



# Horizontes de eventos del espacio-tiempo de Kerr

Diego Fernando Fonseca Moreno

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias, Departamento Física  
Bogotá D.C., Colombia  
2016

# Horizontes de eventos del espacio-tiempo de Kerr

Diego Fernando Fonseca Moreno

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:  
**Magister en Ciencias Física**

Director:  
Ph.D. José Robel Arenas Salazar

Grupo de Investigación:  
Termodinámica de Agujeros Negros

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias, Departamento Física  
Bogotá, Colombia  
2016

A mi hijo Juan Diego, mi esposa Julieth y mis padres Bertha y Marco.

El espíritu humano no recibe con sinceridad la luz de las cosas, sino que mezcla a ella su voluntad y sus pasiones; así es como se hace una ciencia a su gusto, pues la verdad que más fácilmente admite el hombre es la que desea.

Francis Bacon

# Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a Bertha, Marco, Mariela y Gabriel por su apoyo incondicional, por sus palabras de fortaleza en los momentos que me sentí sofocado, dadas las varias actividades a desarrollar día a día; en segundo lugar, dar mi completa gratitud y admiración al profesor José Robel Arenas por su sabiduría, paciencia, dedicación a lo largo del desarrollo de este trabajo y especialmente por cultivar en mí el deseo de seguir adelante en el campo de la relatividad, en tercer lugar a mis amigos que siempre estuvieron ahí. Y Finalmente a dos personas, a quienes les debo mi felicidad, mi pequeño hijo y esposa que siempre fueron mi motivación.

## Resumen

En este trabajo se presenta una de las soluciones clásicas a las ecuaciones de campo de Einstein, propuesta en 1963 por Roy Kerr. Para ello se emplea el elemento de línea de Schwarzschild y con ayuda del método de Newman-Janis se muestra como conectar dichas soluciones; y en virtud de esto, se identifica la generalidad de la solución de Kerr. También se mostraran las propiedades del campo gravitacional asociado y se calcula la gravedad superficial correspondiente.

**Palabras clave:** Relatividad General, Ecuaciones de Campo, Solución de Schwarzschild, Solución de Kerr, Horizonte de Eventos, Gravedad Superficial.

## Abstract

In this work, we present one of classical solutions for Einstein field equations, proposed in 1963 by Roy Kerr. In this way, the Schwarzschild line element is used, with Newman-Janis method in order to generate a connection between these solutions. By virtue of this, the generality of Kerr solution is identified. We also shows the associated gravitational field properties, and the superficial gravity is calculated.

**Keywords:** General Relativity, Field Equations, Schwarzschild Solution, Kerr Solution, Event Horizons, Surface Gravity.

# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>IV</b>
<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>Lista de símbolos</b>	<b>VIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Relatividad General</b>	<b>2</b>
2.1. Postulados . . . . .	2
2.2. Solución de Schwarzschild . . . . .	7
2.3. Solución de Schwarzschild: coordenadas de Eddington-Finkelstein . . . . .	13
<b>3. Solución de Kerr</b>	<b>16</b>
3.1. Descripción de una Métrica Estacionaria y de Simetría Axial . . . . .	16
3.2. Solución de Kerr desde una Transformación Compleja . . . . .	17
3.3. Propiedades Básicas de la Solución de Kerr . . . . .	22
3.4. Singularidades y Horizontes . . . . .	26
<b>4. Gravedad Superficial</b>	<b>30</b>
<b>5. Conclusiones</b>	<b>34</b>
<b>A. Anexo: Breve Introducción a la Topología Algebraica</b>	<b>36</b>
A.1. Conjunto Abierto . . . . .	36
A.2. Espacio Topológico . . . . .	36
A.3. Aplicación o Función $\psi$ . . . . .	36
A.4. Aplicación Continua $f$ . . . . .	37
A.5. Homeomorfismo . . . . .	37
<b>B. Anexo: Variedades</b>	<b>38</b>
B.1. Vector Tangente . . . . .	38
B.2. Espacio Tangente . . . . .	38
B.3. Producto Cartesiano . . . . .	38
B.4. Tensores . . . . .	39

<b>C. Anexo: Cálculo en Variedades</b>	<b>40</b>
C.1. Derivada Covariante . . . . .	40
C.2. Transporte Paralelo . . . . .	41
C.3. Tensor de Riemann . . . . .	41
C.4. Contracciones del Tensor de Riemann . . . . .	41
<b>D. Anexo: Derivada de Lie y Campos de Killing</b>	<b>42</b>
D.1. Derivada de Lie . . . . .	42
D.2. Campos de Killing . . . . .	43
<b>E. Anexo: Algunos Cálculos para la Solución de Schwarzschild</b>	<b>44</b>
E.1. Conexiones de Christoffel . . . . .	44
E.2. Componentes del Tensor de Riemann . . . . .	45
E.3. Componentes del Tensor de Ricci . . . . .	47
E.4. Límite Newtoniano . . . . .	50
E.5. Escalar de Kretschmann . . . . .	51
E.6. Coordenadas de Eddington-Finkelstein . . . . .	53
<b>F. Anexo: Formulación de la Tétrada</b>	<b>56</b>
<b>G. Anexo: Transformación de Coordenadas</b>	<b>59</b>
<b>H. Anexo: Algunos Cálculos para la Solución de Kerr</b>	<b>60</b>
H.1. Coeficientes del Tensor Métrico en la Base Nula . . . . .	60
H.2. Componentes Covariantes del Tensor Métrico (3-20) . . . . .	62
H.3. Métrica de Kerr en la Forma de Boyer-Lindquist . . . . .	63
H.4. Métrica de Minkowski en la Forma de Kerr-Schild . . . . .	65
H.5. Transformación $cu' = ct + r'$ . . . . .	66
H.6. Métrica de Kerr en las Coordenadas de Kerr-Schild . . . . .	66
H.7. Expansión en Potencias de $1/r$ para la Métrica de Kerr en las Coordenadas de Kerr-Schild . . . . .	68
H.8. Comportamiento Asintótico de (3-24) . . . . .	71
H.9. Singularidad: Anillo . . . . .	72
H.10. Ergosfera . . . . .	73
H.11. $\xi^\mu$ Nulo en el Horizonte de Eventos $r' = r'_+$ . . . . .	76
H.12. Norma de $\xi^\mu \xi_\mu$ . . . . .	78
H.13. Cálculo de $\xi^\alpha$ . . . . .	80
<b>Bibliografía</b>	<b>81</b>

# Lista de símbolos

## Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Unidad SI
$c$	Velocidad de la luz en el vacío	$2.9979 \times 10^8 \text{m/s}$
$G$	Constante de gravitación universal	$6.6726 \times 10^{-11} \text{m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$
$M$	Masa	kg
$J$	Momentum angular	$\text{m}^2 \cdot \text{kg/s}$
$R$	Escalar de curvatura	
$S^2$	2-Esfera	
$a$	Momentum angular por unidad de masa	$\text{m}^2/\text{s}$

## Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidad SI
$u_\alpha, u_\beta$	Subconjuntos abiertos	
$\psi_\alpha$	Carta coordenada	
$T^{\mu\nu}$	Tensor Momentum-Energía	
$\rho$	Densidad de masa	$\text{kg/m}^3$
$\lambda$	Parámetro de curva	
$g_{\mu\nu}$	Tensor de métrico	
$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$	Conexión de Christoffel	
$R^\rho_{\sigma\mu\nu}$	Tensor de Riemann	
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci	
$\theta, \varphi$	Coordenadas esféricas usuales	



## Abreviaturas

Abreviatura	Término
-------------	---------

---

TGR	Teoría general de la relatividad.
TER	Teoría especial de la relatividad.
PED	Principio de equivalencia débil.
PEE	Principio de equivalencia de Einstein.

# 1. Introducción

La publicación de las ecuaciones de gravitación (o ecuaciones de la relatividad general) en 1915 por parte de Albert Einstein, dan apertura a un gran escenario de investigación en diversos campos de la física teórica y observacional. Tan solo pocos meses después de su publicación, el astrofísico Karl Schwarzschild propuso la primera solución exacta y no trivial a éstas, en donde se describe la geometría exterior asociada a un objeto con simetría esférica sin rotación[17]. Esta solución fue una motivación para encontrar otro tipo de soluciones, como por ejemplo, los potenciales que den cuenta de la geometría en el exterior de una fuente con simetría esférica y en rotación, sin embargo se tuvieron que esperar aproximadamente 50 años[21] para encontrar tal solución: El elemento de línea de Kerr[9].

El objetivo de este trabajo ha sido profundizar y mostrar con detalle cómo se obtiene la solución de Kerr utilizando el algoritmo de Newman-Janis[12] describiendo algunas propiedades de dicho potencial junto con los horizontes de eventos inscritos en ésta, en particular se ha contribuido en hacer explícitos desarrollos que están enunciados en la literatura. Para ello el trabajo está organizado de la siguiente manera: En el capítulo 1 se presentan en primera instancia los fundamentos físicos (postulados) de la TGR, y de manera paralela, algunas de las estructuras matemáticas indispensables para emprender el trabajo; posterior a ello se reproduce la solución de Schwarzschild y se finaliza el capítulo presentado esta métrica en las coordenadas de Eddington-Finkelstein. En el capítulo 2 se expone el método de Newman-Janis y se obtiene la solución de Kerr a través del elemento de línea de Schwarzschild por medio de una transformación compleja adecuada y, a partir de allí, se representa dicha solución en otros sistemas coordenados; este capítulo finaliza considerando propiedades básicas de la solución y describiendo los horizontes de eventos. Se finaliza con el capítulo 3, en donde se presenta como calcular la gravedad superficial para la métrica de Kerr.

Finalmente, el camino correcto para enfocar la lectura del documento, es partir del hecho que; la motivación personal para dar comienzo a está labor, tiene como fundamento en reconocer, de la forma más acertada posible, un tema específico del vasto escenario de la teoría de la gravitación y que apunte a brindar herramientas para una mejor comprensión de los aspectos físicos y matemáticos que se abordan en la construcción de este tema puntual, como lo es el caso de la solución de Kerr.

## 2. Relatividad General

Es importante reconocer que las teorías modernas de la física exigen, el dominio y comprensión de diversas estructuras matemáticas. En el caso particular de la TGR, demanda al lector examinar, en gran parte, estructuras inmersas en la geometría diferencial, topología y el análisis tensorial. De acuerdo a ello, la intención del presente capítulo no es realizar una presentación exhaustiva de los fundamentos matemáticos de la TGR, esto seguramente; el lector, podría abordarlo en algunas de las referencias consultadas o seguramente en algún texto de gusto personal sobre estos temas especializados. De esta manera, en la sección 2.1 se realiza una exposición de los tres postulados que subyacen a la TGR; posteriormente, en la sección 2.2 se exhibe la primera solución conocida a las ecuaciones de campo, llamada la solución de Schwarzschild; abriendo así camino, a la sección 2.3 en donde se utilizan las coordenadas de Eddington-Finkelstein, con la finalidad de reescribir el elemento de línea descrito en la sección anterior para encontrar, vía estas coordenadas, la conexión con la solución de Kerr.

### 2.1. Postulados

El enfoque de esta sección, inicialmente, consiste en presentar un acercamiento al *modelo matemático del espacio-tiempo* y posteriormente abordar cada uno de los tres postulados: *causalidad local*, *conservación local de la energía* y *ecuaciones de campo*. Esto con la finalidad de estructurar el escrito desde los postulados de la TGR.

*Modelo matemático del espacio-tiempo:*

Desde la TER, se puede pensar en un evento, intuitivamente, como algo que está pasando en una región limitada del espacio en un lapso de tiempo de corta duración; desde las matemáticas, se visualiza este concepto como un punto en el espacio al cual se le asocia un instante de tiempo[6]. Es así, que el conjunto de todos los eventos físicos, entendidos como puntos, constituyen el espacio-tiempo; descritos por medio de un par  $(\mathcal{M}, g)$ , en donde  $\mathcal{M}$  es una variedad en cuatro dimensiones de Hausdorff de clase  $C^\infty$  conectada y  $g$  es una métrica de Lorentz sobre  $\mathcal{M}$ [7].

Es importante reconocer algunos de los elementos escritos en el párrafo anterior. Generalmente, se puede entender a una variedad (o variedad diferenciable)  $\mathcal{M}$  como un espacio

localmente semejante al espacio euclideo, en donde todos los conceptos definidos sobre dicha estructura son independientes de la elección del sistema de coordenadas. Para dar una formulación, más precisa, se podrían fijar algunas definiciones, siguiendo a[7]:

- Una aplicación  $\psi$  de un conjunto abierto (Ver anexo A.1)  $\mathcal{A}$  a otro conjunto abierto  $\mathcal{A}'$ , ambos subconjuntos de los espacios euclidianos  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$ , respectivamente, se indica que es de clase  $C^r$  si las coordenadas del punto imagen, denotadas con primadas,  $x' = \psi(x)$  son funciones  $r$ -veces continuamente diferenciables.

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n &\longmapsto \mathbb{R}^m \\ x &\longmapsto x' = \psi(x) \end{aligned} \tag{2-1}$$

- Siguiendo a Tejeiro[20], se define una carta coordenada  $c_\alpha = (u_\alpha, \psi_\alpha)$ <sup>1</sup> sobre un espacio topológico  $\mathcal{M}$  (Ver anexo A.2), en donde  $u_\alpha$  es un subconjunto abierto de  $\mathcal{M}$ , como la aplicación homeomorfa (Ver anexos A.3 - A.5):

$$\begin{aligned} \psi : u_\alpha \subset \mathcal{M} &\longmapsto \mathbb{R}^n \\ p &\longmapsto x = u_\alpha(p) \end{aligned} \tag{2-2}$$

La aplicación de la función  $\psi$  a las componentes de un punto  $x = (x^1, \dots, x^n)$ , se denominan coordenadas del punto  $p$ , en donde  $n$  indica la dimensión de la carta.

