intuicionista T (regular, coherente, primer orden, órdenes superiores). Esta alegoría resultará pretabular, por lo que su reflexión tabular corresponderá a $Split(Cor(\mathbb{A}_T))$, a partir de la cual obtendremos una categoría regular $Map(Split(Cor(\mathbb{A}_T)))$ que corresponderá con las características específicas de la teoría T (regular, prelogos, logos, topos). Usando los teoremas de representación expuestos a través de este trabajo podremos demostrar teoremas de completitud, entre los cuales se encuentra el teorema de completitud de Gödel para la lógica clásica de primer orden.

4.3.1. Teorías intuicionistas

Sintaxis

En esta sección haremos una descripción de la sintaxis de nuestras teorías. Tendremos:

- un conjunto de tipos Σ;

- un conjunto de variables *Var*;
- un conjunto de símbolos de predicado *Pred*;
- asignaciones de tipos $type : Var \to \Sigma$ y $type : Pred \to \Sigma$, tales que $type^{-1}(\sigma)$ es infinito para cada $\sigma \in \Sigma$;
- símbolos de predicado para contradicción y tautología $\bot, \top \in Pred$, tales que $type(\bot) = type(\top) = \emptyset$;
- símbolos de predicado para la igualdad $=_\sigma \in Pred$, tales que $type(=_\sigma) = \sigma\sigma$ para cada $\sigma \in \Sigma$;
- conectivos $\wedge$, $\vee$, $\to$;
- cuantificadores $\exists$, $\forall$;
- paréntesis $($, $)$.

La definición inductiva del conjunto de fórmulas se realiza de la manera usual, respetando siempre la asignación de tipos de variables y símbolos de predicado. Escribiremos $\varphi \leftrightarrow \psi$ y $\neg\varphi$ para significar $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ y $\varphi \to \bot$, respectivamente. Es importante recordar que en el caso general no podemos definir los conectivos y cuantificadores a partir de unos pocos, como usualmente se hace para economizar los símbolos en la sintaxis, pues el cálculo que se usará será intuicionista. En nuestra presentación trabajaremos directamente con objetos de la forma $\varphi \vdash \psi$, donde φ y ψ son fórmulas, llamados **afirmaciones**. Una **teoría** es un conjunto de afirmaciones.

Cálculo de afirmaciones tipo Gentzen

El cálculo de afirmaciones intuicionista con tipos tiene los siguientes axiomas y reglas de inferencia:
Aquí φ, ψ, ϑ, x y x' son fómulas y variables arbitrarias, respectivamente.

1. $\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}$
2. Si cada variable libre en ψ ocurre libremente en φ o ϑ, entonces
$$\frac{\varphi \vdash \psi \qquad \psi \vdash \vartheta}{\varphi \vdash \vartheta}$$
3. $\dfrac{}{\varphi \vdash \top}$
4. $\dfrac{}{\varphi \wedge \psi \vdash \varphi}$

$$\frac{}{\varphi \wedge \psi \vdash \psi}$$

5. $$\frac{\varphi \vdash \psi \qquad \varphi \vdash \vartheta}{\varphi \vdash \psi \wedge \vartheta}$$

6. $$\frac{}{\bot \vdash \varphi}$$

7. $$\frac{}{\varphi \vdash \varphi \vee \psi}$$

$$\frac{}{\psi \vdash \varphi \vee \psi}$$

8. $$\frac{\varphi \vdash \vartheta \qquad \psi \vdash \vartheta}{\varphi \vee \psi \vdash \vartheta}$$

9. $$\frac{\varphi \vdash \psi \to \vartheta}{\varphi \wedge \psi \vdash \vartheta}$$ (doble línea)

10. Si x no ocurre libremente en ψ, entonces
$$\frac{\exists x\varphi \vdash \psi}{\varphi \vdash \psi \wedge (x = x)}$$

11. Si x no ocurre libremente en ψ, entonces
$$\frac{\psi \vdash \forall x\varphi}{\psi \wedge (x = x) \vdash \varphi}$$

12. Si φ es atómica y φ' es el resultado de reemplazar una ocurrencia de x con x', entonces
$$\frac{}{\varphi \wedge (x = x') \vdash \varphi'}$$

13. Si x y x' son variables distintas, entonces
$$\frac{}{(x = x) \vdash \exists x'(x' = x)}$$

La **lógica coherente** es el fragmento de la lógica anteriormente descrita que se obtiene al omitir $\to$, $\forall$ y todas sus reglas, y al agregar los siguientes dos axiomas:

14. Si x no es libre en ψ, entonces
$$\frac{}{\psi \wedge \exists x\varphi \vdash \exists x(\psi \wedge \varphi)}$$

15. $$\frac{}{\varphi \wedge (\psi \vee \vartheta) \vdash (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \vartheta)}$$

