CAPITULO III

SOLUCIONES ESPECIALES DE LA ECUACION DE SEGUNDO ORDEN

17. ECUACION EN LA CUAL FALTA LA DERIVADA DE PRIMER ORDEN Y UNA DE LAS VARIABLES EN FORMA EXPLICITA. Para ambos tipos de ecuaciones se hace $\dfrac{dy}{dx} = p$ y se deriva con respecto a la variable presente, obteniéndose,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$$

ó,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dy}\,\frac{dy}{dx} = p\,\frac{dp}{dy}$$

según que falte la variable dependiente o la variable independiente, respectivamente. En cualquiera de los casos se tendrá, mediante la substitución respectiva, una ecuación de primer orden y de variables separables, como se demuestra a continuación.

Sea $\dfrac{d^2y}{dx^2} = F(x)$ y por lo tanto, $\dfrac{dp}{dx} = F(x)$

$$\therefore \quad p = \frac{dy}{dx} = C' + \int F(x)\,dx$$

y finalmente,

$$y = C + C'x + \int\int F(x)dx\,.\,dx \qquad (63)$$

solución que podemos expresar también en función de integrales sencillas, aplicando el sistema de integración por partes.

$$u = \int F(x)\, dx \quad \therefore \quad du = F(x)\, dx$$
$$dv = dx \quad \therefore \quad v = x$$

valores que reemplazados en la ecuación (63) nos dan;

$$y = C + C'x + x \int F(x) dx - \int xF(x)\, dx \qquad (64)$$

En cambio, cuando sea x la variable ausente, se tendrá:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F(y) \qquad \text{y por lo tanto,} \qquad p\,\frac{dp}{dy} = F(y)$$

integrando,

$$\frac{p^2}{2} = C'' + \int F(y)\, dy$$

$$p^2 = C' + 2 \int F(y)\, dy$$

$$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{C' + 2 \int F(y)\, dy}$$

$$\therefore \quad x = C + \int \frac{dy}{\sqrt{C' + 2 \int F(y)\, dy}} \qquad (65)$$

Ejemplo 1º

$$\frac{d^2y}{dx^2} = sen\ x = \frac{dp}{dx}$$

$$p = \frac{dy}{dx} = C' - cos\ x$$

$$y = C + C'x - sen\ x$$

Ejemplo 2º

Curva elástica. Se llama curva elástica de una viga a la curva que adopta el eje centroidal de una viga cargada en cualquier forma, siempre que el esfuerzo unitario, en el punto más esforzado de ella, no exceda del límite proporcional del material. En otras palabras, es la curva que adoptan las fibras neutras de una viga.

En resistencia de materiales se demuestra que el radio de curvatura, en un punto cualquiera de la curva elástica, vale

$$r = \frac{EI}{M} \qquad (1)$$

fórmula en la cual E es el módulo de elasticidad del material, I el momento de inercia de la sección con respecto al eje determinado por las fibras neutras en el punto que se considera, y M el momento de las fuerzas externas que obran sobre la viga, con respecto al plano de la sección.

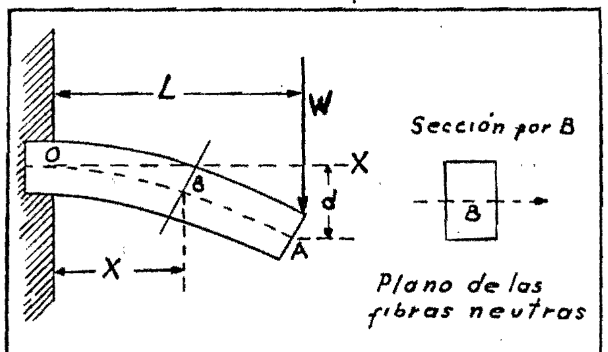

Fig. 6

Sea una viga OA de longitud L, fija por una extremidad y cargada con un peso W sobre el extremo libre.

Como se demuestra en el cálculo,

$$r = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \qquad (2)$$

Si la deflexión en la viga es muy pequeña, como ocurre en las estructuras corrientes, el valor de la primera derivada, en cualquier punto de la curva OBA, es tan pequeño que el numerador de (2) es

En resistencia de materiales se demuestra que el radio de curvatura, en un punto cualquiera de la curva elástica, vale

$$r = \frac{EI}{M} \tag{1}$$

fórmula en la cual E es el módulo de elasticidad del material, I el momento de inercia de la sección con respecto al eje determinado por las fibras neutras en el punto que se considera, y M el momento de las fuerzas externas que obran sobre la viga, con respecto al plano de la sección.