- Una variedad  $n$ -dimensional de clase  $C^r$  es un espacio topológico  $\mathcal{M}$  articulado con un atlas  $\{u_\alpha, \psi_\alpha\}$  de clase  $C^r$ . Se entiende como atlas a un conjunto de cartas  $c_\alpha = (u_\alpha, \psi_\alpha)$ , en donde  $u_\alpha$  denota subconjuntos de  $\mathcal{M}$  y  $\psi_\alpha$  es una aplicación inyectiva de  $u_\alpha$  a conjuntos abiertos en  $\mathbb{R}^n$ , tal que:

- $\mathcal{M} = \bigcup_{\alpha} u_\alpha$ . Es decir, todos los abiertos deben cubrir completamente a  $\mathcal{M}$ .
- Si la intersección entre abiertos, denotada como  $u_\alpha \cap u_\beta$ , no es vacía (disyunta), entonces:

$$\begin{aligned} \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(u_\alpha \cap u_\beta) &\longmapsto \psi_\alpha(u_\alpha \cap u_\beta) \\ \psi_\beta(p) = x &\longmapsto \psi_\alpha(p) = y \end{aligned} \tag{2-3}$$

- Un espacio topológico  $\mathcal{M}$  se dice que es de Hausdorff o separable, si satisface el axioma de separación de Hausdorff: cuando  $p, q$  son puntos distintos de dicho espacio, allí existe disyunción entre conjuntos abiertos  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}$ , tal que  $p \in \mathcal{U}$  y  $q \in \mathcal{V}$ .

---

<sup>1</sup>Para la física una carta coordenada se entiende como un sistema coordenado [22]. El subíndice  $\alpha$ , denota un conjunto de índices arbitrarios.

- Se dice que un atlas  $\{u_\alpha, \psi_\alpha\}$  es localmente finito, si cada punto  $p \in \mathcal{M}$  tiene una vecindad abierta que intersecta un número finito de subconjuntos abiertos  $u_\alpha$ .
- Un espacio topológico  $\mathcal{M} : (\mathcal{Y}, \mathcal{A})$ , es conexo (Ver[10] pág 63) o conectado si y sólo si  $\mathcal{Y}$  no es la unión de dos abiertos disyuntos. Intuitivamente, se puede reconocer a dicho espacio como aquel que es formado por una sola pieza.
- Se dice que  $\mathcal{M}$  es paracompacto<sup>2</sup> si para cualquier atlas  $\{u_\alpha, \psi_\alpha\}$  existe un atlas localmente finito  $\{u_\beta, \psi_\beta\}$ , tal que cada  $u_\beta$  este contenido en algún  $u_\alpha$ .
- Una variedad de Hausdorff conectada o conexa es paracompacto si y sólo si, ésta tiene una base contable. Así, dada un colección contable de conjuntos abiertos, cualquiera de dichos conjuntos puede ser expresado como la unión de miembros de la colección.

Todas estas estructuras sobre el escenario matemático de la TGR, son de vital importancia para asegurar un buen comportamiento local y son consecuentes con las posteriores nociones del cálculo en variedades (Ver anexo C).

### *Postulado I: Causalidad Local*

Las ecuaciones de campo que gobiernan los campos de materia deben ser tales que si,  $\mathcal{U}$  es una vecindad convexa y  $p$  y  $q$  son puntos que pertenecen a  $\mathcal{U}$ , entonces una señal puede ser enviada en  $\mathcal{U}$  entre  $p$  y  $q$  si y sólo si  $p$  y  $q$  pueden ser unidos por una curva  $C^1$  situada totalmente en  $\mathcal{U}$ , cuyos vectores tangentes (Ver anexo B.1) en cada punto de la curva no son nulos y no de tipo espacial, es decir, son vectores como de tiempo o como de luz.

Es importante fijar; que de la misma manera, en que se introduce la estructura causal en el espacio-tiempo de Minkowski<sup>3</sup>, la introducción de la métrica de Lorentz sobre  $\mathcal{M}$ , permite clasificar los vectores  $\mathbf{x}$  no nulos del espacio tangente  $T_p(\mathcal{M})$  (Ver anexo B.2), en tres conjuntos disyuntos:

- $\mathbf{x}$  se denomina como de luz si,  $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ .
- $\mathbf{x}$  se denomina como de tiempo si,  $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ .
- $\mathbf{x}$  se denomina como de espacio si,  $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) < 0$ .

<sup>2</sup>Para ver más detalles sobre espacios topológicos, especialmente sobre la noción de espacios paracompactos, vea el apéndice A de [22].

<sup>3</sup>Recuérdese que desde la TER, se puede dar cuenta de la siguiente clasificación a los cuadri-vectores. Dado un vector  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ , se tiene:

- El vector se llama como de tiempo si,  $\mathbf{x}^2 > 0$ .
- El vector se llama como de luz si,  $\mathbf{x}^2 = 0$ .
- El vector se llama como de espacio si,  $\mathbf{x}^2 < 0$ .

De esta manera, para analizar cualquier sistema físico en el marco de la TGR, se hace pertinente que dicha clasificación permita dotar al espacio-tiempo de una estructura geométrica distintiva y además que la sucesión de eventos causalmente conectados sea la misma para todos los observadores.

Una forma equivalente de enunciar este postulado, puede proporcionarla el problema de Cauchy (Ver[7] pág 60); esta interpretación indica que las ecuaciones que describen los campos de materia incluirán derivadas hasta un orden finito  $n$  y deberán tener una solución única acorde a las condiciones de frontera impuestas.

### *Postulado II: Conservación Local de la Energía*

Las ecuaciones que gobiernan los campos de materia, son tales que existe un tensor simétrico<sup>4</sup> (Ver anexos B.3 y B.4), denotado como  $T^{\mu\nu}$ , llamado tensor momentum-energía, que depende de todos los campos, sus derivadas covariantes (Ver anexo C.1), la métrica<sup>5</sup>, y además tiene las siguientes propiedades:

- (I)  $T^{\mu\nu}$  se anula sobre un conjunto abierto  $\mathcal{U}$ , que pertenece a la variedad, si y sólo si todos los campos de materia son nulos sobre  $\mathcal{U}$ .
- (II) El tensor momentum-energía satisface la ecuación<sup>6</sup>,

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad \text{Ley de conservación de la energía en presencia de un campo gravitacional.}$$

### *Postulado III: Ecuaciones de Campo*

Dada una breve introducción al escenario matemático de la teoría de la gravitación, se pueden examinar ahora, siguiendo a [2], los siguientes aspectos: cómo la curvatura del espacio-tiempo actúa sobre la materia para manifestarse como gravedad y segundo cómo la energía y el momentum afectan la curvatura del espacio-tiempo[22]? Siguiendo una secuencia, que permita entender de forma intuitiva la relación que hay entre la geometría, materia y energía, es de suma importancia visualizar que; dado el PED<sup>7</sup> establecido en la mecánica Newtoniana y el

<sup>4</sup>Se dice que un tensor  $T^{\mu\nu}$  es simétrico si  $T^{\mu\nu} = T^{(\mu\nu)} \leftrightarrow T^{\nu\mu} = T^{\mu\nu}$ . Para ver más detalles sobre la definición de un tensor simétrico y anti-simétrico, ver[7] pág 41.

<sup>5</sup>Una métrica es un producto interno sobre el espacio tangente en cada punto. Además sobre la variedad se considera un tensor de clase  $(0, 2)$  simétrico y no degenerado (Ver [22] pág 23).

<sup>6</sup>Recuerde que una notación alternativa, para la derivada covariante, está dada por el punto y coma de la siguiente manera

$$\nabla_{\sigma} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} = T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l; \sigma}$$

<sup>7</sup>El principio de equivalencia débil, aplicado a regiones del espacio bastante pequeñas, establece que las leyes para la caída de partículas libremente son las mismas en un campo gravitacional y en un sistema de referencia con aceleración constante.

concepto de masa encontrado en el seno de la TER, la idea de discurrir a la acción de la gravedad como la responsable de la curvatura del espacio-tiempo, se logra vía la generalización del PED. Este principio modificado, conocido como PEE<sup>8</sup>, implica de manera directa la relación entre un espacio-tiempo curvo y la gravedad. Este principio esencial; en el lenguaje de las variedades, se entiende de forma tal que las ecuaciones escritas en forma tensorial sobre un espacio-tiempo curvo, localmente, tomarían la misma forma como lo harían en un espacio-tiempo plano (principio de covariancia).

En este sentido ahora se puede determinar, por medio de un argumento informal, como la métrica (entendida como el potencial en la gravitación de Newton) responde a la energía y el momentum. Este argumento consiste en determinar una ecuación que remplace la ecuación de Poisson para el potencial Newtoniano.

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \quad (2-4)$$

En donde, sobre el miembro derecho,  $G$  es la constante de gravitación universal y  $\rho$  corresponde a la densidad de masa. Por lo tanto, la ecuación que se debe encontrar, necesariamente tendrá una estructura tal que; en el miembro izquierdo debe tener un operador diferencial de segundo orden actuando sobre el potencial gravitacional y en el miembro derecho se hará explícita alguna relación de la distribución de masa, esta generalización deberá ser estrictamente una relación entre tensores. Así los candidatos para formar dicha ecuación (Ver[2] pág 110), dan cuenta de:

$$G_{\mu\nu} = (\text{constante})T_{\mu\nu} \quad (2-5)$$

para la cual  $G_{\mu\nu}$  se reconoce como el tensor de Einstein<sup>9</sup>, construido a partir del tensor de Ricci (Ver anexos C2., C.3 y C.4), considerado como un tensor simétrico y conservado de clase  $(0, 2)$  y  $T_{\mu\nu}$  se interpreta como la generalización de la densidad de masa, llamado tensor momentum-energía que también comparte las propiedades mencionadas anteriormente para el tensor de Einstein. De esta manera, podemos presentar las ecuaciones de campo de Einstein sobre  $(\mathcal{M}, g)$ , para la relatividad general de la forma,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu} \quad (2-6)$$

Esta relación tensorial da cuenta de como la curvatura del espacio-tiempo reacciona ante la presencia de energía-momentum y matemáticamente representa un conjunto de diez ecuaciones diferenciales no lineales, acopladas y de segundo orden para el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ .

<sup>8</sup>El principio de equivalencia de Einstein, aplicado a regiones bastante pequeñas del espacio-tiempo, establece que las leyes de la física se reducen a las de la TER. Además que sin importar los experimentos que se lleven a cabo es imposible detectar un campo gravitacional.

<sup>9</sup>Recuérdese que este tensor puede obtenerse efectuando una contracción doble sobre la identidad de Bianchi[2]

$$\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0$$

Sin embargo utilizando las identidades de Bianchi y la propiedad de la conservación de la energía locamente,

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = \nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad (2-7)$$

se logra reducir el sistema de diez ecuaciones a seis ecuaciones independientes, para posteriormente determinar el potencial gravitacional  $g_{\mu\nu}$ . Estas ecuaciones de campo están de acuerdo a las observaciones realizadas con referencia a la deflexión de la luz, el avance del perihelio de mercurio y actualmente forman un campo muy extenso de investigación[7].

## 2.2. Solución de Schwarzschild

En esta sección se presentará, sin lugar a dudas, la primera y una de la mas importantes soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein[22], expuesta por Karl Schwarzschild en 1916 pocos meses después de que Einstein publicará sus ecuaciones de campo. En esta solución se describe el campo gravitacional, en su exterior, para una distribución de masa simétricamente esférica, estática y sin carga. Una de las tantas características para resaltar, aparte de su riqueza matemática y las interpretaciones hechas desde la física, a nivel de aplicación; por lo menos a la escala del sistema solar, es que el arreglo de Schwarzschild, predice pequeñas desviaciones de la hipótesis Newtoniana respecto al movimiento de los planetas y adicionalmente, explica, la desviación de un rayo de luz que pasa cerca al sol[20].

En general, determinar la solución a las ecuaciones de campo para la distribución mencionada, en su exterior, implica encontrar las componentes del tensor métrico,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2-8)$$

que satisfagan las ecuaciones de Einstein en el vacío.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0 \quad (2-9)$$

Para ello, el programa a seguir, es encontrar una estructura general para métricas que tienen el tipo de simetría referido. Inicialmente, vale la pena reconocer que las posibles simetrías de la métrica están dadas por la existencia de los vectores de Killing (Ver anexo D); en este sentido y de manera análoga, una variedad con simetría esférica es aquella que tiene asociados tres campos de Killing que son iguales a los de  $S^2$ [2]. Siguiendo a [2], si la variedad tiene simetría esférica, siempre es posible elegir un conjunto de coordenadas tal que la métrica sobre la variedad tome la forma,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{IJ}(v) dv^I dv^J + f(v) \gamma_{ij}(u) du^i du^j \quad (2-10)$$

en donde  $\gamma_{ij}$  corresponde a un elemento de línea establecido sobre la subvariedad (último término de la ecuación (2-10))<sup>10</sup>. Para el caso de interés, estas subvariedades son 2-esferas;

<sup>10</sup>Se recomienda al lector ver [23] página 396 para ver una demostración completa de la expresión (2-10).



sobre las cuales, de manera natural, se asocian las coordenadas esféricas  $(\theta, \varphi)$ ; logrando por medio de ellas escribir dicha métrica como:

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (2-11)$$

Dado que la predilección es trabajar sobre un espacio-tiempo en cuatro dimensiones, se necesita de dos coordenadas adicionales que inicialmente se llamaran  $a$  y  $b$ . Por lo tanto, desde la ecuación (2-10), haciendo  $v^0 = a$  y  $v^1 = b$ , se tiene:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{00}(v)dv^0dv^0 + g_{01}(v)dv^0dv^1 + g_{10}(v)dv^1dv^0 + g_{11}(v)dv^1dv^1 + f(v)\gamma_{ij}(u)du^i du^j \\ &= g_{aa}(a, b)da^2 + g_{ab}(a, b)dadb + g_{ba}(a, b)dbda + g_{bb}(a, b)db^2 + r^2(a, b)d\Omega^2 \end{aligned}$$

en donde, de forma sugestiva se ha introducido una función desconocida  $r^2(a, b)$ . Efectuando el intercambio  $(a, b) \rightarrow (a, r)$  aprovechando el hecho que  $r$  es función tanto de  $a$  como de  $b$ , se escribe

$$ds^2 = g_{aa}(a, r)da^2 + g_{ar}(a, r)dadr + g_{ra}(a, r)drda + g_{rr}(a, r)dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (2-12)$$

