TABLA DE INTEGRALES

ECUACIONES DEL PRIMER ORDEN

NOTACIONES. En la ecuación M dy + N dx = O, M y N representan funciones de x y de y; X representa a una función de x solamente o a una constante y Y a una función de y únicamente o a otra constante.

PAG.

1. - *Ecuaciones de variables separables* 13

Si en $M\,dy + N\,dx = 0$, $M = X'.Y'$ y $N = X''.Y''$

$$X'.Y'\,dy + X''.Y''\,dx = 0$$

Solución:

$$\int Y'/Y''\,dy + \int X''/X'\,dx = C$$

2. - *Ecuaciones Exactas* 22

Cuando en $M\,dy + N\,dx = O$, $\delta M/\delta x = \delta N/\delta y$

Solución:

$$\int M\,dy + \int [N - \delta/\delta x \int M\,dy]\,dx = C$$

3. - *Ecuaciones Homogéneas* 28

Cuando al substituir en la ecuación

$$M\,dy + N\,dx = 0$$

a x por tx y a y por ty se transforma en

$$t^n\,[M\,dy + N\,dx] = 0$$

Primer método de solución: En gran número de casos la ecuación

$$\frac{M\ dy + N\ dx}{My + Nx} = 0$$

es una diferencial total fácilmente observable.

Segundo método de solución: Al efectuar las substituciones,

$$y = vx \qquad dy = v\ dx + x\ dv$$

se obtiene una ecuación de variables separables.

$$M\ dy + N\ dx = 0$$

Solución:

$$\frac{My + Nx}{n} = C$$

en donde n es el grado de My y de Nx.

$$(ax + by + c)\,dy + (ex + fy + g)\,dx = 0$$

Solución. La substitución,

$$x = x' + h$$
$$y = y' + k$$

la hace tomar la forma homogénea,

$$(ax' + by')\ dy' + (ex' + fy')\,dx' = 0$$

No puede aplicarse cuando $be = af$.

Primer método de solución. Se resuelve para dy/dx resultando una ecuación homogénea de primer grado.

Segundo método de solución. Se resuelve para y/x y se hace la substitución $dy/dx = p$.

Derivando con respecto a x a la ecuación resultante, se obtiene una ecuación de variables separables.

$$dy/dx + X'y = X''$$

Solución:

Si $X'' \neq 0$ $\quad y = C\, e^{\int -X'dx} + e^{\int -X'dx} \int X''\, e^{\int X'dx}\, dx$

Si $X'' = 0$ $\quad y = C\, e^{\int -X'dx}$

$$dy/dx + X'y = X''\ y^n$$

Solución. La substitución $1/y^{n-1} = z$ la transforma en la ecuación lineal,

$$dz/dx + (1 - n)X'z = (1 - n)X''$$

cuya solución es,

$$z = C\, e^{\int (n-1)X'dx}\, dx + e^{\int (n-1)X'dx}\, dx \int (1-n)X''\, e^{\int (1-n)X'dx}\, dx$$

Primer caso. Falta la variable independiente.

Se resuelve para dy/dx obteniéndose,

$$dy/dx = Y$$

Solución: $\quad x = C + \int dy/Y$

Si es más fácil de resolver para y se hace la substitución $dy/dx = p$ obteniéndose la ecuación,

$$y = G(p)$$

cuya solución se obtiene por eliminación de p entre las ecuaciones,

$$x = C + \int G'(p)\, dp/p$$

$$y = C' + \int G'(p)\, dp$$

Segundo caso. Falta la variable dependiente.

$$F(x,\ dy/dx) = F(x,p) = 0 \quad \text{si } dy/dx = p$$

Solución. Si puede resolverse para p obteniéndose $p = G(x)$ la solución será,

$$y = C + \int G(x)\,dx$$

Si es más sencillo resolverla para x, la solución se obtiene por eliminación de p entre las ecuaciones,

$$x = g(p)$$

$$y = C' + \int p\ g'(p)\ dp$$

Si la ecuación $F(x,y,p) = o$, en la cual $dy/dx = p$, puede factorizarse,

$$(p-X_1)\ (p-Y_1)\ (p-X_2)\ (p-Y_2)\ldots\ldots = 0$$

cada factor será una ecuación del tipo anterior y por lo tanto darán la solución,

$$[y-(C_1+\int X_1dx)]\ [x-(C_2+\int dy/Y_1]\ [y-(C_3+\int X_2dx)]$$
$$\ldots\ [y-(C_4+\int dy/Y_2]\ \ldots = 0$$

Caso A. $F(dy/dx) = F(p) = 0$

$$F(p) = (p-a_1)\ (p-a_2)\ \ldots\ldots\ (p-a_n) = 0$$

Solución.

$$\left(\frac{y+c}{x} - a_1\right)\left(\frac{y+C}{x} - a_2\right)\ldots\ldots\left(\frac{y+C}{x} - a_n\right) = 0$$

Caso B. Cuando al resolver para y la ecuación $F(x,y,p)=0$, resulta,

$$y = x\,\phi(p) + \theta(p) \qquad (1)$$

ecuación que contiene a las dos variables en primer grado. Al tomar el diferencial total de (1) se obtiene una ecuación lineal cuya solución es,

$$x = Ce^{\int \frac{-\phi'(p)\,dp}{\phi(p)-p}} - e^{\int \frac{-\phi'(p)\,dp}{\phi(p)-p}} \int \frac{\theta'(p)}{\phi(p)-p}\, e^{\int \frac{\phi'(p)\,dp}{\phi(p)-p}}\, dp$$

Por eliminación de p entre esta ecuación y la (1) se obtiene la primitiva.

