

Funciones submodulares y matrices en el estudio de los espacios topológicos finitos

Julian Leonardo Cuevas Rozo

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

Bogotá D.C., Colombia

2016

Funciones submodulares y matrices en el estudio de los espacios topológicos finitos

Julian Leonardo Cuevas Rozo

Trabajo Final de Maestría presentado como requisito parcial
para obtener el grado de

Magíster en Ciencias - Matemáticas

Director:
Profesor Humberto Sarria Zapata

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá D.C., Colombia

2016

*A quienes invaden cada
página de este trabajo*

Resumen

Se realiza un estudio detallado de la conexión entre las matrices topogéneas, definidas por Shiraki [10], y los espacios topológicos finitos. Así mismo, se introducen las matrices de Stong y las matrices asociadas a funciones submodulares, claves en la caracterización de propiedades topológicas. A partir de estas matrices, se muestran algoritmos que permiten encontrar componentes conexas, beat points, weak points, la característica de Euler-Poincaré y el core de un espacio finito, además de encontrar una caracterización del grupo fundamental de homotopía usando las entradas de las matrices topogéneas y una propuesta para el cálculo de los operadores de borde del complejo singular del espacio $\mathcal{X}(K)$, con coeficientes en $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$, donde K es un complejo simplicial finito arbitrario.

Palabras clave: Espacios topológicos finitos, posets, funciones submodulares, matrices topogéneas, tipos de homotopía, homología singular.

Abstract

A detailed study of the connexion between topogenous matrices, defined by Shiraki [10], and finite topological spaces is done. Likewise, Stong matrices and matrices associated to submodular functions, key in the characterization of topological properties, are introduced. From these matrices, algorithms are shown to find connected components, beat points, weak points, the Euler-Poincaré characteristic and the core of a finite space. Also a characterization of the fundamental group in finite spaces and a proposal to calculate the boundary operators associated to the singular complex of the space $\mathcal{X}(K)$, with coefficient group $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$, where K is an arbitrary finite simplicial complex, are presented.

Key words: Finite topological spaces, posets, submodular functions, topogenous matrices, homotopy types, singular homology.

Índice general

Introducción	v
1. Preliminares	1
1.1. Conjuntos parcialmente ordenados: posets	1
1.2. Matrices	2
1.3. Espacios topológicos finitos	5
1.4. Funciones submodulares y FD-relaciones	9
2. Matrices asociadas a un espacio finito	15
2.1. Matriz topogénea	15
2.2. Triangularización de matrices topogéneas	18
2.2.1. Recorriendo $\text{Top}(X)$	23
2.2.2. Topología heredada	26
2.2.3. Componentes arco-conexas	27
2.2.4. Espacio producto y suma ordinal	30
2.2.5. Función de entropía	31
2.3. Matrices U_X y D_X	35
2.4. Matriz de Stong	39
2.5. Matrices N_T y N_S	43
3. Topología algebraica	51
3.1. Métodos de reducción puntual	51
3.2. Modelos minimales finitos	56
3.3. Característica de Euler-Poincaré	59
3.4. Grupo fundamental	62
3.5. Conexión con complejos simpliciales	68
Conclusiones y recomendaciones	75
Bibliografía	79

Introducción

El estudio de los espacios topológicos finitos ha venido creciendo con el tiempo, no sólo por su riqueza intrínseca, sino también por la gran cantidad de aplicaciones en lo que se denomina hoy día como análisis de grandes datos (Big Data). A través del tiempo se han desarrollado herramientas poderosas para el estudio de éstos espacios, como lo son los posets y las matrices, y en los últimos años se han conectado con las funciones submodulares, enriqueciendo aún más los distintos puntos de vista y ampliando el panorama para poder manipular la estructura topológica en los conjuntos finitos.

En 1937, Alexandroff demostró que la colección de espacios topológicos finitos se encuentra en correspondencia uno a uno con la de los conjuntos preordenados, y que a su vez, aquellos espacios finitos que satisfacen el axioma de separación T_0 corresponden a los conjuntos finitos parcialmente ordenados [2]. Ésta correspondencia resulta muy valiosa, por ejemplo, en el estudio de los tipos de homotopía, puesto que si un espacio finito no cumple con el axioma T_0 , existe un espacio más pequeño, homotópicamente equivalente al espacio inicial, que sí lo cumple, permitiendo restringir la atención a los espacios T_0 sin alterar las propiedades homotópicas.

Dos conexiones importantes entre los espacios topológicos finitos y las matrices, se encuentran en los trabajos de Stong [11] y de Shiraki [10]. En 1966, Stong demuestra que los espacios topológicos finitos, salvo homeomorfismo, se encuentran en correspondencia uno a uno con las clases de equivalencia de un cierto tipo de matrices, vía similaridad por matrices de permutación. A su vez, en 1968 Shiraki demuestra que los espacios topológicos finitos están en correspondencia biunívoca con las matrices topogéneas (*topogenous matrices*). Lo anterior muestra que los espacios finitos pueden ser caracterizados por (al menos) dos tipos de matrices, aspecto que será muy importante en nuestro trabajo.

Finalmente, a partir de los trabajos finales de maestría de Julian Abril [1] y Leonardo Roa [9], se han encontrado vínculos muy interesantes entre los espacios finitos y las funciones submodulares, un nuevo enfoque en el estudio topológico de los conjuntos finitos. Estos trabajos han permitido interpretar muchos conceptos del ámbito topológico a través de valores numéricos proporcionados por las funciones submodulares asociadas, algo realmente importante si queremos mecanizar la verificación de propiedades topológicas sobre los espacios finitos.

Con el espíritu de enlazar todos los anteriores puntos de vista, pretendemos con este trabajo mostrar las diferentes interacciones entre los espacios topológicos finitos, los posets, las matrices y las funciones submodulares para comprender los atributos topológicos de un espacio y poder encontrar algoritmos para describirlos.

El documento se encuentra organizado de la siguiente manera: en el capítulo 1, introducimos los conceptos más relevantes referentes a posets, matrices, funciones submodulares y espacios topológicos, junto con su respectiva notación.

En el capítulo 2, estudiamos el concepto de matriz topogénea y a partir de él mostramos diferentes aplicaciones, como el recorrido por el retículo $\text{Top}(X)$ y algoritmos para encontrar los valores de las funciones submodulares \bar{f} y r_A , definidas en [9]. Así mismo, se introducen las matrices U_X , D_X y la matriz de Stong de un espacio, ilustrando algunas de sus propiedades básicas.

El capítulo 3 hace uso de las herramientas del capítulo 2 para encontrar las reducciones puntuales de un espacio, es decir, eliminación de beat points y weak points, logrando obtener, en particular, el core de un espacio a partir de operaciones con las filas y columnas de las matrices propuestas. También haremos una descripción del grupo fundamental de homotopía por medio de lazos que pueden determinarse desde la matriz topogénea y estableceremos una forma de calcular la característica de Euler-Poincaré. Finalmente proponemos encontrar las matrices de representación de los operadores de borde asociados a un complejo simplicial finito K , que determinan los grupos de homología con coeficientes en $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$, usando la matriz de Stong del espacio $\mathcal{X}(K)$ definido por McCord [7].

Los aportes de este trabajo son los siguientes:

- Asignar matrices U_X y D_X a las funciones f_U y f_D para su manipulación.
- Encontrar algoritmos para calcular los valores de las funciones submodulares \bar{f} , r_A , f_U y f_D en cualquier subconjunto de un espacio finito arbitrario.
- Identificar los beat points y weak points de un espacio topológico finito, y por consiguiente, encontrar su core, usando la matriz topogénea y de Stong.
- Calcular la característica de Euler-Poincaré para cualquier espacio finito usando las matrices topogéneas.
- Definir el grupo $\mathcal{T}(X, x_m)$ y encontrar el isomorfismo entre dicha estructura y el grupo fundamental de homotopía $\pi_1(X, x_m)$.
- Encontrar la representación matricial, con coeficientes en $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$, de todos los operadores de borde asociados a un complejo simplicial finito K por medio de la matriz de Stong del espacio $\mathcal{X}(K)$.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presenta la notación que se usará a lo largo del texto, y que servirá para entender los enunciados y las demostraciones de los resultados que mostraremos.

1.1. Conjuntos parcialmente ordenados: posets

Definición 1.1.1. Sea X un conjunto no vacío. El *conjunto de partes de X* es la colección de todos los subconjuntos de X , que denotaremos por 2^X . El *cardinal de X* , representado por el símbolo $|X|$, es el número de elementos del conjunto.

Definición 1.1.2. Sobre una relación $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ definimos las siguientes propiedades:

1. *Reflexividad.* Para todo $x \in X$, se cumple $(x, x) \in \mathcal{R}$.
2. *Antisimetría.* Para todo $x, y \in X$, si $(x, y) \in \mathcal{R}$ y $(y, x) \in \mathcal{R}$ entonces $x = y$.
3. *Transitividad.* Para todo $x, y, z \in X$, si $(x, y) \in \mathcal{R}$ y $(y, z) \in \mathcal{R}$ entonces $(x, z) \in \mathcal{R}$.

Si la relación satisface las propiedades de reflexividad y transitividad, decimos que es un *preorden* sobre X ; si \mathcal{R} cumple además la propiedad de antisimetría, decimos que es un *orden (parcial)* sobre X . En este caso, escribiremos $x \leq y$ en lugar de $(x, y) \in \mathcal{R}$, y diremos que el par (X, \leq) es un *conjunto parcialmente ordenado* o un *poset* (por sus siglas en inglés).

Observación 1.1.3. Todo poset (X, \leq) puede representarse gráficamente mediante un diagrama de la siguiente manera: cada elemento de X es un *vértice* que se representa por un punto en el plano; dibujamos un segmento de recta que vaya hacia arriba de x a y si $x \leq y$, y no existe z tal que $x < z < y$. Dicho segmento se denomina *arista*, con *punto inicial* x y *punto final* y . Además, no es necesario considerar bucles pues la relación $x \leq x$ quedará implícita para todo $x \in X$. Al diagrama lo denotaremos por $\mathcal{H}(X)$, y diremos que es el *diagrama de Hasse asociado a X* . El conjunto de aristas de $\mathcal{H}(X)$ será representado por $E(\mathcal{H}(X))$.

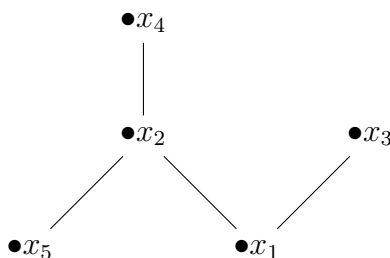
Definición 1.1.4. Sea (X, \leq) un poset. Un subconjunto C de X es una *cadena de m elementos*, si $|C| = m$ y para todo par de elementos $x_i, x_j \in C$, se cumple $x_i \leq x_j$ o $x_j \leq x_i$, es decir, C es un subconjunto totalmente ordenado de X

Definición 1.1.5. Dado un elemento $x_i \in X$, definimos su *altura* como el mayor de los cardinales de las cadenas que tienen a x_i como su elemento máximo, y la notaremos por $h(x_i)$. El valor $h(X) = \max \{h(x_i) : x_i \in X\}$ es la *altura de X* .

Ejemplo 1.1.6. Si sobre el conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ definimos la relación

$$\varphi \cup \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_4), (x_5, x_2), (x_5, x_4)\}$$

donde $\varphi = \{(x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3), (x_4, x_4), (x_5, x_5)\}$, entonces X , junto con la relación definida, es un poset cuyo diagrama de Hasse es el siguiente:



En este caso, $h(x_1) = h(x_5) = 1$, $h(x_2) = h(x_3) = 2$ y $h(X) = h(x_4) = 3$.

Definición 1.1.7. Dado un poset (X, \leq) y un subconjunto M de X , adoptaremos la siguiente notación:

$$M^\nabla = \{y \in X : x \leq y \text{ para todo } x \in M\}$$

$$M_\Delta = \{y \in X : y \leq x \text{ para todo } x \in M\}$$

Los elementos de M^∇ se denominan *cotas superiores de M* , y los de M_Δ se denominan *cotas inferiores de M* .

1.2. Matrices

Definición 1.2.1. Una *matriz A* de tamaño $m \times n$, es un arreglo rectangular de mn números reales dispuestos en m filas y n columnas como sigue

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Para indicar el elemento ubicado en la fila i y la columna j del arreglo, usaremos el símbolo $[A]_{ij}$. Para hacer referencia a la fila k de la matriz escribiremos $[A]_{k\bullet}$, mientras que para denotar la columna k -ésima de la matriz usaremos $[A]_{\bullet k}$.

Si $n \in \mathbb{Z}^+$, escribiremos I_n para representar el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. Algunas matrices con notación especial, y que nombraremos en algunas ocasiones, son las siguientes:

- La matriz identidad de tamaño $n \times n$ es $\mathbb{I}_n = [a_{ij}]$, donde $a_{ij} = \delta(i, j)$ para todo $i, j \in I_n$, con $\delta(i, j)$ la función delta de Kronecker.
- La matriz nula de tamaño $m \times n$ es $\mathbb{O}_{m \times n} = [b_{ij}]$, donde $b_{ij} = 0$ para todo $i \in I_m$ y todo $j \in I_n$. Si $m = n$ escribiremos simplemente \mathbb{O}_n .
- La matriz $\mathbf{1}_{m \times n} = [c_{ij}]$, donde $c_{ij} = 1$ para todo $i \in I_m$ y todo $j \in I_n$. Si $m = n$ escribiremos simplemente $\mathbf{1}_n$.

Observación 1.2.2. La suma de las entradas de una matriz $A = [a_{ij}]$ de tamaño $m \times n$ la denotaremos por

$$\text{sum}(A) := \sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij}$$

Definición 1.2.3. La *matriz de permutación* P_σ de tamaño $n \times n$ asociada a $\sigma \in S_n$, donde S_n es el conjunto de permutaciones sobre I_n , es tal que

$$[P_\sigma]_{ij} = \delta(i, \sigma(j))$$

Observación 1.2.4. $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}} = P_\sigma^T$ y $P_\sigma P_\tau = P_{\sigma \circ \tau}$. Además, si $B = P_\sigma^T A P_\sigma$ se cumple

$$[B]_{ij} = [A]_{\sigma(i)\sigma(j)}$$

Definición 1.2.5. Dos matrices A y B se dicen *similares*, si existe una matriz invertible M tal que $A = M^{-1} B M$. Si M es además una matriz de permutación, decimos que A y B son *similares vía una matriz de permutación*.

Definición 1.2.6. Dadas dos matrices, A de tamaño $m \times n$ y B de tamaño $p \times q$, definimos la *suma directa* $A \oplus B$ como la matriz en bloques de tamaño $(m+p) \times (n+q)$ de la siguiente manera:

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} A & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{p1} & \cdots & b_{pq} \end{bmatrix}$$

Definición 1.2.7. Dadas dos matrices, A de tamaño $m \times n$ y B de tamaño $p \times q$, definimos el *producto de Kronecker* $A \otimes B$ como la matriz en bloques de tamaño $mp \times nq$ que satisface:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

El producto de Kronecker es asociativo y distributivo, por derecha y por izquierda, respecto a la suma de matrices. Además, si cada una de las operaciones indicadas está definida, se cumple:

$$\begin{aligned} (A \otimes B)(C \otimes D) &= AC \otimes BD \\ (A \otimes B)^{-1} &= A^{-1} \otimes B^{-1} \\ (A \otimes B)^T &= A^T \otimes B^T \end{aligned}$$

Observación 1.2.8. $\text{sum}(A \oplus B) = \text{sum}(A) + \text{sum}(B)$; $\text{sum}(A \otimes B) = \text{sum}(A) \cdot \text{sum}(B)$.

Definición 1.2.9. Dadas dos matrices A, B de tamaño $m \times n$, definimos las matrices $A \vee B$ y $A \wedge B$ según las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} [A \vee B]_{ij} &= \text{máx} \{[A]_{ij}, [B]_{ij}\} \\ [A \wedge B]_{ij} &= \text{mín} \{[A]_{ij}, [B]_{ij}\} \end{aligned}$$

Observación 1.2.10. Si dos matrices E, M de tamaño $m \times n$ satisfacen la condición $[E]_{ij} \leq [M]_{ij}$ para todo $i \in I_m, j \in I_n$, escribiremos simplemente $E \leq M$. Por ejemplo,

$$E \leq E \vee M, \quad M \leq E \vee M$$

$$E \wedge M \leq E, \quad E \wedge M \leq M$$

Definición 1.2.11. Sea $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ una relación sobre $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Definimos la *matriz de incidencia* asociada a \mathcal{R} , como la matriz $M = [m_{ij}]$ tal que $m_{ij} = 1$ si $(x_i, x_j) \in \mathcal{R}$ y $m_{ij} = 0$ si $(x_i, x_j) \notin \mathcal{R}$.

La matriz de incidencia de la relación definida en el ejemplo 1.1.6 es

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1.3. Espacios topológicos finitos

Los resultados que se enuncian sin demostración en esta sección, pueden ser consultados en [3].

Definición 1.3.1. Un *espacio topológico finito* es un par (X, \mathcal{T}) , donde X es un conjunto finito y $\mathcal{T} \subseteq 2^X$ es una colección que satisface:

1. $\emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$.
2. Si $U, V \in \mathcal{T}$ entonces $U \cap V \in \mathcal{T}$.
3. Si $U, V \in \mathcal{T}$ entonces $U \cup V \in \mathcal{T}$.

La colección \mathcal{T} se denomina *topología sobre X* ; los elementos de la topología son llamados *abiertos* del espacio y si un conjunto es el complemento de algún abierto, se denomina *cerrado* del espacio.

Usando las leyes de De Morgan para conjuntos, puede probarse que la colección de cerrados de un espacio topológico finito (X, \mathcal{T}) es también una topología sobre X . Dicha topología la denotaremos por \mathcal{T}^{op} , y al espacio topológico $X^{op} = (X, \mathcal{T}^{op})$ lo llamaremos el *espacio opuesto de (X, \mathcal{T})* .

Cada espacio topológico finito (X, \mathcal{T}) , define un preorden sobre X de la siguiente manera: si para cada $y \in X$ denotamos por U_y a la intersección de todos los abiertos que contienen a y , la relación \leq definida por

$$x \leq y \iff x \in U_y$$

es reflexiva y transitiva. Ésta construcción será de suma importancia en nuestro trabajo, por lo que retomaremos a ella en el siguiente capítulo.

Definición 1.3.2. Dado (X, \mathcal{T}) un espacio topológico, decimos que la colección $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ es una *base para la topología \mathcal{T}* , si para cada $E \in \mathcal{T}$ y $x \in E$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $B \subseteq E$.

Por otro lado, si X es un conjunto no vacío, una colección arbitraria $\mathcal{B} \subseteq 2^X$ que cumpla las condiciones:

1. $X = \bigcup \mathcal{B}$.
2. Dados $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $B \subseteq B_1 \cap B_2$.

es una base para una única topología sobre X ; dicha topología es la *topología generada por la base* \mathcal{B} , la denotaremos por $\langle \mathcal{B} \rangle$ y está dada de manera explícita por

$$\langle \mathcal{B} \rangle = \{U \subseteq X : U = \bigcup \mathcal{K} \text{ para algún } \mathcal{K} \subseteq \mathcal{B}\}.$$

Ésta construcción es de considerable importancia, pues si queremos encontrar la menor topología sobre un conjunto X que tenga entre sus abiertos la colección $\mathcal{E} \subseteq 2^X$ arbitraria, ésta es precisamente $\mathcal{T} = \langle \mathcal{B} \rangle$ donde en este caso

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap H : H \subseteq \mathcal{E} \right\}$$

es decir, un abierto de \mathcal{T} es una unión de intersecciones finitas de elementos en \mathcal{E} .

Observación 1.3.3. Decimos que una topología \mathcal{T}_1 es *más fina* que \mathcal{T}_2 , si se cumple $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$. La colección $Top(X)$ de todas las topologías definibles sobre X junto con la relación de inclusión, $(Top(X), \subseteq)$, es un *retículo completo*, esto es, un poset tal que para cada subconjunto existe un supremo y un ínfimo, pues dada una colección de topologías $\{\mathcal{T}_i\}_{i \in I}$, su ínfimo está dado por la intersección de las topologías y su supremo es la topología generada al tomar $\mathcal{E} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{T}_i$ en la construcción anterior.

Definición 1.3.4. Un espacio topológico (X, \mathcal{T}) satisface el *axioma de separación* T_0 (es un *espacio* T_0), si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existe un abierto $E \in \mathcal{T}$ tal que $x \in E$ y $y \notin E$, ó, $y \in E$ y $x \notin E$. Un espacio se dice que satisface el *axioma de separación* T_1 (es un *espacio* T_1), si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existen abiertos $E, M \in \mathcal{T}$ tales que $x \in E$ y $y \notin E$, y, $y \in M$ y $x \notin M$. Es claro que un espacio T_1 es también T_0 .

Definición 1.3.5. Sean (X, \mathcal{T}) un espacio topológico finito, $E \subseteq X$ y $e \in X$.

1. e es un *punto interior* de E , si existe $U \in \mathcal{T}$ tal que $\{e\} \subseteq U \subseteq E$. La colección de puntos interiores de E es denotada por $\text{Int}(E)$, se denomina el *interior de* E y resulta ser el mayor conjunto abierto contenido en E .
2. e es un *punto exterior* a E , si existe $U \in \mathcal{T}$ tal que $\{e\} \subseteq U \subseteq E^c$. La colección de puntos exteriores de E es denotada por $\text{Ext}(E)$ y se denomina el *exterior de* E . Nótese que $\text{Ext}(E) = \text{Int}(E^c)$.
3. e es un *punto frontera* de E si, para todo $U \in \mathcal{T}$ que contenga a e , se cumple $U \cap E \neq \emptyset$ y $U \cap E^c \neq \emptyset$. La colección de puntos frontera de E es denotada por $\text{Fr}(E)$ y se denomina la *frontera de* E . Nótese que $X = \text{Int}(E) \cup \text{Fr}(E) \cup \text{Ext}(E)$.
4. e es un *punto adherente* a E si, para todo $U \in \mathcal{T}$ que contenga a e , se cumple $U \cap E \neq \emptyset$. La colección de puntos adherentes de E se denomina *clausura de* E , la denotamos por \overline{E} y resulta ser el menor cerrado en X que contiene a E .

5. e es un *punto de acumulación* de E si, para todo $U \in \mathcal{T}$ que contenga a e , se cumple $(U \setminus \{e\}) \cap E \neq \emptyset$. La colección de puntos de acumulación de E es denotada por E^a , y se denomina el *derivado* de E . Nótese que $\overline{E} = E \cup E^a$.
6. e es un *punto aislado* de E , si existe $U \in \mathcal{T}$ tal que $U \cap E = \{e\}$. La colección de puntos aislados de E es denotada por $\text{Ais}(E)$. Nótese que $\overline{E} = \text{Ais}(E) \cup E^a$ y además $\text{Ais}(E) \subseteq E$.

Definición 1.3.6. Dado un conjunto X , decimos que $c : 2^X \rightarrow 2^X$ es un *operador de clausura* si satisface las siguientes propiedades, para todo $I, J \subseteq X$:

1. *Extensividad.* $I \subseteq c(I)$.
2. *Monotonía.* Si $I \subseteq J$ entonces $c(I) \subseteq c(J)$.
3. *Idempotencia.* $c(c(I)) = c(I)$.

Por ejemplo, si (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico, el operador $c : 2^X \rightarrow 2^X$ tal que $c(I) = \overline{I}$ es de clausura. De manera más general, si c es un operador de clausura que además satisface las propiedades:

- $c(\emptyset) = \emptyset$,
- $c(\bigcup_{k=1}^n I_k) = \bigcup_{k=1}^n c(I_k)$,

entonces define una única topología \mathcal{T} , donde los conjuntos cerrados son los puntos fijos de c , es decir, aquellos subconjuntos $I \subseteq X$ tales que $c(I) = I$.