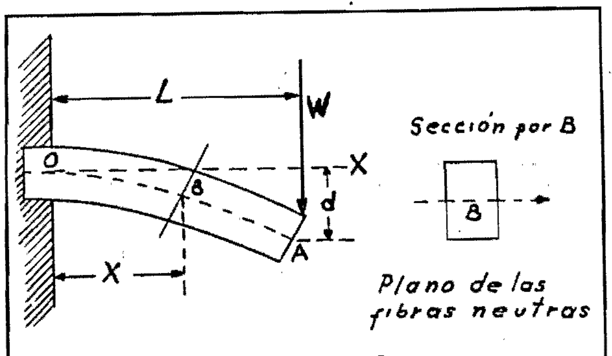

Fig. 6

Sea una viga OA de longitud L, fija por una extremidad y cargada con un peso W sobre el extremo libre.

Como se demuestra en el cálculo,

$$r = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \tag{2}$$

Si la deflexión en la viga es muy pequeña, como ocurre en las estructuras corrientes, el valor de la primera derivada, en cualquier punto de la curva OBA, es tan pequeño que el numerador de (2) es prácticamente igual a la unidad pudiendo por consiguiente tomarse como valor del radio de curvatura,

$$r = \frac{1}{\dfrac{d^2y}{dx^2}} \tag{3}$$

Igualando esta última ecuación con la ecuación (1) se tendrá:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \tag{4}$$

Para el ejemplo ilustrado en la figura $M = W\ (L—x)$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{W(L—x)}{EI} = \frac{dp}{dx} \tag{5}$$

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{W}{EI}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) + C' \tag{6}$$

$$y = \frac{W}{EI}\left(L\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C'x + C \tag{7}$$

La ecuación (7) es la solución general de la (5) pero si se toma como eje de las X a la horizontal que pasa por 0, podemos determinar que ambas constantes C' y C son nulas, puesto que, en tal caso, para $x = 0$, $y = 0$ y además $\dfrac{dy}{dx} = 0$

La máxima deflexión de la viga, como es evidente tendrá lugar en su extremidad y valdrá,

$$d = \frac{W}{EI}\left(\frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{6}\right) = \frac{WL^3}{3EI}$$

Ejemplo 3º

$$\frac{d^2y}{dx^3} = a^2y$$

$$p\,\frac{dp}{dy} = a^2y$$

$$\frac{p^2}{2} = \frac{a^2y^2}{2} + C'$$

haciendo $C' = \dfrac{k^2}{2}$ y reemplazando,

$$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{a^2y^2+k^2} = a\,\sqrt{y^2+k^2/a^2}$$

$$x = C + 1/a \int \frac{dy}{\sqrt{y^2+(k/a)^2}}$$

$$x = C' + (1/a)\ Ln\ (ay + \sqrt{a^2y^2+k^2}) - (1/a) Ln\ a$$

Pero siendo $(1/a) Ln\ a$, una constante, podemos refundirla con C, obteniendo finalmente,

$$x = C'' + (1/a) Ln\ (ay + \sqrt{a^2y^2+k^2}$$

Puede expresarse a y en función de x procediendo como lo hicimos en el ejemplo 1 de las ecuaciones tratadas en el artículo 12, artificio que repetiremos por ser de común ocurrencia.

$$e^{ax-C} = ay + \sqrt{a^2y^2+k^2}$$

$$1/e^{ax-C} = e^{-ax+C} = \frac{1}{ay+\sqrt{a^2y^2+k^2}} = \frac{ay-\sqrt{a^2y^2+k^2}}{-k^2}$$

sumando las dos ecuaciones anteriores

$$e^{ax-C} - k^2\,e^{-ax+C} = 2ay$$

Ejemplo 3º

$$\frac{d^2y}{dx^3} = a^2y$$

$$p\frac{dp}{dy} = a^2y$$

$$\frac{p^2}{2} = \frac{a^2y^2}{2} + C'$$

haciendo $C' = \frac{k^2}{2}$ y reemplazando,

$$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{a^2y^2+k^2} = a\sqrt{y^2+k^2/a^2}$$

$$x = C + 1/a \int \frac{dy}{\sqrt{y^2+(k/a)^2}}$$

$$x = C' + (1/a)\ Ln\ (ay + \sqrt{a^2y^2+k^2}) - (1/a) Ln\ a$$

Pero siendo $(1/a)Ln\ a$, una constante, podemos refundirla con C, obteniendo finalmente,

$$x = C'' + (1/a) Ln\ (ay + \sqrt{a^2y^2+k^2}$$

Puede expresarse a y en función de x procediendo como lo hicimos en el ejemplo 1 de las ecuaciones tratadas en el artículo 12, artificio que repetiremos por ser de común ocurrencia.