Caso C. Cuando en la ecuación anterior $\phi(p) = p$, convirtiéndose en,

$$y = xp + \theta(p) \qquad (2)$$

Solución. Son soluciones de esta ecuación,

$$y = Cx + C_1$$

y la que se obtenga por eliminación de p entre la ecuación (2) y

$$\theta'(p) = -x$$

SOLUCIONES ESPECIALES DE LA ECUACION DE SEGUNDO GRADO

PAG.

12. - *Ecuaciones que contengan solamente a la segunda derivada y a una de las variables* 65

Primer caso. $d^2y/dx^2 = F(x)$

Solución.

$$y = C + C_1x + x\int F(x)\,dx - \int xF(x)\,dx$$

Segundo caso. $d^2y/dx^2 = F(y)$

$$y = C + \int \frac{dy}{\sqrt{C_1 + 2\int F(y)\,dy}}$$

13. - *Ecuaciones que contienen solamente a la variable independiente y a la derivada de enésimo orden* 71

$$d^ny/dx^n = F(x)$$

Solución.

$$y = C_n + C_{n-1} + C_{n-2}\ x^2/\underline{|2} + \ldots . + C_1\ x^n/\underline{|n} +$$
$$\int\int\int \ldots . . \int F(x)\ (dx)^n$$

14. - *Ecuaciones carentes de ambas variables* 72

$$d^2y/dx^2 = F(dy/dx)$$

Solución. Eliminando a p entre las ecuaciones,

$$x = C_1 + \int dp/F(p)$$
$$y = C_2 + \int p\ dp/F(p)$$

PAG.

15. - *Ecuaciones con derivadas de primer y segundo orden pero carentes de una de las variables* 75

Primer caso. $d^2y/dx^2 = F(x,\ dy/dx)$

Segundo caso. $d^2y/dx^2 = F(y,\ dy/dx)$

Solución. Se hace $dy/dx = p$ y al derivar con respecto a x se obtiene una ecuación de primer orden.

ECUACION LINEAL DE ORDEN N CON COEFICIENTES CONSTANTES

16. - *Ecuación Lineal incompleta.* (Lado derecho de la ecuación igual a cero) 89

Caso 1. La ecuación auxiliar $\phi(a) = 0$ tiene n raíces diferentes. $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$

Solución.

$$y = C_1e^{a_1x} + C_2e^{a_2x} + \ldots\ldots + C_ne^{a_nx}$$

17. - *Caso* 2. *La ecuación auxiliar tiene m raíces repetidas* .. 91

Sean $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots . = a_m \neq a_{m+1} \neq \ldots . \neq a_n$

Solución.

$$y = (C_1 + C_2x + \ldots . + C_mx^{m-1})\ e^{a_1x} + C_{m+1}\ e^{a_{m+1}x}$$
$$+ \ldots . + C_{n-1}e^{a_{n-1}x} + C_ne^{a_nx}$$

Sean las dos raíces $(a + bi)$ y $(a - bi)$

Solución.

$$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \operatorname{sen} bx) + C_3 e^{a_3 x} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + C_n e^{a_n x}$$

Si además $(a + bi)$ y $(a - bi)$ son raíces dobles.

Solución.

$$y = e^{ax}[(C + C_1 x) \cos bx + (C_2 + C_3 x) \operatorname{sen} bx]$$
$$+ C_5 e^{a_5 x} + \ldots\ldots + C_n e^{a_n x}$$

Solución. La solución consta de dos partes; la primera llamada *la función complementaria* es la solución de la ecuación incompleta.

Llamando $f(x)$ el lado derecho de la ecuación, la segunda parte de la solución llamada el *integral particular* está dado por,

$$y = e^{a_1 x} \int e^{(a_2 - a_1)x} \int \ldots . \int e^{(a_n - a_{n-1})x} \int f(x) e^{-a_n x}\, dx$$

Solución B. Cuando las n raíces de la ecuación auxiliar son diferentes, el integral particular viene dado también por,

$$y = R_1 e^{a_1 x} \int f(x)\, e^{-a_1 x} dx + R_2 e^{a_2 x} \int f(x)\, e^{-a_x x} dx + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + R_n e^{a_n x} \int F(x)\, e^{-a_n x} dx$$

en la cual R_1, R_2, ..., R_n son los coeficientes de las fracciones parciales de la fracción

$$1/\phi(a)$$