Definición 1.3.7. Dados (X, \mathcal{T}) y (Y, \mathcal{H}) dos espacios topológicos, una aplicación $f : X \rightarrow Y$ se dice *continua*, si $f^{-1}(H) \in \mathcal{T}$ para todo $H \in \mathcal{H}$. Si f es biyectiva y su inversa es también continua, decimos que f es un *homeomorfismo* y que los espacios (X, \mathcal{T}) y (Y, \mathcal{H}) son *homeomorfos*.

Proposición 1.3.8. Una función $f : X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos finitos es continua si, y sólo si, para cada par $x, y \in X$, $x \leq y$ implica $f(x) \leq f(y)$ (las funciones continuas son precisamente las aplicaciones que respetan el preorden).

Definición 1.3.9. Una función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ se dice que es un *camino en X* con *punto inicial* $\alpha(0)$ y *punto final* $\alpha(1)$. Un espacio topológico (X, \mathcal{T}) se dice *arco-conexo*, si para todo par $x, y \in X$ existe un camino α con punto inicial en x y punto final en y .

Un espacio topológico (X, \mathcal{T}) es *conexo*, si los únicos conjuntos que son simultáneamente abiertos y cerrados son \emptyset y X . Un espacio *orden-conexo* es aquel que para cada par de puntos $x, y \in X$ existe una sucesión $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ tal que x_i y x_{i+1} son comparables, para todo $0 \leq i \leq n - 1$.

Proposición 1.3.10. *Las propiedades de conexidad, arco-conexidad y orden-conexidad en espacios topológicos finitos son equivalentes.*

Definición 1.3.11. Sean (X, \mathcal{T}) y (Y, \mathcal{H}) dos espacios topológicos, $A \subseteq X$ un subconjunto y $f, g : X \rightarrow Y$ dos funciones continuas. Decimos que f y g son *homótopas relativas a A* , si existe una aplicación continua $H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ tal que para todo $x \in X$

$$H(0, x) = f(x) \text{ y } H(1, x) = g(x)$$

y además, $H(t, x) = f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$, $t \in [0, 1]$. En este caso escribimos $f \simeq g$ (*rel A*); cuando $A = \emptyset$ escribimos simplemente $f \simeq g$.

Definición 1.3.12. Dos funciones $f, g : X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos finitos son *comparables*, si se cumple que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$, ó, $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$.

Proposición 1.3.13. *Sean $f, g : X \rightarrow Y$ dos aplicaciones continuas entre espacios topológicos finitos. Si $A \subseteq X$, $f \simeq g$ (*rel A*) si, y sólo si, existe una sucesión $f = f_0, f_1, \dots, f_n = g$ tal que $f_i : X \rightarrow Y$ es una función continua con $f_i|_A = f|_A$ para todo $0 \leq i \leq n$ y además, f_i y f_{i+1} son comparables para todo $0 \leq i \leq n - 1$.*

Definición 1.3.14. Decimos que dos espacios topológicos X, Y tienen el mismo *tipo de homotopía*, o que son *homotópicamente equivalentes*, si existen funciones $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ tales que $g \circ f \simeq id_X$ y $f \circ g \simeq id_Y$. En este caso escribimos $X \simeq Y$ y decimos que f y g son *equivalencias homotópicas*.

Definición 1.3.15. Sean X, Y espacios topológicos, $A \subseteq X$ un subconjunto y la inclusión $i_A : A \hookrightarrow X$. Decimos que A es un

1. *retracto de X* , si existe una función continua $r : X \rightarrow A$ tal que $r \circ i_A = id_A$. La aplicación r se denomina *retracción*.
2. *retracto por deformación de X* , si existe una retracción r tal que $i_A \circ r \simeq id_X$.
3. *retracto por deformación fuerte de X* , si existe una retracción r tal que $i_A \circ r \simeq id_X$ (*rel A*).

Definición 1.3.16. Una *equivalencia homotópica débil* entre dos espacios topológicos X, Y , es una función continua $f : X \rightarrow Y$ que induce isomorfismos entre los grupos de homotopía de ambos espacios, es decir, que para todo punto de base $x \in X$ se tiene que $f_* : \pi_i(X, x) \rightarrow \pi_i(Y, f(x))$ es un isomorfismo de grupos, para todo $i \geq 1$, y es una función biyectiva para $i = 0$.

Decimos que dos espacios topológicos X, Y son *débilmente (homotópicamente) equivalentes*, si existe una cadena finita de espacios $X = X_1, X_2, \dots, X_n = Y$ y equivalencias débiles $X_i \rightarrow X_{i+1}$ ó $X_{i+1} \rightarrow X_i$ para cada $1 \leq i \leq n - 1$.

1.4. Funciones submodulares y FD-relaciones

En esta sección enunciaremos sin demostración los resultados más relevantes estudiados en [9] y [1], respecto a las conexiones existentes entre FD-relaciones, funciones submodulares y espacios topológicos finitos.

Definición 1.4.1. Dado X un conjunto, una función $f : 2^X \rightarrow \mathbb{R}$ es *submodular* si satisface la propiedad de submodularidad, esto es, que para todo par $A, B \subseteq X$ se cumple

$$f(A \cup B) + f(A \cap B) \leq f(A) + f(B)$$

Además se dice que f es *no decreciente*, si $A \subseteq B$ implica $f(A) \leq f(B)$. Una función f submodular, no decreciente y tal que $f(\emptyset) = 0$ se denomina *polimatroide*. Una función f se dice *supermodular*, si $-f$ es una función submodular. Una función que sea simultáneamente submodular y supermodular, se denomina *modular*.

Observación 1.4.2. En algunas ocasiones, cuando sea claro el contexto, denotaremos el conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ por medio de la lista $a_1 a_2 \cdots a_n$ de tal manera que

$$f(a_1 a_2 \cdots a_n) := f(\{a_1, a_2, \dots, a_n\})$$

Un tipo de funciones submodulares particularmente importantes en nuestro trabajo es introducido a continuación. Dado un conjunto X y una colección $\Delta \subseteq 2^X$, definimos la función $f_\Delta : 2^X \rightarrow \mathbb{Z}$ de tal manera que para cada $I \subseteq X$

$$f_\Delta(I) := \sum_{J \in \Delta} q_J(I)$$

donde $q_J : 2^X \rightarrow \{0, 1\}$ es la aplicación que satisface

$$q_J(I) := \begin{cases} 1, & I \not\subseteq J \\ 0, & I \subseteq J \end{cases}$$

Es sencillo demostrar que para cada $J \subseteq X$ la función q_J es un polimatroide y que la función f_Δ , al ser una suma finita de polimatroides, es también polimatroide. Además, por la definición de las q_J , $f_\Delta(I)$ es el número de elementos en Δ que no contienen a I .

Definición 1.4.3. Dado un conjunto finito X , decimos que $\mathcal{N} \subseteq 2^X \times 2^X$ es una *FD-relación sobre X* , si satisface las siguientes propiedades para todo $I, J, K \subseteq X$:

1. Si $J \subseteq I$ entonces $(I, J) \in \mathcal{N}$.
2. Si $(I, J), (J, K) \in \mathcal{N}$ entonces $(I, K) \in \mathcal{N}$.
3. Si $(I, J), (I, K) \in \mathcal{N}$ entonces $(I, J \cup K) \in \mathcal{N}$.

Los operadores de clausura y las FD-relaciones, se encuentran en correspondencia biunívoca como lo muestran las siguientes dos proposiciones.

Proposición 1.4.4. *Sea X un conjunto finito.*

1. Si \mathcal{N} es una FD-relación sobre X , la aplicación $c_{\mathcal{N}} : 2^X \rightarrow 2^X$ tal que para todo $I \subseteq X$:

$$c_{\mathcal{N}}(I) = \bigcup_{(I, J) \in \mathcal{N}} J$$

define un operador de clausura sobre X .

2. Si c es un operador de clausura sobre X , la colección

$$\mathcal{N}_c = \{(I, J) \in 2^X \times 2^X : J \subseteq c(I)\}$$

define una FD-relación sobre X .

Proposición 1.4.5. *Sea X un conjunto finito. Teniendo en cuenta la notación de la proposición anterior se cumple lo siguiente:*

1. Si \mathcal{N} es una FD-relación sobre X , entonces $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{c_{\mathcal{N}}}$.
2. Si c es un operador de clausura sobre X , entonces $c = c_{\mathcal{N}_c}$.

La conexión entre las funciones submodulares no decrecientes, los operadores de clausura y las FD-relaciones está dada por la siguiente proposición.

Proposición 1.4.6. *Sea $f : 2^X \rightarrow \mathbb{R}$ una función submodular no decreciente sobre un conjunto finito X .*

1. La colección $\mathcal{N}_f \subseteq 2^X \times 2^X$ define una FD-relación sobre X :

$$\mathcal{N}_f = \{(I, J) \in 2^X \times 2^X : f(I) = f(I \cup J)\}$$

2. La aplicación $c_f : 2^X \rightarrow 2^X$ define un operador de clausura sobre X , donde para cada $I \subseteq X$:

$$c_f(I) = \{x \in X : f(I) = f(I \cup \{x\})\}$$

Definición 1.4.7. Para cada FD-relación \mathcal{N} sobre X , definimos la colección de funciones submodulares no decrecientes $\lambda(\mathcal{N})$ de la siguiente manera:

$$\lambda(\mathcal{N}) = \{f : \mathcal{N}_f = \mathcal{N}\}$$

A partir de esta definición, podemos inducir una partición en el conjunto de las funciones submodulares no decrecientes definidas sobre X , por medio de la relación de equivalencia $f \equiv g \iff \mathcal{N}_f = \mathcal{N}_g$. Las clases de equivalencia determinadas por esta relación, resultan invariantes bajo traslaciones y dilataciones o contracciones, además de ser cerradas bajo la suma usual de funciones. De manera más general tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.4.8. Sean \mathcal{N} una FD-relación sobre X , $f, g \in \lambda(\mathcal{N})$ y α un número real. Entonces $f + \alpha, f + g \in \lambda(\mathcal{N})$, donde $(f + \alpha)(x) = f(x) + \alpha$ y $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Además, si α es positivo, $\alpha f \in \lambda(\mathcal{N})$.

Definición 1.4.9. Una FD-relación \mathcal{N} sobre un conjunto finito X se dice *topológica*, si el operador de clausura asociado $c_{\mathcal{N}}$ define una topología sobre X . En este caso, si \mathcal{T} es la topología determinada por $c_{\mathcal{N}}$ escribiremos $\mathcal{N}_{\mathcal{T}} := \mathcal{N}_{c_{\mathcal{N}}} = \mathcal{N}$.

Observación 1.4.10. Si (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico finito y c es su operador de clausura asociado, entonces $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}$ denotará la FD-relación determinada por el operador c , es decir, $\mathcal{N}_{\mathcal{T}} = \mathcal{N}_c$.

Proposición 1.4.11. Si (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico finito y $f \in \lambda(\mathcal{N}_{\mathcal{T}})$, entonces f satisface las siguientes propiedades:

1. Si $I \subseteq X$ y $f(I) = f(\emptyset)$ entonces $I = \emptyset$.
2. Si $f(\bigcup_{k=1}^m I_k) = f(\bigcup_{k=1}^m I_k \cup J)$ entonces existe una sucesión de subconjuntos de X , J_1, J_2, \dots, J_m tal que $J = \bigcup_{k=1}^m J_k$ con $f(I_k) = f(I_k \cup J_k)$ para todo $k = 1, 2, \dots, m$.

Además, si una función submodular no decreciente f satisface 1 y 2, entonces el operador c_f es el operador de clausura de una topología sobre X .

Uno de los aspectos más importantes de las funciones submodulares no decrecientes y las FD-relaciones, en el estudio de los espacios topológicos finitos, es la posibilidad de caracterizar propiedades topológicas por medio de valores numéricos, tal y como lo muestran las siguientes proposiciones.

Proposición 1.4.12. *Dados (X, \mathcal{T}) un espacio topológico finito, $f \in \lambda(\mathcal{N}_{\mathcal{T}})$ y $E \subseteq X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. E es un conjunto abierto en X .
2. $(E^c, J) \in \mathcal{N}_{\mathcal{T}}$ si, y sólo si, $J \subseteq E^c$.
3. $f(E^c) = f(E^c \cup J)$ si, y sólo si, $J \subseteq E^c$.

Proposición 1.4.13. *Dados (X, \mathcal{T}) un espacio topológico finito, $f \in \lambda(\mathcal{N}_{\mathcal{T}})$ y $E \subseteq X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. E es un conjunto cerrado en X .
2. $(E, J) \in \mathcal{N}_{\mathcal{T}}$ si, y sólo si, $J \subseteq E$.
3. $f(E) = f(E \cup J)$ si, y sólo si, $J \subseteq E$.

Proposición 1.4.14. *Dados (X, \mathcal{T}) un espacio topológico finito, $f \in \lambda(\mathcal{N}_{\mathcal{T}})$ y $E \subseteq X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. E es denso en X , esto es, $\overline{E} = X$.
2. $(E, X) \in \mathcal{N}_{\mathcal{T}}$.
3. $f(E) = f(X)$.

Proposición 1.4.15. *Dados (X, \mathcal{T}) un espacio topológico finito, $f \in \lambda(\mathcal{N}_{\mathcal{T}})$, $E \subseteq X$ y $e \in X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. e es un punto interior de E .
2. $(E^c, \{e\}) \notin \mathcal{N}_{\mathcal{T}}$.
3. $f(E^c) < f(E^c \cup \{e\})$.

Proposición 1.4.16. *Dados (X, \mathcal{T}) un espacio topológico finito, $f \in \lambda(\mathcal{N}_{\mathcal{T}})$, $E \subseteq X$ y $e \in X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. e es un punto de acumulación de E .
2. $(E \setminus \{e\}, \{e\}) \in \mathcal{N}_{\mathcal{T}}$.
3. $f(E) = f(E \setminus \{e\})$.

Proposición 1.4.17. *Dados (X, \mathcal{F}) un espacio topológico finito, $f \in \lambda(\mathcal{N}_{\mathcal{F}})$, $E \subseteq X$ y $e \in X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. e es un punto exterior de E .
2. $(E, \{e\}) \notin \mathcal{N}_{\mathcal{F}}$.
3. $f(E) < f(E \cup \{e\})$.

Las siguientes proposiciones no se encuentran explícitamente en [9] y [1]. Aún cuando son consecuencias casi inmediatas de los resultados recién mencionados, los agregamos para tener una lista *completa* de las caracterizaciones posibles.

Proposición 1.4.18. *Dados (X, \mathcal{F}) un espacio topológico finito, $f \in \lambda(\mathcal{N}_{\mathcal{F}})$, $E \subseteq X$ y $e \in X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. e es un punto adherente a E .
2. $(E, \{e\}) \in \mathcal{N}_{\mathcal{F}}$.
3. $f(E \cup \{e\}) = f(E)$.

Demostración. Si c denota el operador de clausura asociado al espacio topológico, por definición de las FD-relaciones $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}$ y \mathcal{N}_f tenemos:

$$e \in c(E) \iff \{e\} \subseteq c(E) \iff (E, \{e\}) \in \mathcal{N}_{\mathcal{F}} \iff f(E \cup \{e\}) = f(E)$$

■

Proposición 1.4.19. *Dados (X, \mathcal{F}) un espacio topológico finito, $f \in \lambda(\mathcal{N}_{\mathcal{F}})$, $E \subseteq X$ y $e \in X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. e es un punto frontera de E .
2. $(E, \{e\}), (E^c, \{e\}) \in \mathcal{N}_{\mathcal{F}}$.
3. $f(E \cup \{e\}) = f(E)$ y $f(E^c \cup \{e\}) = f(E^c)$.

Demostración. Si c denota el operador de clausura asociado al espacio topológico, es sencillo ver a partir de la definición de la frontera de E que $\text{Fr}(E) = c(E) \cap c(E^c)$. El resultado se sigue directamente de la proposición 1.4.18. ■

Proposición 1.4.20. *Dados (X, \mathcal{F}) un espacio topológico finito, $f \in \lambda(\mathcal{N}_{\mathcal{F}})$, $E \subseteq X$ y $e \in E$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. e es un punto aislado de E .
2. $(E \setminus \{e\}, \{e\}) \notin \mathcal{N}_{\mathcal{F}}$.
3. $f(E \setminus \{e\}) < f(E)$.

Demostración. Por definición, $e \in E$ es un punto aislado de E si no es uno de sus puntos de acumulación. El resultado se sigue inmediatamente de la proposición 1.4.16. ■

Capítulo 2

Matrices asociadas a los espacios topológicos finitos

Este capítulo tiene como objetivo asociar a cada espacio topológico finito algunas matrices representativas, que permiten interpretar propiedades topológicas directamente de sus entradas o por medio de operaciones matriciales. Así como existen caracterizaciones numéricas de algunas propiedades a través de las funciones submodulares, veremos que las matrices permiten el estudio de otros tantos atributos e incluso la implementación de algoritmos en el computador.

2.1. Matriz topogénea

Dado (X, \mathcal{T}) un espacio topológico finito donde $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, denotaremos por U_k al abierto minimal que contiene a x_k , esto es

$$U_k = \bigcap_{x_k \in E \in \mathcal{T}} E$$

y consideremos la colección $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$. Esta colección resulta ser una base para (X, \mathcal{T}) , y más aún, es la base *minimal* del espacio en el sentido que \mathcal{U} está contenida en cualquier otra base que genere la topología \mathcal{T} . En efecto, si \mathcal{B} es una base para \mathcal{T} , entonces para cada x_k existe $B_k \in \mathcal{B}$ tal que $x_k \in B_k \subseteq U_k$, y como por definición $U_k \subseteq B_k$, concluimos que $U_k = B_k$ y así $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$.

A partir de la base minimal de un espacio, vamos a definir las matrices topogéneas que serán fundamentales en nuestro estudio de los espacios topológicos finitos. En adelante, usaremos de manera exclusiva la letra X para denotar un conjunto de n elementos $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, a menos que se indique explícitamente lo contrario.

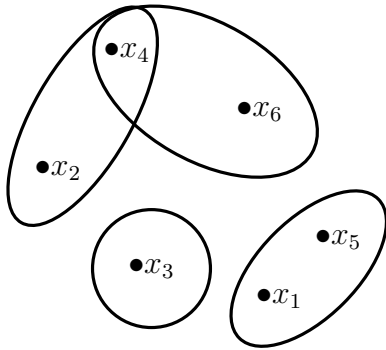
Definición 2.1.1. Sean (X, \mathcal{T}) un espacio topológico finito y $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ su base minimal. La *matriz topogénea* asociada $T_X = [t_{ij}]$ es la matriz cuadrada de tamaño $n \times n$ que satisface

$$t_{ij} = \begin{cases} 1 & , x_i \in U_j \\ 0 & , \text{en otro caso} \end{cases}$$

Observación 2.1.2. Shiraki en [10], introduce el término *topogenous matrix* para denotar la matriz transpuesta de la matriz topogénea que acabamos de definir.

Observación 2.1.3. El orden escogido para los elementos de X , cuando nos referimos a la matriz topogénea, es esencial en la forma como fue definida. Cada conjunto finito X con n elementos, tiene $n!$ matrices topogéneas asociadas, cada una de ellas correspondiendo a una única permutación de los elementos de X , por lo que cada vez que hagamos mención a la matriz topogénea, debemos especificar la numeración en el espacio que estemos estudiando.

Ejemplo 2.1.4. En el diagrama representamos la base minimal de una topología sobre $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$. Los abiertos minimales son $U_1 = U_5 = \{x_1, x_5\}$, $U_2 = \{x_2, x_4\}$, $U_3 = \{x_3\}$, $U_4 = \{x_4\}$, $U_6 = \{x_4, x_6\}$ y por lo tanto su matriz topogénea es la que se muestra a continuación:



$$T_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 2.1.5. Consideremos el espacio topológico (X, \mathcal{T}) donde $X = \{a, b, c, d, e\}$ y

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{b\}, \{d\}, \{b, d\}, \{d, e\}, \{b, d, e\}, \{a, b, d\}, \{a, b, d, e\}, \{a, b, c, d\}, X\}$$

Para las siguientes numeraciones obtenemos las respectivas matrices topogéneas, como puede verificarse calculando la base minimal en cada caso:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (a, b, c, d, e) \quad (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (b, d, e, a, c)$$

$$T_{X_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_{X_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que si tomamos la permutación $\sigma = (124)(35)$, se cumple $T_{X_2} = P_\sigma^T T_{X_1} P_\sigma$.

Las matrices topogéneas pueden caracterizarse mediante el siguiente

Teorema 2.1.6. [10] *Sea $T = [t_{ij}]$ una matriz topogénea de un espacio topológico finito X . Entonces la matriz T satisface las siguientes condiciones, para todo $i, j, k \in I_n$:*

1. $t_{ij} \in \{0, 1\}$.
2. $t_{ii} = 1$.
3. $t_{ik} = t_{kj} = 1 \implies t_{ij} = 1$.

Recíprocamente, si una matriz $T = [t_{ij}]$ satisface las condiciones anteriores, entonces T induce una topología sobre X .

Observamos que la condición 2 está relacionada con la propiedad de reflexividad y la condición 3 con la propiedad transitiva del orden inducido sobre el espacio. El siguiente resultado de Shiraki nos dice que la noción de homeomorfismo entre espacios, puede estudiarse a través de las matrices topogéneas.

Teorema 2.1.7. [10] *Sean (X, \mathcal{T}) y (Y, \mathcal{H}) dos espacios topológicos finitos con matrices topogéneas asociadas T_X y T_Y , respectivamente. Entonces (X, \mathcal{T}) y (Y, \mathcal{H}) son homeomorfos si, y sólo si, las matrices T_X y T_Y son similares vía una matriz de permutación.*

Demostración. Sea $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ y denotemos por $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ y $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_n\}$ las bases minimales de los espacios (X, \mathcal{T}) y (Y, \mathcal{H}) , respectivamente. Supongamos que existe $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{H})$ un homeomorfismo con $f(x_k) = y_{\sigma(k)}$ donde $\sigma \in S_n$ es la permutación inducida por la biyección f . Entonces,

$$f(U_k) = f\left(\bigcap_{x_k \in A \in \mathcal{T}} A\right) = \bigcap_{f(x_k) \in f(A) \in \mathcal{H}} f(A) = \bigcap_{y_{\sigma(k)} \in f(A) \in \mathcal{H}} f(A) = V_{\sigma(k)}$$

luego, si $T_X = [t_{ij}]$ y $T_Y = [l_{ij}]$ tenemos

$$t_{ij} = 1 \iff x_i \in U_j \iff f(x_i) \in f(U_j) \iff y_{\sigma(i)} \in V_{\sigma(j)} \iff l_{\sigma(i)\sigma(j)} = 1$$

por lo tanto $t_{ij} = l_{\sigma(i)\sigma(j)}$ para todo $i, j \in I_n$ y así $T_X = P_\sigma^T T_Y P_\sigma$ (observación 1.2.4), esto es, las matrices topogéneas son similares vía la matriz de permutación P_σ .

Recíprocamente, supongamos que T_X y T_Y son similares vía la matriz de permutación P_σ , entonces $T_X = P_\sigma^T T_Y P_\sigma$. Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} f : (X, \mathcal{T}) &\longrightarrow (Y, \mathcal{H}) \\ x_k &\longmapsto f(x_k) = y_{\sigma(k)} \end{aligned}$$

Como $\sigma \in S_n$ es biyectiva, f también lo es. Además, la aplicación satisface $f(U_k) = V_{\sigma(k)}$ para todo $k \in I_n$, lo que induce una biyección entre las bases minimales \mathcal{U} y \mathcal{V} . Como todo subconjunto abierto en un espacio topológico es unión de elementos de la base minimal, concluimos que $E \in \mathcal{T}$ es equivalente a $f(E) \in \mathcal{H}$ y por consiguiente f es un homeomorfismo. ■

2.2. Triangularización de matrices topogéneas

Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico finito con base minimal $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ y matriz topogénea asociada $T_X = [t_{ij}]$. En la sección 1.3 del capítulo anterior, definimos la relación \leq sobre X por

$$x_i \leq x_j \iff x_i \in U_j \iff U_i \subseteq U_j \iff t_{ij} = 1.$$

Observación 2.2.1. La matriz topogénea del espacio opuesto satisface $T_{X^{op}} = T_X^T$.