La **lógica regular** se obtiene a partir de la lógica coherente omitiendo además $\bot$, $\vee$ y sus reglas.
Diremos que una teoría T se dice regular o coherente si está en la sintaxis correspondiente a la lógica regular o coherente, respectivamente. Diremos que T **deduce** una afirmación $\varphi \vdash \psi$, lo que escribiremos como $T \vdash (\varphi \vdash \psi)$, si $\varphi \vdash \psi$ se puede obtener a partir de las afirmaciones de T, los axiomas y reglas de inferencia, en un número finito de pasos.
No consideraremos fórmulas que tengan variables simultáneamente libres y acotadas pues podemos obtener fórmulas equivalentes que no padezcan este inconveniente. Nunca permitiremos sustituir de tal forma que una variable libre pueda ser atrapada por un cuantificador.

Contextos

Un **contexto** es una sucesión finita de variables distintas $\overrightarrow{x} = x_1 \dots x_n$. Permitimos el caso $n = 0$, o contexto vacío. La función $type : Var \to \Sigma$ se puede extender naturalmente, mediante sucesiones, a $type : Seq(Var) \to Seq(\Sigma)$. Decimos que un contexto $\overrightarrow{x}$ es **adecuado** para una fórmula φ si las variables libres de la fórmula ocurren en el contexto. Una **fórmula en contexto** es una expresión de la forma $\overrightarrow{x}.\varphi$, donde $\overrightarrow{x}$ es un contexto adecuado para φ.

4.3.2. La alegoría asociada a una teoría regular

Sea T una teoría regular. A continuación vamos a construir la **alegoría asociada a la teoría** T, que escribiremos como $\mathbb{A}_T$ y resultará pretabular unitaria.

- **Objetos:** tuplas finitas de tipos.
- **Morfismos:** un morfismo de α en β será una fórmula en contexto $\overrightarrow{x}.\varphi$, donde $\overrightarrow{x}$ tiene el tipo de la concatenación $\alpha\beta$. En realidad, nuestros morfismos serán las clases de equivalencia de una relación $\sim$ definida entre fórmulas en contextos del mismo tipo mediante

$$\overrightarrow{x}.\varphi \sim \overrightarrow{y}.\psi \text{ sii } T \vdash (\varphi(\overrightarrow{z}) \equiv \psi(\overrightarrow{z})),$$

  donde el lado derecho de esta equivalencia quiere decir que $T \vdash (\varphi(\overrightarrow{z}) \vdash \psi(\overrightarrow{z}))$ y $T \vdash (\psi(\overrightarrow{z}) \vdash \varphi(\overrightarrow{z}))$; y $\overrightarrow{z}$ es una tupla de variables distintas con el mismo tipo que $\overrightarrow{x}$ y $\overrightarrow{y}$.
- **Composición:** Dados $[\overrightarrow{x_1}\overrightarrow{x_2}.\varphi] : \alpha \to \beta$ y $[\overrightarrow{y_1}\overrightarrow{y_2}.\psi] : \beta \to \gamma$ morfismos, con $type(\overrightarrow{x_1}) = \alpha$, $type(\overrightarrow{x_2}) = type(\overrightarrow{y_1}) = \beta$ y $type(\overrightarrow{y_2}) = \gamma$. Defina

$$[\overrightarrow{x_1}\overrightarrow{x_2}.\varphi][\overrightarrow{y_1}\overrightarrow{y_2}.\psi] = [\overrightarrow{x_1}\overrightarrow{y_2}.(\exists \overrightarrow{z}(\varphi(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{z}) \wedge \psi(\overrightarrow{z}, \overrightarrow{y_2})))] : \alpha \to \gamma,$$

  donde $\overrightarrow{z}$ es una tupla de variables distintas con tipo β.
- **Reciprocación:** Dada $[\overrightarrow{x_1}\overrightarrow{x_2}.\varphi] : \alpha \to \beta$, defina $[\overrightarrow{x_1}\overrightarrow{x_2}.\varphi]^o = [\overrightarrow{x_2}\overrightarrow{x_1}.\varphi] : \beta \to \alpha$.
- **Intersección:** Dados $[\overrightarrow{x_1}\overrightarrow{x_2}.\varphi] : \alpha \to \beta$ y $[\overrightarrow{y_1}\overrightarrow{y_2}.\psi] : \alpha \to \beta$ morfismos, defina

$$[\overrightarrow{x_1}\overrightarrow{x_2}.\varphi] \cap [\overrightarrow{y_1}\overrightarrow{y_2}.\psi] = [\overrightarrow{z_1}\overrightarrow{z_2}.(\varphi(\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2}) \wedge \psi(\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2}))] : \alpha \to \beta,$$

  donde $\overrightarrow{z_1}$ y $\overrightarrow{z_1}$ son tuplas de variables distintas con $type(\overrightarrow{z_1}) = \alpha$ y $type(\overrightarrow{z_2}) = \beta$.
- **Unidad:** el tipo vacío funciona como unidad.