Ahora, el siguiente paso es encontrar la función  $t(a, r)$  tal que, en el sistema coordenado  $(t, r)$ , no se presenten términos cruzados de la forma  $dt dr$  o  $dr dt$  en la métrica. De manera que, si se toma el diferencial total

$$\begin{aligned} dt &= \frac{\partial t}{\partial a} da + \frac{\partial t}{\partial r} dr \\ dt^2 &= \left[ \frac{\partial t}{\partial a} da + \frac{\partial t}{\partial r} dr \right] \left[ \frac{\partial t}{\partial a} da + \frac{\partial t}{\partial r} dr \right] \\ &= \left[ \frac{\partial t}{\partial a} \right]^2 da^2 + \left[ \frac{\partial t}{\partial a} \right] \left[ \frac{\partial t}{\partial r} \right] dadr + \left[ \frac{\partial t}{\partial r} \right] \left[ \frac{\partial t}{\partial a} \right] drda + \left[ \frac{\partial t}{\partial r} \right]^2 dr^2 \\ &= \left[ \frac{\partial t}{\partial a} \right]^2 da^2 + \left[ \frac{\partial t}{\partial a} \right] \left[ \frac{\partial t}{\partial r} \right] (dadr + drda) + \left[ \frac{\partial t}{\partial r} \right]^2 dr^2 \end{aligned} \quad (2-13)$$

y luego, sustituyendo los cuatro primeros términos de (2-12) por  $m(t, r)dt^2 + n(t, r)dr^2$ , lo cual implicaría que, utilizando (2-13),

$$g_{aa}(a, r)da^2 + g_{ar}(a, r)dadr + g_{ra}(a, r)drda + g_{rr}(a, r)dr^2 = m(t, r)dt^2 + n(t, r)dr^2$$

$$\begin{aligned} &g_{aa}(a, r)da^2 + g_{ar}(a, r)dadr + g_{ra}(a, r)drda + g_{rr}(a, r)dr^2 \\ &= m(t, r) \left( \left[ \frac{\partial t}{\partial a} \right]^2 da^2 + \left[ \frac{\partial t}{\partial a} \right] \left[ \frac{\partial t}{\partial r} \right] (dadr + drda) + \left[ \frac{\partial t}{\partial r} \right]^2 dr^2 \right) + n(t, r)dr^2 \\ &= m(t, r) \left[ \frac{\partial t}{\partial a} \right]^2 da^2 + m(t, r) \left[ \frac{\partial t}{\partial a} \right] \left[ \frac{\partial t}{\partial r} \right] (dadr + drda) + m(t, r) \left[ \frac{\partial t}{\partial r} \right]^2 dr^2 + n(t, r)dr^2 \end{aligned}$$

se tengan las siguientes relaciones, que representan un sistema de tres ecuaciones con funciones desconocidas para  $t(a, r)$ ,  $m(a, r)$  y  $n(a, r)$ .

$$g_{aa}(a, r) = m(a, r) \left[ \frac{\partial t}{\partial a} \right]^2 \quad (2-14)$$

$$g_{ar}(a, r) = m(a, r) \left[ \frac{\partial t}{\partial a} \right] \left[ \frac{\partial t}{\partial r} \right] \quad (2-15)$$

$$g_{rr}(a, r) = m(a, r) \left[ \frac{\partial t}{\partial r} \right]^2 + n(a, r) \quad (2-16)$$

Obsérvese que aún estas ecuaciones están indeterminadas, ya que todavía se desconocen los coeficientes métricos presentes. Sin embargo, bajo estas consideraciones se logra reescribir la métrica (2-12), como:

$$ds^2 = m(t, r)dt^2 + n(t, r)dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (2-17)$$

Esta elección para el elemento de línea, fue motivada por el conocimiento que se tenía de la métrica Lorentziana (Ver [22] pág 23) en el espacio-tiempo de Minkowski con simetría esférica<sup>11</sup>; siguiendo esta dirección, se elige el signo del coeficiente que acompaña a  $dt^2$  como negativo y se proponen funciones para  $m$  y  $n$ ; con la motivación de que aquella elección, bajo ciertas condiciones, permita retornar la métrica al campo de la TER. De tal manera que nuevamente se reescribe (2-17), encontrando la forma más general para describir una métrica sobre una variedad con simetría esférica,

$$ds^2 = -c^2 e^{2\alpha(t,r)} dt^2 + e^{2\beta(t,r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2-18)$$

El procedimiento, en efecto, implica determinar las funciones explícitas de los coeficientes  $g_{tt}$  y  $g_{rr}$ . Para ello, dado que el sistema físico se encuentra en el vacío podemos utilizar la propiedad<sup>12</sup>:  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0 \iff R_{\mu\nu} = 0$ . Así, la solución al tensor de Einstein es equivalente a la solución del tensor de Ricci<sup>13</sup>; por lo tanto, para dar solución a esto, se deben calcular inicialmente las conexiones de Christoffel, con las cuales se determinará el tensor de curvatura y consecuentemente el tensor de Ricci. Usando la convención usual para

<sup>11</sup>Elemento de línea en el espacio-tiempo de Minkowski con simetría esférica  $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2d\Omega^2$ .

<sup>12</sup>Si se asume la validez  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0$ , entonces subiendo el primer índice contravariante y contrayendo, se encuentra:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} g_{\mu\nu} &= 0 \\ R - 2R &= 0 \Rightarrow R_{\mu\nu} = 0 \end{aligned}$$

Si se asume la validez  $R_{\mu\nu} = 0$ , es decir, si todos los elementos del tensor de Ricci son nulos el escalar de curvatura es cero.

<sup>13</sup>Es importante reconocer que hay métodos de solución mas prácticos, como por ejemplo la solución presentada por el profesor Juan Manuel Tejeiro[20].

los índices  $(0, 1, 2, 3) \rightarrow (t, r, \theta, \varphi)$ , las conexiones de Christoffel para el elemento (2-18) se encuentran por medio de la expresión

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho} [\partial_{\mu}g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}] \quad (2-19)$$

obteniendo las expresiones no nulas (Ver anexo E.1):

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \partial_0\alpha(t, r) & \Gamma_{22}^1 &= -re^{-2\beta(t, r)} \\ \Gamma_{10}^0 &= \partial_1\alpha(t, r) & \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta e^{-2\beta(t, r)} \\ \Gamma_{11}^0 &= e^{2(\beta-\alpha)}\partial_0\beta(t, r) & \Gamma_{12}^2 &= 1/r \\ \Gamma_{00}^1 &= e^{2(\alpha-\beta)}\partial_1\alpha(t, r) & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{01}^1 &= \partial_0\beta(t, r) & \Gamma_{31}^3 &= -1/r \\ \Gamma_{11}^1 &= \partial_1\beta(t, r) & \Gamma_{32}^3 &= -\cos \theta / \sin \theta \end{aligned}$$

Luego, desde estas conexiones, se obtienen las componentes no nulas del tensor de Riemann (Ver anexo E.2):

$$\begin{aligned} R^0_{101} &= e^{2(\beta-\alpha)} [(\partial_0\beta)^2 + \partial_0^2\beta - (\partial_0\alpha)(\partial_0\beta)] + [(\partial_1\alpha)(\partial_1\beta) - \partial_1^2\alpha - (\partial_1\alpha)^2] \\ R^0_{202} &= -re^{-2\beta}\partial_1\alpha \\ R^0_{303} &= -re^{-2\beta}\sin^2\theta\partial_1\alpha \\ R^0_{212} &= -re^{-2\alpha}\partial_0\beta \\ R^0_{313} &= -re^{-2\alpha}\sin^2\theta\partial_0\beta \\ R^1_{212} &= re^{-2\beta}\partial_1\beta \\ R^1_{313} &= r\sin^2\theta e^{-2\beta}\partial_1\beta \\ R^2_{323} &= [1 - e^{-2\beta}]\sin^2\theta \end{aligned}$$

Posteriormente, tomando las contracciones del tensor de Riemann, es decir  $R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}$ , se presentan las componentes no nulas del tensor de Ricci (Ver anexo E.3).

$$R_{00} = e^{2(\alpha-\beta)} \left[ (\partial_1\alpha)^2 + \partial_1^2\alpha - \partial_1\beta\partial_1\alpha + \frac{2}{r}\partial_1\alpha \right] - [\partial_0^2\beta - \partial_0\beta\partial_0\alpha + (\partial_0\beta)^2] \quad (2-20)$$

$$R_{11} = e^{2(\beta-\alpha)} [(\partial_0\beta)^2 - \partial_0\alpha\partial_0\beta + \partial_0^2\beta] - \left[ \partial_1^2\alpha + (\partial_1\alpha)^2 - \partial_1\alpha\partial_1\beta - \frac{2}{r}\partial_1\beta \right] \quad (2-21)$$

$$R_{01} = \frac{2}{r}\partial_0\beta \quad (2-22)$$

$$R_{22} = e^{-2\beta} [r(\partial_1\beta - \partial_1\alpha) - 1] + 1 \quad (2-23)$$

$$R_{33} = R_{22}\sin^2\theta \quad (2-24)$$

Dadas las componentes de  $R_{\mu\nu}$ , inicialmente se puede establecer desde (2-22), que  $\partial_0\beta = 0$ ; así, se da por hecho que la función  $\beta$  es independiente del tiempo y por lo tanto  $\beta(t, r) = \beta(r)$ . Por otra parte, haciendo uso de (2-23), se puede determinar lo siguiente

$$\begin{aligned}
R_{22} &= e^{-2\beta} [r(\partial_1\beta - \partial_1\alpha) - 1] + 1 = 0 \\
e^{-2\beta} [r(\partial_1\beta - \partial_1\alpha) - 1] &= -1 \\
r(\partial_1\beta - \partial_1\alpha) - 1 &= -e^{2\beta} && \text{derivando respecto al tiempo.} \\
r\partial_0\partial_1\beta - r\partial_0\partial_1\alpha &= -2e^{2\beta}\partial_0\beta \\
r\partial_1\partial_0\beta - r\partial_0\partial_1\alpha &= -2e^{2\beta}\partial_0\beta && \text{recordando que } \partial_0\beta = 0. \\
\partial_0\partial_1\alpha &= 0
\end{aligned}$$

En contraste, para que está relación sea válida, es fácil comprobar que  $\alpha(t, r) = f(t) + h(r)$  y además sujeta a la libertad de escoger a  $f(t) = 0$ [2], se considera que la función es exclusivamente dependiente de  $r$ , por lo tanto  $\alpha(t, r) = \alpha(r)$ . Así se logra reescribir la ecuación (2-18) de la forma:

$$ds^2 = -c^2 e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2-25)$$

La estructura de ésta expresión, por simple inspección, revela que los coeficientes métricos son independientes de la coordenada temporal, por lo tanto la métrica tiene asociado un vector de Killing como de tiempo, así la expresión (2-25) recibe el nombre de métrica estacionaria. Otro aspecto relevante, es que éste vector como de tiempo es ortogonal a las hipersuperficies  $t = \text{constante}$ , esto se puede identificar a simple vista sobre el elemento, dado que no hay presencia de términos cruzados de la forma  $dt dr$ ; está propiedad, se conoce con el nombre de métrica estática. De tal manera que, la propuesta de solución a las ecuaciones de campo, en esta oportunidad, se enmarca como una métrica estacionaria y a su vez estática. Determinando ahora, las funciones explícitas para  $\alpha(r)$  y  $\beta(r)$ , con ayuda de las expresiones (2-20) y (2-21), se encuentra:

$$e^{2(\alpha-\beta)} \left[ (\partial_1\alpha)^2 + \partial_1^2\alpha - \partial_1\beta\partial_1\alpha + \frac{2}{r}\partial_1\alpha \right] - [\partial_0^2\beta - \partial_0\beta\partial_0\alpha + (\partial_0\beta)^2] = 0 \quad (2-26)$$

$$e^{2(\beta-\alpha)} [(\partial_0\beta)^2 - \partial_0\alpha\partial_0\beta + \partial_0^2\beta] - \left[ \partial_1^2\alpha + (\partial_1\alpha)^2 - \partial_1\alpha\partial_1\beta - \frac{2}{r}\partial_1\beta \right] = 0 \quad (2-27)$$

multiplicando a (2-26) por  $e^{2(\beta-\alpha)}$

$$\left[ (\partial_1\alpha)^2 + \partial_1^2\alpha - \partial_1\beta\partial_1\alpha + \frac{2}{r}\partial_1\alpha \right] - e^{2(\beta-\alpha)} [\partial_0^2\beta - \partial_0\beta\partial_0\alpha + (\partial_0\beta)^2] = 0 \quad (2-28)$$

y sumando (2-27) con (2-28), se logra

$$\begin{aligned}
\frac{2}{r}(\partial_1\alpha + \partial_1\beta) &= 0 \\
\partial_1\alpha &= -\partial_1\beta
\end{aligned}$$

obteniendo

$$\alpha = -\beta + \text{constante} \quad (2-29)$$

Considerando la constante encontrada en la ultima ecuación como nula,  $\alpha = -\beta$ , y resolviendo  $R_{22} = 0$  se encuentra:

$$\begin{aligned} R_{22} &= e^{-2\beta} [r(\partial_1\beta - \partial_1\alpha) - 1] + 1 = 0 \\ e^{-2(-\alpha)} [r(\partial_1(-\alpha) - \partial_1\alpha) - 1] &= -1 \\ e^{2\alpha} [2r\partial_1\alpha + 1] &= 1 \end{aligned}$$

que es equivalente al diferencial del producto,

$$\begin{aligned} \partial_1 [re^{2\alpha}] &= 1 && \text{Luego, integrado respecto a } r. \\ e^{2\alpha} &= \frac{r + \mu}{r} = 1 + \frac{\mu}{r} && \text{con } \mu \text{ como constante.} \quad (2-30) \end{aligned}$$

$$e^{-2\beta} = 1 + \frac{\mu}{r} \quad \text{recordando } \alpha = -\beta. \quad (2-31)$$

Por los motivos que se acaban de señalar, el elemento de línea (2-25) toma la forma,

$$ds^2 = -c^2 \left[1 + \frac{\mu}{r}\right] dt^2 + \left[1 + \frac{\mu}{r}\right]^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2-32)$$

Es importante reconocer que hasta el momento, para la deducción de la métrica, solamente se han utilizado argumentos asociados a la simetría de la distribución de materia y su correspondencia con la TER en el carácter asintótico; y hasta este punto, no se ha involucrado la masa total ni su radio. Por lo tanto, no sería extraño afirmar que la constante  $\mu$  inmersa en los coeficientes métricos  $g_{tt}$  y  $g_{rr}$  dependa de estos parámetros físicos.