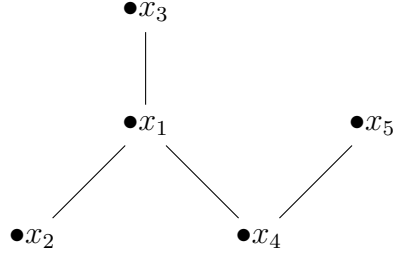
Ésta relación es un preorden en el espacio, es decir, es una relación reflexiva y transitiva. El siguiente teorema, debido a Alexandroff, nos dice bajo qué condición dicha relación es un orden parcial sobre X .

Teorema 2.2.2. [2] *Los espacios topológicos finitos están en correspondencia biunívoca con los preórdenes. Además, un espacio topológico finito (X, \mathcal{T}) es un espacio T_0 si, y sólo si, (X, \leq) es un conjunto parcialmente ordenado.*

Observación 2.2.3. Es bien conocido que todo espacio T_1 es también un espacio T_0 . Sin embargo, los espacios finitos T_1 no son muy interesantes puesto que resultan ser discretos. En efecto, supongamos que (X, \mathcal{T}) es un espacio T_1 con base minimal \mathcal{U} y fijemos k un índice arbitrario. Si $x_i \in U_k$, suponiendo $i \neq k$, entonces para todo $E \in \mathcal{T}$ que contenga a x_k tenemos $\{x_i, x_k\} \subseteq E$, lo que no es posible pues por hipótesis (por ser T_1) existe $B \in \mathcal{T}$ tal que $x_k \in B$ y $x_i \notin B$. Por lo tanto $i = k$ y así $U_k = \{x_k\}$ para todo k , lo cual muestra que \mathcal{T} es la topología discreta sobre X .

Ejemplo 2.2.4. Consideremos el espacio (X, \mathcal{T}) del ejemplo 2.1.5 con la numeración $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (a, b, c, d, e)$; dicho espacio satisface el axioma de separación T_0 . El diagrama de Hasse asociado al poset (X, \leq) es el siguiente:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{x_1, x_2, x_4\} \\ U_2 &= \{x_2\} \\ U_3 &= \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \\ U_4 &= \{x_4\} \\ U_5 &= \{x_4, x_5\} \end{aligned}$$



En el ejemplo 2.1.5, fue posible asociar al espacio considerado una matriz topogénea triangular superior. Ésto no solamente sucede con el espacio del ejemplo, sino para todo espacio T_0 . Más exactamente tenemos el siguiente resultado debido a Shiraki.

Teorema 2.2.5. [10] *Un espacio topológico finito (X, \mathcal{T}) es un espacio T_0 si, y sólo si, la matriz topogénea asociada T_X es similar vía una matriz de permutación, a una matriz topogénea triangular superior.*

Demostración. Supongamos que el espacio satisface el axioma T_0 . Consideremos una permutación del espacio, $X = \{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n\}$, de tal manera que

$$\hat{x}_i \leq \hat{x}_j \implies i \leq j$$

La matriz topogénea $\hat{T}_X = [\hat{t}_{ij}]$ asociada a esta última numeración resulta triangular superior: si $i > j$ entonces $\hat{x}_i \not\leq \hat{x}_j$, lo que es equivalente a $\hat{t}_{ij} = 0$. Finalmente, como \hat{T}_X se obtiene de T_X al realizar una permutación de los índices, éstas matrices son similares.

Recíprocamente, supongamos que T_X y \hat{T}_X son similares vía una matriz de permutación, donde \hat{T}_X es triangular superior. El espacio topológico $X = \{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n\}$ asociado a la matriz topogénea \hat{T}_X es un espacio T_0 : sea $\hat{x}_i \neq \hat{x}_j$, suponiendo sin pérdida de generalidad que $i > j$, entonces $\hat{t}_{ij} = 0$ lo cual es equivalente a tener $\hat{x}_i \notin \hat{U}_j$ y $\hat{x}_j \in \hat{U}_j$. Como el axioma T_0 es un invariante topológico, por medio del teorema 2.1.7, concluimos que X también satisface dicho axioma. ■

Para todo espacio topológico finito X , existe un espacio T_0 con el mismo tipo de homotopía de X , como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 2.2.6. [7] *Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico finito y $\hat{X} = X / \sim$ el espacio cociente obtenido por medio de la relación de equivalencia \sim sobre X definida por: $x_i \sim x_j$ si $x_i \leq x_j$ y $x_j \leq x_i$. Entonces \hat{X} es un espacio T_0 y la aplicación canónica $q : X \rightarrow \hat{X}$ es una equivalencia homotópica.*

Vamos a describir a continuación un procedimiento para encontrar el espacio T_0 homotópicamente equivalente a un espacio topológico finito arbitrario X , por medio de la identificación de elementos equivalentes a partir de la matriz topogénea, observando la repetición de filas y columnas, como se demuestra a continuación.

Proposición 2.2.7. *Sea $T_X = [t_{ij}]$ la matriz topogénea asociada al espacio topológico finito X . Si $\langle x_i \rangle, \langle x_j \rangle \in \widehat{X} = X / \sim$ entonces:*

$$[T_X]_{\bullet i} = [T_X]_{\bullet j} \iff \langle x_i \rangle = \langle x_j \rangle \iff [T_X]_{i \bullet} = [T_X]_{j \bullet}$$

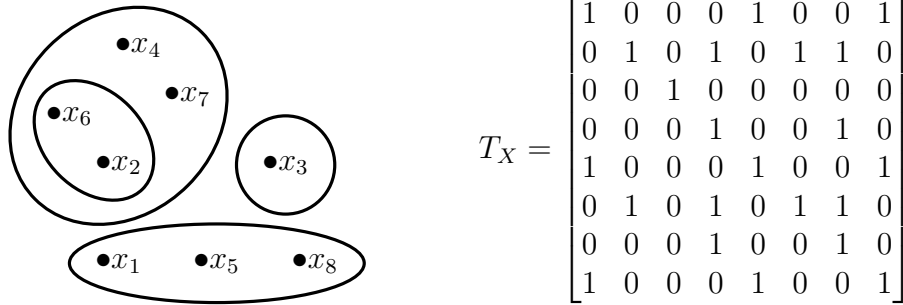
Demostración. Probaremos solamente la primera equivalencia pues el argumento para la segunda es similar. Supongamos $\langle x_i \rangle = \langle x_j \rangle$, entonces $x_i \leq x_j$ y $x_j \leq x_i$ luego para todo $k \in I_n$:

$$t_{ki} = 1 \iff x_k \leq x_i \iff x_k \leq x_j \iff t_{kj} = 1$$

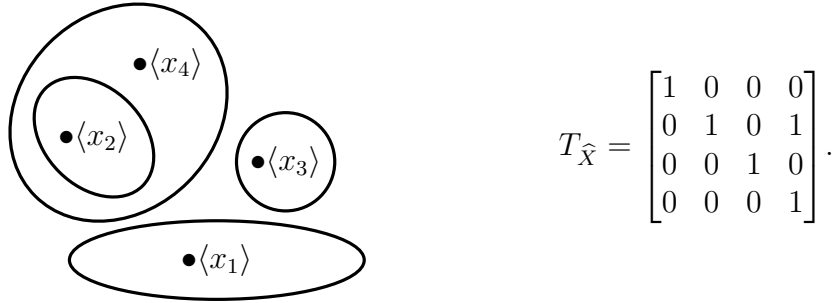
y así $[T_X]_{\bullet i} = [T_X]_{\bullet j}$. Recíprocamente, si $[T_X]_{\bullet i} = [T_X]_{\bullet j}$ entonces, en particular, $1 = t_{ii} = t_{ij}$ y $t_{ji} = t_{jj} = 1$ luego $x_i \leq x_j$ y $x_j \leq x_i$ y por consiguiente $\langle x_i \rangle = \langle x_j \rangle$. ■

De lo anterior, vemos que podemos obtener la matriz topogénea $T_{\widehat{X}}$ asociada al espacio cociente $\widehat{X} = X / \sim$, removiendo filas y columnas repetidas en T_X , excepto una por cada clase de equivalencia.

Ejemplo 2.2.8. El siguiente es un diagrama que representa la base minimal de un espacio topológico X junto con su matriz topogénea asociada:



Como las columnas 1, 5 y 8 son iguales, entonces $\langle x_1 \rangle = \{x_1, x_5, x_8\}$; las columnas 2 y 6 muestran que $\langle x_2 \rangle = \{x_2, x_6\}$ y como las columnas 4 y 7 son iguales, tenemos $\langle x_4 \rangle = \{x_4, x_7\}$ y $\langle x_3 \rangle = \{x_3\}$. Luego al remover las filas y columnas 5, 6, 7 y 8 obtenemos la correspondiente matriz del espacio cociente:

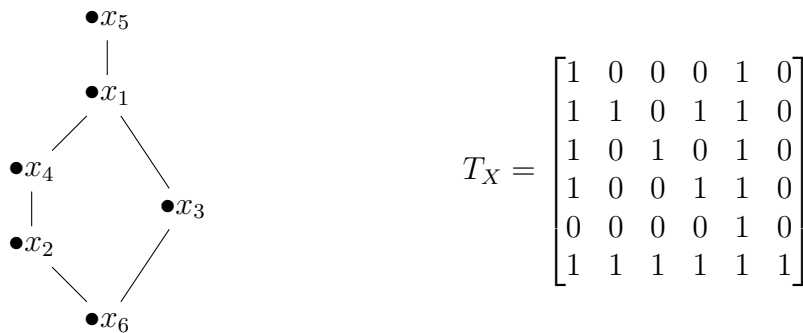


Describiremos a continuación el procedimiento para triangularizar matrices topogéneas suponiendo que el espacio X es T_0 inicialmente. Dada la matriz topogénea $T_X = [t_{ij}]$ definimos $M_k = \sum_{i=1}^n t_{ik} = |U_k|$, para cada $k \in I_n$, organizándolos de forma ascendente

$$M_{k_1} \leq M_{k_2} \leq \dots \leq M_{k_n}$$

y consideramos la permutación $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix}$. Entonces, en virtud de la demostración del teorema 2.2.5 y de la observación 1.2.4 del capítulo anterior, la matriz topogénea $P_\sigma^T T_X P_\sigma$ es triangular superior: si $i > j$ y $t_{\sigma(i)\sigma(j)} = 1$, entonces $x_{\sigma(i)} < x_{\sigma(j)}$ de donde $M_{k_i} < M_{k_j}$ lo que contradice nuestra ordenación de los M_k , luego $t_{\sigma(i)\sigma(j)} = 0$.

Ejemplo 2.2.9. Consideremos el espacio topológico X , representado por su diagrama de Hasse, junto con su matriz topogénea asociada:



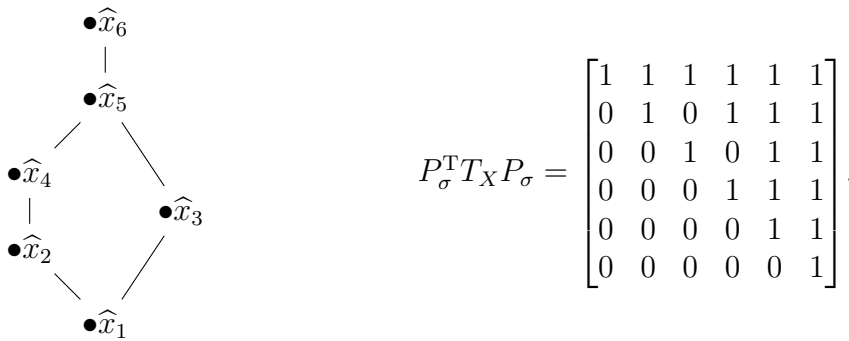
Las sumas en cada columna son: $M_1 = 5, M_2 = M_3 = 2, M_4 = 3, M_5 = 6, M_6 = 1$. Por tanto obtenemos la permutación

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (165)$$

cuya matriz asociada es

$$P_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si denotamos por $\hat{x}_k = x_{\sigma(k)}$, entonces la nueva numeración del espacio se representa en su matriz topogénea como sigue



El trabajo realizado hasta este momento en el capítulo es el siguiente:

- Dado un espacio topológico finito X , le asociamos una matriz topogénea T_X .
- Si el espacio no es T_0 , identificamos el espacio cociente \hat{X} y encontramos su matriz topogénea $T_{\hat{X}}$.
- Si la matriz del espacio cociente no es triangular superior, la triangularizamos vía una matriz de permutación como se describió anteriormente.

En conclusión, dado un espacio topológico finito arbitrario, podemos a partir de él encontrar un espacio T_0 homotópicamente equivalente, cuya matriz topogénea es triangular superior.

Observación 2.2.10. De ahora en adelante, cuando nos referiramos a X como un *espacio* T_0 , asumiremos que (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico finito que satisface el axioma T_0 , con una numeración escogida de manera tal que su matriz topogénea T_X sea triangular superior, en virtud del teorema 2.2.5.

2.2.1. Recorriendo $\text{Top}(X)$

Usando las matrices topogéneas, queremos encontrar una forma de *transitar* a través del retículo $\text{Top}(X)$.

Proposición 2.2.11. *Sean (X, \mathcal{T}_1) y (X, \mathcal{T}_2) espacios topológicos finitos (no necesariamente T_0) con bases minimales $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ y $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_n\}$, respectivamente. Entonces la base minimal $\mathcal{W} = \{W_1, \dots, W_n\}$ para el espacio (X, \mathcal{T}^*) , donde $\mathcal{T}^* = \langle \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \rangle$, satisface $W_k = U_k \cap V_k$ para todo $k \in I_n$.*

Demostración. Sea $k \in I_n$ un índice arbitrario. Por definición, $W_k = \bigcap_{x_k \in A \in \mathcal{T}^*} A$; como $U_k, V_k \in \mathcal{T}^*$, pues $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}^*$, entonces $W_k \subseteq U_k \cap V_k$. Por otro lado, por la construcción de \mathcal{T}^* podemos escribir

$$W_k = \bigcup_{m=1}^p E_m, \text{ donde } E_m = \bigcap_{j=1}^r A_{m_j}^{(1)} \cap \bigcap_{j=1}^s A_{m_j}^{(2)}, \quad A_{m_j}^{(1)} \in \mathcal{T}_1, \quad A_{m_j}^{(2)} \in \mathcal{T}_2$$

esto es, W_k es unión de intersecciones finitas entre elementos de las dos topologías \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 (ver observación 1.3.3 del capítulo anterior). Como $x_k \in W_k$, debe existir m^* tal que $x_k \in E_{m^*}$ y así

$$U_k \cap V_k \subseteq \bigcap_{j=1}^r A_{m_j^*}^{(1)} \cap \bigcap_{j=1}^s A_{m_j^*}^{(2)} = E_{m^*} \subseteq \bigcup_{m=1}^p E_m = W_k$$

demostrando la igualdad $W_k = U_k \cap V_k$; como k es arbitrario, obtenemos el resultado. ■

El siguiente teorema nos muestra la manera de *avanzar* en $\text{Top}(X)$, es decir, nos permite encontrar el supremo de dos topologías.

Teorema 2.2.12. *Sean $X_1 = (X, \mathcal{T}_1)$, $X_2 = (X, \mathcal{T}_2)$ y $X^* = (X, \mathcal{T}^*)$ espacios topológicos finitos (no necesariamente T_0) con matrices topogéneas asociadas T_{X_1}, T_{X_2} y T_{X^*} , respectivamente. Si $\mathcal{T}^* = \langle \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \rangle$ entonces*

$$T_{X^*} = T_{X_1} \wedge T_{X_2} \tag{2.1}$$

Recíprocamente, si existen espacios finitos X_1, X_2 y X^ que satisfacen (2.1) entonces $\mathcal{T}^* = \langle \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \rangle$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{T}^* = \langle \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \rangle$ y fijemos un índice $k \in I_n$. Por la proposición 2.2.11 sabemos que $W_k = U_k \cap V_k$, luego $x_i \in W_k \iff x_i \in U_k$ y $x_i \in V_k$. Como la columna k de una matriz topogénea representa el abierto minimal que contiene a x_k , entonces para cada $i \in I_n$ se cumple $[T_{X^*}]_{ik} = \min \{[T_{X_1}]_{ik}, [T_{X_2}]_{ik}\}$.

La segunda parte del teorema se tiene por la unicidad de la base minimal para una topología, pues si se cumple (2.1), por la parte anterior tendríamos $T_{X^*} = T_{X_1} \wedge T_{X_2} = T_{(X, \langle \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \rangle)}$ y así $\mathcal{T}^* = \langle \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \rangle$. ■

Una forma de *retroceder* en $\text{Top}(X)$ es hallando subtopologías, lo que es posible usando matrices topogéneas como lo muestra el siguiente

Corolario 2.2.13. Sean $X_1 = (X, \mathcal{T}_1)$ y $X_2 = (X, \mathcal{T}_2)$ espacios topológicos finitos (no necesariamente T_0). Entonces $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ si, y sólo si, $T_{X_2} \leq T_{X_1}$.

Demostración. El resultado se sigue de la siguiente cadena de equivalencias

$$\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2 \iff \mathcal{T}_2 = \langle \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \rangle \iff T_{X_2} = T_{X_1} \wedge T_{X_2} \iff T_{X_2} \leq T_{X_1}$$

■

Observación 2.2.14. Si $T_{X_1} \leq T_{X_2}$ entonces $PT_{X_1}P^T \leq PT_{X_2}P^T$ para toda matriz de permutación P .

Consideremos ahora el retículo $\text{Top}(X)$ de las topologías que pueden definirse sobre X , particionado por la relación de homeomorfismo, cuyas clases de equivalencia están dadas por $\widehat{\mathcal{T}} = \{\mathcal{T} \in \text{Top}(X) : \mathcal{T} \text{ es homeomorfa a } \mathcal{T}\}$:

$$\text{HTop}(X) := \left\{ \widehat{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \in \text{Top}(X) \right\}.$$

Si sobre este conjunto definimos la relación \preceq :

$$\widehat{\mathcal{T}} \preceq \widehat{\mathcal{H}} \iff \text{existen } \mathcal{T} \in \widehat{\mathcal{T}} \text{ y } \mathcal{H} \in \widehat{\mathcal{H}} \text{ tales que } \mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}$$

veamos que $(\text{HTop}(X), \preceq)$ es un poset.

La propiedad reflexiva es inmediata de la definición de \preceq . Supongamos $\widehat{\mathcal{T}} \preceq \widehat{\mathcal{H}}$ y $\widehat{\mathcal{H}} \preceq \widehat{\mathcal{E}}$; por definición existen topologías $\mathcal{T} \in \widehat{\mathcal{T}}, \mathcal{H} \in \widehat{\mathcal{H}}$ y $\mathcal{G} \in \widehat{\mathcal{H}}, \mathcal{E} \in \widehat{\mathcal{E}}$ tales que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}$ y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}$ o, equivalentemente por el corolario 2.2.13,

$$T_{\mathcal{E}} \leq T_{\mathcal{G}} \text{ y } T_{\mathcal{H}} \leq T_{\mathcal{T}}$$

luego para cualquier par P, Q matrices de permutación se cumple

$$PT_{\mathcal{E}}P^T \leq PT_{\mathcal{G}}P^T \text{ y } QT_{\mathcal{H}}Q^T \leq QT_{\mathcal{T}}Q^T.$$

Como \mathcal{G} y \mathcal{H} son homeomorfas, por el teorema 2.1.7, existen P, Q matrices de permutación tales que $PT_{\mathcal{G}}P^T = QT_{\mathcal{H}}Q^T$ de donde $PT_{\mathcal{E}}P^T \leq QT_{\mathcal{T}}Q^T$. Como la matriz $PT_{\mathcal{E}}P^T$ representa una topología $\mathcal{E}^* \in \widehat{\mathcal{E}}$ y $QT_{\mathcal{T}}Q^T$ representa una cierta topología $\mathcal{T}^* \in \widehat{\mathcal{T}}$ concluimos que $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{E}^*$ y por lo tanto $\widehat{\mathcal{T}} \preceq \widehat{\mathcal{E}}$, lo que prueba la transitividad de \preceq .

Para probar la antisimetría de \preceq , suponemos $\widehat{\mathcal{T}} \preceq \widehat{\mathcal{H}}$ y $\widehat{\mathcal{H}} \preceq \widehat{\mathcal{T}}$. Entonces existen $\mathcal{T}, \mathcal{E} \in \widehat{\mathcal{T}}$ y $\mathcal{G}, \mathcal{H} \in \widehat{\mathcal{H}}$ tales que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}$ y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}$, luego para cualquier par P, Q matrices de permutación se cumple

$$QT_{\mathcal{E}}Q^T \leq QT_{\mathcal{G}}Q^T \text{ y } PT_{\mathcal{H}}P^T \leq PT_{\mathcal{T}}P^T.$$

Supongamos, en virtud del teorema 2.1.7, que P y Q son tales que $QT_{\mathcal{G}}Q^T = PT_{\mathcal{H}}P^T$, entonces

$$QT_{\mathcal{E}}Q^T \leq QT_{\mathcal{G}}Q^T = PT_{\mathcal{H}}P^T \leq PT_{\mathcal{T}}P^T$$

donde las matrices de los extremos representan topologías en la clase $\widehat{\mathcal{T}}$. Si logramos demostrar que dichas matrices son iguales, tendremos la igualdad también para la matriz del centro, de donde se seguiría que $\widehat{\mathcal{T}} = \widehat{\mathcal{H}}$. Esto es justamente lo que ocurre, y lo enunciamos en el siguiente resultado.

Proposición 2.2.15. *Si X y Y son espacios topológicos finitos homeomorfos (no necesariamente T_0), tales que $T_X \leq T_Y$ entonces $T_X = T_Y$.*

Demostración. Por hipótesis, existe una matriz de permutación P tal que $T_X = PT_YP^T$, luego $\text{sum}(T_X) = \text{sum}(T_Y)$, pues la permutación cambia la posición pero no el valor de las entradas de la matriz. Si suponemos que $T_X \neq T_Y$, existiría una entrada ij tal que $[T_X]_{ij} = 0$ y $[T_Y]_{ij} = 1$, de donde $\text{sum}(T_X) < \text{sum}(T_Y)$ lo que es contradictorio. ■

De manera análoga, considerando a $\text{Top}^0(X)$ como el subretículo formado por las topologías T_0 sobre X , se puede probar que $(\text{HTop}^0(X), \preceq)$ es un poset, donde

$$\text{HTop}^0(X) := \left\{ \widehat{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \in \text{Top}^0(X) \right\}.$$

En este caso denotaremos la clase $\widehat{\mathcal{T}}$ simplemente por \mathcal{T} , donde asumimos, sin pérdida de generalidad, que \mathcal{T} es una topología cuya matriz topogénea es triangular superior.