La verificación de los axiomas de alegoría es fácil y se sigue del cálculo de afirmaciones expuesto en la sección anterior. Vamos a verificar la pretabularidad. Dadas dos sucesiones finitas de tipos α y β, considere los morfismos

$$f = [\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{y}\,\overrightarrow{x'}.((\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = x_i') \wedge (\bigwedge_{j=1}^{m} y_j = y_j))] : \alpha\beta \to \alpha,$$

$$g = [\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{y}\,\overrightarrow{y'}.((\bigwedge_{j=1}^{m} y_j = y_j') \wedge (\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = x_i))] : \alpha\beta \to \beta.$$

es fácil ver que f y g son aplicaciones que tabulan al morfismo maximal de α en β.
Si T es una teoría coherente, podemos ver que $\mathbb{A}_T$ es una alegoría distributiva con las siguientes operaciones:

- **Unión:** Dados $[\overrightarrow{x_1}\overrightarrow{x_2}.\varphi] : \alpha \to \beta$ y $[\overrightarrow{y_1}\overrightarrow{y_2}.\psi] : \alpha \to \beta$ morfismos, defina

  $$[\overrightarrow{x_1}\overrightarrow{x_2}.\varphi] \cup [\overrightarrow{y_1}\overrightarrow{y_2}.\psi] = [\overrightarrow{z_1}\overrightarrow{z_2}.(\varphi(\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2}) \vee \psi(\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2}))] : \alpha \to \beta,$$

  donde $\overrightarrow{z_1}$ y $\overrightarrow{z_1}$ son tuplas de variables distintas con $type(\overrightarrow{z_1}) = \alpha$ y $type(\overrightarrow{z_2}) = \beta$.

- **Cero:** tome siempre 0 como el morfismo $\perp$ en el contexto que se necesite.

Debido a todo lo anterior y la sección 4.2 vemos que:

- Si T es una teoría regular, entonces $\mathbb{A}_T$ es una alegoría pretabular unitaria, y por lo tanto, $Map(Split(Cor(\mathbb{A}_T)))$ es una categoría regular.
- Si T es una teoría coherente, entonces $\mathbb{A}_T$ es una alegoría distributiva pretabular unitaria, y por lo tanto, $Map(Split(Cor(\mathbb{A}_T)))$ es un prelogos.

4.3.3. Teoremas de completitud

Diremos que una teoría T **satisface una afirmación** $\varphi \vdash \psi$ **en una alegoría** $\mathbb{A}$ si para toda representación unitaria de alegorías $F : \mathbb{A}_T \to \mathbb{A}$ se tiene que $F([\overrightarrow{x}.\varphi]) \subset F([\overrightarrow{x}.\psi])$, donde $\overrightarrow{x}$ es un contexto que incluye las variables libres de ambas fórmulas. Si todo esto se cumple, escribiremos $T \models_{\mathbb{A}} (\varphi \vdash \psi)$.

TEOREMA 4.3.1 ([Freyd & Scedrov 1990], B.42, Teorema de completitud para teorías regulares)**.** *Sea T una teoría regular, entonces $T \models_{Rel(\mathscr{S})} (\varphi \vdash \psi)$ sii $T \vdash (\varphi \vdash \psi)$.*

En la demostración omitiremos los contextos, los cuales no significan ninguna dificultad, pero saturan de símbolos la prueba.

Demostración. ($\Rightarrow$) Por el teorema de representación de alegorías unitarias tabulares, existe un conjunto I y una representación fiel, unitaria, de alegorías unitarias y tabulares, que refleja isos, $F = \langle F_i \rangle : \mathbb{A}_T \to Rel(\mathscr{S})^I$. Por hipótesis, tenemos que $F_i([\varphi]) \subset F_i([\psi])$ para todo i, lo cual implica que $F([\varphi]) \subset F([\psi])$, de donde $F([\varphi \wedge \psi]) = F([\varphi])$. Lo anterior implica que $[\varphi \wedge \psi] = [\varphi]$ y $T \vdash (\varphi \vdash \varphi \wedge \psi)$. Como $\vdash (\varphi \wedge \psi \vdash \psi)$, obtenemos $T \vdash (\varphi \vdash \psi)$.
($\Leftarrow$) Si $T \vdash (\varphi \vdash \psi)$, entonces $T \vdash (\varphi \wedge \psi \equiv \psi)$, de donde $[\varphi \wedge \psi] = [\varphi] \cap [\psi] = [\psi]$. Esto implica que $T \models_{Rel(\mathscr{S})} (\varphi \vdash \psi)$.