Para determinar está constante, se esperaría que la métrica (2-32) en el límite de bajas velocidades, respecto a la velocidad de la luz o cuando se trabaje con campos gravitacionales débiles y estáticos, considerados como perturbaciones del espacio plano; los resultados obtenidos, correspondan aproximadamente a los encontrados en la teoría Newtoniana. De este modo, siguiendo a [2], [16] y [20], tenemos que  $\mu = -2GM/c^2$  (Ver anexo E.4), de manera que reescribiendo el elemento de línea, se encuentra la solución de Schwarzschild<sup>14</sup>.

$$ds^2 = -c^2 \left[1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right] dt^2 + \left[1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right]^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2-33)$$

Inicialmente se observan dos aspectos importantes, que se deseaban hallar en la solución:

- Si  $M$  es nula retornamos a la solución de Minkowski.

<sup>14</sup>Recuérdese que está métrica se puede escribir utilizando unidades geométricas, haciendo  $c = 1$  y  $G = 1$ . Logrando así, en está oportunidad, expresar las magnitudes fundamentales de masa, tiempo y longitud en metros.

- A medida que  $r \rightarrow \infty$  la métrica se convierte progresivamente en Minkowskiana (asintóticamente plana).

Para finalizar, bajo una simple inspección sobre el elemento (2-33), es posible dictaminar que hay inconvenientes cuando  $r = 0$  y  $r = 2GM/c^2$  (llamado el radio de Schwarzschild), estas irregularidades, denominadas singularidades, pueden ser producto de una mala elección de las coordenadas (singularidad coordenada) o definitivamente una anomalía del espacio-tiempo (singularidad esencial)[6]. Un criterio para determinar cuando algo va mal, es analizar si la curvatura va a infinito; para ello, en relatividad general, por medio del tensor de Riemann (relacionado con aspectos geométricos) se construyen escalares, de tal manera que si estos van a infinito cuando se aproximan a algún punto en cuestión, se concluye que allí hay una singularidad esencial en la curvatura. Para el caso de la solución de Schwarzschild, se tiene que el mencionado escalar, toma la forma (Ver anexo E.5):

$$R^{\rho\sigma\mu\nu}R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{48G^2M^2}{r^6c^4},$$

Dando cuenta, sin lugar a dudas, que en  $r = 0$  se tiene una singularidad esencial, mientras que para el radio de Schwarzschild se tiene una singularidad coordenada, dado que no hay problemas de divergencia en el escalar. En relación a lo anterior, para la siguiente sección, la tarea será presentar el elemento de línea (2-33) en unas coordenadas que evidencien un mejor comportamiento de la métrica sobre la superficie  $r = 2GM/c^2$ .

## 2.3. Solución de Schwarzschild: coordenadas de Eddington-Finkelstein

Un camino para entender alguna geometría es explorar su estructura causal<sup>15</sup>, que está definida por los conos de luz[6]; por lo tanto, si se considera una curva nula radial (luz  $ds^2 = 0$ ), para las cuales  $\theta$  y  $\varphi$  son constantes, (2-33) se reescribe;

$$0 = -c^2 \left[ 1 - \frac{2GM}{c^2r} \right] dt^2 + \left[ 1 - \frac{2GM}{c^2r} \right]^{-1} dr^2$$

de donde se obtiene fácilmente que:

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{c} \left[ 1 - \frac{2GM}{c^2r} \right]^{-1} \quad (2-34)$$

Esta última expresión da cuenta de las pendientes de los conos de luz en un diagrama  $t - r$ , obsérvese que a medida que  $r$  toma valores grandes la pendiente de los conos es  $\pm 1$ , como es de esperarse en el espacio plano. Sin embargo, cuando  $r$  se aproxima a la

<sup>15</sup>También se podría, considerar el comportamiento de las geodésicas, ver [2] para los detalles.

superficie  $r = 2GM/c^2$  la pendiente tiende a  $\pm\infty$  indicando que los conos de luz se están cerrando. Este comportamiento se puede entender por medio de la siguiente situación: se tienen dos observadores 1 y 2, el observador 1 se aventura a viajar hacia  $r = 2GM/c^2$  y el otro, observador 2, se encuentra muy lejano; el observador que “cae” envía señales instante a instante, éstas para el observador lejano llegan cada vez más y más lentas, esto implica que el observador 1, visto desde 2, nunca alcanzaría la superficie  $r = 2GM/c^2$ . Este comportamiento está fuertemente ligado al sistema de coordenadas empleado para describir la situación, por lo tanto es necesario realizar un cambio de coordenadas en donde se haga explícito un mejor comportamiento de la superficie en cuestión.

La idea consiste en introducir una coordenada temporal que “avance más lentamente”, de la misma forma en que lo hace  $r$ , solucionando para  $t$  de (2-34) (Ver anexo E.6)

$$t = \pm r^* + \text{constante} \quad (2-35)$$

se define a  $r^*$  como la coordenada tortuga, y utilizándola sobre (2-33), se tiene la solución de Schwarzschild en términos de dicha coordenada (Ver anexo E.6).

$$ds^2 = c^2 \left[ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right] (-dt^2 + dr^{*2}) + r^2 d\Omega^2 \quad (2-36)$$

Se puede apreciar que hay un buen comportamiento en la superficie  $r = 2GM/c^2$  y además que los conos de luz no se cierran en ningún momento ( $dr^*/dt = \pm 1$ ) a medida que un observador cae hacia ésta<sup>16</sup>. Ahora, introduciendo coordenadas nulas,

$$\tilde{u} = t + r^* \quad \tilde{v} = t - r^*$$

y considerando únicamente las geodésicas nulas entrantes, con  $\tilde{u} = \text{constante}$ , se tiene el elemento de línea de Schwarzschild en las coordenadas de Eddington-Finkelstein  $(\tilde{u}, r, \theta, \varphi)$  (Ver anexo E.6).

$$ds^2 = -c^2 \left[ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right] d\tilde{u}^2 + 2cd\tilde{u}dr + r^2 d\Omega^2 \quad (2-37)$$

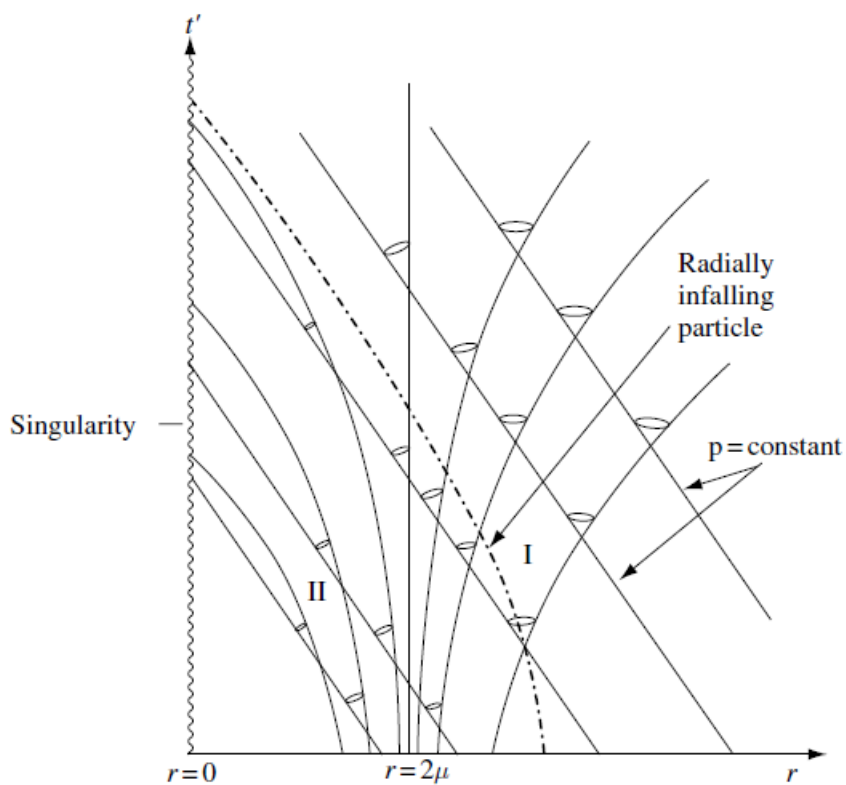
Observe que está métrica tiene un buen comportamiento en la superficie  $r = 2GM/c^2$ , sin importar que el primer término del miembro derecho de (2-37) se anule, y nuevamente ratifica su correspondencia con una singularidad coordenada ligada al sistema coordinado utilizado inicialmente  $(t, r, \theta, \varphi)$ . En relación a los conos de luz, a medida que  $r$  tiende al radio de Schwarzschild, estos tienen un buen comportamiento, se inclinan (no se cierran) cada vez más a medida que  $r$  decrece (Ver Figura 2-1)<sup>17</sup>. Finalmente la superficie  $r = 2GM/c^2$ , es

<sup>16</sup>Sin embargo, al considerar la definición de  $r^*$ , para los detalles ver anexo E.6, la superficie  $r = \frac{2GM}{c^2}$  se ubica ahora en el infinito.

<sup>17</sup>Las equivalencias para la lectura de la figura 2-1 son:

(a)  $r = 2\mu \equiv \frac{2GM}{c^2}$ ; (b)  $t' \equiv t$  y (c)  $p = \text{constant} \equiv \tilde{u} = \text{constante}$ .

llamada en la literatura como horizonte de eventos, funciona como un punto de no retorno; si una partícula se sumerge en esta región nunca podrá regresar y esto implica que cualquier evento que ocurra en  $r \leq 2GM/c^2$  no logrará influenciar algún evento en  $r > 2GM/c^2$ .



**Figura 2-1.:** Estructura de los conos de luz en las coordenadas avanzadas de Eddington-Finkelstein[8].



## 3. Solución de Kerr

En el presente capítulo se reproducirá de forma detallada la solución propuesta por Roy Kerr en 1963. Para ello se utilizará el método propuesto en [12], [14] y [1], con la similitud que la métrica encontrada representará únicamente un cuerpo de masa  $M$  en rotación, respecto a algún eje, y la diferencia que no tendrá carga asociada. Además, se presentarán algunas formas de representarla por medio de transformaciones coordenadas y se concluirá el capítulo con algunas propiedades de la solución, junto con la presentación de los horizontes de eventos y singularidades.

### 3.1. Descripción de una Métrica Estacionaria y de Simetría Axial

Antes de presentar un algoritmo matemático cuya finalidad sea obtener la solución a las ecuaciones de campo para un objeto en rotación y en el vacío, es importante reconocer de forma general qué elemento de línea se espera<sup>1</sup>, dadas ciertas condiciones iniciales. Inicialmente, recuérdese que en el capítulo anterior se dio a conocer, de manera aproximada, una descripción del espacio-tiempo para el exterior de un objeto, en el vacío, caracterizado únicamente por su masa  $M$  (2-33). Ahora, dado que el objeto se encuentra en constante rotación es razonable pensar que la métrica buscada se caracterice no solo por el parámetro de masa  $M$  sino también por su momentum angular  $J$ .

En particular, construir una métrica estacionaria y de simetría axial para las coordenadas  $(t, r, \theta, \varphi)$ , implica fijar las siguientes condiciones iniciales<sup>2</sup>:

- Se requiere que los coeficientes métricos sean independientes de  $t$  y  $\varphi$ . Por lo tanto dichos coeficientes dependerán a lo sumo de  $r$  y  $\theta$ .
- El elemento de línea debe ser invariante bajo la inversión simultánea de  $t$  y  $\varphi$ .

$$t \rightarrow -t \quad \text{y} \quad \varphi \rightarrow -\varphi$$

el significado físico de este requerimiento se encuentra ligado directamente a que la fuente de campo gravitacional se encuentra rotando alrededor de un eje de simetría;

---

<sup>1</sup>Para ver más detalles sobre soluciones de vacío, simetría axial y estacionaria, se recomienda al lector ver [18] pág. 304.

<sup>2</sup>En este caso especial, no es posible aplicar una solución con simetría esférica, dado que el eje de rotación del objeto define una dirección especial y esto implica que la isotropía de la solución se anula[8].

en contraste, cuando se tienen los dieciséis coeficientes del elemento de línea, para garantizar la invarianza, se deben considerar nulos los coeficientes:

$$g_{01} = g_{10} = g_{02} = g_{20} = g_{13} = g_{31} = g_{23} = g_{32} = 0$$

De esta manera se encuentra, que la métrica toma la forma,

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\varphi}dtd\varphi + g_{rr}dr^2 + 2g_{r\theta}drd\theta + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 \quad (3-1)$$

y en general se puede mostrar que (Ver [8] pág. 312):

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\varphi}dtd\varphi + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 \quad (3-2)$$

En donde la tarea a realizar consiste en determinar de forma explícita, si es posible, los coeficientes métricos relacionados en (3-2). Finalmente, se aclara al lector, que debido a la simetría particular que tiene el sistema, no se puede asociar, inicialmente, a las coordenadas  $(r, \theta)$  algún significado geométrico preciso ligado al sistema de coordenadas esférico convencional. Sin embargo, se denotan de esta manera con la finalidad, que posteriormente sean lo mas cercanas posibles a las coordenadas esféricas usuales[8].

## 3.2. Solución de Kerr desde una Transformación Compleja

El punto de arranque para obtener la solución de Kerr, es el espacio-tiempo de Schwarzschild en términos de las coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes (2-37)<sup>3</sup>. Desde allí, dado que el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  es no singular, se obtiene su inverso  $g^{\mu\nu}$ ,

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\left[1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right] & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}; g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \left[1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

y definiendo en cada punto de la variedad de Schwarzschild una base nula (Ver anexo F) de cuatro vectores linealmente independientes (usualmente denominada tétrada)[1][13], dado que se tiene cierto grado de libertad en la elección de la base, (3-3) toma la forma[12]:

$$l^\mu = \delta_1^\mu = (0, 1, 0, 0) \quad (3-4)$$

$$n^\mu = -\delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right] \delta_1^\mu = \left(-1, -\frac{1}{2} \left[1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right], 0, 0\right) \quad (3-5)$$

<sup>3</sup>Para ver detalles adicionales de las coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes y salientes ver [2] pág. 184-186.