$$e^{ax-C} = ay + \sqrt{a^2y^2+k^2}$$

$$1/e^{ax-C} = e^{-ax+C} = \frac{1}{ay+\sqrt{a^2y^2+k^2}} = \frac{ay-\sqrt{a^2y^2+k^2}}{-k^2}$$

sumando las dos ecuaciones anteriores

$$e^{ax-C} - k^2\,e^{-ax+C} = 2ay$$

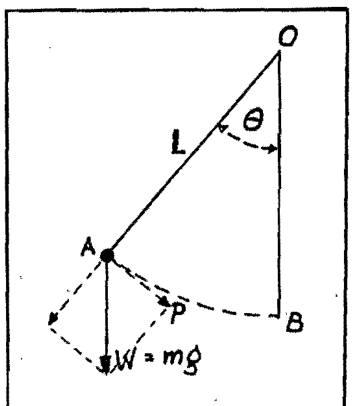

Fig. 7

Ejemplo 4. Determinación del período de oscilación de un péndulo matemático.

Sea A una posición de la lenteja de un péndulo simple de longitud L. La fuerza que tiende a restituirlo a la posición de equilibrio B, vale,

$$P = mg \ sen \ \Theta$$

Según las leyes del movimiento de Newton,

$$a = F/m$$

y además, como se ve en el cálculo,

$$a = d^2s/dt^2$$

por consiguiente,

$$d^2s/dt^2 = - g \ sen \ \Theta \qquad (1)$$

la razón del signo es que la velocidad decrece cuando el espacio aumente y viceversa.

Como $s = L\Theta$, $d^2s/dt^2 = L \ d^2\Theta/dt^2$ valor que substituído en (1) nos da,

$$d^2\Theta/dt^2 = - (g/L) \ sen \ \Theta \qquad (2)$$

Si la amplitud de la oscilación es tan pequeña que podamos tomar el arco en lugar del seno, la ecuación (2) se nos convierte en,

$$d^2\Theta/dt^2 = - g\Theta/L \qquad (3)$$

$$d\Theta/dt = p \quad \therefore \quad dp/dt = (dp/d\Theta) \ (d\Theta/dt) = p \ (dp/d\Theta)$$

$$2p \ dp = - (2g\Theta/L) \ d\Theta$$

$$p^2 = c^2 - g\Theta^2/L$$

$$p = d\Theta/dt = \sqrt{c^2 - g\Theta^2/L} \qquad (4)$$

$$\therefore \quad dt = d\Theta/\sqrt{c^2 - (\sqrt{g/L} \ \Theta)^2}$$

$$dt = d\Theta/c\sqrt{1 - (\sqrt{g/L} \ \Theta/c)^2}$$

integrando obtenemos como solución general de la ecuación (3)

$$t = C' + \sqrt{L/g} \, sen^{-1}(\Theta/c)\sqrt{g/L} \qquad (5)$$

Como en (4) $d\Theta/dt = w$, y ésta es cero en el instante de soltarlo, es decir, cuando $\Theta = -\alpha$ se tendrá:

$$0 = \sqrt{c^2 - g\alpha^2/L}$$

$$\therefore \quad c = \alpha \sqrt{g/L}$$

valor que substituído en (5) nos da,

$$t = C' + \sqrt{L/g} \ sen^{-1} \Theta/\alpha$$

Tomando como posición en el instante $t = 0$, a la posición indicada por B, en la figura, tendremos que $t=0$ para $\Theta=0$ y por lo tanto $C'=0$ con lo cual la ecuación anterior se nos reduce a,

$$t = \sqrt{L/g} \ sen^{-1} \Theta/\alpha$$

Finalmente, si hacemos $\Theta=\alpha$, obtendremos el tiempo requerido para media oscilación simple

$$t = \sqrt{L/g} \ sen^{-1} \ 1 = (\pi/2)\sqrt{L/g}$$

y para la oscilación completa

$$T = 2t = \pi \sqrt{L/g}$$

18. ECUACION DEL ENESIMO ORDEN QUE CARECE DE LA VARIABLE DEPENDIENTE Y DE DERIVADAS DE ORDEN DISTINTO AL ENESIMO. Aunque estas ecuaciones sean de orden mayor del segundo, pueden resolverse aplicando sucesivamente el artificio que empleamos en las ecuaciones del tipo anterior.