□

TEOREMA 4.3.2 ([Freyd & Scedrov 1990], B.42, Teorema de completitud para teorías coherentes)**.** *Sea T una teoría coherente, entonces $T \models_{Rel(\mathscr{S})} (\varphi \vdash \psi)$ sii $T \vdash (\varphi \vdash \psi)$.*

Demostración. Use el teorema de representación de alegorías distributivas. □

Teorema de completitud de Gödel

Una teoría coherente T se dice **booleana** si contiene afirmaciones $\top \vdash \exists x(x = x)$ para cada tipo y para cada fórmula φ existe una única fórmula φ^- tal que contiene las afirmaciones $\top \vdash \varphi \vee \varphi^-$ y $\varphi \wedge \varphi^- \vdash \perp$.
Observe que una teoría booleana permite reconstruir en ella todos los conectivos y cuantificadores solo a partir del fragmento de la lógica coherente. Además, debido a que toda representación de prelogoi preserva complementos, obtenemos como corolario del último teorema el siguiente resultado demostrado por Gödel.

Corolario 4.3.1 ([Freyd & Scedrov 1990], B.42, Teorema de completitud para la lógica clásica de primer orden, Gödel)**.** *Sea T una teoría booleana de primer orden, entonces $T \models_{Rel(\mathscr{S})} (\varphi \vdash \psi)$ sii $T \vdash (\varphi \vdash \psi)$.*

5 Pretopoi y categorías abelianas

En este capítulo vamos a estudiar la relación entre los pretopoi y las categorías abelianas. Sabemos que la intersección de estas dos clases de categorías es trivial, lo que nos lleva a preguntar por las causas de esta bifurcación tan salvaje. Vamos a ver que aquellas se encuentran en el comportamiento del objeto inicial. Todo lo que hagamos se encuentra en [Freyd 1997].

Observemos lo siguiente: (i) para cualquier objeto A de una categoría abeliana, la proyección $A \times 0 \to A$ es un isomorfismo; (ii) para cualquier objeto T de un pretopos, la proyección $T \times 0 \to 0$ es un isomorfismo. Esto no es mera coincidencia; vamos que ver que existe una clase de categorías, llamadas AT, tales que una categoría es abeliana sii es AT y satiface la condición (i), y una categoría es un pretopos sii es AT y satisface la condición (ii).

En este capítulo supondremos que todas las categorías consideradas cumplen las siguientes propiedades:

- son finitamente completas;
- tienen objeto inicial;
- existen pushouts para pares de morfismos, con uno de ellos mono;
- existen pushouts para pares núcleo.

En una categoría tal, dado un objeto X y $\pi_1 : 0 \times X \to 0$ y $\pi_2 : 0 \times X \to X$ las proyecciones del producto, decimos X es un objeto de tipo T si π_1 es un isomorfismo, y de tipo A si π_2 es un isomorfismo.

5.1. Categorías AT

Una categoría se dice AT si satisface lo siguiente

- es efectiva y regular;
- $! : 0 \to 1$ es mono;
- para cualquier monomorfismo $\iota : X \rightarrowtail Y$ y pushout

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ W & \xrightarrow[j]{} & Z \end{array}$$

se tiene que el anterior diagrama es también un pullback y j es mono;

- el funtor $0 \times -$ preserva pushouts de pares núcleo y de pares de flechas con una de ellas mono;
- para cualquier epimorfismo $f : Y \to 0 \times Z$, si el siguiente diagrama es un pullback, entonces es un pushout;

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ 0 & \longrightarrow & 0 \times Z \end{array}$$

- en la subcategoría plena de objetos tipo T, pushouts de pares de flechas con una de ellas mono son estables bajo pullbacks;
- defina un funtor T a través del siguiente pushout:

$$\begin{array}{ccc} X \times 0 & \xrightarrow{\pi_2} & 0 \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & TX \end{array}$$

  Tenemos que T preserva pullbacks.

  Aquí vale la pena observar que, puesto que $! : 0 \to 1$ es mono, π_2 es un monomorfismo, por lo cual TX está definido;

- para cada morfismo $f : X \to Y$, si Tf y $0 \times f$ son isos, entonces f lo es.

Es fácil ver que toda categoría abeliana y todo pretopos es una categoría AT.
Tenemos las siguientes propiedades básicas.

Proposición 5.1.1. *En toda categoría AT se tiene lo siguiente:*

a. para cada objeto X, $! : 0 \to X$ es un monomorfismo;

b. *coproductos finitos existen;*

c. *coproductos binarios son disyuntos.*

Demostración. a. Como $!: 0 \to 1$ es mono, entonces $! \times 1 : 0 \times X \to 1 \times X$ es mono, pues $- \times X$ preserva pullbacks y, por lo tanto, monomorfismos. Así $! = 0 \xrightarrow{!} 0 \times X \xrightarrow{! \times 1} 1 \times X \cong X$. Puesto que $!: 0 \to 0 \times X$ es mono ya que tiene como retracción a $\pi_1 : 0 \times X \to 0$, entonces $!: 0 \to X$ es mono.

b. Es suficiente demostrar la existencia de coproductos binarios. Sean X e Y objetos cualesquiera de la categoría, entonces el siguiente pushout existe (por ser pushout de monos) y corresponde con el coproducto.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & X \sqcup Y \end{tikzcd}$$

c. Se sigue de la prueba de b.