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left[ \delta_2^\mu + \frac{i}{\sin \theta} \delta_3^\mu \right] = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left( 0, 0, 1, \frac{i}{\sin \theta} \right) \quad (3-6)$$

$$\bar{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left[ \delta_2^\mu - \frac{i}{\sin \theta} \delta_3^\mu \right] = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left( 0, 0, 1, -\frac{i}{\sin \theta} \right) \quad (3-7)$$

interpretando a  $\bar{m}^\mu$  como el complejo conjugado de  $m^\mu$ , y haciendo uso del tensor métrico (3-3) para determinar las componentes covariantes de la base,

$$l_\mu = g_{\mu\nu} l^\nu = (1, 0, 0, 0) \quad (3-8)$$

$$n_\mu = g_{\mu\nu} n^\nu = \left( \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right], -1, 0, 0 \right) \quad (3-9)$$

$$m_\mu = g_{\mu\nu} m^\nu = \left( 0, 0, \frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{ir \sin \theta}{\sqrt{2}} \right); \quad \bar{m}_\mu = g_{\mu\nu} \bar{m}^\nu = \left( 0, 0, \frac{r}{\sqrt{2}}, -\frac{ir \sin \theta}{\sqrt{2}} \right) \quad (3-10)$$

e identificando las relaciones (Ver anexo F):

$$l^\mu l_\mu = n^\mu n_\mu = m^\mu m_\mu = \bar{m}^\mu \bar{m}_\mu = 0; \quad m^\mu \bar{m}_\mu = -l^\mu n_\mu = 1; \quad l^\mu m_\mu = n^\mu \bar{m}_\mu = 0$$

se logra escribir de forma alternativa (3-3); utilizando está nueva base coordenada[16].

$$g^{\mu\nu} = -l^\mu n^\nu - n^\mu l^\nu + m^\mu \bar{m}^\nu + \bar{m}^\mu m^\nu \quad (3-11)$$

Ahora, permitiendo que la coordenada radial y la coordenada temporal de (3-3) tomen valores complejos ([12],[14])<sup>4</sup>, se considera este punto como crucial para lograr la conexión entre la métrica de Schwarzschild y la solución de Kerr, por medio de

$$r = r' - i \frac{a}{c} \cos \theta, \quad u = u' + i \frac{a}{c^2} \cos \theta, \quad \theta = \theta', \quad \varphi = \varphi'$$

en donde  $r'$  es un número real  $(-\infty, \infty)$  y  $a$  es un nuevo parámetro; que (más abajo) se identificará con el momentum angular por unidad de masa. Reescribiendo el conjunto de ecuaciones (3-4) a (3-7), de tal forma que  $r$  tome valores complejos, se encuentra que:

$$l^\mu = \delta_1^\mu = (0, 1, 0, 0) \quad (3-12)$$

$$n^\mu = -\delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{GM}{c^2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}} \right) \right] \delta_1^\mu = \left( -1, -\frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{GM}{c^2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}} \right) \right], 0, 0 \right) \quad (3-13)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\bar{r}} \left[ \delta_2^\mu + \frac{i}{\sin \theta} \delta_3^\mu \right] = \left( 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}\bar{r}}, \frac{i}{\sqrt{2}\bar{r} \sin \theta} \right) \quad (3-14)$$

$$\bar{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left[ \delta_2^\mu - \frac{i}{\sin \theta} \delta_3^\mu \right] = \left( 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}r}, -\frac{i}{\sqrt{2}r \sin \theta} \right) \quad (3-15)$$

<sup>4</sup>Podría afirmarse que, está herramienta permite la introducción del parámetro de rotación, ausente en la geometría de Schwarzschild. Para más detalles ver [18] pág. 329, o también el documento original[14]. Sin embargo, si se quiere profundizar en aspectos matemáticos sobre este tipo de transformación ver [19].

utilizando la transformación coordenada para  $r$  y  $u$ , se logra la tétrada nula (Ver anexo G).

$$l'^{\mu} = \delta_1^{\mu} \quad (3-16)$$

$$n'^{\mu} = -\delta_0^{\mu} - \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{GM}{c^2} \frac{2r'}{r'^2 + (a^2/c^2) \cos^2 \theta} \right] \delta_1^{\mu} \quad (3-17)$$

$$m'^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}(r' + i(a/c) \cos \theta)} \left[ -(\delta_0^{\mu} + \delta_1^{\mu}) i \frac{a}{c} \sin \theta + \delta_2^{\mu} + \frac{i}{\sin \theta} \delta_3^{\mu} \right] \quad (3-18)$$

$$\bar{m}'^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}(r' - i(a/c) \cos \theta)} \left[ (\delta_0^{\mu} + \delta_1^{\mu}) i \frac{a}{c} \sin \theta + \delta_2^{\mu} - \frac{i}{\sin \theta} \delta_3^{\mu} \right] \quad (3-19)$$

Aplicando (3-16) a (3-19) en (3-11), e introduciendo primadas, se obtienen los coeficientes del tensor métrico contravariante (Ver anexo H-1).

$$g'^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{(a^2/c^2) \sin^2 \theta}{\Sigma} & \frac{r'^2 + (a^2/c^2)}{\Sigma} & 0 & -\frac{a}{c\Sigma} \\ \frac{r'^2 + (a^2/c^2)}{\Sigma} & \frac{r'^2 + (a^2/c^2) - (2MG/c^2)r'}{\Sigma} & 0 & -\frac{a}{c\Sigma} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Sigma} & 0 \\ -\frac{a}{c\Sigma} & -\frac{a}{c\Sigma} & 0 & \frac{1}{\Sigma \sin^2 \theta} \end{bmatrix} \quad (3-20)$$

en donde  $\Sigma = r'^2 + (a^2/c^2) \cos^2 \theta$ . De manera que el elemento de línea de Kerr en las coordenadas (contravariantes  $\{u', r', \theta', \varphi'\}$ ) de Eddington-Finkelstein se puede escribir como:

$$ds^2 = c^2 \frac{(a^2/c^2) \sin^2 \theta}{\Sigma} du'^2 + 2 \left[ \frac{r'^2 + (a^2/c^2)}{\Sigma} \right] (cd u') dr' - 2 \frac{a}{c\Sigma} (cd u') d\varphi' \\ + \frac{r'^2 + (a^2/c^2) - (2MG/c^2)r'}{\Sigma} dr'^2 - 2 \frac{a}{c\Sigma} dr' d\varphi' + \frac{1}{\Sigma} d\theta'^2 + \frac{1}{\Sigma \sin^2 \theta} d\varphi'^2 \quad (3-21)$$

y dado que (3-20) es no singular (Ver anexo H.2),

$$g'_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} - \left[ 1 - \frac{2GM r'}{c^2 \Sigma} \right] & 1 & 0 & \frac{2GM a r' \sin^2 \theta}{c^3 \Sigma} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{a}{c} \sin^2 \theta \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ \frac{2GM a r' \sin^2 \theta}{c^3 \Sigma} & \frac{a}{c} \sin^2 \theta & 0 & \sin^2 \theta \left( \frac{2GM a^2 r' \sin^2 \theta}{c^4 \Sigma} + r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right) \end{bmatrix} \quad (3-22)$$

se escribe la métrica de Kerr en las coordenadas avanzadas de Eddington-Finkelstein en sus componentes covariantes.

$$ds^2 = -c^2 \left[ 1 - \frac{2GM r'}{c^2 \Sigma} \right] du'^2 + 2cd u' dr' - \frac{4GM a r' \sin^2 \theta}{c^3 \Sigma} (cd u') d\varphi' - 2 \frac{a}{c} \sin^2 \theta dr' d\varphi' \\ + \Sigma d\theta'^2 + \sin^2 \theta \left[ \frac{2GM a^2 r' \sin^2 \theta}{c^4 \Sigma} + r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right] d\varphi'^2 \quad (3-23)$$

La ecuación (3-23) es un resultado importante, dado que se obtuvo de una solución conocida (Schwarzschild) y muestra una conexión directa, por medio de la transformación compleja, entre el campo gravitacional debido a una distribución de simetría esférica sin rotación y el campo asociado a un objeto con rotación uniforme. Sin embargo, de acuerdo a la expectativa mostrada en la expresión (3-2), se dispone a utilizar la transformación de coordenadas<sup>5</sup>:

$$cd u' = cdt + \frac{r'^2 + (a^2/c^2)}{\Delta} dr', \quad d\varphi' = d\varphi + \frac{a}{c\Delta} dr'$$

que al ser aplicada sobre (3-23), la métrica toma la forma (Ver anexo H.3):

$$ds^2 = -c^2 \left[ \frac{\Delta - (a^2/c^2) \sin^2 \theta}{\Sigma} \right] dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr'^2 + \Sigma d\theta^2 \\ + \sin^2 \theta \left[ \frac{2GMa^2 r' \sin^2 \theta}{c^4 \Sigma} + r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right] d\varphi^2 - \frac{2a \sin^2 \theta}{c\Sigma} \left[ r'^2 + \frac{a^2}{c^2} - \Delta \right] (cdt)d\varphi \quad (3-24)$$

cuyo tensor métrico covariante asociado tiene las componentes,

$$g'_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta - (a^2/c^2) \sin^2 \theta}{\Sigma} & 0 & 0 & -\frac{a \sin^2 \theta}{c\Sigma} \left[ r'^2 + \frac{a^2}{c^2} - \Delta \right] \\ 0 & \frac{\Sigma}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ -\frac{a \sin^2 \theta}{c\Sigma} \left[ r'^2 + \frac{a^2}{c^2} - \Delta \right] & 0 & 0 & \sin^2 \theta \left[ \frac{2GMa^2 r' \sin^2 \theta}{c^4 \Sigma} + r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right] \end{bmatrix} \quad (3-25)$$

con  $\Delta = r'^2 - \frac{2GMr'}{c^2} + \frac{a^2}{c^2}$ . Podría decirse que la relación presentada en (3-24) es la más utilizada para describir propiedades elementales del sistema físico en consideración y es conocida como la solución de Kerr en la forma de Boyer-Lindquist. Finalmente, se presenta la forma en la que Roy Kerr encontró la solución; ya que éste, no utilizó un razonamiento como se siguió para (3-23) o (3-24) sino se apoyó en cierto tipo de coordenadas cartesianas ( $t, x, y, z$ ) denominadas coordenadas de Kerr-Schild, que se describen por medio de (Ver [24] pág. 11 y 15):

$$x = \sqrt{r'^2 + \frac{a^2}{c^2}} \sin \theta \cos \left( \varphi' + \tan^{-1} \frac{a/c}{r'} \right) \quad (3-26)$$

$$y = \sqrt{r'^2 + \frac{a^2}{c^2}} \sin \theta \sin \left( \varphi' + \tan^{-1} \frac{a/c}{r'} \right) \quad (3-27)$$

$$z = r' \cos \theta \quad (3-28)$$

<sup>5</sup>Para ver detalles sobre la transformación, se recomienda al lector ver [6] pág. 256.

nombrando a  $\alpha = \tan^{-1} \frac{a/c}{r'}$  y reconociendo, por medio de álgebra sencilla sobre  $\alpha$ , que  $c^2 r'^2 \sin^2 \alpha = a^2 \cos^2 \alpha$ , se expanden las coordenadas de Kerr-Schild, de tal manera que<sup>6</sup>:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{r'^2 + \frac{a^2}{c^2}} \sin \theta \cos \varphi \cos \alpha - \sqrt{r'^2 + \frac{a^2}{c^2}} \sin \theta \sin \varphi \sin \alpha \\ &= r' \sin \theta \cos \varphi - \frac{a}{c} \sin \theta \sin \varphi \end{aligned} \quad (3-29)$$

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{r'^2 + \frac{a^2}{c^2}} \sin \theta \sin \varphi \cos \alpha + \sqrt{r'^2 + \frac{a^2}{c^2}} \sin \theta \sin \varphi \sin \alpha \\ &= r' \sin \theta \sin \varphi + \frac{a}{c} \sin \theta \cos \varphi \end{aligned} \quad (3-30)$$

$$z = r' \cos \theta \quad (3-31)$$

y al obtener los diferenciales de cada uno de estos, aplicándolos al elemento de línea de Minkowski (Ver anexo H.4), se obtiene dicha métrica en las coordenadas de Kerr-Schild.

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr'^2 + \Sigma d\theta^2 + \left[ r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right] \sin^2 \theta d\varphi^2 - 2 \frac{a}{c} \sin^2 \theta dr' d\varphi \quad (3-32)$$

A partir de este resultado y comparándolo con la solución de Kerr en las coordenadas de Eddington-Finkelstein en sus componentes covariantes; de tal manera que, reescribiendo el último término del elemento (3-23),

$$\sin^2 \theta \left[ \frac{2GMa^2 r' \sin^2 \theta}{c^4 \Sigma} + r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right] d\varphi^2 = \left[ \frac{2GMa^2 r'}{c^4 \Sigma} \sin^4 \theta + \left( r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right) \sin^2 \theta \right] d\varphi^2$$

y en general, apoyado en el resultado anterior, se reorganiza el elemento de línea (3-23),

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 du'^2 + \frac{2GMr'}{c^2 \Sigma} (cdu')^2 + 2cdu' dr' - \frac{4GMa r' \sin^2 \theta}{c^3 \Sigma} (cdu') d\varphi - 2 \frac{a}{c} \sin^2 \theta dr' d\varphi \\ &+ \Sigma d\theta^2 + \frac{2GMa^2 r'}{c^4 \Sigma} a^2 \sin^4 \theta d\varphi^2 - \left[ r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right] \sin^2 \theta d\varphi^2 \\ &= -c^2 du'^2 + 2cdu' dr' + \Sigma d\theta^2 + \left[ r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right] \sin^2 \theta d\varphi^2 - 2 \frac{a}{c} \sin^2 \theta dr' d\varphi \\ &+ \frac{2GMr'}{c^2 \Sigma} \left[ (cdu')^2 - 2 \frac{a}{c} \sin^2 \theta (cdu') d\varphi + \frac{a^2}{c^2} \sin^4 \theta d\varphi^2 \right] \end{aligned}$$

factorizando el último término

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 du'^2 + 2cdu' dr' + \Sigma d\theta^2 + \left[ r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right] \sin^2 \theta d\varphi^2 - 2 \frac{a}{c} \sin^2 \theta dr' d\varphi \\ &+ \frac{2GMr'}{c^2 \Sigma} \left[ cdu' - \frac{a}{c} \sin^2 \theta d\varphi \right]^2 \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Recuerde que desde la transformación compleja  $\varphi = \varphi'$ .

que al efectuar la transformación  $cu' = ct + r'$ , se obtiene la métrica (Ver anexo H.5):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr'^2 + \Sigma d\theta^2 + \left[ r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right] \sin^2 \theta d\varphi^2 - 2\frac{a}{c} \sin^2 \theta dr' d\varphi + \frac{2GMr'}{c^2 \Sigma} \left[ cdt + dr' - \frac{a}{c} \sin^2 \theta d\varphi \right]^2 \quad (3-33)$$

Es significativo reconocer que está última expresión evidencia un resultado sobresaliente respecto a las diversas maneras y conexiones de las estructuras en las cuales la solución de Kerr se ha presentado (3-21), (3-23) y (3-24); dado que ésta solución puede ser entendida como Minkowski más un término adicional. Para ver esto, en relación a lo expuesto en la ecuación (3-32) todos los términos de (3-33), excepto el último, corresponden a Minkowski; por lo tanto, escribiendo este último término en coordenadas  $(t, x, y, z)$ , se puede verificar, por medio de álgebra cuidadosa, que éste es equivalente a (Ver anexo H.6):

$$\frac{2GMr'^3}{c^2 r'^4 + a^2 z^2} \left[ cdt + (xdy + ydy) \frac{r'}{r'^2 + a^2/c^2} - (xdy - ydx) \frac{a/c}{r'^2 + a^2/c^2} + \frac{z}{r'} dz \right]^2$$

así la solución de Kerr toma la forma.