El máximo de $\text{HTop}^0(X)$ es 2^X y el mínimo es la topología \mathcal{E} cuya matriz $T_{\mathcal{E}}$ satisface $[T_{\mathcal{E}}]_{ij} = 1$ si $i \leq j$ (su diagrama de Hasse representa un orden total en X). Además, podemos caracterizar las topologías *casi maximales* (ultratopologías) como lo indica la siguiente

Proposición 2.2.16. *El elemento máximo de $\text{HTop}^0(X) \setminus \{2^X\}$ es la clase de la topología asociada a la matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Demostración. Sabemos que $\text{sum}(\mathbb{I}_n) = n$, donde la matriz identidad \mathbb{I}_n representa la topología discreta, luego como consecuencia del corolario 2.2.13 la matriz A asociada a una ultratopología debe satisfacer $\text{sum}(A) = n + 1$, es decir, debe haber solamente una entrada no nula por fuera de la diagonal como en (2.2). Finalmente, la entrada no nula puede situarse en cualquiera de los $n^2 - n$ lugares de la matriz que no están en la diagonal, donde cada una de las opciones genera un espacio topológico T_0 distinto. ■

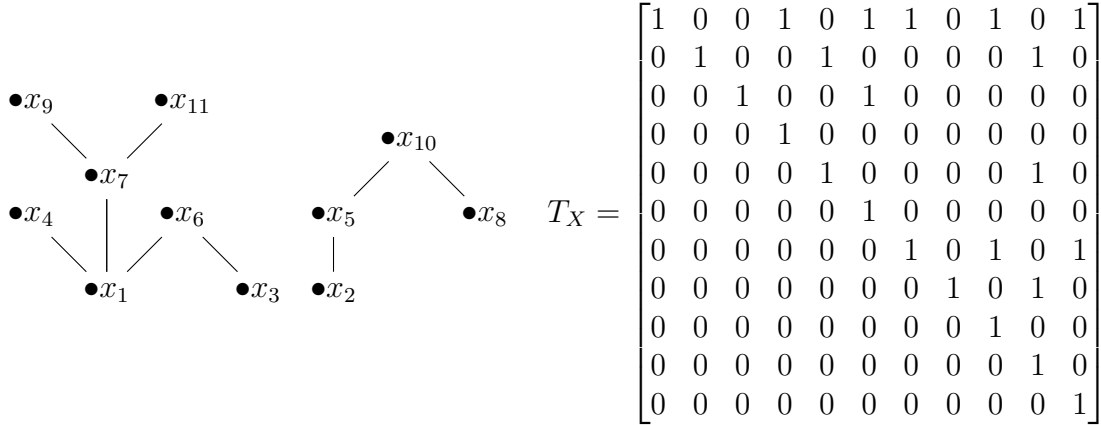
2.2.2. Topología heredada

Sabemos que si (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico (no necesariamente T_0) y $E \subseteq X$, podemos *heredar* o restringir la topología \mathcal{T} definida sobre X , a una topología \mathcal{T}_E sobre E definida por

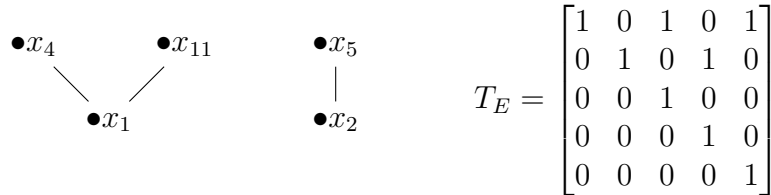
$$\mathcal{T}_E = \{A \cap E : A \in \mathcal{T}\}$$

Si $E = \{x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_r}\}$ y $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ es la base minimal para \mathcal{T} , no es difícil ver que la base minimal $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ para \mathcal{T}_E satisface $V_k = U_{m_k} \cap E$ para todo $k \in I_r$. Como las columnas de una matriz topogénea representan los abiertos minimales, para encontrar la matriz topogénea T_E , debemos eliminar las filas y columnas de la matriz topogénea T_X cuyos índices no estén en $\{m_1, m_2, \dots, m_r\}$.

Ejemplo 2.2.17. Consideremos el siguiente espacio topológico X , cuyo diagrama de Hasse y su matriz topogénea se muestran a continuación:



Si $E = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_{11}\}$, entonces su diagrama de Hasse y su matriz topogénea T_E , obtenida al eliminar las filas y columnas de índices 3, 6, 7, 8, 9, 10 de T_X , son los siguientes, como puede verificarse fácilmente:



2.2.3. Componentes arco-conexas

Proposición 2.2.18. *La matriz topogénea asociada a un espacio topológico finito X , es similar vía permutación a la suma directa de las matrices topogéneas asociadas a cada una de las componentes arco-conexas.*

Demostración. Sean T_X la matriz topogénea del espacio X y X_1, \dots, X_m sus componentes arco-conexas. Consideramos una permutación τ de tal manera que organizamos por bloques los elementos de las componentes: si $X_k = \{z_{i_{k-1}+1}, \dots, z_{i_k}\}$ donde $i_0 = 0$, $i_m = n$, entonces tomamos

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i_1 & i_1 + 1 & \cdots & i_2 & \cdots & n \\ z_1 & \cdots & z_{i_1} & z_{i_1+1} & \cdots & z_{i_2} & \cdots & z_{i_m} \end{pmatrix}.$$

Si $\bar{T}_X = [\bar{t}_{ij}]$ es la matriz topogénea con esta nueva numeración, debemos tener que $\bar{t}_{ij} = 0$ si $\bar{x}_i \in X_i$ y $\bar{x}_j \in X_j$ con $i \neq j$, pues de lo contrario tendríamos $x_i \leq x_j$ y por tanto serían elementos en una misma componente arco-conexa. Luego \bar{T}_X es una matriz por bloques de la forma

$$\bar{T}_X = P_\tau^T T_X P_\tau = \begin{bmatrix} T_{X_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_{X_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & T_{X_m} \end{bmatrix}$$

y donde cada bloque diagonal T_{X_i} es la matriz binaria que representa la relación de orden en X_i , heredada de T_X , es decir, es la matriz topogénea de la componente X_i . ■

La matriz $M = T_X + T_X^T - \mathbb{I}_n$ satisface $[M]_{ij} = 1$ si, y sólo si, x_i y x_j son comparables. Recordamos que dos elementos x_i y x_j están en la misma componente arco-conexa si, y sólo si, existe una sucesión $x_i = x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_r} = x_j$ tal que x_{k_q} y $x_{k_{q+1}}$ son comparables para cada $q = 1, \dots, r-1$, o equivalentemente, que el producto interno de las filas k_q y k_{q+1} cumpla $\langle [M]_{k_q \bullet}, [M]_{k_{q+1} \bullet} \rangle = \sum_{s=1}^n [M]_{k_q, s} [M]_{k_{q+1}, s} \neq 0$.

Lo anterior sugiere un procedimiento para encontrar la componente arco-conexa X_i a la que pertenece el elemento x_i , que describimos a continuación: sea $X_i^{(1)} = \{x_i\}$, calculamos el producto interno de la fila i con todas las demás filas de la matriz M . Si todos estos valores son iguales a cero, entonces $X_i = X_i^{(1)} = \{x_i\}$, de lo contrario existe una fila j_1 tal que el producto interno no es nulo, luego hacemos $X_i^{(2)} = \{x_i, x_{j_1}\}$. A continuación, calculamos el producto interno entre la fila i y las demás filas (excepto la j_1 -ésima), y también los productos internos entre la fila j_1 con las demás filas (excepto la i -ésima). Si todos estos valores son nulos, tendremos $X_i = X_i^{(2)} = \{x_i, x_{j_1}\}$, de lo contrario existe una fila j_2 tal que su producto interno con la fila i o con la fila j_1 no se anula, luego tomamos $X_i^{(3)} = \{x_i, x_{j_1}, x_{j_2}\}$.

Procediendo de manera recursiva, seguimos añadiendo puntos hasta obtener un conjunto $X_i^{(m)} = \{x_i, x_{j_1}, \dots, x_{j_{m-1}}\}$ tal que $X_i^{(m)} = X$, en cuyo caso el espacio X es arco-conexo, o $X_i^{(m)}$ es tal que para todo $j \notin \{i, j_1, \dots, j_{m-1}\}$, el producto interno de la fila j con cualquier fila con índice en $\{i, j_1, \dots, j_{m-1}\}$ es igual a cero, en cuyo caso $X_i^{(m)} = X_i$.

El siguiente algoritmo resume la anterior descripción.

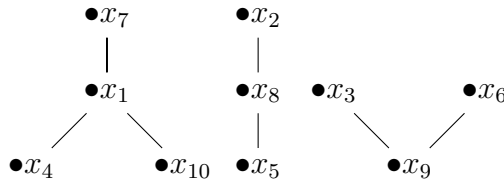
Algoritmo: COMPONENTES ARCO-CONEXAS DE UN ESPACIO

Entrada: Matriz topogénea $T_X = [t_{ij}]_{n \times n}$ asociada al espacio X .

Salida: Componentes arco-conexas del espacio X , representadas en las filas de la matriz resultante M .

1. Calcular la matriz $M = T_X + T_X^T - \mathbb{I}_n$ y tomar $r = 1$, $k = 1$.
 2. **mientras** $r = 1$
 3. n = número de filas de M .
 4. **para** $i = k + 1 \dots n$
 5. **si** $\langle [M]_{k\bullet}, [M]_{i\bullet} \rangle \neq 0$ **hacer** $[M]_{k\bullet} = [M]_{k\bullet} \vee [M]_{i\bullet}$, eliminar la fila i , tomar $k = 1$ e ir al paso 7.
 6. **fin para**
 7. **si** $i = n$ **hacer** $k \leftarrow k + 1$.
 8. **si** $k = n$ **hacer** $r = 0$.
 9. **fin mientras**
-
-

Ejemplo 2.2.19. El espacio representado a continuación tiene tres componentes arco-conexas.



$$T_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Usando la permutación $\sigma = (1\ 4\ 3\ 9\ 2\ 5\ 6\ 8)(7\ 10)$ triangularizamos:

$$\bar{T}_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Considerando la matriz $M = \bar{T}_X + \bar{T}_X^T - \mathbb{I}_{10}$, obtenemos las componentes arco-conexas. Por ejemplo, siguiendo el procedimiento expuesto para encontrar la componente a la que pertenece \bar{x}_2 , tomamos $X_2^{(1)} = \{\bar{x}_2\}$. Como $\langle [M]_{2\bullet}, [M]_{6\bullet} \rangle \neq 0$ hacemos $X_2^{(2)} = \{\bar{x}_2, \bar{x}_6\}$. Ahora, vemos que $\langle [M]_{6\bullet}, [M]_{9\bullet} \rangle \neq 0$ luego tomamos $X_2^{(3)} = \{\bar{x}_2, \bar{x}_6, \bar{x}_9\}$. Como los productos internos de las filas 2, 6 y 9 con las demás filas es nulo, concluimos que $X_2 = X_2^{(3)} = \{\bar{x}_2, \bar{x}_6, \bar{x}_9\}$. De forma análoga, obtenemos las componentes $X_1 = \{\bar{x}_1, \bar{x}_7, \bar{x}_8, \bar{x}_{10}\}$ y $X_3 = \{\bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5\}$ y la permutación τ descrita en la proposición 2.2.18:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 7 & 8 & 10 & 2 & 6 & 9 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Finalmente considerando $\widehat{T}_X = P_\tau^\top \overline{T}_X P_\tau = P_{\sigma \circ \tau}^\top T_X P_{\sigma \circ \tau}$ encontramos una matriz triangular superior en la que podemos identificar fácilmente las tres componentes arcoconexas del espacio: $\{\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3, \widehat{x}_4\}$, $\{\widehat{x}_5, \widehat{x}_6, \widehat{x}_7\}$ y $\{\widehat{x}_8, \widehat{x}_9, \widehat{x}_{10}\}$ donde $\widehat{x}_k = x_{\sigma(\tau(k))}$

$$\widehat{T}_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2.4. Espacio producto y suma ordinal

Si $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ y $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ son dos espacios topológicos finitos, entonces en el producto cartesiano consideramos la siguiente numeración $X \times Y = \{z_1, \dots, z_{nm}\}$ donde $z_{m(i-1)+j} = (x_i, y_j)$.

Proposición 2.2.20. *Si T_X y T_Y son las matrices topogéneas asociadas a los espacios X y Y , entonces la matriz topogénea asociada al producto cartesiano $X \times Y$ satisface*

$$T_{X \times Y} = T_X \otimes T_Y$$

Demostración. Es sencillo ver que $\varphi : I_n \times I_m \rightarrow I_{nm}$ tal que $\varphi(i, j) = m(i-1) + j$, es una función biyectiva. Debemos probar que $[T_{X \times Y}]_{pq} = [T_X \otimes T_Y]_{pq}$ para todo $p, q \in I_{nm}$.

Por medio de φ sabemos que existen $(i, j), (k, l) \in I_n \times I_m$ tales que $p = m(i - 1) + j$ y $q = m(k - 1) + l$. Entonces

$$\begin{aligned}
[T_{X \times Y}]_{pq} = 1 &\iff z_p \leq z_q \\
&\iff (x_i, y_j) \leq (x_k, y_l) \\
&\iff x_i \leq x_k \text{ y } y_j \leq y_l \\
&\iff [T_X]_{ik} = 1 \text{ y } [T_Y]_{jl} = 1 \\
&\iff [T_X]_{ik}[T_Y]_{jl} = 1 \\
&\iff [T_X \otimes T_Y]_{pq} = 1
\end{aligned}$$

■

Las siguiente definición será útil para el estudio de los weak points en el capítulo 3.

Definición 2.2.21. La *suma ordinal* $X \oplus Y$ de dos espacios finitos X y Y , es la unión disyunta $X \sqcup Y$ junto con la relación \leq , que preserva el orden entre los elementos de X y de Y , y donde se cumple que $x \leq y$ para todo $x \in X$ y $y \in Y$.

Proposición 2.2.22. Si X y Y son espacios finitos con matrices topogéneas asociadas T_X y T_Y , respectivamente, entonces la matriz topogénea de $X \oplus Y$ satisface

$$T_{X \oplus Y} = \left[\begin{array}{c|c} T_X & \mathbf{1} \\ \hline \mathbb{0} & T_Y \end{array} \right].$$

Demostración. Si $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ y $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ entonces ordenamos su suma ordinal como $X \oplus Y = \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\}$. Con este orden, basta con interpretar la definición de suma ordinal y obtener la respectiva matriz topogénea, pues los bloques diagonales T_X y T_Y indican que las relaciones de orden en cada espacio X y Y se mantienen, y el bloque $\mathbf{1}$ representa el hecho que todo elemento de Y es cota superior de X . ■

2.2.5. Función de entropía

La función de entropía r_A definida sobre una FD-relación arbitraria se estudia en [12], en un intento por aplicar la teoría de la información en diferentes estructuras. Para cada \mathcal{N} FD-relación, existe un conjunto especial A tal que $r_A \in \lambda(\mathcal{N})$, lo que en nuestro caso particular para FD-relaciones topológicas, permite encontrar una función polimatroide que caracteriza las propiedades topológicas del espacio, como vimos en el capítulo 1. Pretendemos en esta subsección proponer un algoritmo, fácilmente programable en un computador, para hallar los valores de dicha función de entropía.

Sabemos que un conjunto $E = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\} \subseteq X$ es cerrado si, y sólo si, coincide con su clausura lo que significa que todo punto adherente de E es un elemento de E . Usando la base minimal $\mathcal{U} = \{U_x\}_{x \in X}$ del espacio X , tenemos la siguiente caracterización

$$E \text{ es cerrado en } X \iff U_x \cap E = \emptyset \text{ para todo } x \notin E \quad (2.3)$$

Teniendo en cuenta que cada columna k de la matriz topogénea representa el abierto minimal U_k , hallaremos uno a uno los puntos adherentes de E , que no estén en E , encontrando así el menor cerrado C que lo contenga, usando la caracterización dada en (2.3) mediante el siguiente procedimiento: sea $C^{(1)} := E = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\}$, para cada x_k con $k \notin \{i_1, \dots, i_r\}$, consideramos la k -ésima columna de la matriz topogénea y revisamos en dicha columna los elementos de las filas i_1, \dots, i_r ; si todos ellos son nulos, entonces $C = C^{(1)}$, de lo contrario, existe j_1 tal que x_{j_1} es un punto adherente a E luego tomamos $C^{(2)} = E \cup \{x_{j_1}\}$. Ahora, para cada x_k con $k \notin \{i_1, \dots, i_r, j_1\}$, consideramos la columna k -ésima de la matriz topogénea y revisamos en dicha columna los elementos de las filas i_1, \dots, i_r, j_1 ; si todos ellos son nulos, entonces $C = C^{(2)}$, de lo contrario, existe j_2 tal que x_{j_2} es un punto adherente a E , luego tomamos $C^{(3)} = E \cup \{x_{j_1}, x_{j_2}\}$.

Procediendo de manera recursiva, seguimos añadiendo puntos hasta obtener un conjunto $C^{(m)} = E \cup \{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{m-1}}\}$ tal que $C^{(m)} = X$, en cuyo caso el conjunto E es denso en X , o $C^{(m)}$ es tal que para todo $k \notin \{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_{m-1}\}$, la k -ésima columna tiene las entradas $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_{m-1}$ nulas, en cuyo caso $C = C^{(m)}$.

Ejemplo 2.2.23. Encontremos la clausura de $\{x_2, x_4\}$ respecto al espacio topológico X con matriz topogénea asociada

$$T_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tomemos inicialmente $C^{(1)} = \{x_2, x_4\}$. Como la primera columna tiene ceros en sus filas 2 y 4, el elemento x_1 no es añadido a $C^{(1)}$; la tercera columna tiene un uno en su segunda fila y por tanto hacemos $C^{(2)} = \{x_2, x_3, x_4\}$. Cada vez que añadimos un punto, debemos revisar de nuevo aquellos elementos que habíamos descartado en el paso anterior, en este caso el x_1 . La primera columna tiene ceros en sus filas 2, 3 y 4, luego x_1 no es añadido a $C^{(2)}$, finalmente la quinta columna tiene ceros en sus filas 2, 3 y 4, por lo que x_5 tampoco es añadido a $C^{(2)}$, y como hemos agotado todos los puntos del espacio, concluimos que la clausura de $\{x_2, x_4\}$ es $C = C^{(2)} = \{x_2, x_3, x_4\}$.

Los comentarios anteriores permiten encontrar la clausura de un subconjunto arbitrario mediante el siguiente algoritmo.

Algoritmo: CLAUSURA DE UN SUBCONJUNTO $I \subseteq X$

Entrada: Matriz topogénea $T_X = [t_{ij}]_{n \times n}$ asociada al espacio X y un subconjunto $I \subseteq X$.

Salida: Clausura de I : $c(I) = C$.

1. Tomamos $C = I$ y $r = 1$.
 2. **mientras** $r = 1$
 3. **para** $x_i \notin C$
 4. **si** $\sum_{x_k \in C} t_{ik} \neq 0$ **hacer** $C \leftarrow C \cup \{x_i\}$ y regresar al paso 3.
 5. **si** $i = \text{máx} \{j : x_j \notin C\}$ **hacer** $r = 0$.
 6. **fin para**
 7. **fin mientras**
-
-

Observación 2.2.24. En [9] se demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} \bar{f} : 2^X &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ I &\longrightarrow \bar{f}(I) = |c(I)| \end{aligned}$$

donde c es el operador de clausura asociado al espacio topológico finito (X, \mathcal{T}) , es un polimatroide que satisface $\bar{f} \in \lambda(\mathcal{N}_{\mathcal{T}})$ luego, en particular, el anterior algoritmo permite determinar completamente la función \bar{f} .

Ahora bien, tomemos $n_K = |c(K)|$ el cardinal de la clausura de K . En [9] se muestra que si $F_K = 2^n - 2^{n_K}$, la función de entropía $r_A : 2^X \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface

$$r_A(I) = \ln |A| - \frac{2S_I}{|A|} \ln 2$$

donde

$$S_I = \sum_{I \subseteq c(K)} F_K$$

$$M_I = \sum_{I \not\subseteq c(K)} F_K$$

$$|A| = 2(M_I + S_I)$$

Podemos reescribir S_I y M_I como sigue:

$$S_I = \sum_{I \subseteq c(K)} F_K = \sum_{I \subseteq c(K)} (2^n - 2^{n_K}) = 2^n \sum_{I \subseteq c(K)} [1 - 2^{n_K - n}] =: 2^n S_I^*$$

$$M_I = \sum_{I \not\subseteq c(K)} F_K = \sum_{I \not\subseteq c(K)} (2^n - 2^{n_K}) = 2^n \sum_{I \not\subseteq c(K)} [1 - 2^{n_K - n}] =: 2^n M_I^*$$

Por lo que $|A| = 2^{n+1}(M_I^* + S_I^*)$ y así

$$\begin{aligned} r_A(I) &= \ln |A| - \frac{2S_I}{|A|} \ln 2 \\ &= \ln(2^{n+1}(M_I^* + S_I^*)) - \frac{2^{n+1}S_I^*}{2^{n+1}(M_I^* + S_I^*)} \ln 2 \\ &= (n+1) \ln 2 + \ln(M_I^* + S_I^*) - \frac{S_I^*}{(M_I^* + S_I^*)} \ln 2 \\ &= \ln(M_I^* + S_I^*) + \left[n + \frac{M_I^*}{M_I^* + S_I^*} \right] \ln 2 \end{aligned}$$

Teniendo el algoritmo para encontrar la clausura de un subconjunto K , y por tanto para calcular los valores de n_K , S_I^* y M_I^* , podemos evaluar la función r_A mediante el siguiente algoritmo.

Algoritmo: FUNCIÓN DE ENTROPÍA r_A EN UN SUBCONJUNTO $I \subseteq X$

Entrada: Matriz topogénea $T_X = [t_{ij}]_{n \times n}$ asociada al espacio X y un subconjunto $I \subseteq X$.

Salida: Valor $r_A(I)$.

1. Tomamos $M_I^* = S_I^* = 0$.
 2. **para** $K \subseteq X$
 3. Calculamos $n_K = |c(K)|$.
 4. **si** $I \subseteq c(K)$ **hacer** $S_I^* \leftarrow S_I^* + 1 - 2^{n_K - n}$
 de lo contrario $M_I^* \leftarrow M_I^* + 1 - 2^{n_K - n}$
 5. **fin para**
 6. Calculamos $r_A(I) = \ln(M_I^* + S_I^*) + \left[n + \frac{M_I^*}{M_I^* + S_I^*} \right] \ln 2$
-
-

2.3. Matrices U_X y D_X

Sean (X, \mathcal{I}) un espacio topológico finito, \mathcal{U} su base minimal y \mathcal{D} la base minimal para X^{op} , y consideremos la función submodular no decreciente $f_\Delta : 2^X \rightarrow \mathbb{Z}$ definida en el capítulo anterior. En [1] se demuestra que si B es un subconjunto del espacio X entonces

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{U}}(B) &= |X| - |B^\nabla| \\ f_{\mathcal{D}}(B) &= |X| - |B_\Delta| \end{aligned}$$

Aunque estas funciones $f_{\mathcal{U}}$ y $f_{\mathcal{D}}$ no pertenecen a $\lambda(\mathcal{N}_{\mathcal{I}})$, son importantes para describir la topología del espacio, pues caracterizan la relación de orden de la siguiente manera:

$$x_i \leq x_j \iff f_{\mathcal{I}^{op}}(x_i) = f_{\mathcal{I}^{op}}(x_i, x_j) \iff f_{\mathcal{D}}(x_i) = f_{\mathcal{D}}(x_i, x_j) \quad (2.4)$$

$$x_i \leq x_j \iff f_{\mathcal{I}}(x_j) = f_{\mathcal{I}}(x_i, x_j) \iff f_{\mathcal{U}}(x_j) = f_{\mathcal{U}}(x_i, x_j) \quad (2.5)$$

donde $f_{\mathcal{I}^{op}} \in \lambda(\mathcal{N}_{\mathcal{I}})$ y $f_{\mathcal{I}} \in \lambda(\mathcal{N}_{\mathcal{I}^{op}})$.

Definición 2.3.1. Dado X un espacio finito, definimos la matriz $U_X = [u_{ij}]$ asociada a la función $f_{\mathcal{U}}$ como $u_{ij} = f_{\mathcal{U}}(x_i, x_j)$. Análogamente, definimos la matriz $D_X = [d_{ij}]$ asociada a la función $f_{\mathcal{D}}$ como $d_{ij} = f_{\mathcal{D}}(x_i, x_j)$.