Sea, $$d^ny/dx^n = F(x) \qquad (66)$$

Haciendo $d^{n-1}/dx^{n-1} = p$, derivando con respecto a x se obtiene,

$$d^ny/dx^n = dp/dx = F(x)$$

$$\therefore \quad p = d^{n-1}y/dx^{n-1} = C_1 + \int F(x) \ dx$$

análogamente,

$$d^{n-2}y/dx^{n-2} = p \quad \therefore \quad d^{n-1}y/dx^{n-1}$$

$$= dp/dx = C_1 + \int F(x) \ dx$$

$$p = d^{n-2}y/dx^{n-2} = C_2 + C_1 x + \int\int F(x) \ (dx)^2$$

Procediendo de manera idéntica obtendríamos,

$$y = C_n + C_{n-1} x + C_{n-2} x^2/2! \ldots\ldots$$

$$+ C_1 x^n/n! + \underbrace{\int\int \ldots \int}_{\text{n integrales}} F(x) \ (dx)^n \qquad (67)$$

Como en (4) $d\Theta/dt = w$, y ésta es cero en el instante de soltarlo, es decir, cuando $\Theta = -\alpha$ se tendrá:

$$0 = \sqrt{c^2 - g\alpha^2/L}$$

$$\therefore \quad c = \alpha\sqrt{g/L}$$

valor que substituído en (5) nos da,

$$t = C' + \sqrt{L/g}\ sen^{-1}\,\Theta/\alpha$$

Tomando como posición en el instante $t = 0$, a la posición indicada por B, en la figura, tendremos que $t=0$ para $\Theta=0$ y por lo tanto $C'=0$ con lo cual la ecuación anterior se nos reduce a,

$$t = \sqrt{L/g}\ sen^{-1}\,\Theta/\alpha$$

Finalmente, si hacemos $\Theta=\alpha$, obtendremos el tiempo requerido para media oscilación simple

$$t = \sqrt{L/g}\ sen^{-1}\,1 = (\pi/2)\sqrt{L/g}$$

y para la oscilación completa

$$T = 2t = \pi\sqrt{L/g}$$

18. ECUACION DEL ENESIMO ORDEN QUE CARECE DE LA VARIABLE DEPENDIENTE Y DE DERIVADAS DE ORDEN DISTINTO AL ENESIMO. Aunque estas ecuaciones sean de orden mayor del segundo, pueden resolverse aplicando sucesivamente el artificio que empleamos en las ecuaciones del tipo anterior.

Sea, $\quad d^ny/dx^n = F(x) \qquad (66)$

Haciendo $d^{n-1}/dx^{n-1} = p$, derivando con respecto a x se obtiene,

$$d^ny/dx^n = dp/dx = F(x)$$

$$\therefore \quad p = d^{n-1}y/dx^{n-1} = C_1 + \int F(x)\,dx$$

análogamente,

$$d^{n-2}y/dx^{n-2} = p \quad \therefore \quad d^{n-1}y/dx^{n-1}$$

$$= dp/dx = C_1 + \int F(x)\,dx$$

$$p = d^{n-2}y/dx^{n-2} = C_2 + C_1 x + \int\int F(x)\,(dx)^2$$

Procediendo de manera idéntica obtendríamos,

$$y = C_n + C_{n-1}\,x + C_{n-2}\,x^2/2! \ldots\ldots$$

$$+ C_1\,x^n/n! + \underbrace{\int\int\ldots\int}_{\text{n integrales}} F(x)\,(dx)^n \qquad (67)$$

EJERCICIOS

1. $d^2y/dx^2 = e^x$
2. $d^2y/dx^2 + e^y = 0$
3. $d^2s/dt^2 = -w^2s$
4. $d^2s/dt^2 + k^2/s^2 = 0$
5. $d^2y/dx^2 = \cos y$
6. $d^2y/dx^2 = \cos x + \operatorname{sen} x$
7. $d^4y/dx^4 = x^5 - 3x + e^x$
8. $d^4y/dx^4 = x\, e^x$

19. ECUACIONES QUE CARECEN DE AMBAS VARIABLES. Las ecuaciones de la forma,

$$d^2y/dx^2 = F\,(dy/dx) \tag{68}$$

se resuelven mediante el mismo artificio a saber $dy/dx = p$, con lo cual quedan reducidas a la ecuación de variables separables

$$dp/dx = F(p)$$

cuya solución es,

$$x = C_1 + \int dp/F(p) \tag{69}$$

$$y = \int p\,dx = C_2 + \int p\,dp/F(p) \tag{70}$$

Por eliminación de p entre las ecuaciones (69) y (70) se obtendrá la relación entre las dos variables.