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2GMr'^3}{c^2 r'^4 + a^2 z^2} \left[ cdt + \frac{(xdy + ydy)r'}{r'^2 + a^2/c^2} - \frac{(xdy - ydx)(a/c)}{r'^2 + a^2/c^2} + \frac{z}{r'} dz \right]^2 \quad (3-34)$$

Finalmente, a partir de (3-34) es evidente concluir que en general la solución de Kerr se puede representar como:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \lambda l_\mu l_\nu dx^\mu dx^\nu$$

con  $\lambda = \frac{2GMr'^3}{c^2 r'^4 + a^2 z^2}$  y los vectores  $l^\nu$  y  $l^\mu$  nulos respecto a la métrica de Minkowski, es decir  $\eta_{\mu\nu} l^\mu l^\nu = 0$ . Siguiendo a [6] y [24]; se afirma que Roy Kerr, considerando métricas con esta estructura encontró la solución que lleva su nombre.

### 3.3. Propiedades Básicas de la Solución de Kerr

Para dar un acercamiento al sistema físico considerado, se describirán algunos aspectos encontrados en la solución de Kerr a la luz de las métricas descritas en la sección anterior; por lo tanto, en este apartado se dispone a listar algunas de las propiedades más notables de dicha solución.

1. Una simple lectura a la solución de Kerr en las coordenadas de Boyer-Lindquist, una de las estructuras más utilizadas para la investigación de las propiedades elementales de la solución[6], se puede apreciar que ésta depende únicamente de dos parámetros

físicos;  $M$  relacionado con la masa y  $a$  entendido como un parámetro relacionado con la cantidad de movimiento angular (sobre esta última afirmación se volverá más adelante). Fácilmente se puede apreciar que si  $a \rightarrow 0$  (se anula la rotación), en (3-24), la métrica de Kerr se reduce a la métrica de Schwarzschild,

$$ds^2 = -c^2 \left[ \frac{\Delta}{\Sigma} \right] dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr'^2 + \Sigma d\theta^2 + r'^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

recordando que tanto  $\Delta$  como  $\Sigma$  dependen del parámetro  $a$  y a la vez de  $r'$  que es una cantidad relacionada, también con  $a$ , por medio de la complejificación de la coordenada radial  $r$  empleada en la solución de Schwarzschild, se tiene,

$$\begin{aligned} \Sigma &= r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta \rightarrow \Sigma = r'^2 \\ \Delta &= r'^2 + \frac{a^2}{c^2} - \frac{2GM r'}{c^2} \rightarrow \Delta = r'^2 - \frac{2GM r'}{c^2} \\ r' &= r + i \frac{a}{c} \cos \theta \rightarrow r' = r \end{aligned}$$

Encontrando que el elemento de línea, toma la forma esperada (ecuación 2-37):

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 \left[ \frac{r^2 - 2GM r/c^2}{r^2} \right] dt^2 + \frac{c^2 r^2}{c^2 r^2 - 2GM r/c^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \\ ds^2 &= -c^2 \left[ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right] dt^2 + \left[ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right]^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \end{aligned}$$

- De acuerdo a la descripción realizada en la sección 3.1, observe que en el elemento de línea (3-24) ninguno de los coeficientes depende explícitamente de  $t$  y  $\varphi$  por lo tanto la solución es estacionaria y axialmente simétrica. Esto implica que se pueden asociar dos campos de Killing ( $\partial/\partial t, \partial/\partial \varphi$ ), cantidades conservadas<sup>7</sup>, a la variedad; dado que al efectuar de manera simultanea, no por separado, las transformaciones

$$t \rightarrow -t \quad \text{y} \quad \varphi \rightarrow -\varphi$$

y aplicarlas a la métrica

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 \left[ \frac{\Delta - (a^2/c^2) \sin^2 \theta}{\Sigma} \right] (-dt)^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr'^2 + \Sigma d\theta^2 \\ &+ \sin^2 \theta \left[ \frac{2GM a^2 r' \sin^2 \theta}{c^4 \Sigma} + r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right] (-d\varphi)^2 - \frac{2a \sin^2 \theta}{c \Sigma} \left[ r'^2 + \frac{a^2}{c^2} - \Delta \right] (-cdt)(-d\varphi) \end{aligned}$$

la dejan invariante. Y como se sabe muy bien, aquellas transformaciones que dejan invariante una métrica son denominadas isometrías que son producto de un campo de Killing asociado (Ver anexo D).

<sup>7</sup>Dichas cantidades para una partícula con masa son la energía por unidad de masa y el momentum angular por unidad de masa, ambos medidos por un observador en el infinito. Para partículas sin masa, se tiene de nuevo a la energía y el momentum angular también medidos por un observador en el infinito.



3. El elemento de línea de Kerr es también invariante bajo una inversión simultánea de  $t$  y  $a$ , es decir

$$t \rightarrow -t \quad y \quad a \rightarrow -a$$

$$\begin{aligned} ds^2 = & -c^2 \left[ \frac{\Delta|_{-a} - ((-a)^2/c^2) \sin^2 \theta}{\Sigma|_{-a}} \right] (-dt)^2 \\ & + \frac{\Sigma}{\Delta|_{-a}} \left[ dr'^2 + \Sigma|_a d\theta^2 + \sin^2 \theta \left[ \frac{2GM(-a)^2 r' \sin^2 \theta}{c^4 \Sigma|_{-a}} + r'^2 + \frac{(-a)^2}{c^2} \right] d\varphi^2 \right. \\ & \left. - \frac{2(-a) \sin^2 \theta}{c \Sigma|_{-a}} \left[ r'^2 + \frac{(-a)^2}{c^2} - \Delta|_{-a} \right] (-cdt)(d\varphi) \right] \end{aligned}$$

e intuitivamente, al reconocer que invertir el tiempo y la dirección de rotación, es equivalente a tener el tiempo “hacia adelante” junto con una dirección “positiva” de rotación, sugiere que el potencial de Kerr este asociado a una fuente en rotación.

4. La intención de la siguiente propiedad, es argumentar desde un punto de vista clásico y sugestivo que el potencial de Kerr surge de una fuente en rotación, esto en relación a la presencia del término cruzado  $dt d\varphi$  en (3-24).

Si se consideran dos sistemas de referencia, primado ( $O'$ ) y no primado ( $O$ ), que coinciden en sus orígenes y comparten la misma dirección para el eje  $z$ , uno rotando ( $O'$ ) con velocidad angular constante  $a\hat{k}$  respecto a otro ( $O$ ) inercial, en donde las coordenadas cilíndricas circulares de un punto  $P$  para cada uno son  $(\rho', \varphi', z')$  y  $(\rho, \varphi, z)$  respectivamente, y a su vez las relaciones de transformación entre los sistemas, están dadas por:

$$r' = r \quad \varphi' = \varphi - at \quad y \quad z = z'$$

se puede identificar fácilmente que; dado el espacio plano en coordenadas cilíndricas circulares  $ds^2 = dt^2 - (dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2)$  y utilizando la transformación de coordenadas, descritas arriba, para el marco rotante, se obtiene el elemento de línea,

$$ds^2 = [1 - a^2 r^2] dt^2 - 2ar^2 d\varphi' dt - (dr^2 + r^2 d\varphi'^2 + dz^2)$$

que posee el término cruzado  $d\varphi' dt$ , lo cual representa un argumento que evoca rotación.

5. La coordenada  $r'$  no es la coordenada esférica usual excepto asintóticamente, esto se verifica fácilmente de la siguiente manera: como se conoce bien, la coordenada esférica  $r$ , en términos de coordenadas cartesianas, está dada por  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , y al sustituir las formas de Kerr-Schild para  $x$ ,  $y$  y  $z$  encontradas en (3-29) a (3-31), se tiene:

$$\begin{aligned} r^2 &= \left[ \sin \theta \left( r' \cos \varphi - \frac{a}{c} \sin \varphi \right) \right]^2 + \left[ \sin \theta \left( r' \sin \varphi + \frac{a}{c} \cos \varphi \right) \right]^2 + [r' \cos \theta]^2 \\ &= r'^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - 2r' \frac{a}{c} \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi + \frac{a^2}{c^2} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r'^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \\ &+ 2r' \frac{a}{c} \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi + \frac{a^2}{c^2} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r'^2 \cos^2 \theta \end{aligned}$$

$$= r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \sin^2 \theta$$

y cuando  $r \gg \frac{a}{c}$ , por medio de una expansión binomial, se establece;

$$r = r' \left[ 1 + \frac{a^2}{r'^2 c^2} \sin^2 \theta \right]^{1/2} = r' \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{c^2 r'^2} \sin^2 \theta + \dots \right]$$

$$r \simeq r'$$

Este resultado coincide con la primera propiedad descrita en la presente sección.

6. Por último para fijar una idea más precisa, que el potencial asociado proviene de una fuente en rotación se presentan los siguientes argumentos:

- Utilizando la métrica de Kerr-Schild (3-34) para expandirla en potencias de  $1/r$ , se observa que (Ver anexo F-7):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2GM}{c^2 r'} (cdt + dr')^2 - 4 \frac{GMa}{c^2 r'^3} (xdy - ydx)(cdt + dr') + O(r^{-3}) \quad (3-35)$$

De donde, por comparación con los términos que se encuentran en el cálculo del campo gravitacional asociado a bajas rotaciones, se tiene que la contribución al momentum angular está dada por[24] pág. 56.

$$\frac{4GMa}{c^2 r^3} (xdy - ydx) cdt$$

- Analizando el comportamiento asintótico de la métrica de Kerr escrita en las coordenadas de Boyer-Lindquist (3-24), es decir, considerando que  $r' \rightarrow \infty$ , para lo cual como se describió anteriormente  $r' \simeq r$  y considerando una aproximación de primer orden para  $r$ , se encuentra el elemento de línea (Ver anexo H.8):

$$ds^2 = -c^2 \left[ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right] dt^2 + \left[ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right] dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 - \frac{4GMa \sin^2 \theta}{c^3 r} cdt d\varphi \quad (3-36)$$

En donde el tensor métrico asociado, tiene las componentes:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} - \left[ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right] & 0 & 0 & - \frac{2GMa \sin^2 \theta}{c^3 r} \\ 0 & \left[ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ - \frac{2GMa \sin^2 \theta}{c^3 r} & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (3-37)$$

que al ser comparados con la métrica obtenida para un campo gravitomagnético (Ver [16] pág. 176)

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2GM}{c^2 r} & 0 & 0 & \frac{2GJ \sin^2 \theta}{c^3 r} \\ 0 & -\left[1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \left[1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right] & 0 \\ \frac{2GJ \sin^2 \theta}{c^3 r} & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \left[1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right] \end{bmatrix} \quad (3-38)$$

aporta un argumento más para asignar a la cantidad  $Ma$  el nombre de momentum angular<sup>8</sup>.

### 3.4. Singularidades y Horizontes

Finalmente en esta sección se presentan algunos argumentos importantes respecto a la singularidades y horizontes encontrados en la geometría de Kerr. Para ello se puede afirmar, por simple inspección sobre (3-24), que la métrica de Kerr posee dos tipos de singularidades; una asignada a la elección de las coordenadas ( $\Delta = 0$ ) y la otra alcanzada en ( $\Sigma = 0$ ), denominada singularidad esencial. De la misma manera como se realiza para el espacio-tiempo de Schwarzschild, una herramienta para clasificarlas en esencial y coordenada, radica en el análisis efectuado sobre el escalar  $R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}$  para el elemento de línea de Kerr, encontrando que la única singularidad esencial se encuentra en  $\Sigma = 0$  (Ver [24] pág. 8)<sup>9</sup>. Por lo anterior, para que esto se cumpla necesariamente se deben tener los valores para  $r' = 0$  y  $\cos \theta = 0$ . Así, en la búsqueda de dicha singularidad esencial, en coordenadas cartesianas, ésta ocurre cuando (Ver anexo H.9),

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{c^2}$$

la cual es un anillo de radio  $a/c$  ubicado en el plano ecuatorial  $z = 0$  ( $\theta = \pi/2$ ). Por otro lado, en los puntos donde  $\Delta = 0$ , se tienen las siguientes singularidades coordenadas en las

<sup>8</sup>Otros argumentos adicionales para identificar que el potencial de Kerr, corresponde a una fuente en rotación son proporcionados por [4] y [5].