□

5.2. Categoría de objetos tipo A

Proposición 5.2.1. *X es de tipo A sii existe (un único) $X \to 0$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si X es de tipo A, entonces $X \cong 0 \times X \xrightarrow{\pi_1} 0$.
($\Leftarrow$) Supongamos que existe $p : X \to 0$. Como $!: 0 \to 1$ es un iso, tenemos que para cada objeto Z existe a lo sumo un morfismo $Z \to 0$. Afirmamos que $Y(\pi_1) : Y(X \times 0) = (-, X \times 0) \to Y(X) = (-, X)$ es un iso. Para ver esto, consideremos un objeto Z cualquiera y $Y(\pi_1)_Z = \pi_1^* : (Z, X \times 0) \to (Z, X)$, $f \mapsto f\pi_1$. Por la propiedad universal del producto obtenemos que π_1^* es inyectiva. Si $(Y, X) = \emptyset$, la sobreyectividad es trivial. En caso contrario, existe algún morfismo $Y \to X$ y, por lo tanto, un único $!: Y \to 0$; así, para cada $g : Y \to X$, se tiene que $\langle g, ! \rangle \pi_1 = g$. Finalmente, por Yoneda, tenemos que π_1 es un iso. □

Proposición 5.2.2. *Dada una categoría AT, $\mathbb{C}$, tenemos lo siguiente*

a. *la subcategoría plena de objetos de tipo A, $\mathbb{C}_A$ es coreflexiva;*

b. $\mathbb{C}_A \cong \mathbb{C}/0$*;*

c. *$\mathbb{C}_A$ tiene productos binarios, coproductos finitos y objetos cocientes, ed., conúcleos de pares núcleo;*

d. en $\mathbb{C}_A$ todo mono es el núcleo de su conúcleo, y todo epi es el conúcleo de su núcleo.

Demostración. a. Si $U : \mathbb{C}_A \to \mathbb{C}$ es el funtor olvido, gracias a la proposición anterior es fácil ver que $U \dashv - \times 0$.

b. Inmediato a partir de la proposición anterior.

c. Inmediato a partir de la proposición anterior.

d. Sea $\iota : X \rightarrowtail Y$ un monomorfismo de $\mathbb{C}_A$. Por uno de los axiomas de la categorías AT, podemos construir su conúcleo, el cual será un pushout en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & coker(\iota). \end{tikzcd}$$

Nuevamente, por otro axioma de las categorías AT, tenemos que el anterior diagrama es también un pullback, de donde ι es un núcleo de su conúcleo.

Sea ahora $f : Y \to Z$ un epimorfismo de $\mathbb{C}_A$. Como $C \cong C \times 0$, podemos considerar a f como un epimorfismo $A \to C \times 0$. Construyamos el siguiente pullback

$$\begin{tikzcd} ker(f) \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "f"] \\ 0 \arrow[r] & Z. \end{tikzcd}$$

Por uno de los axiomas de las categorías AT, este pullback es también un pushout; por lo tanto f es el conúcleo de su núcleo.

□

TEOREMA 5.2.1. *La subcategoría plena de los objetos de tipo A de una categoria AT es abeliana.*

Demostración. Se sigue de la proposición anterior y de las proposiciones 3.2.3. y 3.2.4. □

5.3. Categoría de objetos tipo T

En primer lugar observemos que 0 es de tipo A y de tipo T pues $0 \times 0 \cong 0$.

Proposición 5.3.1. *Un objeto X es de tipo T sii para cada objeto Y de tipo A existe un único morfismo $Y \to X$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que X es un objeto de tipo T y sea Y un objeto de tipo A. Por la proposición 5.2.1. tenemos que existe un único morfismo $! : Y \to 0$. Adicionalmente, el conjunto (Y,X) está en biyección con el conjunto $(Y,0)$ a través de $(Y \xrightarrow{f} X) \mapsto (Y \xrightarrow{\langle !,f \rangle} X \times 0 \cong 0)$. De aquí se obtiene que existe un único morfismo $Y \to X$.
($\Leftarrow$) Supongamos que X es un objeto tal que para cada objeto Y de tipo A existe un único morfismo $Y \to X$. Es fácil ver que los objetos que cumplen esta propiedad están cerrados bajo productos, por lo tanto $X \times 0$ cumple esta propiedad. Como $X \times 0$ es de tipo A, entonces existe un único morfismo $1 : X \times 0 \to X \times 0$, de donde $1 = X \times 0 \xrightarrow{\pi_2} 0 \xrightarrow{!} X \times 0$. Por lo tanto π_2 es un iso y X es un objeto de tipo T. □