Ejemplo 1.

$$d^2y/dx^2 - (dy/dx)^2 - 1 = 0$$

$$d^2y/dx^2 = 1 + (dy/dx)^2$$

$$dp/dx = 1 + p^2 \quad \therefore \quad dx = dp/(1+p^2)$$

$$x + C_1 = \tan^{-1} p \tag{1}$$

$$y = \int p\,dx = \int p\,dp/(1+p^2)$$

$$= C_2 + (1/2)\,Ln\,(1+p^2)$$

$$y = Ln\,C_3 + Ln\sqrt{1+p^2} = Ln\,C_3\sqrt{1+p^2} \tag{2}$$

De (1) $\quad p = \tan\,(x+C_1)$

De (2) $\quad e^y = C_3\sqrt{1 + p^2}$

$$= C_3\sqrt{1 + tan^2(x+C_1)} = C_3 \, Sec\ (x+C_1)$$

Ejemplo 2. Ecuación de la curva que adopta un cable debido a su propio peso, curva que recibe el nombre de *Catenaria*

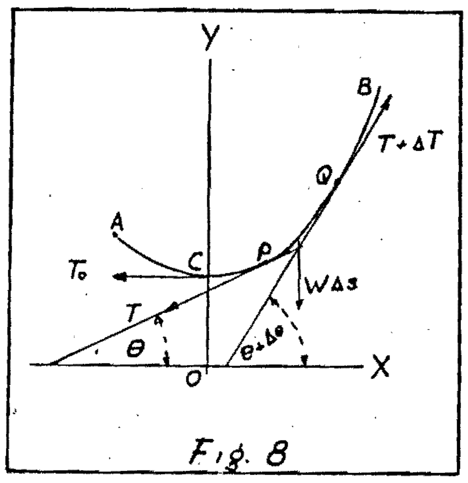

Fig. 8

Sea un cable suspendido de los puntos A y B y cuyo peso por unidad de longitud es de w. Considerando un elemento del cable de longitud $\triangle s$, comprendido entre los puntos P y Q, tal elemento estará en equilibrio bajo la acción de tres fuerzas a saber: su peso $w\triangle s$, la acción de la parte PA que llamaremos T, y la acción de la parte QB que llamaremos $T+\triangle T$.

Aplicando las condiciones de equilibrio para un sistema de fuerzas concurrentes, obtenemos:

$$\Sigma F_y = 0 \ (1) \ T\ sen\ \Theta = (T + \triangle T)\ sen\ (\Theta+\triangle\Theta) - w \triangle s$$

$$\Sigma F_x = 0 \ (2) \ T\ cos\ \Theta = (T + \triangle T)\ cos\ (\Theta+\triangle\Theta) = T_0$$

Dividiendo una ecuación por la otra,

$$tan\ \Theta = tan\ (\Theta+\triangle\Theta) - \frac{w\triangle s}{(T+\triangle T)\ cos\ (\Theta+\triangle\Theta)} \qquad (3)$$

De la ecuación (2) se observa que la componente horizontal de la tensión en cualquier punto del cable es constante y será igual por lo tanto a la tensión en el punto C; llamamos T_0 a esta tensión. Hecha esta substitución en la ecuación (3) nos queda entonces,

$$tan\ \Theta = tan\ (\Theta+\triangle\Theta) - w\triangle s/T_0$$

$$w\triangle s/T_0 = tan\ (\Theta+\triangle\Theta) - tan\ \Theta$$

$$(w/T_0)\ (\triangle s/\triangle\Theta) = \frac{tan\ (\Theta+\triangle\Theta) - tan\ \Theta}{\triangle\Theta}$$

$$\lim_{\triangle\Theta \to 0} \frac{tan\ (\Theta+\triangle\Theta) - tan\ \Theta}{\triangle\Theta} = sec^2\Theta = (w/T_0)\ (ds/d\Theta) \quad (4)$$