<sup>9</sup>Para ver esto, se podría ejecutar un procedimiento análogo al que se realizó en el anexo E.4. Obteniendo:

$$R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48G^2 M^2 \left[ r^2 - \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta \right] \left[ \left( r^2 + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta \right)^2 - 16r^2 \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta \right]}{c^4 \left[ r^2 + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta \right]^6}$$

Observe que si se anula el parámetro de rotación el escalar es equivalente a la ecuación (E-38).

hipersuperficies<sup>10</sup>:

$$\begin{aligned} \Delta &= 0 \\ r'^2 - \frac{2GM}{c^2}r' + \frac{a^2}{c^2} &= 0 \\ r'_\pm &= \frac{GM}{c^2} \pm \sqrt{\frac{G^2M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2}} \end{aligned} \quad (3-39)$$

Observe que está última ecuación depende de los parámetros  $M$  y  $a$ ; si se asumen a estos como constantes,  $r'_+$  y  $r'_-$  son los horizontes de eventos en la geometría de Kerr. Para ver esto, recuérdese que la condición para enmarcar a una hipersuperficie como horizonte de eventos, se puede escribir como[8]:

$$g^{rr} = 0 \quad \text{o} \quad g_{rr} = \infty$$

Por consiguiente, de (3-24), se obtiene  $g'_{rr} = \Sigma/\Delta \rightarrow \infty$  (en  $r' = r'_\pm$ ). El cumplimiento de esta condición implica que las dos hipersuperficies en cuestión, para la métrica de Kerr, en efecto pueden ser consideradas como horizontes de eventos. Estas hipersuperficies son axialmente simétricas, pero su geometría intrínseca no corresponde a una simetría esférica, dado que; si se fija  $t$  y además se tiene que  $r' = r'_\pm$  la métrica (3-24) se reescribe de la forma,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \Sigma_\pm d\theta^2 + \sin^2 \theta \left[ \frac{2GMr'_\pm a^2 \sin^2 \theta}{c^4 \Sigma_\pm} + r'^2_\pm + \frac{a^2}{c^2} \right] d\varphi^2 \\ \text{reconociendo que } r'^2_\pm + \frac{a^2}{c^2} &= \frac{2GM}{c^2}r'_\pm \text{ y } \frac{a^2}{c^2} \sin^2 \theta = r'^2_\pm + \frac{a^2}{c^2} - \Sigma_\pm \\ &= \Sigma_\pm d\theta^2 + \sin^2 \theta \left[ \frac{2MGr'_\pm}{c^2 \Sigma_\pm} \left( r'^2_\pm + \frac{a^2}{c^2} - \Sigma_\pm \right) + \frac{2GM}{c^2}r'_\pm \right] d\varphi^2 \\ &= \Sigma_\pm d\theta^2 + \sin^2 \theta \left[ \frac{2MGr'_\pm}{c^2 \Sigma_\pm} \left( \frac{2MG}{c^2}r'_\pm - \Sigma_\pm \right) + \frac{2GM}{c^2}r'_\pm \right] d\varphi^2 \\ ds^2 &= \Sigma_\pm d\theta^2 + \sin^2 \theta \left[ \frac{4G^2M^2r'^2_\pm}{c^4 \Sigma_\pm} \right] d\varphi^2 \end{aligned}$$

que evidentemente no corresponde a la geometría de una esfera, como si se evidenciaría para la geometría de Schwarzschild ( $a \rightarrow 0$ ). La existencia de estos dos horizontes, permite afirmar que la solución de Kerr tiene un buen comportamiento en las regiones:  $0 < r' < r'_-$ ,  $r'_+ < r' < r'_-$  y  $r'_+ < r' < \infty$ . Finalmente respecto a los horizontes, se podría afirmar lo siguiente:

1. Los horizontes únicamente están definidos para valores reales de  $r'_\pm$ , es decir se tiene que garantizar que  $\frac{a^2}{c^2} < \frac{G^2M^2}{c^4}$ . Así, la magnitud del momentum angular por unidad de masa, para el objeto en rotación, está limitado por el cuadrado de su masa.

<sup>10</sup>Siguiendo a [15] se define una hipersuperficie como una subvariedad tridimensional en un espacio-tiempo 4-dimensional.

2. Si  $\frac{a^2}{c^2} = \frac{G^2 M^2}{c^4}$ , se considera un agujero negro de Kerr extremo, en este caso los horizontes coinciden.
3. En el caso en que  $\frac{a^2}{c^2} > \frac{G^2 M^2}{c^4}$ , el elemento de línea sería regular en todo punto excepto en la singularidad (anillo  $\Sigma = 0$ ), esto implica que no se tendrían horizontes de eventos de manera que dicha singularidad quedaría desnuda, y para cualquier observador en el infinito sería visible, violando así la hipótesis de censura cósmica de Penrose.

En contraste, analizando otra propiedad importante para un espacio-tiempo que describe el exterior de una fuente en rotación; radica en la existencia de hipersuperficies límite estacionarias, para las cuales  $g_{tt} = 0$ [8]. Así, para en un espacio-tiempo estacionario con simetría axial; se encuentran dichas hipersuperficies, haciendo uso (3-24), de la forma:

$$g_{tt} = - \left[ \frac{\Delta - (a^2/c^2) \sin^2 \theta}{\Sigma} \right] = 0$$

$$r'^2 - \frac{2GM}{c^2} r' + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta = 0$$

resolviendo la ecuación cuadrática,

$$r'_{s\pm} = \frac{GM}{c^2} \pm \sqrt{\frac{G^2 M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta} \quad (3-40)$$

Las dos hipersuperficies son axialmente simétricas y de nuevo, estas, no tienen asociada una simetría esférica, para probarlo se efectúa el mismo cálculo que se empleo, arriba, para los horizontes de eventos, manteniendo a  $t$  constante y considerando  $r' = r'_{s\pm}$  al ser aplicados sobre el elemento de Kerr en las coordenadas de Boyer-Lindquist (3-24).

$$ds^2 = \Sigma_{r'_{s\pm}} d\theta^2 + \sin^2 \theta \left[ \frac{2GMa^2 r'_{s\pm} \sin^2 \theta}{c^4 \Sigma_{r'_{s\pm}}} + r'^2_{s\pm} + \frac{a^2}{c^2} \right]$$

$$ds^2 = \Sigma_{r'_{s\pm}} d\theta^2 + \sin^2 \theta \left[ \frac{4a^2 GM r'_{s\pm} \sin^2 \theta + 4G^2 M^2 r'^2_{s\pm}}{c^4 \Sigma_{r'_{s\pm}}} \right]$$

Estas hipersuperficies vistas desde el conjunto de coordenadas cartesianas dan cuenta de un par de elipsoides axialmente simétricos con las siguientes características, (Ver Figura 3-1):

1. Para  $r'_{s-} = \frac{GM}{c^2} - \sqrt{\frac{G^2 M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta}$ 
  - con  $\theta = \pi/2$ , es decir el plano ecuatorial, se tiene matemáticamente que  $r'_{s-} = 0$ , lo cual evidencia que la hipersuperficie coincide con el anillo de singularidad.
  - $r'_{s-}$  está completamente contenida en el horizonte de eventos interior  $r'_-$ .
  - Con  $\theta = 0$ , se encuentra que  $r'_{s-} = \frac{GM}{c^2} - \sqrt{\frac{G^2 M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2}} = r'_-$ , lo cual indica que estas dos hipersuperficies comparten el mismo punto en sus polos.

2. Para  $r'_{s+} = \frac{GM}{c^2} + \sqrt{\frac{G^2M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta}$
- Con  $\theta = \pi/2$ , es decir tomando el plano ecuatorial, se tiene matemáticamente que  $r'_{s+} = \frac{2GM}{c^2}$ , lo cual evidencia que la hipersuperficie tiene una distancia al anillo de singularidad dada por esta cantidad.
  - $r'_{s+}$  encierra completamente al horizonte de eventos exterior  $r'_+$ .
  - Con  $\theta = 0$ , se encuentra que  $r'_{s+} = \frac{GM}{c^2} + \sqrt{\frac{G^2M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2}} = r'_+$ , lo cual indica que estas dos hipersuperficies comparten el mismo punto en sus polos.
3. La región que se obtiene entre  $r'_+$ , horizonte de sucesos, y  $r'_{s+}$ , superficie límite estacionaria, es llamada ergosfera (Ver anexo H.10).

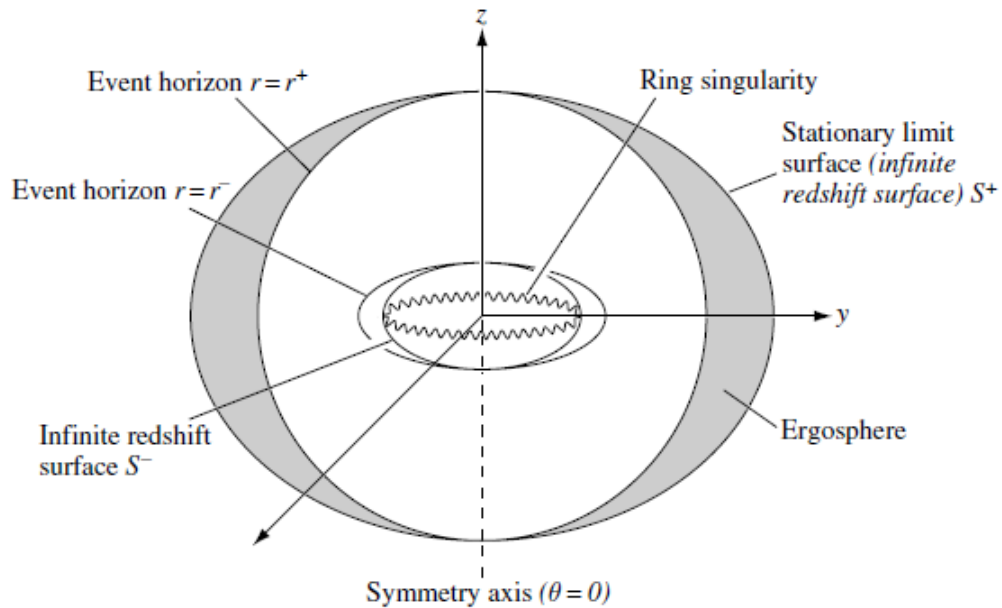


Figura 3-1.: Horizontes de eventos y superficies límite estacionarias.[8].

## 4. Gravedad Superficial

En este capítulo se presenta el cálculo de la gravedad superficial  $\kappa$  asociada al espacio-tiempo de Kerr, este concepto es de vital importancia en la termodinámica de agujeros negros y se encuentra explícito en la ley cero de la termodinámica[21], [16] y [15].

Es conveniente afirmar que ésta propiedad, se relaciona con la aceleración de una partícula de prueba (estacionaria, a una distancia fija y ubicada sobre una hipersuperficie particular<sup>1</sup>[8]) que rota con la fuente en rotación. Para apreciar esto, por ejemplo, la gravedad superficial calculada en la geometría de Schwarzschild, está dada por[15]:

$$\kappa = \frac{c^4}{4MG} \quad (4-1)$$

que al efectuar un análisis de unidades en el sistema internacional, puede verificarse fácilmente que dicha cantidad tiene unidades de aceleración y puede ser entendida como una generalización de la gravedad superficial sobre la Tierra, dada por el valor,  $GM/R^2$ . De tal forma que, en las siguientes líneas se dispone a encontrar la expresión análoga de (4-1) para la espacio-tiempo de Kerr, lográndose por medio de los campos de Killing asociados. Para dar inicio al cálculo de la mencionada cantidad, recuérdese los siguientes elementos, proporcionados en [15]:

1. En un espacio-tiempo de cuatro dimensiones, se dice que una hipersuperficie es una subvariedad tridimensional que puede ser; ya sea como de espacio, como de tiempo o como de luz, cuya elección esta relacionada con restricciones impuestas sobre las coordenadas.
2. Un vector  $\partial_\mu \Phi = \Phi_{,\mu}$ , se llama vector normal, dado que es normal a la hipersuperficie, y el valor de  $\Phi$  cambia solamente en la dirección ortogonal a la hipersuperficie.
3. Si en una hipersuperficie, el vector normal unitario  $(\eta_\mu)$  satisface  $\eta^2 = 0$ , esta hipersuperficie recibe el nombre de hipersuperficie nula, este vector también es tangente a la hipersuperficie nula[15].
4. Una hipersuperficie nula se llama horizonte de Killing, si existe un campo de Killing que sea normal a ella.

---

<sup>1</sup>Un propiedad importante del espacio-tiempo de Kerr es la existencia de hipersuperficies límite estacionarias (sección 3.4), éstas se definen por medio de la consideración  $g_{tt}(r, \theta) = 0$ , si alguna partícula se llegará a encontrar dentro de dicha superficie; está no podría permanecer fija, sino que girará en el mismo sentido de rotación de la fuente.

5. El espacio-tiempo de Kerr admite dos campos de Killing, dados por:  $\partial_t = (1, 0, 0, 0)$  y  $\partial_\varphi = (0, 0, 0, 1)$ ; además una combinación lineal de ellos, también es un campo de Killing.

Con estas nociones a la mano, definimos ahora el campo vectorial de Killing apoyados en el numeral 5 del listado anterior:

$$\xi^\mu = \frac{\partial}{\partial t} + \Omega_H \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (4-2)$$

En donde,  $\Omega_H$  se identifica como la velocidad angular de rotación del horizonte de eventos  $r'_+$  (Ver anexo H.10) y el campo  $\xi^\mu$  como nulo en el horizonte mencionado (Ver anexo H.11), de modo que la hipersuperficie  $r'_+$  se considera como hipersuperficie nula, de acuerdo al numeral 3; y a su vez, recibe el nombre de horizonte de Killing, en concordancia con el numeral 4.