Proposición 5.3.2. *Dada una categoría AT, $\mathbb{C}$, tenemos que la subcategoría plena de objetos de tipo T, $\mathbb{C}_T$, tiene objeto inicial estricto y es cerrada bajo productos, coproductos, subobjetos y objetos cocientes.*

Demostración. Sea X un objeto de tipo T y $X \to 0$. Por la proposición 5.2.1. se tiene que X es también de tipo A, y por lo tanto, usando la proposición anterior, la identidad es el único morfismo $X \to X$. De esto se sigue que $1 = X \to 0 \xrightarrow{!} X$ y que $X \to 0$ es un iso.
La clausura bajo productos, subobjetos se sigue de la proposición anterior; la clausura bajo coproductos y objetos cocientes se sigue del cuarto axioma de categorías AT. □

Un **pretopos** es un prelogos positivo y efectivo.

TEOREMA 5.3.1. *La subcategoría plena de los objetos de tipo T de una categoria AT es un pretopos.*

Demostración. La proposición 5.3.1. implica que el objeto inicial de esta categoría es estricto. Es efectiva y regular debido al primer axioma de categorías AT. La proposición anterior implica que es finitamente completa y tiene coproductos y cocientes de pares núcleos. Puesto que el sexto axioma de categorías AT afirma que los pushouts de morfismos, con alguno de ellos mono, son estables bajo pullbacks, esto garantiza, junto con todo lo anterior, que esta categoría es un prelogos efectivo. La proposición 5.1.1. afirma que es positiva. □

Proposición 5.3.3. *La subcategoría plena plena de los objetos de tipo T de una categoria AT es reflexiva.*

Demostración. Sea $\mathbb{C}$ una categoría AT y $\mathbb{C}_T$ la subcategoría plena de los objetos de tipo T. Si $U : \mathbb{C}_T \to \mathbb{C}$ es el funtor olvido, afirmamos que $T \dashv U$, donde T es el funtor definido en+ los axiomas de una categoría AT. Veamos primero que TX es un objeto de tipo T para cada objeto X. En efecto, partiendo del pushout

$$\begin{tikzcd} X \times 0 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & 0 \arrow[d] \\ X \arrow[r] & TX \end{tikzcd}$$

en el cual π_1 es un monomorfismo, obtenemos, gracias a uno de los axiomas de las categorías AT, otro pushout

$$\begin{tikzcd} (X \times 0) \times 0 \arrow[r, "\pi_2 \times 0"] \arrow[d, "\pi_1 \times 0"'] & 0 \times 0 \arrow[d] \\ X \times 0 \arrow[r] & TX \times 0. \end{tikzcd}$$

Es fácil ver que el anterior pushout es isomorfo al siguiente pushout

$$\begin{tikzcd} X \times 0 \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & 0 \arrow[d] \\ X \times 0 \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

De donde $TX \times 0 \cong 0$, ed., TX es un objeto tipo T.
La funtorialidad de T se sigue fácilmente de su definición. La adjunción $T \dashv U$ está definida a través de la regla

$$\frac{TX \to Y}{X \to UY = Y}$$

que podemos observar en el diagrama de pushout

$$\begin{tikzcd} X \times 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\ X \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & TX \arrow[dr] & \\ & & Y. \end{tikzcd}$$

$\square$

5.4. Escisión de una categoría AT en un producto de una categoría abeliana y un pretopos

Definimos un morfismo de categorías AT como un funtor que preserva:

- límites;
- objeto inicial;
- pushouts de pares núcleo, y pushouts para pares de morfismos, con uno de ellos mono.

Por la proposición 5.1.1., todo morfismo de categorías AT preserva coproductos.

Sea $\mathbb{C}$ una categoría AT y definamos el funtor $F = \langle - \times 0, T\rangle : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_A \times \mathbb{C}_T$. Observemos lo siguiente:

- Como el funtor $- \times 0$ es un adjunto a derecha, entonces preserva límites. Es inmediato ver que preserva objeto inicial, y gracias al cuarto axioma de las categorías AT tenemos que preserva pushouts de pares núcleo, y pushouts para pares de morfismos, con uno de ellos mono. Así, este funtor es un morfismo de categorías AT.
- El funtor T es un adjunto a izquierda, por lo que preserva colímites. Es fácil ver que también preserva el objeto final,y por un axioma preserva pullbacks, lo que implica que preserva límites. Así, T también es un morfismo de categorías AT.

En conclusión, F es un morfismo de categorías AT.

Proposición 5.4.1. *F es fiel.*

Demostración. Esto se sigue del del octavo axioma para categorías AT. □

De esta forma hemos visto que toda categoría AT se puede representar fielmente en el producto de una categoría abeliana y un topos. Con un axioma más sobre las categorías AT podremos hacer de esta representación una equivalencia de categorías.