pero, $\quad sec^2\Theta = 1 + tan^2\Theta = 1 + (dy/dx)^2 \quad (5)$

y además, $ds/d\Theta = (ds/dx)\ (dx/d\Theta) = (dx/d\Theta)\sqrt{1+(dy/dx)^2}$ (6)
también $\Theta = tan^{-1}\ (dy/dx)$ ecuación que derivada con respecto a x nos da:

$$d\Theta/dx = (d^2y/dx^2)/[1+(dy/dx)^2] \quad (7)$$

reemplazando este último valor en la ecuación (6) tendremos

$$ds/d\Theta = [1+(dy/dx)^2]^{3/2}/(d^2y/dx^2) \quad (8)$$

Valor que podríamos haber escrito directamente puesto que $ds/d\Theta$ nos define el radio de curvatura en un punto cualquiera de una curva. Reemplazando finalmente los valores (5) y (8) en la ecuación (4), obtenemos,

$$d^2y/dx^2 = (w/T_0)\ \sqrt{1+(dy/dx)^2}$$

como ecuación diferencial de la curva adoptada por el cable, cuya solución es la siguiente:

$$dy/dx = p \quad \therefore \quad dp/dx = (w/T_0)\ \sqrt{1+p^2}$$

$$dp/\sqrt{1+p^2} = (w/T_0)\ dx$$

$$Ln\ (p + \sqrt{1+p^2}) = wx/T_0) + C$$

$$p + \sqrt{1+p^2} = e^{(wx/T_0+C)} \quad (9)$$

$$p - \sqrt{1+p^2} = -e^{-(wx/T_0+C)} \quad (10)$$

$$p = dy/dx = 1/2\ [e^{(wx/T_0+C)} - e^{-(wx/T_0+C)}]$$

$$\therefore\ y = (T_0/2w)\ [e^{(wx/T_0+C)} + e^{-(wx/T_0+C)}] + C_1 \quad (11)$$

Las constantes C y C_1 pueden determinarse si se conocen las posiciones de los puntos A y B en que se fija el cable.

Restando la ecuación (10) de la (9) se obtendría a ds/dx y sería posible entonces cacular la longitud del cable sin deducir previamente la ecuación (11).

EJERCICIOS

1. $\quad d^2y/dx^2 - 4\ dy/dx = 0$
2. $\quad d^2y/dx^2 + 2\ dy/dx + 2 = 0$

20. ECUACIONES CON DERIVADA DE PRIMER ORDEN PERO CARENTES DE UNA DE LAS VARIABLES EN FORMA EXPLICITA. Comprende este grupo las ecuaciones de una de las formas

$$d^2y/dx^2 = F(x, dy/dx) \quad ó \quad d^2y/dx^2 = F(y, dy/dx)$$

Empleando el mismo artificio $dy/dx = p$ y derivando con respecto a la variable presente, se obtiene, en general, una ecuación diferencial de primer orden perteneciente a alguno de los tipos ya estudiados.

Ejemplo 1º Una zorra parte de cierto punto y corre hacia el norte 300 yds., en donde es alcanzada por un perro que partió de un punto situado a 100 yds., al este del punto de partida de la zorra y que durante toda la carrera corrió directamente hacia ella. ¿Qué camino recorrió el perro si ambos partieron en el mismo instante y cada uno hizo su recorrido con velocidad uniforme?

La ecuación de la tangente en un punto cualquiera $P(x,y)$ de la trayectoria seguida por el perro es,

$$Y - y = f'\ (x)\ (X - x)$$

en la cual, si se hace $X=0$, nos da la longitud de su intercepto sobre el eje vertical, (fig. 9.)

$$0E = Y = y - xf'\ (x)$$

ecuación de la cual se obtiene por diferenciación

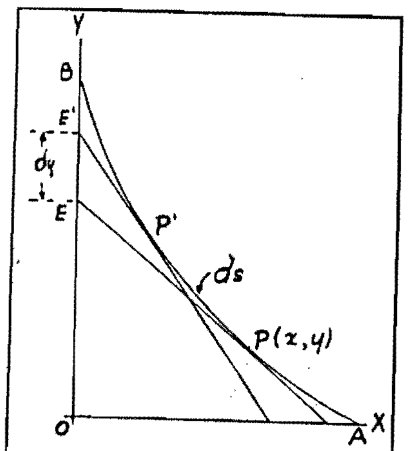

Fig 9