CAPITULO I

1. INTRODUCCION. En una ecuación algébrica de la forma $F(x,y)=0$ ocurren, en general, coeficientes numéricos diferentes de la unidad, que si son reemplazados por parámetros arbitrarios, a, b, c, etc., hacen la ecuación enteramente literal, y nos servirá para representar a una familia de curvas que gozan de propiedades similares, y de las cuales, la ecuación con coeficientes numéricos que dio origen a ella, es una solución particular. Así, las ecuaciones,

$$4x^2+25y^2=100$$

y

$$9y^2+16x^2=144$$

son dos soluciones particulares de la ecuación general

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$$

que nos sirve para representar a todas las elipses que tienen su centro en el origen y están referidas al mismo par de ejes de coordenadas.

Mediante ejemplos sencillos veamos cómo con una ecuación diferencial se puede representar también a un grupo de curvas que gocen de propiedades similares. De la ecuación de la parábola,

$$y^2=2px \tag{1}$$

obtenemos por diferenciación,

$$y\frac{dy}{dx}=p \tag{2}$$

valor de p que subsistituído en la ecuación (1) nos da

$$2x\frac{dy}{dx}=y \tag{3}$$

ecuación diferencial que representa las parábolas que tienen el mismo origen y el mismo eje de simetría.

Consideremos ahora la ecuación,

$$y^2 = ax^3 - bx \tag{4}$$

de la cual, mediante dos diferenciaciones sucesivas, obtenemos estas otras dos ecuaciones;

$$2y \frac{dy}{dx} = 3ax^2 - b \tag{5}$$

$$2y \frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 6ax \tag{6}$$

Por eliminación de los parámetros a y b entre las ecuaciones (4), (5) y (6) obtenemos la ecuación diferencial,

$$3y^2 + 2yx^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 6yx\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{7}$$

A ecuaciones que como en la (3) y la (7) además de las variables figuran las derivadas de esas mismas variables, se da el nombre de *ecuaciones diferenciales*, mientras que a ecuaciones como la (1) y la (4) libres de derivadas, se les denomina *soluciones generales, o primitivas* de las ecuaciones (3) y (7) respectivamente.

Para pasar de la ecuación general (1) a su ecuación diferencial (3) hubo necesidad de una derivación para eliminar al parámetro p, en tanto que, para pasar de la ecuación (4) a su diferencial (7) fueron precisas dos derivaciones para eliminar a los parámetros a y b. En general, para pasar de una ecuación $F(x,y)=0$ que contenga N parámetros $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$, a su ecuación diferencial, se requieren N derivaciones sucesivas.

Inversamente, es de esperarse que de ser posible pasar de la ecuación (3) a la (1) aparezca una constante arbitraria y que al pasar de la ecuación diferencial (7) a su primitiva (4) aparezcan dos constantes o parámetros arbitrarios. Es lógico esperar también que al pasar de una ecuación diferencial que contenga derivadas hasta del enésimo orden, resulten en su ecuación primitiva N constantes arbitrarias. En este proceso inverso, de pasar de una ecuación diferencial a su primitiva, consiste lo que se entiende como **Resolución de una Ecuación Diferencial.**

Todo cuanto llevamos dicho tiene una simple interpretación geométrica la cual pasamos a explicar mediante un ejemplo sencillo. Sea la ecuación diferencial,

$$x^2dy+(3x^2+2xy)\,dx=0 \tag{8}$$

la cual, escrita en la forma,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2+2xy}{x^2} \tag{9}$$

representa la dirección en un punto (x,y) de la curva $F(x,y)=0$, cuya ecuación tratamos de encontrar.

Dibujando un par de ejes rectangulares OX y OY y un punto cualquiera del plano (x',y') cuyas coordenadas medimos y reemplazamos luego estos valores en la ecuación (9) obtenemos así la dirección,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3x'^2+2x'y'}{x'^2} \tag{10}$$

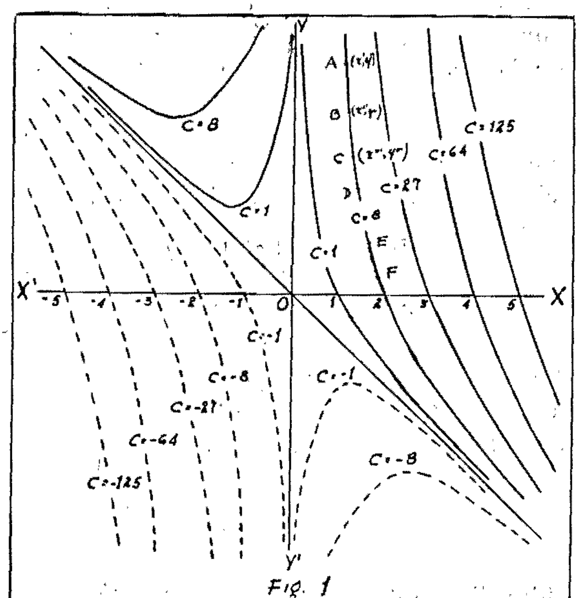

Fig. 1

Si a partir del punto $A(x',y')$, figura 1, continuamos en la dirección dada por (10) y nos movemos en tal dirección hasta un punto B.