Axioma de elección para categorías AT. Para cada objeto X existe un un morfismo $\gamma : TX \to X$ tal que

$$X \times 0 \xrightarrow{\pi_1} X \xleftarrow{\gamma} TX$$

es un coproducto y el morfismo $X \to TX$, que aparece en la definición de TX, es una retracción de γ.

Proposición 5.4.2. *En categorías AT con axioma de elección, F es una equivalencia.*

Demostración. Debido a la proposición anterior, solo nos resta ver que F es pleno y tiene imagen representativa.
Sean $f : 0\times X \to 0\times Y$ y $g : TX \to TY$. Observemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X\times 0 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[r] & TX \arrow[d, "g"] \\
Y\times 0 \arrow[r, "\pi_1"] & Y \arrow[r, shift right] & TY \arrow[l, shift right, "\gamma"']
\end{tikzcd}$$

Por el axioma de elección para categorías AT, tenemos que $X = (X\times 0)\sqcup TX$. Por la propiedad universal del coproducto obtenemos un morfismo $\binom{f\pi_1}{g\gamma} : X \to Y$. Es fácil ver que para este morfismo $\binom{f\pi_1}{g\gamma}\times 0 = f$ y $T\binom{f\pi_1}{g\gamma} = g$. Por lo tanto F es pleno.
Sean ahora X un objeto de tipo T e Y un objeto de tipo A. Tenemos lo siguiente

$$(X\sqcup Y)\times 0 \cong (X\times 0)\sqcup(Y\times 0)\cong 0\sqcup Y\cong Y$$

$$T(X\sqcup Y)\cong TX\sqcup TY\cong X\sqcup 0\cong X.$$

Por lo tanto F tiene imagen representativa, y es una equivalencia.

$\square$

6 Conclusiones

La idea de re-presentación nos invita a presentar de nuevo algo: un objeto, un ámbito, un mundo entero, una categoría. Al volver al presentar algo a través de un entorno adecuado, podemos captar características contenidas en ese algo que antes no habían sido observadas en el entorno inicial. La matemática tiene amplia experiencia en el valor que trae consigo este fenómeno: es al pasar del entorno topológico al algebraico, al representar espacios topológicos con grupos, o cadenas de ellos, que los objetos del entorno inicial logran diferenciarse adecuadamente; son las representaciones lineales de objetos algebraicos múltiples las que nos permiten clasificar a estos últimos.
Durante el desarrollo de este trabajo hemos visto la ubicuidad de las representaciones y el movimiento ha sido esencialmente el mismo: representar categorías *abstractas* en categorías *concretas*, potencias de la categoría de conjuntos, categoría de grupos abelianos. Este proceso de representación de lo abstracto en lo concreto ha concluido en teoremas de *completitud*, incluyendo el de Gödel. Lo anterior se logra al asociar a cada teoría (entorno *analítico*) una alegoría (entorno *sintético relacional*) que codifica la información *deductiva* de la teoría. Para que exista completitud, por un lado, esta información debe poder llegar al entorno *semántico* conjuntístico, lo cual se logra a a través de cualquier representación unitaria de la alegoría en la alegoría de conjuntos.
Por otro lado, el entorno semántico conjuntístico debe poder trasladar su información al ámbito deductivo de la teoría, lo cual se sigue de la representación fiel, con reflexión de isomorfismos, de la alegoría asociada a la teoría en una potencia de la alegoría de conjuntos. Lo anterior nos invita a ver los teoremas de completitud como consecuencia de una *suficiente* representación de lo sintáctico en lo semántico, y esta última relación viene también sugerida por otros hechos como el teorema de dualidad de Lawvere. Además, la asociación teoría-alegoría-categoría que presenta la correspondencia mencionada en la introducción, sigue ahondando en la relación *análisis-síntesis* que en el fenómeno de completitud puede ser pensada como dialéctica entre polaridades *coextensivas*. Mientras que en el fenómeno de incompletitud no son más coextensivas y la polaridad sintética excede a la analítica.
Adicionalmente, hemos observado que en las categorías de Grothendieck la distributividad de un retículo de subobjetos implica que esta sea un álgebra de Heyting. Hecho sencillo pero que invita a ahondar en la relación entre ciertas categorías de Grothendieck y la lógica intuicionista.
Finalmente, gracias a la respuesta de Freyd a Pratt, hemos visto que los pretopoi y las categorías abelianas bifurcan tan radicalmente debido a las diferencias en los comportamientos de sus objetos iniciales. En este análisis se introdujeron las categorías AT que representan la amalgama exacta y, a la vez, el umbral de separación esencial entre pretopoi y categorías abelianas.