Proposición 2.3.2. Si T_X es la matriz topogénea asociada al espacio finito X , entonces

$$U_X = n\mathbf{1} - T_X T_X^T$$

$$D_X = n\mathbf{1} - T_X^T T_X$$

Demostración. Si $E = \{x_i, x_j\}^\nabla$, veamos que $|E| = \sum_{k=1}^n t_{ik}t_{jk}$: en efecto, tenemos las equivalencias

$$x_k \in E \iff x_i \leq x_k \text{ y } x_j \leq x_k \iff t_{ik} = 1 \text{ y } t_{jk} = 1 \iff t_{ik}t_{jk} = 1,$$

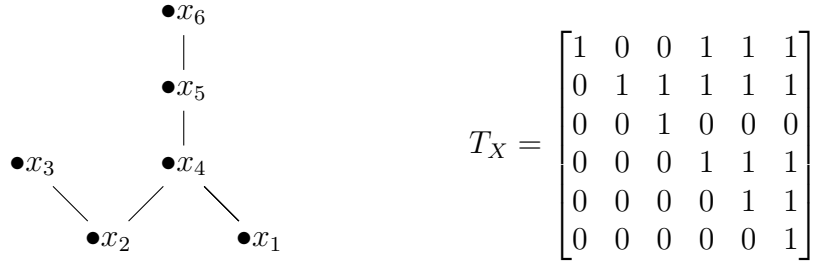
luego cada $x_k \in E$ aporta un uno en la suma $\sum_{k=1}^n t_{ik}t_{jk}$, teniendo así la igualdad requerida. Ahora, si $T_X T_X^T = [c_{ij}]$ entonces $c_{ij} = \sum_{k=1}^n t_{ik}t_{jk} = |E|$ y así

$$u_{ij} = f_{\mathcal{U}}(x_i, x_j) = |X| - |E| = n - c_{ij} = [n\mathbf{1} - T_X T_X^T]_{ij}.$$

Sea $A = \{x_i, x_j\}_\Delta$. Por un argumento similar al anterior, tenemos $|A| = \sum_{k=1}^n t_{ki}t_{kj}$ de donde

$$d_{ij} = f_{\mathcal{D}}(x_i, x_j) = |X| - |A| = [n\mathbf{1} - T_X^T T_X]_{ij}. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 2.3.3. Para el siguiente espacio T_0



las matrices U_X y D_X son las siguientes

$$U_X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 6 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 6 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 6 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \quad D_X = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 6 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 5 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Proposición 2.3.4. Sean X un espacio finito y $M = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\} \subseteq X$, entonces

$$f_U(M) = n - \sum_{r=1}^n \left(\prod_{k=1}^m t_{i_k r} \right)$$

$$f_D(M) = n - \sum_{r=1}^n \left(\prod_{k=1}^m t_{r i_k} \right)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} x_r \in M^\nabla &\iff x_{i_k} \leq x_r \text{ para todo } k = 1, \dots, m \\ &\iff t_{i_k r} = 1 \text{ para todo } k = 1, \dots, m \\ &\iff \prod_{k=1}^m t_{i_k r} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_r \in M_\Delta &\iff x_r \leq x_{i_k} \text{ para todo } k = 1, \dots, m \\ &\iff t_{r i_k} = 1 \text{ para todo } k = 1, \dots, m \\ &\iff \prod_{k=1}^m t_{r i_k} = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto $|M^\nabla| = \sum_{r=1}^n \left(\prod_{k=1}^m t_{i_k r} \right)$ y $|M_\Delta| = \sum_{r=1}^n \left(\prod_{k=1}^m t_{r i_k} \right)$. ■

La proposición 2.3.2 permite obtener las matrices U_X y D_X a partir de la matriz topogénea T_X . Veamos ahora el proceso inverso de obtener la matriz topogénea a partir de U_X y a partir de D_X . En nuestro lenguaje matricial, (2.4) y (2.5) equivalen a tener

$$t_{ij} = 1 \iff u_{jj} = u_{ij} \iff d_{ii} = d_{ij}$$

Por lo tanto, podemos reconstruir la matriz topogénea por medio de los algoritmos:

Algoritmo: MATRIZ TOPOGÉNEA A PARTIR DE U_X

Entrada: Matriz $U_X = [u_{ij}]_{n \times n}$ asociada a la función f_U del espacio X .

Salida: Matriz topogénea $T_X = [t_{ij}]_{n \times n}$ asociada al espacio X .

1. **para** $i = 1 \cdots n$
2. **para** $j = 1 \cdots n$
3. **si** $i > j$ **hacer** $t_{ij} = 0$, **de lo contrario**
4. $t_{ij} = \delta(u_{ij} - u_{jj}, 0)$
5. **fin para**
6. **fin para**

Algoritmo: MATRIZ TOPOGÉNEA A PARTIR DE D_X

Entrada: Matriz $D_X = [d_{ij}]_{n \times n}$ asociada a la función f_D del espacio X .

Salida: Matriz topogénea $T_X = [t_{ij}]_{n \times n}$ asociada al espacio X .

1. **para** $i = 1 \cdots n$
 2. **para** $j = 1 \cdots n$
 3. **si** $i > j$ **hacer** $t_{ij} = 0$, **de lo contrario**
 4. $t_{ij} = \delta(d_{ij} - d_{ii}, 0)$
 5. **fin para**
 6. **fin para**
-
-

Observación 2.3.5. De la proposición 2.3.4 y los algoritmos anteriores, vemos que si $M = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\} \subseteq X$

$$f_{\mathcal{U}}(M) = n - \sum_{r=1}^n \left(\prod_{k=1}^m \delta(f_{\mathcal{U}}(x_r) - f_{\mathcal{U}}(x_{i_k}, x_r), 0) \right)$$

$$f_{\mathcal{D}}(M) = n - \sum_{r=1}^n \left(\prod_{k=1}^m \delta(f_{\mathcal{D}}(x_{i_k}) - f_{\mathcal{D}}(x_{i_k}, x_r), 0) \right)$$

Por lo tanto, las funciones $f_{\mathcal{U}}$ y $f_{\mathcal{D}}$ pueden calcularse para cualquier subconjunto M , a partir de los valores de la funciones en los subconjuntos unitarios y de dos elementos.

Observación 2.3.6. En general podemos expresar la función f_{Δ} en términos de los valores de las funciones q_J en los conjuntos unitarios: si $I \subseteq X$, entonces

$$f_{\Delta}(I) = |\Delta| - \sum_{J \in \Delta} \left(\prod_{x \in I} \delta(q_J(x), 0) \right).$$

El comportamiento de éstas matrices en el producto cartesiano es el siguiente.

Proposición 2.3.7. Sean T_X y T_Y las matrices topogéneas asociadas a los espacios finitos X y Y , U_X y U_Y las matrices asociadas a las funciones $f_{\mathcal{U}_X}$ y $f_{\mathcal{U}_Y}$ respectivamente. Si $|X| = n$ y $|Y| = m$ entonces

$$U_{X \times Y} = (n\mathbf{1}) \otimes U_Y + U_X \otimes (m\mathbf{1}) - U_X \otimes U_Y.$$

Análogamente, si D_X y D_Y son las matrices asociadas a las funciones $f_{\mathcal{D}_X}$ y $f_{\mathcal{D}_Y}$, tenemos

$$D_{X \times Y} = (n\mathbf{1}) \otimes D_Y + D_X \otimes (m\mathbf{1}) - D_X \otimes D_Y.$$

Demostración. Un sencillo cálculo haciendo uso de las propiedades del producto de Kronecker permite obtener el resultado:

$$\begin{aligned} U_{X \times Y} &= nm\mathbf{1} - (T_{X \times Y})(T_{X \times Y})^T \\ &= nm\mathbf{1} - (T_X \otimes T_Y)(T_X \otimes T_Y)^T \\ &= (n\mathbf{1}) \otimes (m\mathbf{1}) - (T_X \otimes T_Y)(T_X^T \otimes T_Y^T) \\ &= (n\mathbf{1}) \otimes (m\mathbf{1}) - (T_X T_X^T) \otimes (T_Y T_Y^T) \\ &= (n\mathbf{1}) \otimes (m\mathbf{1}) - (n\mathbf{1} - U_X) \otimes (m\mathbf{1} - U_Y) \\ &= (n\mathbf{1}) \otimes U_Y + U_X \otimes (m\mathbf{1}) - U_X \otimes U_Y \end{aligned}$$

Como $D_X = U_{X^{op}}$, aplicando lo anterior obtenemos la segunda parte del enunciado. ■

2.4. Matriz de Stong

Stong en [11] considera la siguiente situación. Sea \mathcal{M} la colección de todas las matrices cuadradas $[a_{ij}]$ con entradas de valor entero que satisfacen las siguientes propiedades:

- (1) $a_{ii} \in \mathbb{Z}^+$.
- (2) $i \neq j \Rightarrow a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$.
- (3) $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = -a_{ji}$.
- (4) Para toda sucesión i_1, i_2, \dots, i_m , $m > 2$, de índices distintos tal que $a_{i_k i_{k+1}} = 1$ para todo $k = 1, \dots, m-1$, se debe tener $a_{i_1 i_m} = 0$.

Stong demuestra que \mathcal{M}/\sim , donde \sim es la relación de similaridad vía permutación entre matrices, se encuentra en correspondencia biunívoca con $\text{HTop}(X)$, el conjunto de las clases de equivalencia, bajo homeomorfismos, de los espacios topológicos finitos. La correspondencia es la siguiente: a la clase de equivalencia de un espacio finito X con base minimal \mathcal{U} , le asignamos la clase de la matriz $A = [a_{ij}]$ definida por

$$\begin{cases} a_{ii} \text{ es la cantidad de índices } k \text{ tales que } U_k = U_i, \\ a_{ij} = -a_{ji} = 1, \text{ si } U_i \subset U_j \text{ y no existe } k \text{ tal que } U_i \subset U_k \subset U_j, \\ a_{ij} = 0 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Si X es un espacio T_0 , es claro que la matriz A consta de unos en su diagonal. Además, tomando la numeración propuesta en la observación 2.2.10, podemos garantizar que

$$A = \mathbb{I}_n + \Delta - \Delta^T$$

donde Δ es una matriz triangular superior binaria con ceros en su diagonal. Estamos interesados en matrices de la forma $\mathbb{I}_n + \Delta$, pues $-\Delta^T$ aporta elementos negativos por debajo de la diagonal cuya información es la misma que proporciona Δ^T (en el caso donde el espacio no es T_0 es cuando los elementos negativos en la construcción de Stong juegan un papel importante).

Definición 2.4.1. Dado X un espacio T_0 , definimos la *matriz de Stong* $S_X = [s_{ij}]$ como la matriz cuadrada de tamaño $n \times n$ que satisface

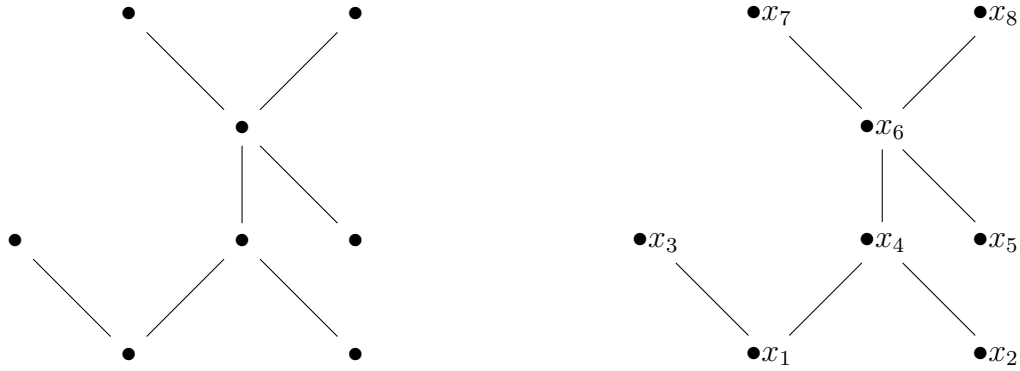
$$s_{ij} = \begin{cases} 1 & , x_i \leq x_j \text{ y no existe } k \text{ tal que } x_i < x_k < x_j \\ 0 & , \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Un método sencillo para calcular la matriz topogénea T_X y la matriz de Stong S_X del espacio X , a partir del diagrama de Hasse asociado, se describe a continuación. Numeramos los vértices del diagrama de manera tal que $x_i < x_j \implies i < j$, esto es, numeramos de *abajo hacia arriba* en el diagrama garantizando que la matriz topogénea sea triangular superior. Para cada $i \neq j$:

- $t_{ij} = 1$ si, y sólo si, existe una cadena con mínimo x_i y máximo x_j .
- $s_{ij} = 1$ si, y sólo si, (x_i, x_j) es una arista del diagrama.

Observación 2.4.2. $t_{ij} = 0 \Rightarrow s_{ij} = 0$ y $s_{ij} = 1 \Rightarrow t_{ij} = 1$.

Ejemplo 2.4.3. Consideremos el siguiente diagrama de Hasse (izquierda) y una numeración del mismo descrita como antes (derecha):



Por ejemplo, para x_5 tenemos que $x_5 \leq x_5$, $x_5 \leq x_6$, $x_5 \leq x_7$ y $x_5 \leq x_8$ luego la quinta fila de T_X es $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$. Para x_1 vemos que las aristas que parten de él son (x_1, x_3) y (x_1, x_4) , luego la primera fila de S_X es $[1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$. Las matrices son las siguientes

$$T_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Al igual que con las matrices U_X y D_X , podemos reconstruir la topogénea a partir de la matriz de Stong y también obtener la matriz de Stong a partir de la topogénea. En el primer caso, usando el teorema 2.1.6, vemos que la matriz topogénea es la matriz de incidencia de la clausura transitiva de la relación binaria representada por la matriz

de Stong. Para la matriz del ejemplo 2.4.3

$$S_X = [s_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

vamos añadiendo unos en cada subdiagonal superior. La primera subdiagonal, que consta de los elementos $s_{k,k+1}$, $1 \leq k \leq 7$, no se modifica pues si existiera k tal que $s_{k,k+1} = 0$ y $t_{k,k+1} = 1$, existiría x_j con $x_k < x_j < x_{k+1}$, lo que no es posible pues la numeración que hemos escogido en la observación 2.2.10 implicaría $k < j < k+1$, una contradicción. Para la segunda subdiagonal, con elementos $s_{k,k+2}$, $1 \leq k \leq 6$, tenemos ceros en las entradas s_{35} y s_{57} . Como $s_{56} = s_{67} = 1$ entonces, $t_{56} = t_{67} = 1 \implies t_{57} = 1$ (teorema 2.1.6) y así añadimos un uno en la entrada (5,7). En el caso de $s_{35} = 0$ no hay modificación, pues $s_{34} = s_{45} = 0$:

$$S_X^{(2)} = [s_{ij}^{(2)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En la tercera subdiagonal, con elementos $s_{k,k+3}$, $1 \leq k \leq 5$, tenemos ceros en las entradas $s_{25}^{(2)}$, $s_{36}^{(2)}$, $s_{47}^{(2)}$ y $s_{58}^{(2)}$. Por ejemplo, como $s_{46}^{(2)} = s_{67}^{(2)} = 1$ entonces $t_{46} = t_{67} = 1 \implies t_{47} = 1$, luego añadimos un uno en la entrada (4,7). Similarmente para la entrada (5,8) pues $s_{56}^{(2)} = s_{68}^{(2)} = 1$. La entrada (2,5) no se modifica pues no existe k tal que $s_{2k}^{(2)} = s_{k5}^{(2)} = 1$, y por la misma razón tampoco modificamos la entrada (3,6):

$$S_X^{(3)} = [s_{ij}^{(3)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Procediendo de manera similar para las siguientes subdiagonales, obtenemos las matrices $S_X^{(4)}$, $S_X^{(5)}$, $S_X^{(6)}$ y $S_X^{(7)}$:

$$\begin{aligned}
S_X^{(4)} = [s_{ij}^{(4)}] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & S_X^{(5)} = [s_{ij}^{(5)}] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
S_X^{(6)} = [s_{ij}^{(6)}] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & S_X^{(7)} = [s_{ij}^{(7)}] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Como llegamos a la última subdiagonal superior, obtenemos la matriz topogénea $T_X = S_X^{(7)}$, lo que coincide con la matriz del ejemplo 2.4.3. El procedimiento anterior puede aplicarse a cualquier espacio T_0 finito X mediante el siguiente algoritmo.

Algoritmo: MATRIZ TOPOGÉNEA A PARTIR DE LA MATRIZ DE STONG

Entrada: Matriz de Stong $S_X = [s_{ij}]_{n \times n}$ asociada al espacio $T_0 X$.

Salida: Matriz topogénea $T_X = [t_{ij}]_{n \times n}$ asociada al espacio $T_0 X$.

1. **si** $n = 1, 2$ **hacer** $T = S$, **de lo contrario**
 2. **si** $j \leq i + 1$ ó $s_{ij} = 1$ **hacer** $t_{ij} = s_{ij}$, **de lo contrario**
 3. **para** $j = 3 \cdots n$
 4. **para** cada elemento nulo $s_{i, i+j-1}$ en la j -ésima subdiagonal superior
 5. **si** existe r tal que $s_{ir} = 1 = s_{r, i+j-1}$ **hacer** $t_{i, i+j-1} = 1$ **de lo contrario** $t_{i, i+j-1} = 0$.
 6. **fin para**
 7. **fin para**
-
-

Revirtiendo el proceso anterior, obtenemos un algoritmo para encontrar la matriz de Stong conociendo la topogénea.

Algoritmo: MATRIZ DE STONG A PARTIR DE LA MATRIZ TOPOGÉNEA

Entrada: Matriz topogénea $T_X = [t_{ij}]_{n \times n}$ asociada al espacio $T_0 X$.

Salida: Matriz de Stong $S_X = [s_{ij}]_{n \times n}$ asociada al espacio $T_0 X$.

1. **para** $i = 1 \cdots n$
 2. **para** $j = 1 \cdots n$
 3. **si** $j \leq i + 1$ ó $t_{ij} = 0$ **hacer** $s_{ij} = t_{ij}$, **de lo contrario**
 4. **si** existe k entre $i + 1$ y $j - 1$ tal que $t_{ik} = 1 = t_{kj}$ **hacer** $s_{ij} = 0$, **de lo contrario** $s_{ij} = 1$
 5. **fin para**
 6. **fin para**
-
-

2.5. Matrices N_T y N_S

Definición 2.5.1. Sean T_X la matriz topogénea y S_X la matriz de Stong asociadas al espacio $T_0 X$. Definimos

$$N_T = T_X - \mathbb{I}_n$$

$$N_S = S_X - \mathbb{I}_n$$

Observación 2.5.2. Las matrices N_T y N_S son nilpotentes por ser matrices triangulares superiores con diagonal nula.

Proposición 2.5.3. Para cada $0 \leq k \leq n - 1$, la entrada $[N_S^k]_{ij}$ representa el número de cadenas de exactamente $k + 1$ elementos con mínimo x_i y máximo x_j , tal que entre cada par de elementos consecutivos en cada cadena, no existe ningún otro elemento de X .

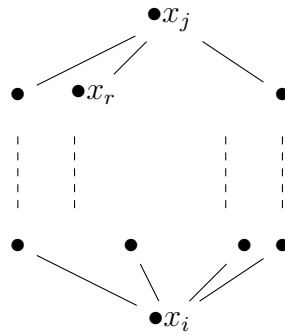
Demostración. Probaremos el resultado por inducción sobre k . Si $k = 0$ entonces $N_S^0 = \mathbb{I}_n$ luego satisface la propiedad descrita, pues las únicas cadenas de un elemento son formadas por un único vértice. Supongamos que $[N_S^k]_{ij}$ representa el número de cadenas con la propiedad del enunciado. Entonces

$$N_S^{k+1} = N_S^k(S_X - \mathbb{I}_n) = N_S^k S_X - N_S^k,$$

luego comparando componente a componente (no tenemos en cuenta en lo siguiente cuando $i = n$ o $j = 1$ pues la última fila y la primera columna son nulas):

$$[N_S^{k+1}]_{ij} = \sum_{r=1}^n [N_S^k]_{ir} s_{rj} - [N_S^k]_{ij} = \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n [N_S^k]_{ir} s_{rj}$$

Un sumando es no nulo cuando $[N_S^k]_{ir} > 0$ y $s_{rj} = 1$, es decir, cuando existen cadenas de $k + 1$ elementos con mínimo x_i y máximo x_r , tales que entre cada par de elementos consecutivos en cada cadena no existe ningún otro elemento, y $x_r < x_j$ donde no existe x_l tal que $x_r < x_l < x_j$.



Por lo tanto, por cada x_r con éstas condiciones, podemos formar $[N_S^k]_{ir}$ cadenas distintas de $k + 2$ elementos (añadimos x_r en cada cadena) con la propiedad del enunciado y así, al hacer la suma obtenemos el total de tales cadenas que es precisamente $[N_S^{k+1}]_{ij}$. ■

Proposición 2.5.4. Para cada $0 \leq k \leq n - 1$, la entrada $[N_T^k]_{ij}$ representa el número de cadenas de $k + 1$ elementos con mínimo x_i y máximo x_j .

Demostración. De nuevo probaremos el resultado por inducción sobre k . Si $k = 0$ entonces $N_T^0 = \mathbb{I}_n$, luego satisface la propiedad descrita, pues las únicas cadenas de un elemento se forman con un único vértice. Supongamos que $[N_T^k]_{ij}$ representa el número de cadenas de $k + 1$ elementos con mínimo x_i y máximo x_j . Entonces

$$N_T^{k+1} = N_T^k(T_X - \mathbb{I}_n) = N_T^k T_X - N_T^k,$$

luego comparando componente a componente (no tenemos en cuenta en lo siguiente cuando $i = n$ o $j = 1$ pues la última fila y la primera columna son nulas):

$$[N_T^{k+1}]_{ij} = \sum_{r=1}^n [N_T^k]_{ir} t_{rj} - [N_T^k]_{ij} = \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n [N_T^k]_{ir} t_{rj}$$

Un sumando distinto de cero satisface $[N_T^k]_{ir} > 0$ y $t_{rj} = 1$, es decir, existen cadenas de $k + 1$ elementos con mínimo x_i y máximo x_r y también $x_r < x_j$.

Corolario 2.5.8. Si $k = h(X) - 1$ entonces $N_S^k = N_T^k$.

Demostración. Por la observación 2.5.5 tenemos que $[N_S^k]_{ij} \leq [N_T^k]_{ij}$. Supongamos $[N_S^k]_{ij} < [N_T^k]_{ij}$, entonces existe una cadena de $k + 1 = h(X)$ elementos con mínimo x_i y máximo x_j :

$$x_i = x_{i_1} < x_{i_2} < \cdots < x_{i_{h(X)}} = x_j$$

en la que existe r tal que $x_{i_r} < x_{i_{r+1}}$ y $(x_{i_r}, x_{i_{r+1}})$ no es una arista, luego existe x tal que $x_{i_r} < x < x_{i_{r+1}}$. Por lo tanto podemos formar la cadena

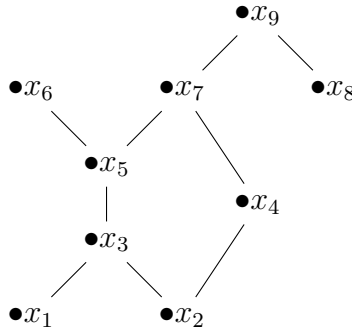
$$x_i = x_{i_1} < x_{i_2} < \cdots < x_{i_r} < x < x_{i_{r+1}} < \cdots < x_{i_{h(X)}} = x_j$$

que tiene $h(X) + 1$ elementos, lo que contradice la maximalidad de $h(X)$. Así debemos tener $[N_S^k]_{ij} = [N_T^k]_{ij}$ para todo $i, j \in I_n$. ■

Corolario 2.5.9. Si $k = h(x_j) - 1$ entonces $[N_S^k]_{\bullet j} = [N_T^k]_{\bullet j}$.

Demostración. El argumento es similar al del corolario 2.5.8. Basta fijar j y cambiar $h(X)$ por $h(x_j)$. ■

Ejemplo 2.5.10. Consideremos el siguiente diagrama de Hasse y calculemos las matrices N_S^k y N_T^k :



Las matrices S_X y N_S^k son:

$$S_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad N_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_T^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_T^k = \mathbb{O}_9 \text{ para } k = 5, 6, 7, 8$$

Vemos que la altura del espacio es 5 por medio de la cadena $x_1 < x_3 < x_5 < x_7 < x_9$ o $x_2 < x_3 < x_5 < x_7 < x_9$, lo que se refleja en las entradas (1, 9) y (2, 9) de las matrices N_S^4 y N_T^4 . Además, por ejemplo, la altura de x_7 es 4 pues la columna 7 en las matrices N_S^3 y N_T^3 no es nula, pero si lo es en N_S^4 y N_T^4 .