muy cercano de A, cuyas coordenadas (x'',y'') medimos y reemplazamos en (9), obtendríamos una nueva dirección sobre la cual podríamos recorrer otro pequeño desplazamiento hasta llegar a un punto $C(x''', y''')$ muy cercano de B.

Por repetición del proceso anterior se obtendría un polígono $ABCDEFG$ ...... etc., y es evidente que haciendo que las distancias AB, BC, CD, etc., que se recorren en diversas direcciones, sean cada vez más y más pequeñas, el límite hacia el cual tiende el polígono será una curva que tendrá una ecuación definida, la cual podemos expresar en la forma,

$$F(x, y, c) = 0 \tag{11}$$

en la cual c es la abscisa del punto en donde la curva corta al eje de las X.

Como la construcción anterior ha podido empezarse en cualquier otro punto $M(a,b)$ del plano, (Fig. 1), es evidente que cada una de las curvas que así obtuviéramos sería una solución particular de la ecuación diferencial propuesta, mientras que la ecuación puede tomarse como representativa de todas ellas, razón por la cual recibe el nombre de *solución general o primitiva* de la ecuación diferencial propuesta.

La ecuación, $x^3+x^2y=C$, como facilmente puede comprobarse, por diferenciación, es la solución general de la ecuación diferencial,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2+2xy}{x^2}$$

En la figura anterior aparecen dibujadas las curvas cuyos interceptos sobre el eje de las X siguen la serie de los números enteros y son por consiguiente las raíces cúbicas de la constante C en la ecuación,

$$x^3+x^2y=C$$

2. DEFINICIONES. Por **orden** de una ecuación diferencial se entiende el orden de la mayor derivada que en ella ocurra y por **grado** de una ecuación diferencial al exponente a que esté elevada la derivada de mayor orden. En los ejemplos que se dan a continuación, las

dos primeras ecuaciones son de primer orden y de primer grado, mientras que las dos últimas son de segundo orden y de primer grado.

$$y=2x\,\frac{dy}{dx}$$

$$y\,\frac{dy}{dx}-xy^2=x$$

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}=y\,\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$3y^2+2yx^2\,\frac{d^2y}{dx^2}+2x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-6xy\,\frac{dy}{dx}=0$$

Cuando en una ecuación diferencial no hay sino una sola variable independiente y por lo tanto todas las derivadas que en ella ocurren son derivadas totales, se dice de ella que es una ecuación diferencial *ordinaria.* A este tipo de ecuaciones pertenecen los cuatro ejemplos anteriores y constituyen el grupo de ecuaciones de que nos ocuparemos en el presente estudio.

Cuando ocurran dos o más variables independientes pudiendo por consiguiente ocurrir derivadas parciales en la ecuación, se dice de ella que es una ecuación diferencial *parcial.*

A las ecuaciones diferenciales ordinarias que una vez racionalizadas y despejadas de fracciones contengan sólo en primer grado, tanto a la variable dependiente como a sus derivadas, en tanto que sus coeficientes son o constantes o funciones de x, se les da el nombre de **Lineales.**

Así, en las ecuaciones,

$$\frac{dy}{dx}+Py=Po$$

$$\frac{d^ny}{dx^n}+P_{n-1}\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots\ldots\ldots+P_1\,\frac{dy}{dx}+P_0y=P$$

si P_{n-1}, ..., P_1, P_0 y P son o constantes o funciones de x solamente, son ecuaciones lineales, de primer grado y de primer orden la primera y de enésimo orden y primer grado la segunda.

EJERCICIOS

Dígase el orden y el grado de cada una de las ecuaciones que se dan a continuación y cuáles de ellas son lineales.

1. $$2xy \frac{dy}{dx} + (x^2-y^2)=0$$

2. $$(3x^2+2xy-y^2)+(x^2-2xy-3y^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

3. $$x \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2y \frac{dy}{dx} + 4=0$$

4. $$xy \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y^2-x^2) \frac{dy}{dx} - xy=0$$

5. $$x \frac{dy}{dx} + y-x^2 \operatorname{sen} x=0$$

6. $$(1+x^2) \frac{dy}{dx} + \left(xy - \frac{1}{x}\right) = 0$$

7. $$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2 = 0$$

8. $$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$$

9. $$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 3 \frac{dy}{dx} = x^2+9$$