7 Apéndice

Escisión de Idempotentes

Fijemos una categoría $\mathbb{A}$ para esta sección.
Diremos que un morfismo $e : A \to B$ es un **idempotente** si cumple que $e^2 = e$. El idempotente e se **escinde** si, por definición, existen morfismos $x : A \to B$ e $y : B \to A$ tales que $e = xy$ e $yx = 1_B$.
Cualesquiera dos escisiones de un mismo idempotente son isomorfas en el siguiente sentido: si los pares $(A \xrightarrow{x} B, B \xrightarrow{y} A)$ y $(A \xrightarrow{x'} B', B' \xrightarrow{y'} A)$ conforman dos escisiones del idempotente e, entonces existe un único isomorfismo $z : B \to B'$ que hace conmutar el siguiente diagrama; para ver esto, tome $z = yx'$, su inversa es $y'x$.

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dd, "z"] \arrow[dr, "y"] & \\
A \arrow[ur, "x"] \arrow[dr, "x'"'] & & A \\
& B' \arrow[ur, "y'"'] &
\end{tikzcd}$$

Si tomamos una clase de idempotentes $\mathscr{E}$ de la categoría $\mathbb{A}$, podemos formar la **categoría de escisión de la clase** $\mathscr{E}$, denotada $Split(\mathscr{E})$, tomando como objetos a la clase $\mathscr{E}$ y como morfismos a las triplas (A, x, B), donde $A, B \in \mathscr{E}$ y x es un morfismo de $\mathbb{A}$ tal que $Ax = x = xB$.
Cuando $|\mathbb{A}| \subset \mathscr{E}$, podemos definir de manera natural un funtor fiel y pleno $F : \mathbb{A} \to Split(\mathscr{E})$; por lo tanto, $\mathbb{A}$ es equivalente a una subcategoría plena de $Split(\mathscr{E})$. Además, todo idempotente $A \xrightarrow{e} B \in \mathscr{E}$ se escinde en $Split(\mathscr{E})$ (es decir, al ser visto como Fe) a través del par canónico $(1_A \xrightarrow{e} e, e \xrightarrow{e} 1_B)$. El funtor F es universal respecto a esta situación: si $G : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ es un funtor y, para cada $e \in \mathscr{E}$, se da una escisión (x, y) de Ge en $\mathbb{B}$, entonces existe un único funtor $Split(\mathscr{E}) \to \mathbb{B}$ que lleva, para cada $e \in \mathscr{E}$, la escisión canónica de Fe en la escisión dada de Ge tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
& Split(\mathscr{E}) \arrow[dr] & \\
\mathbb{A} \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "G"'] & & \mathbb{B}
\end{tikzcd}$$

Si tomamos a $\mathscr{E}$ como la clase de todos los idempotentes, la categoría $Split(\mathscr{E})$ se denomina el **completamiento idempotente** de la categoría $\mathbb{A}$.

Bibliografía

[Barr & Grillet & van Osdol 1971] Michael Barr, Pierre A. Grillet, Donovan H. van Osdol, *Exact Categories and Categories of Sheaves, Lecture Notes in Mathematics,* Berlin: Springer, 1971.

[Barwise 1989] Jon Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical Logic,* Amsterdam: North-Holland, 1989.

[Borceux 1994] Francis Borceux, *Handbook of Categorical Algebra: Volume 2, Categories and Structures,* Cambridge: University Press, 1995.

[Borceux 1994] Francis Borceux, *Handbook of Categorical Algebra: Volume 3, Categories of Sheaves,* Cambridge: University Press, 1995.

[Buchsbaum 1955] David Buchsbaum, "Exact categories and duality", Transactions of the American Mathematical Society 80 (1): 1-34.

[Caicedo 1995] Xavier Caicedo, "Lógica de los haces de estructuras", *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* XIX (74)(1995):569-585.

[Freyd 1964] Peter Freyd, *Abelian Categories. An Introduction to the Theory of Functors*, New York: Harper and Row, 1964.

[Freyd & Scedrov 1990] Peter Freyd, André Scedrov, *Categories, Allegories*, Amsterdam: North-Holland, 1990.

[Freyd 1997] Peter Freyd, Respuesta a Vaughan Pratt, vía online, *http://www.mta.ca/ cat-dist/catlist/1999/atcat,* 1997.

[Grothendieck 1957] Alexander Grothendieck, "Sur quelques points d'algèbre homologique", *Tohoku Math. Journal* 9(1957):119-221.

[Grothendieck 1960-1969] Alexander Grothendieck, *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie,* VII volúmenes (12 partes), Berlín: Springer, 1970-1973 (fascículos originales multicopiados, 1960-1969).

[Kashiwara & Schapira 2005] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves,* New York: Springer, 2005.

[MacLane & Moerdijk] Saunders MacLane, Ieke Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic. A First introduction to Topos Theory,* New York: Springer, 1992.

[McLarty] Colin McLary, *Elementary Categories, Elementary Toposes,* New York: Oxford University Press, 1992.

[Weibel 1995] Charles A. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge: Cambrigde University Press, 1995.