Terminamos este capítulo con los siguientes comentarios. En la sección 2.2 describimos un método sencillo para calcular la matriz de permutación P_σ , que nos permite transformar un espacio topológico $T_0 X$ con matriz topogénea T_X arbitraria, en un espacio homeomorfo \bar{X} cuya matriz topogénea \bar{T}_X es triangular superior, donde $\bar{T}_X = P_\sigma^T T_X P_\sigma$. De la misma manera, si S_X, U_X, D_X, N_S y N_T son las matrices asociadas al espacio X como se definieron en este capítulo, las matrices asociadas al espacio \bar{X} están dadas por:

$$\bar{S}_X = P_\sigma^T S_X P_\sigma,$$

$$\bar{U}_X = P_\sigma^T U_X P_\sigma,$$

$$\bar{D}_X = P_\sigma^T D_X P_\sigma,$$

$$\bar{N}_S = P_\sigma^T N_S P_\sigma,$$

$$\bar{N}_T = P_\sigma^T N_T P_\sigma.$$

Esto refuerza nuestra decisión de trabajar con matrices topogéneas triangulares superiores, pues son más sencillas de manipular para realizar cálculos y demostraciones y permiten recuperar las matrices originales del espacio fácilmente por medio de las fórmulas anteriores.

Capítulo 3

Topología algebraica desde un enfoque matricial

Mostraremos que a partir de las matrices definidas en el capítulo 2, se pueden abordar distintos tópicos de la topología algebraica en espacios finitos, como el cálculo del core de cualquier espacio topológico finito e incluso obtener las representaciones matriciales de los operadores de borde, que permiten encontrar los grupos de homología con coeficientes en $\mathbb{F} = \{0, 1\}$, de un complejo simplicial finito arbitrario.

3.1. Métodos de reducción puntual

Stong en [11] muestra que en un espacio finito X es posible eliminar algunos puntos especiales, denominados por Peter May como *beat points*, de tal suerte que obtenemos un espacio más pequeño que el original, y que resulta ser homotópicamente equivalente a X , en otras palabras, la eliminación de *beat points* no altera el tipo de homotopía de un espacio topológico finito.

Barmak en [3] demuestra que la eliminación de *weak points* en un espacio finito permite encontrar un espacio finito más pequeño, con el mismo tipo de homotopía débil del original.

En esta sección vamos a definir dichos puntos y a encontrar un procedimiento para su identificación, por medio de las matrices definidas en el capítulo anterior.

Definición 3.1.1. Sea X un espacio T_0 . Decimos que un elemento x_k es un *up beat point* (ubp), si existe x_i tal que $x_k < x_i$ y además se cumple $x_k < x_j \Rightarrow x_i \leq x_j$, para todo $x_j \in X$. Decimos que x_k es un *down beat point* (dbp), si existe x_i tal que $x_i < x_k$ y además satisface $x_j < x_k \Rightarrow x_j \leq x_i$, para todo $x_j \in X$. Un elemento x_k que es un ubp o dbp se dice simplemente *beat point* (bp).

Observación 3.1.2. x_k es un ubp de X si, y sólo si, x_k es un dbp de X^{op} .

Observación 3.1.3. En [11], Stong usa los términos *linear point* para referirse a un up beat point y *colinear point* para un down beat point.

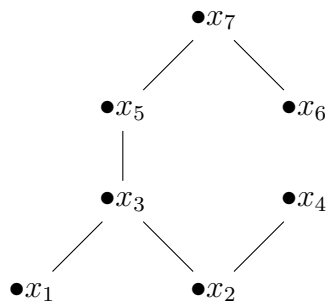
En el diagrama de Hasse asociado a X , podemos identificar los beat points de la siguiente manera: x_k es un ubp si, y sólo si, existe una única arista con x_k como punto inicial; por otra parte, x_k es un dbp si, y sólo si, existe una única arista con x_k como punto final. Así mismo, podemos encontrar los bp de un espacio haciendo uso de su matriz de Stong, como lo muestra el siguiente resultado.

Proposición 3.1.4. Sea X un espacio T_0 con matriz de Stong asociada $S_X = [s_{ij}]$, un punto x_k es un ubp si, y sólo si, $\sum_{j=1}^n s_{kj} = 2$. Un punto x_k es un dbp si, y sólo si, $\sum_{i=1}^n s_{ik} = 2$.

Demostración. Si x_k es un ubp, existe un único elemento x_l tal que (x_k, x_l) es una arista en el diagrama de Hasse, entonces $s_{kl} = 1, s_{kk} = 1$ y $s_{kh} = 0$ para todo $h \neq k, l$ y por tanto $\sum_{j=1}^n s_{kj} = s_{kl} + s_{kk} = 2$.

Recíprocamente, supongamos que el índice k satisface $\sum_{j=1}^n s_{kj} = 2$. Cada término en la sumatoria toma su valor en $\{0, 1\}$, luego solamente dos de esos términos deben ser iguales a uno; como $s_{kk} = 1$, debe existir un único $l \neq k$ con $s_{kl} = 1$, esto es, un único elemento x_l tal que (x_k, x_l) es una arista del diagrama de Hasse y por lo tanto x_k es un ubp. La segunda parte del enunciado se obtiene de la anterior cambiando X por X^{op} y usando la observación 3.1.2. ■

Ejemplo 3.1.5. Identifiquemos los beat points del siguiente espacio usando su matriz de Stong:



$$S_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

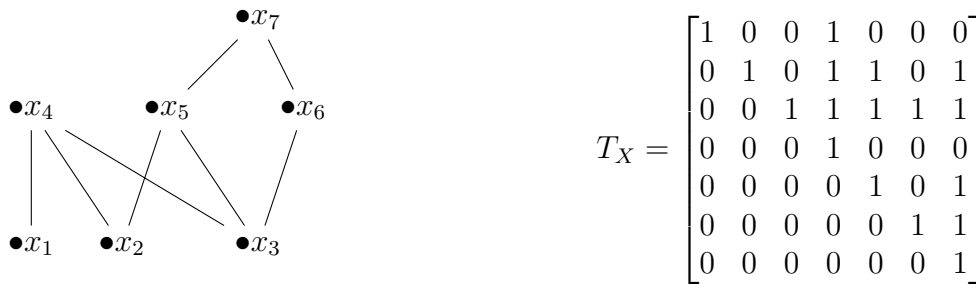
Los puntos x_1, x_3, x_5 y x_6 son los ubp del espacio, puesto que la suma de las entradas en cada fila respectiva es igual a 2. Los dbp del espacio son x_4 y x_5 como puede verificarse sumando las entradas de cada columna en la matriz de Stong, coincidiendo efectivamente con los bp observados en el diagrama de Hasse.

Definición 3.1.6. Un espacio topológico finito X (con punto de base x_p) es un *espacio minimal*, si no tiene beat points (excepto posiblemente x_p). El *core* de un espacio finito X (con punto de base x_p), es un retracto por deformación fuerte de X (con el mismo punto de base) que es además un espacio minimal.

Lo interesante de los beat points es que si $x \in X$ es uno de estos puntos, entonces $X \setminus \{x\}$ es un retracto por deformación fuerte de X , luego podemos encontrar el core de un espacio eliminando uno a uno sus bp [11]. El siguiente es el teorema de clasificación, el cual nos permite afirmar que el core de un espacio X es el espacio más pequeño homotópicamente equivalente a X .

Teorema 3.1.7. [11] *Una equivalencia homotópica entre espacios minimales es un homeomorfismo. En particular, el core de un espacio es único salvo homeomorfismo y dos espacios son homotópicamente equivalentes si, y sólo si, tienen cores homeomorfos.*

Ejemplo 3.1.8. Ilustremos como encontrar el core del siguiente espacio, modificando la matriz topogénea en cada paso.



Eliminamos la primera fila y la primera columna de la matriz, pues x_1 es un ubp:



Eliminamos la fila y columna 5 de la última matriz, que representan el punto x_6 , ya que éste es un ubp (y un dbp):



Finalmente, eliminamos la fila y columna 6 de la última matriz, que representan al punto x_7 , por ser un dbp y éste es el último beat point del espacio como puede verificarse:



Aunque no existe un procedimiento canónico de eliminación de beat points en un espacio T_0 , proponemos el siguiente algoritmo que permite encontrar una matriz topogénea asociada al core, eliminando algunas filas y columnas de la matriz T_X asociada al espacio original.

Algoritmo: MATRIZ TOPOGÉNEA DEL CORE DE X A PARTIR DE LA MATRIZ TOPOGÉNEA DE X

Entrada: Matriz topogénea $T_X = [t_{ij}]_{n \times n}$ asociada al espacio X .

Salida: Matriz topogénea $C_X = [c_{ij}]$ asociada al core de X .

1. Tomamos $r = 0$.
2. **mientras** $r = 0$
3. Calcular la matriz de Stong S_X de T_X .
4. **si** existe k tal que $\sum_{j=1}^n s_{kj} = 2$ (ubp) o $\sum_{i=1}^n s_{ik} = 2$ (dbp) **hacer** $T_X \leftarrow$ matriz obtenida al eliminar la fila y la columna k de T_X , y regresar al paso 2 **de lo contrario** $r = 1$.
5. **fin mientras**

6. $C_X \leftarrow T_X$

Definición 3.1.9. Sean X un espacio finito T_0 , $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ su base minimal y $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$ la base minimal de X^{op} . Dado $x \in X$ definimos la *estrella de x* por $C_x = U_x \cup D_x$ y el *enlace de x* por $\widehat{C}_x = C_x \setminus \{x\}$.

Definición 3.1.10. Un punto $x \in X$ es un *weak point*, si su enlace \widehat{C}_x es contráctil.

Observación 3.1.11. En [3] se prueba que \widehat{C}_x es contráctil si, y sólo si, $U_x \setminus \{x\}$ o $D_x \setminus \{x\}$ es contráctil. Sabemos que x es un beat point si $U_x \setminus \{x\}$ tiene máximo o $D_x \setminus \{x\}$ tiene mínimo, luego alguno de los dos conjuntos es contráctil. Por lo tanto, todo beat point es también un weak point.

Proposición 3.1.12. [3] *Sea x un weak point de un espacio X . Entonces la inclusión $\iota : X \setminus \{x\} \hookrightarrow X$ es una equivalencia homotópica débil.*

Por el teorema 3.1.7 sabemos que un espacio es contráctil si, y sólo si, su core es un punto, luego podemos aplicar el algoritmo anterior para determinar el core de los conjuntos \widehat{C}_x y obtener los weak points.

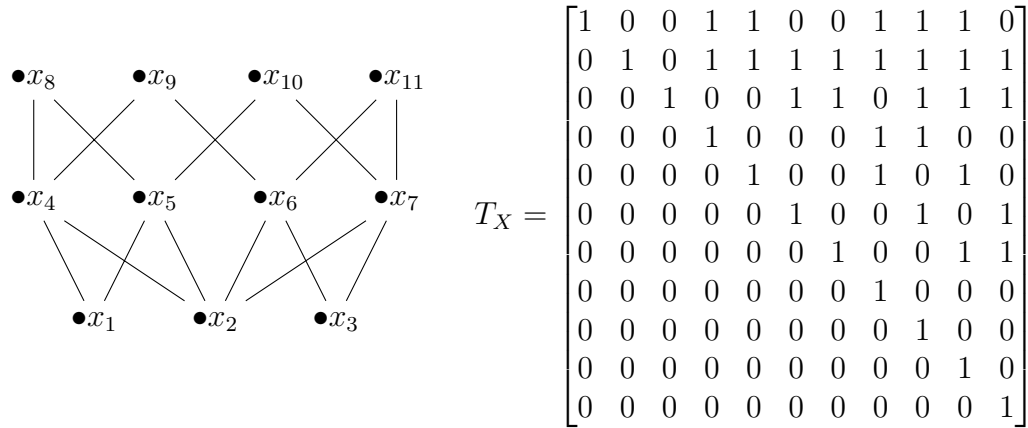
Algoritmo: DETERMINACIÓN DE UN WEAK POINT EN UN ESPACIO USANDO LA MATRIZ TOPOGÉNEA.

Entrada: Matriz topogénea $T_X = [t_{ij}]_{n \times n}$ asociada al espacio X y un punto $x_k \in X$.

Salida: Valor R , que determina si x_k es un weak point ($R = 1$) o no ($R = 0$).

1. Calcular la matriz topogénea $T_{\widehat{C}_{x_k}}$ de la topología heredada a \widehat{C}_{x_k} .
 2. Aplicar el algoritmo anterior para calcular el core C de la matriz $T_{\widehat{C}_{x_k}}$.
 3. si $C = [1]$ **hacer $R = 1$ de lo contrario $R = 0$.**
-
-

Ejemplo 3.1.13. Determinemos si el punto x_{10} en el siguiente espacio es o no un weak point.



Para identificar $\widehat{C}_{x_{10}}$, basta con determinar en la matriz cuales de las entradas en la fila y la columna 10 no son nulas, distintas a la entrada de la diagonal. En nuestro caso, los unos se encuentran en las filas 1, 2, 3, 5 y 7 luego la matriz topogénea de $\widehat{C}_{x_{10}}$ es la matriz obtenida de T_X al eliminar las filas y columnas 4, 6, 8, 9, 10 y 11:

$$T_{\widehat{C}_{x_{10}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = S_{\widehat{C}_{x_{10}}}$$

El core de esta matriz es $C = [1]$, como puede verificarse realizando las eliminaciones respectivas de filas y columnas, luego x_{10} es en efecto un weak point de X .

3.2. Modelos minimales finitos

Definición 3.2.1. Sea Y un espacio topológico arbitrario (no necesariamente finito). Decimos que X es un *modelo finito de Y* , si es un espacio topológico finito débilmente homotópicamente equivalente a Y . Decimos que X es un *modelo minimal finito de Y* , si es un modelo finito de menor cardinalidad.

Definición 3.2.2. Sea X un espacio T_0 . La *suspensión $\mathbb{S}X$* , es el espacio $X \cup \{+, -\}$ cuyos abiertos son los abiertos de X junto con $X \cup \{+\}$, $X \cup \{-\}$ y $X \cup \{+, -\}$. Escribimos de manera recursiva $\mathbb{S}^n X := \mathbb{S}(\mathbb{S}^{n-1} X)$ para $n > 1$. Nótese que $\mathbb{S}X = X \oplus \{+, -\}$.

La suspensión nos permitirá encontrar la matriz topogénea de un modelo minimal finito para la esfera n -dimensional. Para ello usaremos el siguiente resultado que es una consecuencia inmediata de la proposición 2.2.22 del capítulo anterior.

Proposición 3.2.3. Si T_X es la matriz topogénea asociada a un espacio $T_0 X$, la matriz asociada a la suspensión $\mathbb{S}X$ está dada por:

$$T_{\mathbb{S}X} = \left[\begin{array}{c|c} T_X & \mathbf{1}_{n \times 2} \\ \hline \mathbb{O}_{2 \times n} & \mathbb{I}_2 \end{array} \right].$$

Proposición 3.2.4. Si U_X es la matriz asociada a la función f_U del espacio $T_0 X$, entonces la matriz $U_{\mathbb{S}X}$ satisface:

$$U_{\mathbb{S}X} = \left[\begin{array}{c|c} U_X & (n+1)\mathbf{1}_{n \times 2} \\ \hline (n+1)\mathbf{1}_{2 \times n} & (n+2)\mathbf{1}_{2 \times 2} - \mathbb{I}_2 \end{array} \right].$$

Demostración. Eliminamos los subíndices que indican la dimensión de cada matriz, teniendo en cuenta que las particiones tienen sentido para las correctas operaciones entre las matrices. Haciendo uso de las proposiciones 2.3.7 y 3.2.3 tenemos:

$$\begin{aligned} U_{\mathbb{S}X} &= (n+2)\mathbf{1} - T_{\mathbb{S}X}T_{\mathbb{S}X}^T \\ &= \left[\begin{array}{c|c} (n+2)\mathbf{1} & (n+2)\mathbf{1} \\ \hline (n+2)\mathbf{1} & (n+2)\mathbf{1} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c|c} T_X & \mathbf{1} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{I}_2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} T_X^T & \mathbb{O} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbb{I}_2 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} (n+2)\mathbf{1} & (n+2)\mathbf{1} \\ \hline (n+2)\mathbf{1} & (n+2)\mathbf{1} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c|c} T_X T_X^T + 2\mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbb{I}_2 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} n\mathbf{1} - T_X T_X^T & (n+1)\mathbf{1} \\ \hline (n+1)\mathbf{1} & (n+2)\mathbf{1} - \mathbb{I}_2 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} U_X & (n+1)\mathbf{1} \\ \hline (n+1)\mathbf{1} & (n+2)\mathbf{1} - \mathbb{I}_2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

■

En [3] se prueba el siguiente resultado inspirado en el trabajo [7] de McCord.

Corolario 3.2.5. *Cualquier espacio con grupos de homotopía isomorfos a los de la esfera n -dimensional S^n , tiene al menos $2n + 2$ puntos. Más aún, $\mathbb{S}^n S^0$ es el único espacio con $2n + 2$ puntos con esta propiedad.*

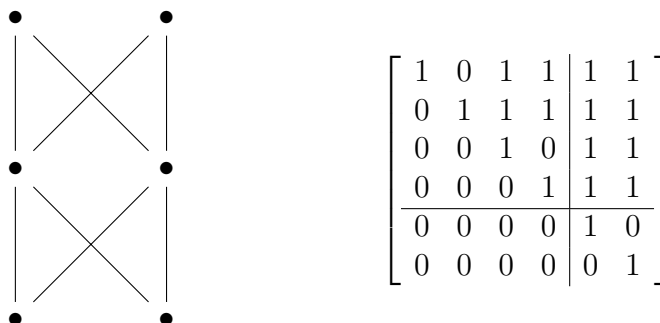
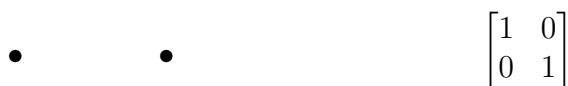
De lo anterior es claro que la esfera n -dimensional tiene un único modelo minimal finito, que podemos representar por una matriz topogénea como se expresa en el siguiente corolario.

Corolario 3.2.6. *Si \tilde{S}^n es la matriz topogénea asociada al único modelo minimal para la esfera S^n , entonces se cumple la siguiente fórmula recursiva:*

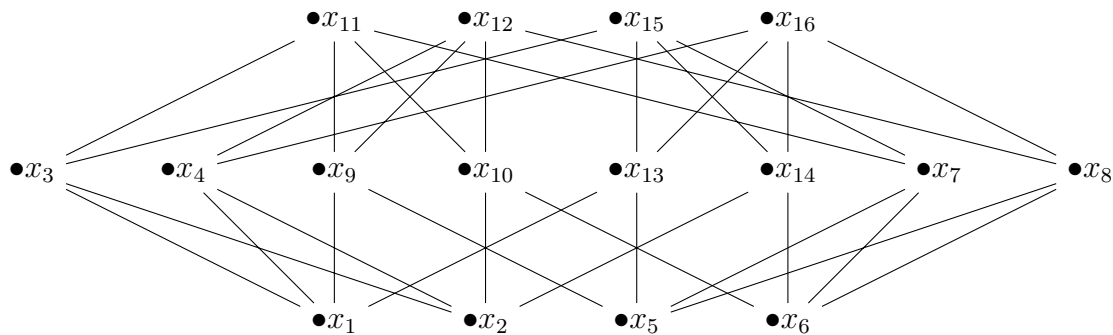
$$\tilde{S}^{n+1} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{S}^n & \mathbf{1}_{(2n+2) \times 2} \\ \hline \mathbb{O}_{2 \times (2n+2)} & \tilde{S}^0 \end{array} \right].$$

Demostración. Basta aplicar la proposición 3.2.3 con $X = \tilde{S}^n$ y donde $\tilde{S}^0 = \mathbb{I}_2$ y $\mathbb{S}X = \tilde{S}^{n+1}$. ■

Ilustramos a continuación los modelos minimales finitos de las esferas S^0 , S^1 y S^2 junto con sus matrices topogéneas respectivas:



Para el toro $S^1 \times S^1$ tenemos el modelo finito $\tilde{S}^1 \otimes \tilde{S}^1$. Sin embargo, aún se encuentra abierta la pregunta: ¿es un modelo *minimal* finito?



$$\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

3.3. Característica de Euler-Poincaré

Definición 3.3.1. Sean X un espacio T_0 y $\mathcal{C}(X)$ el conjunto de todas las cadenas no vacías de X . Definimos la *característica de Euler-Poincaré de X* como:

$$\chi(X) = \sum_{C \in \mathcal{C}(X)} (-1)^{|C|+1}.$$

El siguiente teorema permite calcular la característica de Euler-Poincaré de un espacio a partir de la matriz nilpotente N_T , definida en el capítulo anterior.

Teorema 3.3.2. *La característica de Euler-Poincaré de un espacio T_0 X satisface:*

$$\chi(X) = \sum_{k=1}^{h(X)} (-1)^{k-1} \text{sum}(N_T^{k-1}).$$

Demostración. Si denotamos por $\mathcal{C}_k(X) \subseteq \mathcal{C}(X)$ al conjunto de cadenas de k elementos en X , entonces

$$\chi(X) = \sum_{C \in \mathcal{C}(X)} (-1)^{|C|+1} = \sum_{k=1}^{h(X)} (-1)^{k-1} |\mathcal{C}_k(X)|,$$

luego basta con ver que $|\mathcal{C}_k(X)| = \text{sum}(N_T^{k-1})$, lo cual es cierto por la proposición 2.5.4 del capítulo anterior. ■

Ejemplo 3.3.3. Calculemos la característica de Euler-Poincaré de la esfera n -dimensional. Para esto usaremos la matriz \tilde{S}^n del modelo minimal encontrada en el corolario 3.2.6. Denotando por $N_n := \tilde{S}^n - \mathbb{I}_{2n+2}$ tenemos:

$$N_{n+1} = \left[\begin{array}{c|c} N_n & \mathbf{1} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array} \right] \implies N_{n+1}^k = \left[\begin{array}{c|c} N_n^k & N_n^{k-1} \mathbf{1} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array} \right]$$

de donde $\text{sum}(N_{n+1}^k) = \text{sum}(N_n^k) + \text{sum}(N_n^{k-1} \mathbf{1}) = \text{sum}(N_n^k) + 2 \cdot \text{sum}(N_n^{k-1})$, para cada $k \in \mathbb{Z}^+$, pues la matriz $\mathbf{1}$ en este caso es de tamaño $(2n+2) \times 2$. Entonces,

$$\begin{aligned} \chi(\tilde{S}^{n+1}) &= \sum_{k=1}^{2n+4} (-1)^{k-1} \text{sum}(N_{n+1}^{k-1}) \\ &= \text{sum}(\mathbb{I}_{2n+4}) + \sum_{k=2}^{2n+4} (-1)^{k-1} \text{sum}(N_{n+1}^{k-1}) \\ &= 2 + \text{sum}(\mathbb{I}_{2n+2}) + \sum_{k=2}^{2n+4} (-1)^{k-1} [\text{sum}(N_n^{k-1}) + 2 \cdot \text{sum}(N_n^{k-2})] \\ &= 2 + \text{sum}(\mathbb{I}_{2n+2}) + \sum_{k=2}^{2n+4} (-1)^{k-1} \text{sum}(N_n^{k-1}) - 2 \sum_{k=2}^{2n+4} (-1)^{k-2} \text{sum}(N_n^{k-2}) \\ &= 2 + \chi(\tilde{S}^n) - 2\chi(\tilde{S}^n) \\ &= 2 - \chi(\tilde{S}^n) \end{aligned}$$

Como $\chi(\tilde{S}^0) = 2$ y $\chi(S^n) = \chi(\tilde{S}^n)$ de lo anterior concluimos que:

$$\chi(S^n) = \begin{cases} 2 & , n \text{ es par} \\ 0 & , n \text{ es impar} \end{cases}$$

Proposición 3.3.4. Si X_1, \dots, X_m son las componentes arco-conexas de un espacio T_0 X entonces,

$$\chi(X) = \sum_{r=1}^m \chi(X_r).$$

Demostración. Por la proposición 2.2.18 del capítulo anterior, sabemos que la matriz topogénea T_X es similar vía permutación a la suma directa de las matrices topogéneas de las componentes arco-conexas, que las vamos a suponer triangulares superiores, luego para todo $k \in \mathbb{Z}^+$ se cumple:

$$\bar{T}_X = P_\sigma^\top T_X P_\sigma = \begin{bmatrix} T_{X_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_{X_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & T_{X_m} \end{bmatrix} \implies \bar{N}_T^{k-1} = \begin{bmatrix} N_{T_1}^{k-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_{T_2}^{k-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & N_{T_m}^{k-1} \end{bmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que $h(X) = \max_r \{h(X_r)\}$ y recordando el corolario 2.5.6 del capítulo anterior,

$$\begin{aligned}
 \chi(X) &= \sum_{k=1}^{h(X)} (-1)^{k-1} \text{sum}(\overline{N}_T^{k-1}) \\
 &= \sum_{k=1}^{h(X)} (-1)^{k-1} \sum_{r=1}^m \text{sum}(N_{T_r}^{k-1}) \\
 &= \sum_{r=1}^m \sum_{k=1}^{h(X)} (-1)^{k-1} \text{sum}(N_{T_r}^{k-1}) \\
 &= \sum_{r=1}^m \sum_{k=1}^{h(X_r)} (-1)^{k-1} \text{sum}(N_{T_r}^{k-1}) \\
 &= \sum_{r=1}^m \chi(X_r)
 \end{aligned}$$

■

Finalizamos esta sección calculando la matriz topogénea asociada a un bouquet de n circunferencias $\bigvee_{i=1}^n S^1$, cuando n es un cuadrado. Para tal fin tenemos en cuenta el siguiente resultado.

Teorema 3.3.5. [4] *Un espacio X es un modelo minimal finito de $\bigvee_{i=1}^n S^1$ si, y sólo si, $h(X) = 2$, $|X| = \min \{i + j \mid (i - 1)(j - 1) \geq n\}$ y $|\mathbf{E}(\mathcal{H}(X))| = |X| + n - 1$.*

Además, en [4] se prueba que un bouquet de n circunferencias tiene un único modelo minimal finito si, y sólo si, n es un cuadrado. Para encontrar la matriz topogénea de dicho modelo único, necesitamos lo siguiente.

Lema 3.3.6. *Dado un espacio $T_0 X$, $h(X) \leq 2$ si, y sólo si, $T_X = S_X$. Además $h(X) = 2$ si, y sólo si, $T_X \neq \mathbb{I}_n$ y $T_X = S_X$.*

Demostración. Si $h(X) \leq 2$, entonces por el corolario 2.5.8 tenemos $N_T = N_S$ y así $T_X = S_X$. Recíprocamente, si $T_X = S_X$ todas las cadenas en X tienen cardinal menor o igual a 2, luego $h(X) \leq 2$. ■

Proposición 3.3.7. *Si $n = m^2$, $m \in \mathbb{Z}^+$, el único modelo minimal finito X para $\bigvee_{i=1}^n S^1$ tiene como matriz topogénea asociada:*

$$T_X = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_{m+1} & \mathbf{1}_{m+1} \\ \hline \mathbb{O}_{m+1} & \mathbb{I}_{m+1} \end{array} \right]. \quad (3.1)$$

Demostración. Basta con probar que el espacio asociado a la matriz (3.1) satisface las hipótesis del teorema 3.3.5. Como $T_X = S_X$, entonces $h(X) = 2$. Ahora bien, por definición, sabemos que la característica de Euler-Poincare de un espacio de altura 2 satisface $\chi(X) = |X| - |\mathbf{E}(\mathcal{H}(X))|$, luego usando el teorema 3.3.2 tenemos:

$$|X| - |\mathbf{E}(\mathcal{H}(X))| = \text{sum}(\mathbb{I}_{2m+2}) - \text{sum}(N_T) = 2m + 2 - (m + 1)^2 = 1 - m^2 = 1 - n$$

y así $|\mathbf{E}(\mathcal{H}(X))| = |X| + n - 1$. Finalmente, no es difícil ver que

$$\min \{i + j \mid (i - 1)(j - 1) \geq m^2\} = 2(m + 1),$$

valor que coincide con el tamaño de la matriz T_X . ■

3.4. Grupo fundamental

En [3], Barmak construye el grupo $\mathcal{H}(X, x_m)$ a partir del diagrama de Hasse asociado a un espacio topológico finito T_0 , con el cual describe el grupo fundamental de homotopía de dicho espacio. En esta sección, veremos que también podemos caracterizar el grupo fundamental a través de la matriz topogénea.

Citaremos a continuación una serie de definiciones y resultados que se encuentran en [3], y que nos permitirán encontrar la caracterización que buscamos.

Definición 3.4.1. Sea (X, x_m) un espacio topológico finito T_0 con punto de base x_m y cuyo diagrama de Hasse asociado se denota por $\mathcal{H}(X)$. Un par ordenado de puntos $e = (x, y)$ se denomina una \mathcal{H} -arista de X , si $(x, y) \in \mathbf{E}(\mathcal{H}(X))$ o $(y, x) \in \mathbf{E}(\mathcal{H}(X))$. El punto x es llamado el *origen* de e y se denota por $x = \mathfrak{o}(e)$. El punto y se llama *final* de e y se denota por $x = \mathfrak{f}(e)$. El *inverso* de una \mathcal{H} -arista $e = (x, y)$ es la \mathcal{H} -arista $e^{-1} = (y, x)$.

Un \mathcal{H} -camino en (X, x_m) es una sucesión (posiblemente vacía) de \mathcal{H} -aristas $\xi = e_1 e_2 \cdots e_r$ tal que $\mathfrak{f}(e_k) = \mathfrak{o}(e_{k+1})$, para todo $k = 1, \dots, r - 1$. El *origen* de un \mathcal{H} -camino no vacío ξ es $\mathfrak{o}(\xi) := \mathfrak{o}(e_1)$ y su *final* es $\mathfrak{f}(\xi) := \mathfrak{f}(e_r)$. El origen y el final del \mathcal{H} -camino vacío \emptyset es $\mathfrak{o}(\emptyset) = \mathfrak{f}(\emptyset) = x_m$. Si ξ y ξ' son \mathcal{H} -caminos tales que $\mathfrak{f}(\xi) = \mathfrak{o}(\xi')$, definimos el \mathcal{H} -camino *producto* $\xi\xi'$ como la concatenación de la sucesión ξ seguida por ξ' .

Un \mathcal{H} -camino $\xi = e_1 e_2 \cdots e_r$ se dice *monótono*, si $e_i \in \mathbf{E}(\mathcal{H}(X))$ para todo $i = 1, \dots, r$ ó $e_i^{-1} \in \mathbf{E}(\mathcal{H}(X))$ para todo $i = 1, \dots, r$. Un \mathcal{H} -lazo *basado en* x_m es un \mathcal{H} -camino cuyo origen y final coinciden con x_m . Dados dos \mathcal{H} -lazos basados en x_m ξ y ξ' , decimos que son *cercanos*, si existen \mathcal{H} -caminos $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ tales que ξ_2 y ξ_3 son monótonos, y el conjunto $\{\xi, \xi'\}$ coincide con $\{\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4, \xi_1 \xi_4\}$.

Decimos que dos \mathcal{H} -lazos ξ, ξ' basados en x_m son \mathcal{H} -equivalentes, si existe una sucesión finita $\xi = \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r = \xi'$ de \mathcal{H} -lazos tal que cualquier par de ellos consecutivos son cercanos. Denotamos por $\langle \xi \rangle$ la clase de ξ bajo la relación de equivalencia *ser \mathcal{H} -equivalente* y definimos el conjunto

$$\mathcal{H}(X, x_m) = \{ \langle \xi \rangle \mid \xi \text{ es un } \mathcal{H}\text{-lazo basado en } x_m \}. \quad (3.2)$$

Teorema 3.4.2. [3] *Sea (X, x_m) un espacio topológico finito T_0 con punto de base x_m . Entonces el producto $\langle \xi \rangle \langle \xi' \rangle := \langle \xi \xi' \rangle$ está bien definido e induce una estructura de grupo en $\mathcal{H}(X, x_m)$.*

Corolario 3.4.3. [3] *Sea (X, x_m) un espacio topológico finito T_0 con punto de base x_m , entonces $\mathcal{H}(X, x_m) \simeq \pi_1(X, x_m)$.*

A partir de lo anterior, vamos a construir nuestro grupo usando la información suministrada por la matriz topogénea del espacio.

Definición 3.4.4. Sea (X, x_m) un espacio topológico finito T_0 con punto de base x_m , con matriz topogénea $T_X = [t_{ij}]$ triangular superior de tamaño $n \times n$ y donde $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Un \mathcal{T} -camino en (X, x_m) , es una lista de números $\eta = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r$ con $\alpha_k \in I_n$ y $r \geq 2$, tales que $t_{\alpha_k, \alpha_{k+1}} = 1$ ó $t_{\alpha_{k+1}, \alpha_k} = 1$, para todo $k = 1, \dots, r-1$, su punto inicial es $c(\eta) = \alpha_1$ y su punto final es $f(\eta) = \alpha_r$. El \mathcal{T} -camino inverso de η lo denotaremos por $\eta^{-1} = \alpha_r \cdots \alpha_2 \alpha_1$. Asumimos que la lista vacía ϕ es un \mathcal{T} -camino que comienza y termina en m .

Un \mathcal{T} -camino η se dice *monótono*, si $\alpha_k \leq \alpha_{k+1}$ para todo k , ó, $\alpha_{k+1} \leq \alpha_k$ para todo k . Un \mathcal{T} -ciclo basado en $x_m \in X$ es un \mathcal{T} -camino η tal que $c(\eta) = f(\eta) = m$. La unión de dos \mathcal{T} -caminos $\eta = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r$ y $\lambda = \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_s$ la denotamos por $\eta \star \lambda$ y es el \mathcal{T} -camino que satisface:

$$\eta \star \lambda = \begin{cases} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_s & , \alpha_r \neq \beta_1 \\ \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r \beta_2 \cdots \beta_s & , \alpha_r = \beta_1 \end{cases}$$

es decir, la unión tendrá sentido cuando $t_{\alpha_r, \beta_1} = 1$ o $t_{\beta_1, \alpha_r} = 1$, y será la concatenación habitual de los \mathcal{T} -caminos si $f(\eta) \neq c(\lambda)$, y si $f(\eta) = c(\lambda)$ entonces eliminamos el elemento repetido y luego sí concatenamos; por ejemplo, suponiendo que las listas $\eta = 125$ y $\lambda = 432441$ son \mathcal{T} -caminos, tenemos $\eta \star \lambda = 125432441$, y si $\eta = 125$ y $\lambda = 532441$ entonces en este caso $\eta \star \lambda = 12532441$.

Decimos que dos \mathcal{T} -caminos η y λ son *cercanos*, si existen \mathcal{T} -caminos $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ tales que $\{\eta, \lambda\} = \{\eta_1 \star \eta_4, \eta_1 \star \eta_2 \star \eta_3 \star \eta_4\}$, donde η_2 y η_3 son monótonos y se cumple que $f(\eta_1) = c(\eta_2) = f(\eta_3) = c(\eta_4)$ (en particular, $\eta_2 \star \eta_3$ es un \mathcal{T} -ciclo basado en algún

x_k). A partir de esta definición, es sencillo ver que si η y λ son cercanos, entonces $\eta \star \gamma$ y $\lambda \star \gamma$ también lo son, y similarmente para $\rho \star \eta$ y $\rho \star \lambda$, donde γ y ρ son \mathcal{T} -caminos para los que estén definidas las uniones respectivas.

Observación 3.4.5. Si $\eta = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r$ es un \mathcal{T} -camino, entonces $\eta \star \alpha_r \alpha_r = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r \alpha_r$ es cercano a η , pues podemos escribir $\eta \star \alpha_r \alpha_r = \eta \star \alpha_r \alpha_r \star \phi \star \phi$; de la misma forma los \mathcal{T} -caminos η y $\alpha_1 \alpha_1 \star \eta$ son cercanos.

Dos \mathcal{T} -ciclos η y η' se dicen \mathcal{T} -equivalentes, y ésto lo denotamos por $[\eta] = [\eta']$, si existe una sucesión finita de \mathcal{T} -ciclos $\eta = \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p = \eta'$ tal que cada par de ellos consecutivos son cercanos. Para cada $x_m \in X$, la relación *ser \mathcal{T} -equivalente* en la colección de \mathcal{T} -ciclos basados en x_m , es reflexiva, simétrica y transitiva. El conjunto

$$\mathcal{T}(X, x_m) = \{[\eta] \mid \eta \text{ es un } \mathcal{T}\text{-ciclo basado en } x_m\} \quad (3.3)$$

junto con la operación

$$\begin{aligned} * : \mathcal{T}(X, x_m) \times \mathcal{T}(X, x_m) &\longrightarrow \mathcal{T}(X, x_m) \\ ([\eta], [\lambda]) &\longmapsto [\eta] * [\lambda] := [\eta \star \lambda] \end{aligned}$$

resulta ser un grupo. En efecto, verifiquemos las propiedades de la operación $*$:

- Sean $[\eta] = [\eta']$ y $[\lambda] = [\lambda']$, entonces existen sucesiones de \mathcal{T} -ciclos basados en x_m tales que cada par de ellos consecutivos son cercanos:

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p = \eta' \\ \lambda &= \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q = \lambda' \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\eta \star \lambda = \eta_1 \star \lambda, \eta_2 \star \lambda, \dots, \eta_p \star \lambda = \eta' \star \lambda = \eta' \star \lambda_1, \eta' \star \lambda_2, \dots, \eta' \star \lambda_q = \eta' \star \lambda'$$

y así $[\eta \star \lambda] = [\eta' \star \lambda']$, mostrando que la operación $*$ está bien definida.

- Como la unión de \mathcal{T} -ciclos es asociativa, $*$ también lo es.
- La clase de la lista vacía $[\phi]$ es el módulo para $*$, pues si $[\eta] \in \mathcal{T}(X, x_m)$, entonces $[\eta] * [\phi] = [\eta \star \phi] = [\eta] = [\phi \star \eta] = [\phi] * [\eta]$.
- Probemos por inducción sobre r que si $\eta = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r$ es un \mathcal{T} -ciclo basado en x_m , se cumple $[\eta] * [\eta^{-1}] = [\phi] = [\eta^{-1}] * [\eta]$. Para $r = 2$ tenemos $\eta = \alpha_1 \alpha_2 = mm$ y $\eta^{-1} = mm$. Como $\phi = \phi \star \phi$ y $\eta \star \eta^{-1} = mmm = \phi \star mm \star mm \star \phi$, entonces ϕ y $\eta \star \eta^{-1}$ son cercanos y así $[\phi] = [\eta \star \eta^{-1}]$; similarmente $[\phi] = [\eta^{-1} \star \eta]$.

Supongamos que $\eta = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_r\alpha_{r+1}$ es un \mathcal{T} -ciclo basado en x_m , entonces teniendo en cuenta la observación 3.4.5,

$$\begin{aligned}
[\eta \star \eta^{-1}] &= [\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_r\alpha_{r+1}\alpha_r \cdots \alpha_2\alpha_1] \\
&= [\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_r \star \alpha_r\alpha_{r+1} \star \alpha_{r+1}\alpha_r \star \alpha_r \cdots \alpha_2\alpha_1] \\
&= [\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{r-1}\alpha_r\alpha_{r-1} \cdots \alpha_2\alpha_1] \\
&\quad \vdots \\
&= [\alpha_1\alpha_2\alpha_1] \\
&= [\alpha_1\alpha_1 \star \alpha_1\alpha_2 \star \alpha_2\alpha_1 \star \alpha_1\alpha_1] \\
&= [\alpha_1\alpha_1\alpha_1] = [mmm] = [\phi]
\end{aligned}$$

Análogamente puede probarse la igualdad $[\eta^{-1} \star \eta] = [\phi]$, mostrando que efectivamente $[\eta^{-1}]$ es el inverso de $[\eta]$.

Lema 3.4.6. *Sea (X, x_m) un espacio topológico finito T_0 con punto de base x_m .*

(i) *Si $\alpha_1 \cdots \alpha_{i-1}\alpha_i\alpha_{i+1}\alpha_{i+2} \cdots \alpha_r$ y $\alpha_1 \cdots \alpha_{i-1}\alpha_i\alpha_{i+2} \cdots \alpha_r$ son \mathcal{T} -ciclos donde $\alpha_i = \alpha_{i+1}$, entonces*

$$[\alpha_1 \cdots \alpha_{i-1}\alpha_i\alpha_{i+1}\alpha_{i+2} \cdots \alpha_r] = [\alpha_1 \cdots \alpha_{i-1}\alpha_i\alpha_{i+2} \cdots \alpha_r].$$

(ii) *Si η_1, η_2 y η_3 son \mathcal{T} -camino donde $\eta_2 = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_r$ es monótono, el \mathcal{T} -ciclo $\eta_1 \star \eta_2 \star \eta_3$ es \mathcal{T} -equivalente a $\eta_1 \star \alpha_1\alpha_r \star \eta_3$.*

Demostración. Para probar (i), basta con observar que $\alpha_i\alpha_{i+1}$ y ϕ son \mathcal{T} -camino monótonos, luego

$$\alpha_1 \cdots \alpha_{i-1}\alpha_i\alpha_{i+1}\alpha_{i+2} \cdots \alpha_r = \alpha_1 \cdots \alpha_{i-1}\alpha_i \star \alpha_i\alpha_{i+1} \star \phi \star \alpha_{i+1}\alpha_{i+2} \cdots \alpha_r$$

Por otro lado, la parte (i) permite asumir sin pérdida de generalidad en (ii), que $\eta_1 \star \eta_2 \star \eta_3$ no tiene elementos consecutivos iguales y además, deja ver que $\eta_1 \star \eta_2 \star \eta_3 = \eta_1 \star f(\eta_1)\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_r \star \eta_3$ es \mathcal{T} -equivalente a $(\eta_1 \star f(\eta_1)\alpha_1) \star \alpha_2\alpha_2 \star \phi \star (\alpha_3 \cdots \alpha_r \star \eta_3)$, lo que a su vez, por definición, es cercano al \mathcal{T} -ciclo $(\eta_1 \star f(\eta_1)\alpha_1) \star (\alpha_3 \cdots \alpha_r \star \eta_3) = \eta_1 \star \alpha_1\alpha_3 \cdots \alpha_r \star \eta_3$. Continuando de manera recursiva, obtenemos que para cada $j = 2, \dots, r-1$, $\eta_1 \star \alpha_1\alpha_j \cdots \alpha_r \star \eta_3$ es \mathcal{T} -equivalente a $\eta_1 \star \alpha_1\alpha_{j+1} \cdots \alpha_r \star \eta_3$, de donde concluimos por transitividad que $\eta_1 \star \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_r \star \eta_3$ y $\eta_1 \star \alpha_1\alpha_r \star \eta_3$ son \mathcal{T} -equivalentes. ■

Teorema 3.4.7. *Sea (X, x_m) un espacio topológico finito T_0 con punto de base x_m , con matriz topogénea $T_X = [t_{ij}]$ triangular superior de tamaño $n \times n$. Entonces el grupo $\mathcal{T}(X, x_m)$ es isomorfo a $\mathcal{H}(X, x_m)$.*

Demostración. Definamos la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{H}(X, x_m) &\longrightarrow \mathcal{T}(X, x_m) \\ \langle e_1 e_2 \cdots e_p \rangle &\longmapsto [\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{p+1}] \\ \langle \emptyset \rangle &\longmapsto [\phi] \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde $e_k = (x_{\alpha_k}, x_{\alpha_{k+1}}) \in E(\mathcal{H}(X))$ ó $e_k^{-1} \in E(\mathcal{H}(X))$, para todo $k = 1, 2, \dots, p$. La función φ está bien definida (basta probarlo para \mathcal{H} -lazos cercanos), pues si $\xi = \xi_1 \xi_4$ y $\xi' = \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4$, donde ξ_2 y ξ_3 son \mathcal{H} -camino monótonos y tales que:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2})(x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3}) \cdots (x_{\alpha_r}, x_{\alpha_{r+1}}) \\ \xi_2 &= (x_{\beta_1}, x_{\beta_2})(x_{\beta_2}, x_{\beta_3}) \cdots (x_{\beta_s}, x_{\beta_{s+1}}) \\ \xi_3 &= (x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2})(x_{\gamma_2}, x_{\gamma_3}) \cdots (x_{\gamma_p}, x_{\gamma_{p+1}}) \\ \xi_4 &= (x_{\delta_1}, x_{\delta_2})(x_{\delta_2}, x_{\delta_3}) \cdots (x_{\delta_q}, x_{\delta_{q+1}}) \end{aligned}$$

entonces, como $\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_s \beta_{s+1}$ y $\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_p \gamma_{p+1}$ son \mathcal{T} -camino monótonos que satisfacen $\beta_1 = \gamma_{p+1} = \delta_1 = \alpha_{r+1}$,

$$\begin{aligned} \varphi(\langle \xi \rangle) &= [\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r \alpha_{r+1} \star \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_q \delta_{q+1}] \\ &= [\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r \alpha_{r+1} \star \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_s \beta_{s+1} \star \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_p \gamma_{p+1} \star \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_q \delta_{q+1}] \\ &= \varphi(\langle \xi' \rangle) \end{aligned}$$

Ahora bien, si $\langle \xi \rangle, \langle \xi' \rangle \in \mathcal{H}(X, x_m)$ son arbitrarios con

$$\begin{aligned} \xi &= (x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2})(x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3}) \cdots (x_{\alpha_r}, x_{\alpha_{r+1}}) \\ \xi' &= (x_{\beta_1}, x_{\beta_2})(x_{\beta_2}, x_{\beta_3}) \cdots (x_{\beta_s}, x_{\beta_{s+1}}) \end{aligned}$$

entonces, teniendo en cuenta que $\alpha_1 = \alpha_{r+1} = \beta_1 = \beta_{s+1} = m$, tienen sentido las igualdades

$$\varphi(\langle \xi \rangle \langle \xi' \rangle) = \varphi(\langle \xi \xi' \rangle) = [\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r \alpha_{r+1} \star \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_s \beta_{s+1}] = \varphi(\langle \xi \rangle) \star \varphi(\langle \xi' \rangle),$$

de donde concluimos que φ es un homomorfismo de grupos. Probaremos que esta aplicación φ es de hecho un isomorfismo de grupos, mostrando explícitamente su función inversa. Definamos la aplicación

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{T}(X, x_m) &\longrightarrow \mathcal{H}(X, x_m) \\ [\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{p+1}] &\longmapsto \langle e_1 e_2 \cdots e_p \rangle \\ [\phi] &\longmapsto \langle \emptyset \rangle \end{aligned} \quad (3.5)$$

suponiendo sin pérdida de generalidad, por el lema 3.4.6, que no existe j tal que $\alpha_j = \alpha_{j+1}$, y donde $e_k = (x_{\alpha_k}, x_{\alpha_{k+1}}) \in E(\mathcal{H}(X))$ ó $e_k^{-1} \in E(\mathcal{H}(X))$. La aplicación ψ está bien definida para \mathcal{T} -ciclos cercanos (y por tanto también para \mathcal{T} -ciclos equivalentes), pues si $\eta = \eta_1 \star \eta_4$ y $\lambda = \eta_1 \star \eta_2 \star \eta_3 \star \eta_4$, donde η_2 y η_3 son \mathcal{T} -caminos monótonos tales que

$$\eta_1 = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r, \quad \eta_2 = \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_s, \quad \eta_3 = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_p, \quad \eta_4 = \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_q$$

con $\alpha_r = \beta_1 = \gamma_p = \delta_1$ entonces, suponiendo $\beta_s = \gamma_1$, definimos los \mathcal{H} -caminos,

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2})(x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3}) \cdots (x_{\alpha_{r-1}}, x_{\alpha_r}) \\ \xi_2 &= (x_{\beta_1}, x_{\beta_2})(x_{\beta_2}, x_{\beta_3}) \cdots (x_{\beta_{s-1}}, x_{\beta_s}) \\ \xi_3 &= (x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2})(x_{\gamma_2}, x_{\gamma_3}) \cdots (x_{\gamma_{p-1}}, x_{\gamma_p}) \\ \xi_4 &= (x_{\delta_1}, x_{\delta_2})(x_{\delta_2}, x_{\delta_3}) \cdots (x_{\delta_{q-1}}, x_{\delta_q}) \end{aligned}$$

donde vemos que ξ_2 y ξ_3 son monótonos, por ser triangular superior la matriz topogénea, y por lo tanto

$$\psi([\lambda]) = \langle \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \rangle = \langle \xi_1 \xi_4 \rangle = \psi([\eta]).$$

En el caso cuando $\beta_s \neq \gamma_1$, no es difícil ver que $\xi_2(x_{\beta_s}, x_{\gamma_1})\xi_3$ puede escribirse como $\xi'_2 \xi'_3$ donde ξ'_2 y ξ'_3 son caminos monótonos y de nuevo

$$\psi([\lambda]) = \langle \xi_1 \xi'_2 \xi'_3 \xi_4 \rangle = \langle \xi_1 \xi_4 \rangle = \psi([\eta])$$

demostrando que efectivamente la aplicación ψ está bien definida.

Ahora bien, suponiendo que $[\eta], [\lambda] \in \mathcal{T}(X, x_m)$ son clases arbitrarias tales que sus representantes $\eta = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r$ y $\lambda = \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_s$ satisfacen $\alpha_k \neq \alpha_{k+1}$ y $\beta_j \neq \beta_{j+1}$ para todo $k = 1, \dots, r-1$ y todo $j = 1, \dots, s-1$ (se garantiza por el lema 3.4.6), y recordando que $\alpha_1 = \alpha_r = m = \beta_1 = \beta_s$ tenemos:

$$\begin{aligned} \psi([\eta] * [\lambda]) &= \psi([\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{r-1} \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_{s-1} \beta_s]) \\ &= \langle (x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) \cdots (x_{\alpha_{r-1}}, x_{\beta_1})(x_{\beta_1}, x_{\beta_2}) \cdots (x_{\beta_{s-1}}, x_{\beta_s}) \rangle \\ &= \langle (x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) \cdots (x_{\alpha_{r-1}}, x_{\alpha_r}) \rangle \langle (x_{\beta_1}, x_{\beta_2}) \cdots (x_{\beta_{s-1}}, x_{\beta_s}) \rangle \\ &= \psi([\eta])\psi([\lambda]), \end{aligned}$$

de donde concluimos que ψ es un homomorfismo de grupos. Por la definición de las aplicaciones φ y ψ , es sencillo ver que son inversas, demostrando así que los grupos $\mathcal{T}(X, x_m)$ y $\mathcal{H}(X, x_m)$ son isomorfos, como queríamos. ■

Del teorema anterior y del corolario 3.4.3 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.4.8. *Sea (X, x_m) un espacio topológico finito T_0 con punto de base x_m , con matriz topogénea $T_X = [t_{ij}]$ triangular superior de tamaño $n \times n$. Entonces $\mathcal{T}(X, x_m) \simeq \pi_1(X, x_m)$.*

Ejemplo 3.4.9. Por ejemplo, en la matriz del modelo minimal de S^1 , vemos que $t_{13} = t_{23} = t_{24} = t_{14} = 1$ luego 13241 es un \mathcal{T} -ciclo basado en x_1 . Obsérvese que las cuatro entradas forman un cuadrado (rectángulo) o un *ciclo* en la matriz. Además, puede verificarse que dicho ciclo no es equivalente a ningún otro \mathcal{T} -ciclo, y sabiendo que $\pi_1(S^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$, tenemos que $\pi_1(S^1, 1) \simeq \mathcal{T}(X, x_m) = \langle [13241] \rangle$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ahora, consideramos el mismo \mathcal{T} -ciclo 13241 basado en x_1 esta vez en la matriz del modelo minimal para S^2 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las siguientes igualdades muestran que en este caso la clase del \mathcal{T} -ciclo es trivial:

$$[13241] = [132 \star 236 \star 42 \star 241] = [132364241] = [13641] = [11 \star 136 \star 41 \star 11] = [11] = [\phi]$$

lo que no es sorprendente sabiendo que $\pi_1(S^2, 1) = 0$.

3.5. Conexión con complejos simpliciales

Finalizamos nuestro trabajo con una breve introducción a la correspondencia existente entre los espacios T_0 y los complejos simpliciales finitos, expuesta por McCord en [7], y que conectaremos con nuestras matrices para encontrar las representaciones matriciales de los operadores de borde que definen la homología (singular) del complejo singular del espacio $\mathcal{X}(K)$, donde K es un complejo simplicial finito arbitrario, en el caso particular cuando el grupo de coeficientes es $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$.

Observación 3.5.1. En esta sección, usaremos el símbolo $|K|$ no para denotar el cardinal del complejo simplicial K , como hemos venido haciéndolo, sino para indicar su realización geométrica que será definida más adelante.

Definición 3.5.2. Sea V un conjunto finito. Un *complejo simplicial* K es una colección de subconjuntos de V que satisface las siguientes condiciones:

1. Para todo $v \in V$ se cumple $\{v\} \in K$.

2. Si $\tau \in K$ y $\sigma \subseteq \tau$ entonces $\sigma \in K$.

El conjunto V es el conjunto de *vértices* de K . Abusando de la notación, escribiremos $v \in K$ si $v \in V$. Cada elemento σ de K se denomina *símplice* y su *dimensión* $\dim(\sigma)$ es igual al cardinal de σ menos uno. Si la dimensión de σ es igual a q , decimos que σ es un *q-símplice*; a la colección de q -símplices de K la denotaremos por K_q . En particular, el conjunto V está relacionado biunívocamente con K_0 . La *dimensión* de K es el máximo entre las dimensiones de sus símplices. Si $\tau \subseteq \sigma$, decimos que τ es una *cara* de σ y si $\tau \subset \sigma$, decimos que τ es una *cara propia* de σ .

La *envolvente convexa* de una colección $\{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m\} \subseteq \mathbb{R}^d$ es el conjunto

$$\text{Conv}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m) = \left\{ \sum_{k=1}^m \alpha_k \mathbf{q}_k : \alpha_k \geq 0, \sum_{k=1}^m \alpha_k = 1 \right\}$$

Denotando por $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{d+1}\}$ la base canónica de \mathbb{R}^{d+1} , el *simplex estándar* d -dimensional $\Delta^d \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ es definido por:

$$\Delta^d = \text{Conv}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{d+1}) = \{(u_1, \dots, u_{d+1}) : u_1 + \dots + u_{d+1} = 1 \text{ donde } u_k \geq 0\}$$

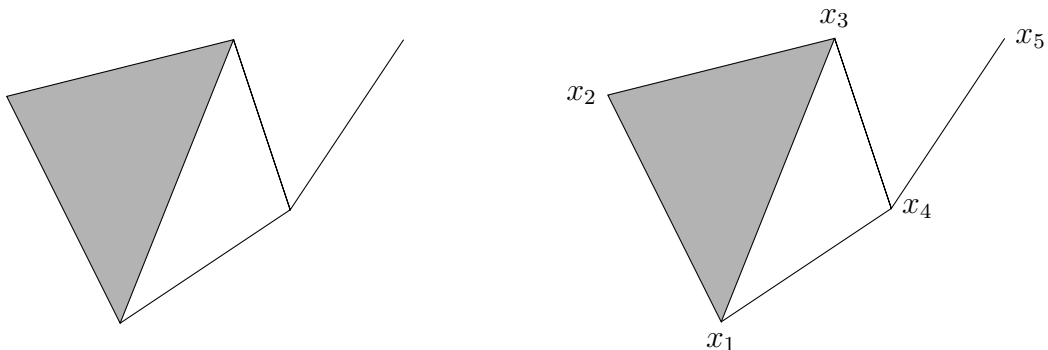
Definición 3.5.3. Sea K un complejo simplicial finito con $d + 1$ vértices ordenados $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{d+1}\}$. Para cada símplice $\sigma = \{v_{k_1}, \dots, v_{k_m}\}$ definimos $|\sigma| \subseteq \Delta^d$ por $|\sigma| = \text{Conv}(\mathbf{e}_{k_1}, \dots, \mathbf{e}_{k_m})$. La *realización geométrica* $|K| \subseteq \Delta^d$ de K es el conjunto:

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} |\sigma|$$

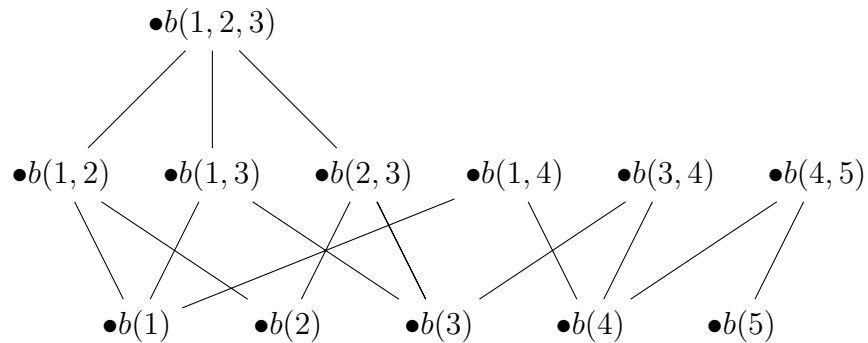
El *baricentro* de σ es el punto $b(\sigma) = b(k_1, \dots, k_m) := \sum_{k=1}^m \frac{\mathbf{e}_{i_k}}{m} \in |\sigma|$.

Definición 3.5.4. Sea K un complejo simplicial finito. El *espacio* $T_0 \mathcal{X}(K)$ asociado a K , es el poset cuyos elementos son los baricentros de los símplices de K ordenados por la relación: $b(\tau) \leq b(\sigma)$ si $\tau \subseteq \sigma$.

Ejemplo 3.5.5. Si numeramos los vértices del complejo simplicial K de la izquierda, donde la parte sombreada indica una región plana,

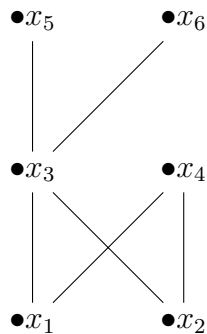


el espacio topológico $\mathcal{X}(K)$ está dado por:

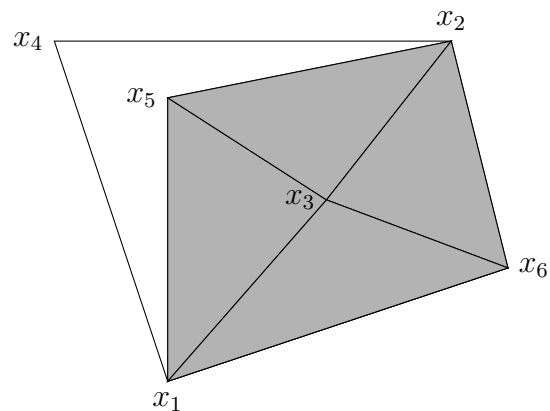


Definición 3.5.6. Si X es un espacio T_0 , definimos $\mathcal{K}(X)$ como el complejo simplicial cuyos símplexes son las cadenas no vacías de X .

Si X es el espacio T_0 cuyo diagrama de Hasse es



entonces el complejo simplicial $\mathcal{K}(X)$ se representa por:



Definición 3.5.7. Tomemos un anillo $(A, +, \cdot, 0, 1)$. Sean K un complejo simplicial finito y $V = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ el conjunto de sus vértices ordenados. El *grupo de cadenas d -dimensional* $C_d(K, A)$ de K , está formado por las combinaciones A -lineales de simplices d -dimensionales:

$$C_d(K, A) = \left\{ \sum_{k=1}^m \alpha_k \sigma_k : \alpha_k \in A, \sigma_k \in K_d, m \geq 1 \right\}$$

y sus elementos se denominan *cadena d -dimensional*. Si $\sigma = \{v_0, \dots, v_d\} \in K_d$, para cada $k \in \{0, 1, \dots, d\}$ denotaremos por $\hat{\sigma}_k$ a la cara $(d-1)$ -dimensional que contiene todos los vértices de σ , excepto v_k , esto es $\hat{\sigma}_k = \{v_0, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_d\}$. El *borde* de σ es la cadena $(d-1)$ -dimensional

$$\partial_d(\sigma) = \sum_{k=0}^d (-1)^k \hat{\sigma}_k. \quad (3.6)$$

Podemos entonces definir el *operador de borde* ∂_d , como la transformación A -lineal

$$\begin{aligned} \partial_d : C_d(K, A) &\longrightarrow C_{d-1}(K, A) \\ \sum_{k=1}^m \sigma^{(k)} &\longmapsto \sum_{k=1}^m \partial_d(\sigma^{(k)}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

A partir del operador ∂_d , definimos el *grupo de ciclos d -dimensional* $Z_d(K, A) := \ker \partial_d$ y el *grupo de bordes $(d-1)$ -dimensional* $B_{d-1}(K, A) := \text{Im } \partial_d$. Puede verificarse la contención $B_d(K, A) \subseteq Z_d(K, A)$. Definimos el *grupo de homología d -dimensional* como el grupo cociente:

$$H_d(K, A) = Z_d(K, A) / B_d(K, A)$$

El *d -ésimo número de Betti* β_d está dado por:

$$\beta_d = \text{rank } H_d(K, A) = \dim \ker \partial_d - \dim \text{Im } \partial_{d+1}$$

McCord demuestra que los espacios topológicos finitos y los complejos simpliciales finitos, conectados por las aplicaciones \mathcal{K} y \mathcal{X} (funtores), comparten los mismos grupos de homotopía como lo evidencia el siguiente resultado.

Teorema 3.5.8. [7] *Para cada espacio topológico finito X , existe una equivalencia homotópica débil $f : |\mathcal{K}(X)| \rightarrow X$. Para cada complejo simplicial finito K , existe una equivalencia homotópica débil $g : |K| \rightarrow \mathcal{X}(K)$.*

Ahora bien, se puede demostrar que toda equivalencia homotópica débil $f : X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos, induce isomorfismos $f_* : H_d(X, A) \rightarrow H_d(Y, A)$ entre los grupos de homología, para todo $n \geq 0$ y todo grupo de coeficientes A [5], por lo que

las conexiones expuestas por McCord en el teorema 3.5.8 permiten estudiar los grupos de homología en cualquiera de los dos contextos, espacios T_0 y complejos simpliciales finitos. El siguiente teorema permite encontrar las matrices de todos los operadores de borde asociados a K , por medio de la matriz de Stong de $\mathcal{X}(K)$.

Teorema 3.5.9. *Si K es un complejo simplicial de dimensión m , la matriz de Stong asociada al espacio $\mathcal{X}(K)$ es:*

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_{n_0} & \partial_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \mathbb{I}_{n_1} & \partial_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & & \ddots & \partial_m \\ & & & & \mathbb{I}_{n_m} \end{bmatrix},$$

donde n_k es el número de k -símplices de K y ∂_k es la matriz que representa el operador de borde k -dimensional con coeficientes en $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$:

$$0 \xrightarrow{\partial_{m+1}} C_m(K, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1}(K, \mathbb{F}_2) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1(K, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Demostración. Sea $S_{\mathcal{X}(K)} = [s_{ij}]$. Por definición de una matriz de Stong, para $i < j$, $s_{ij} = 1$ si, y sólo si, $b(\sigma_i) < b(\sigma_j)$ y $h(b(\sigma_j)) = h(b(\sigma_i)) + 1$. Además por la construcción del espacio $\mathcal{X}(K)$ tenemos que para todo símplex τ , la altura de $b(\tau)$ satisface $h(b(\tau)) = \dim(\tau) + 1$, luego

$$s_{ij} = 1 \iff \sigma_i \subset \sigma_j \text{ y } \dim(\sigma_j) = \dim(\sigma_i) + 1$$

es decir, σ_i es una cara propia maximal de σ_j . De lo anterior, vemos que la columna que representa a $b(\sigma_j)$ en $S_{\mathcal{X}(K)}$, tiene entradas iguales a uno exactamente en las filas que representan las caras propias maximales de σ_j (y en la diagonal), tal y como sucede en la representación matricial de los operadores de borde con coeficientes en \mathbb{F}_2 . ■

Ejemplo 3.5.10. La matriz topogénea y la matriz de Stong de $\mathcal{X}(K)$ en el ejemplo 3.5.5 son las siguientes:

$$T_{\mathcal{X}(K)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_{\mathcal{X}(K)} = \left[\begin{array}{cccc|cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

de donde obtenemos las representaciones matriciales

$$\partial_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \partial_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de los operadores de borde

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2(K, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

En este caso, los números de Betti del complejo simplicial están dados por:

$$\beta_0 = \dim \ker \partial_0 - \dim \operatorname{Im} \partial_1 = 5 - 4 = 1$$

$$\beta_1 = \dim \ker \partial_1 - \dim \operatorname{Im} \partial_2 = 2 - 1 = 1$$

$$\beta_2 = \dim \ker \partial_2 - \dim \operatorname{Im} \partial_3 = 0 - 0 = 0$$

Conclusiones y recomendaciones

Conclusiones

Este trabajo aborda el estudio de los espacios topológicos finitos desde un enfoque matricial, rescatando las ideas de Shiraki y Stong, lo que permite aprovechar la naturaleza algebraica de las matrices para guardar y procesar la información asociada a las propiedades de una topología. Este aspecto puede explotarse desde varios puntos de vista según las características que se quieran estudiar. Por ejemplo, la asignación de matrices a las funciones submodulares $f_{\mathcal{U}}$ y $f_{\mathcal{D}}$ permite identificar numéricamente las caracterizaciones de propiedades topológicas encontradas en [9], citadas en el capítulo 1.

En [1], Abril presenta algoritmos para la identificación de beat points, siendo necesario observar el diagrama de Hasse para tal propósito. El uso de las matrices topogéneas y la introducción de las matrices que denominamos de Stong, hace posible la eliminación no solamente de beat points sino también de los weak points, reduciendo puntualmente un espacio finito sin utilizar el diagrama de Hasse como parte del proceso.

Después de realizar las reducciones puntuales de beat y weak points en un espacio X , puede calcularse la matriz de Stong de $\mathcal{X}(\mathcal{K}(X))$ para encontrar los grupos de homología (singular), y por consiguiente los números de Betti, asociados al complejo singular

$$0 \xrightarrow{\partial_{m+1}} C_m(\mathcal{K}(X), \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1}(\mathcal{K}(X), \mathbb{F}_2) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0(\mathcal{K}(X), \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

que por la teoría de McCord, coinciden con los asociados al complejo singular de X .

Pretendemos que los conceptos y procedimientos explicados en los capítulos 2 y 3, sean base para un posterior estudio detallado de los grupos de homología asociados a un espacio finito arbitrario, que son usados en la actualidad para determinar diferentes formas y estructuras topológicas en nubes de datos, área conocida como homología persistente de datos, que ha mostrado efectividad en el estudio de las conexiones cerebrales y de otros sistemas biológicos complejos [8].

Recomendaciones

A continuación se listan algunas recomendaciones sobre preguntas que pueden abordarse en futuros trabajos:

- En la búsqueda por definir la *entropía* $H(X, \mathcal{T})$ de un espacio topológico finito, parece natural, en una primera aproximación, intentar asociar a cada espacio topológico una función de probabilidad P , que pertenezca a $\lambda(\mathcal{N}_{\mathcal{T}})$, de manera que

$$H(X, \mathcal{T}) := H(P) = - \sum_{i=1}^n P(x_i) \log P(x_i)$$

Sin embargo, solamente existe una topología \mathcal{T} que permite dicha función de probabilidad en $\lambda(\mathcal{N}_{\mathcal{T}})$, como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 3.5.11. *Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico finito. Si existe una función de probabilidad $P : 2^X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $P \in \lambda(\mathcal{N}_{\mathcal{T}})$, el espacio (X, \mathcal{T}) es el discreto.*

Demostración. Sea $P : 2^X \rightarrow \mathbb{R}$ una función de probabilidad tal que $P \in \lambda(\mathcal{N}_{\mathcal{T}})$, es decir, se cumple $\mathcal{N}_P = \mathcal{N}_{\mathcal{T}}$ con

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_P &= \{(A, B) \in 2^X \times 2^X : P(A) = P(A \cup B)\} \\ &= \{(A, B) \in 2^X \times 2^X : P(B) = P(A \cap B)\} \\ \mathcal{N}_{\mathcal{T}} &= \{(A, B) \in 2^X \times 2^X : B \subseteq c(A)\} \end{aligned}$$

donde c es el operador de clausura asociado al espacio, y además hemos usado la propiedad modular de la función de probabilidad, esto es, que para todo $A, B \in 2^X$ se cumple

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B).$$

Ahora bien, si $A \subseteq X$ fuera tal que $c(A) \not\subseteq A$, entonces existiría $b \in c(A)$ con $b \notin A$ de donde $\{b\} \subseteq c(A)$ y así $(A, \{b\}) \in \mathcal{N}_{\mathcal{T}} = \mathcal{N}_P$, luego tendríamos que $P(b) = P(A \cap \{b\}) = P(\emptyset)$ lo que no es posible por la proposición 1.4.11. De lo anterior, concluimos que todo subconjunto A de X es un conjunto cerrado, lo que solamente sucede cuando el espacio es discreto. ■

En vista de lo anterior, continúa abierta la pregunta ¿cómo definir la *entropía* de un espacio topológico finito?, en otras palabras ¿cuál es la manera de distinguir espacios topológicos finitos desde el punto de vista de la teoría de la información?

- En [3], Barmak introduce la noción de γ -points que resultan ser una generalización de los weak points, y por tanto de los beat points, lo que permite más reducciones puntuales en el estudio de los tipos de homotopía débil y en el cálculo de los grupos de homología y los números de Betti. Queda la inquietud ¿cómo identificar los γ -points de un espacio finito usando alguna de sus matrices asociadas?
- En el capítulo 2 definimos las matrices U_X y D_X asociadas a las funciones submodulares f_U y f_D . Así como existe una caracterización de las matrices topogéneas y de Stong, ¿existe alguna forma de identificar si una matriz cuadrada arbitraria es la U_X (o D_X) de algún espacio topológico finito?, ¿es posible definir una matriz M_f asociada a una función submodular f arbitraria?, y si es así ¿qué propiedades particulares satisfacen dichas matrices, que podamos usar en el estudio de los espacios finitos?
- Destacar la importancia del grupo $\mathcal{T}(X, x_m)$, isomorfo al grupo fundamental de homotopía $\pi_1(X, x_m)$, definido en la sección 3.3.
- Finalmente, sería interesante retomar el trabajo de Krishnamurthy en [6], usando las matrices topogéneas para intentar el conteo de las topologías definibles en un conjunto finito, problema que continúa aún sin resolverse.

Bibliografía

- [1] Abril J.A., *Una aproximación a la noción de homotopía entre espacios topológicos finitos desde las funciones submodulares*, Trabajo Final de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias (2015).
- [2] Alexandroff P., *Diskrete Räume*, Mat. Sb. (N.S.)**2**, 501-518 (1937).
- [3] Barmak, J.A., *Algebraic topology of finite topological spaces and applications*, Lecture Notes in Mathematics Vol. 2032 (2011).
- [4] Barmak, J.A. y Minian E.G., *Minimal finite models*, Journal of Homotopy and Related Structures, Vol. 2(1), 127-140 (2007).
- [5] Hatcher A., *Algebraic topology*, Cambridge University Press (2002).
- [6] Krishnamurthy V., *On the number of topologies on a finite set*, Amer. Math. Monthly **73**, 154-157 (1966).
- [7] McCord M.C., *Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces*, Duke Math. J., **33**(3), 465–474 (1966).
- [8] Nanda V. y Sazdanović R., *Simplicial models and topological inference in biological systems*, Discrete and Topological Models in Molecular Biology, Springer, pp. 109–141 (2014).
- [9] Roa L., *Una nueva construcción de los espacios topológicos finitos desde las funciones submodulares*, Trabajo Final de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias (2012).
- [10] Shiraki, M., *On finite topological spaces*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ., **1**, 1-8 (1968).
- [11] Stong R.E., *Finite topological spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **123**(2), 325–340 (1966).
- [12] Varela R., *FD relaciones*, Trabajo Final de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias (2011).