Como se mostró, el horizonte de eventos  $r'_+$  de un espacio-tiempo estacionario es también un horizonte de Killing (Ver anexo H.11), así el campo  $\xi^\mu$  es tangente al horizonte. Debido a que  $\xi^\mu$  es ortogonal a si mismo en el horizonte, también es normal al horizonte; por lo tanto, dado que  $\Phi = \xi^\mu \xi_\mu = 0$  en el horizonte, en donde  $\Phi = r'_+$  corresponde a la función que anula el campo de Killing en la hipersuperficie  $r'_+$ , y ya que el vector normal es proporcional a  $\partial_{r'}\Phi$  se puede establecer que existe una función  $\kappa$ , tal que[15]

$$c^2(-\xi^\mu \xi_\mu)_{;\alpha} = 2\kappa \xi_\alpha \quad (4-3)$$

solo es válida sobre el horizonte<sup>2</sup>. De manera que, empleando la ecuación anterior para calcular la gravedad superficial; reconociendo que hay varias expresiones distintas pero equivalentes para calcular dicha cantidad, se reescribe la norma de  $\xi^\mu \xi_\mu$ , de la forma (Ver anexo H.12):

$$\xi^\mu \xi_\mu = -\frac{c^2 \Sigma \Delta}{B} + \frac{B}{c^4 \Sigma} \sin^2 \theta [\Omega_H - c\omega]^2 \quad (4-4)$$

diferenciando el campo (para obtener el miembro izquierdo de (4-3)),

$$(\xi^\mu \xi_\mu)_{;\alpha} = \left[ \frac{c^2 \Sigma \Delta}{B} - \frac{B}{c^4 \Sigma} \sin^2 \theta [\Omega_H - c\omega]^2 \right]_{;\alpha}$$

dado que en el horizonte  $\Omega_H = c\omega$ , y utilizando las propiedades de la derivada covariante; la expresión se reduce,

$$\begin{aligned} &= \left[ \frac{c^2 \Sigma \Delta}{B} \right]_{,r'} = c^2 \left[ \frac{\Sigma}{B} \right]_{,r'} \Delta + c^2 \frac{\Sigma}{B} \Delta_{,r'} \quad \text{recordando que } \Delta = 0 \text{ en el horizonte,} \\ &= \frac{c^2 \Sigma}{B} \Delta_{,r'} \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Un cálculo simple y detallado, en donde se sustenta que  $\kappa$  corresponde a la gravedad superficial, se encuentra en [15] pág. 186.



encontrando el diferencial  $\Delta_{,r'} = \frac{\partial}{\partial r'} \left( r'^2 + \frac{a^2}{c^2} - \frac{2GM}{c^2} r' \right) = 2 \left( r' - \frac{GM}{c^2} \right)$ , se establece,

$$-c^2(\xi^\mu \xi_\mu)_{,r'} = 2c^4 \frac{\Sigma}{B} \left( r' - \frac{GM}{c^2} \right) \quad (4-5)$$

y encontrando el campo  $\xi_\alpha$  (Ver anexo H.13), con ayuda del tensor métrico (3-22),

$$\xi^\alpha = \left( g_{00} + \frac{\Omega_H}{c} g_{03}, g_{01} + \frac{\Omega_H}{c} g_{13}, 0, g_{03} + \frac{\Omega_H}{c} g_{33} \right) \quad (4-6)$$

Obtiene la gravedad superficial, después de algunas líneas de álgebra, sobre (4-3):

$$\begin{aligned} 2c^4 \frac{\Sigma}{B} \left( r' - \frac{GM}{c^2} \right) &= 2\kappa \left[ 1 - a \frac{\Omega_H}{c^2} \sin^2 \theta \right] \\ \kappa &= \frac{c^4 \Sigma (r' - GM/c^2)}{B(1 - a\Omega_H \sin^2 \theta/c^2)} \Big|_{r'=r'_+} \\ &= \frac{c^4 \Sigma_{r'_+} (r'_+ - GM/c^2)}{B_{r'_+} (1 - a\Omega_H \sin^2 \theta/c^2)} \\ &= \frac{c^4 \Sigma_{r'_+} (r'_+ - GM/c^2)}{\left[ c^2 \left( r'_+{}^2 + \frac{a^2}{c^2} \right)^2 - 2\Delta_{r'_+} a^2 \sin^2 \theta \right] \left[ 1 - a \frac{a}{c^2 r'_+{}^2 + a^2} \sin^2 \theta \right]} \\ &= \frac{c^4 \Sigma_{r'_+} (r'_+ - GM/c^2) (c^2 r'_+{}^2 + a^2)}{c^2 \left( r'_+{}^2 + \frac{a^2}{c^2} \right)^2 [c^2 r'_+{}^2 + a^2 - a^2 \sin^2 \theta]} \\ &= \frac{c^4 \Sigma_{r'_+} (r'_+ - GM/c^2) (c^2 r'_+{}^2 + a^2)}{c^4 \left( r'_+{}^2 + \frac{a^2}{c^2} \right)^2 \left[ r'_+{}^2 + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta \right]} \\ &= \frac{c^4 (r'_+ - GM/c^2)}{c^2 r'_+{}^2 + a^2} = c^4 \frac{\frac{GM}{c^2} + \sqrt{\frac{G^2 M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2}} - \frac{GM}{c^2}}{c^2 r'_+{}^2 + a^2} \\ \kappa &= \frac{c^2 \sqrt{\frac{G^2 M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2}}}{r'_+{}^2 + \frac{a^2}{c^2}} \end{aligned}$$

Observe finalmente algunos elementos sobresalientes de está relación:

1. La gravedad superficial  $\kappa$  se anula para la condición  $\frac{a^2}{c^2} = \frac{G^2 M^2}{c^4}$ , (Kerr extremo sección 3.4) es decir para cuando los dos horizontes coinciden.

2. La gravedad superficial es constante sobre todo el horizonte  $r'_+$ , dado que la expresión no depende de la coordenada angular  $\theta$ , únicamente es función de los parámetros de masa y momentum angular por unidad de masa.
3. Considerando las constantes de acción gravitacional  $G$  y la constante para la velocidad de la luz en el vacío  $c$ , se verifica que la gravedad superficial tiene unidades de aceleración.
4. En el límite de bajas rotaciones,  $a \rightarrow 0$ , la gravedad superficial de Kerr se reduce a la de Schwarzschild (4-1).

## 5. Conclusiones

En este trabajo se reprodujo en forma detallada un proceso para obtener la solución de Kerr desde un potencial conocido y abordado en cualquier curso introductorio de relatividad general, la métrica de Schwarzschild en las coordenadas de Eddington-Finkelstein. En este sentido, se considera que seguir esta metodología responde a varias necesidades en la formación y proyección de bases sólidas para hacer futuras incursiones, en el campo de la investigación; en primer lugar, es importante resaltar que el camino abordado implica una motivación fuerte asociada a encontrar una solución más general, no abordada directamente desde las ecuaciones de campo, sino rescatando algún tipo de conexión entre la ya existente (Schwarzschild) y la deseada (Kerr), dicha conexión está representada por el efecto de rotación que caracteriza el nuevo elemento de línea e introducida en las relaciones de transformación descritas en la sección 3.2. En segundo lugar las herramientas matemáticas empleadas para encontrar los distintos elementos de línea (3-20), (3-22), (3-23) y (3-24) no se presentan de forma minuciosa en las fuentes consultadas, permitiendo que; de alguna manera, al realizar todos estos cálculos se identifique de forma clara y natural la correcta aplicación de las transformaciones empleadas y se logre evidenciar por medio de comparación los posibles errores de tipo algorítmico que se podrían llegar a cometer sino se tiene claridad desde un comienzo, de la signatura utilizada y el buen planteamiento de las relaciones de transformación que permiten conectar cada una de las métricas.

En la gran mayoría de fuentes consultadas abordan las propiedades de la métrica de Kerr, horizontes de eventos y singularidades de forma puntual y general; en algunas oportunidades, se considera que, pasan por alto detalles ya sea de tipo algorítmico o conceptual, induciendo al lector principiante en temas avanzados de relatividad general a considerar como naturales los mencionados aspectos. Sin embargo en este trabajo se considera como un logro, en primer lugar, presentar de forma detallada cada propiedad mencionada, aplicando cada consideración tomada sobre la métrica y mostrando de forma directa las consecuencias sobre la misma. Especialmente la propiedad 6 de la sección 3.3, constituye un aporte del trabajo; ya que, si bien es conocida la solución de Kerr y hay argumentos claros para asociar a este potencial una fuente en rotación, los tratamientos matemáticos para entrar a comparar, de la forma como se abordó en el trabajo, no se encuentran en su totalidad en la literatura.

El método utilizado para calcular la gravedad superficial, es análogo al que se emplea en [15], sin embargo, se ha efectuado el procedimiento a partir del elemento de línea de Kerr en

las coordenadas de Eddington-Finkelstein, presentando una secuencia detallada del mismo y obteniendo una expresión equivalente a la que se encuentra, usualmente, desde la solución de Kerr en las coordenadas de Boyer-Lindquist.

Es importante reconocer, que a lo largo del trabajo se presentaron las ideas en un lenguaje de coordenadas y se entiende muy bien que; cuando se trabaja en relatividad general es significativo ofrecer al lector una visión desde el lenguaje tensorial, que responda al principio de covariancia y se admita que las leyes de la física son independientes de algún conjunto de coordenadas particular. En relación a lo anterior, es importante sostener que las características del espacio-tiempo, estudiado, descritas en capítulos anteriores son independientes de la elección de un sistema coordinado. Sin embargo, el hecho de trabajar con un lenguaje coordinado, permitió presentar un amplio escenario y algunas propiedades interesantes del espacio-tiempo de Kerr.

# A. Anexo: Breve Introducción a la Topología Algebraica

En este anexo se presentan algunas herramientas de topología algebraica[10], necesarias para enriquecer los postulados de la relatividad general.

## A.1. Conjunto Abierto

Se dice que un conjunto abierto  $\mathcal{A}$  de un espacio euclidiano  $\mathcal{B}$  es abierto si, para todo punto  $P$  que pertenece a  $\mathcal{A}$ , existe una vecindad  $\mathcal{A}(P)$  de  $P$  que este completamente contenido en  $\mathcal{A}$ [11], con las siguientes propiedades:

- El vacío, denotado como  $\phi$ , y  $\mathcal{B}$  son abiertos.
- Si  $\mathcal{A}_\alpha$  es una familia de conjuntos abiertos, entonces la unión de estos es un abierto.
- Si  $\mathcal{A}_\alpha$  es una familia de conjuntos abiertos, entonces la intersección de estos es un abierto.

## A.2. Espacio Topológico

Sea  $\mathcal{Y}$  un conjunto y  $\mathcal{A}$  una colección de subconjuntos de  $\mathcal{Y}$ , llamados abiertos, tal que:

- El vacío pertenece a  $\mathcal{A}$ , así como también  $\mathcal{Y}$  pertenece a  $\mathcal{A}$ .
- La intersección de dos elementos de  $\mathcal{A}$  cae en  $\mathcal{A}$ .
- La unión de cualquier número de elementos de  $\mathcal{A}$  cae en  $\mathcal{A}$ .

Tal colección de subconjuntos de  $\mathcal{Y}$  se llama una topología en  $\mathcal{Y}$ . La pareja  $(\mathcal{Y}, \mathcal{A})$  se denomina un espacio topológico, denotado usualmente como  $\mathcal{M}$ .

## A.3. Aplicación o Función $\psi$

Una función,  $\psi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ , entre un par de conjuntos es una correspondencia que asocia a cada elemento  $x \in \mathcal{X}$  un único elemento  $y \in \mathcal{Y}$ .

## A.4. Aplicación Continua $f$

Dados dos espacios topológicos  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$ . Una aplicación  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  es continua si para cualquier subconjunto abierto  $n$  de  $\mathcal{N}$ , la imagen inversa  $f^{-1}(n)$  es un subconjunto abierto de  $\mathcal{M}$ .

## A.5. Homeomorfismo

Dados dos espacios topológicos  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$ . Una aplicación  $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ , se dice que es un homeomorfismo si la aplicación  $\psi$  es continua, uno a uno, sobre y con inversa  $\psi^{-1}$  continua (Ver [22] pág. 424),  $\psi^{-1} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ .

## B. Anexo: Variedades

En el presente anexo se darán a conocer algunos objetos propios de la geometría diferencial. Aquí siguiendo a [7] y [22], se define:

### B.1. Vector Tangente

Un vector tangente en un punto  $P \in \mathcal{M}$ , denotado como  $v_P$ , es una aplicación que envía a cada función  $f$ , que pertenece al conjunto de todas las funciones de clase  $C^\infty$  definidas sobre la variedad,  $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$  (Ver [20] pág. 26), en el escalar  $v_P(f)$ ;

$$\begin{aligned} v_P : \mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\rightarrow v_P(f) \end{aligned}$$

tal que:

- I.  $v_P$ , es lineal.

$$v_P(af + bg) = av_P(f) + bv_P(g)$$

con  $f$  y  $g$  funciones reales definidas sobre la variedad y  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- II.  $v_P$  obedece a la regla de Leibniz.

$$v_P(fg) = fv_P(g) + gv_P(f)$$

### B.2. Espacio Tangente

Se define el espacio tangente, denotado por  $T_p(\mathcal{M})$ , como la colección de todos los vectores tangentes a un punto  $p$  sobre la variedad.

### B.3. Producto Cartesiano

Dado el espacio  $T_p(\mathcal{M})$  de vectores en un punto  $P$  y  $T_p^*(\mathcal{M})$  el espacio de 1-formas (Ver [7], pág 16 y 17) en el mismo punto; se puede formar el producto cartesiano, de la forma

$$\Pi_r^s = T_p^*(\mathcal{M}) \times T_p^*(\mathcal{M}) \times \cdots \times T_p^*(\mathcal{M}) \times T_p(\mathcal{M}) \times T_p(\mathcal{M}) \times T_p(\mathcal{M}) \times \cdots \times T_p(\mathcal{M})$$

en donde se identifican  $r$ -factores del espacio dual y  $s$ -factores del espacio tangente; es decir, se tiene la colección ordenada de 1-formas  $(\eta^1, \cdots, \eta^r)$  y vectores  $(Y_1, \cdots, Y_s)$ .

## B.4. Tensores

Un tensor  $T$  de tipo  $(r, s)$ ,  $r$ -veces contravariante y  $s$ -covariante, en un punto  $P$  que se encuentra en la variedad, es una función sobre  $\Pi_r^s$  que es lineal en cada componente, es decir:

$$\begin{aligned} T : \Pi_r^s &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\eta^1, \dots, \eta^r, Y_1, \dots, Y_s) &\rightarrow T(\eta^1, \dots, \eta^r, Y_1, \dots, Y_s) \end{aligned}$$

El espacio de todos los tensores se llama producto tensorial,

$$T_s^r := T_p(\mathcal{M}) \otimes \dots \otimes T_p(\mathcal{M}) \otimes T_p^*(\mathcal{M}) \otimes \dots \otimes T_p^*(\mathcal{M})$$

tal que

$$T_s^r = \{f : \Pi_r^s \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ Es una función lineal en todas sus componentes}\}$$

Para ver detalles y herramientas adicionales en relación a operaciones entre tensores se recomienda al lector ver [22] pág. 20.



# C. Anexo: Cálculo en Variedades

Este anexo se abordan algunas estructuras de suma importancia en cálculo diferencial sobre variedades.

## C.1. Derivada Covariante

El operador derivada covariante, denotado por  $\nabla$ , es una aplicación independiente de la elección de las coordenadas; entre tensores, que va de  $\mathcal{T}(k, l)$  a  $\mathcal{T}(k, l + 1)$  y satisface las siguientes propiedades[2]:

1. Linealidad:  $\nabla(T + S) = \nabla T + \nabla S$
2. Regla de Leibniz<sup>1</sup>:  $\nabla(T \otimes S) = T \otimes \nabla S + (\nabla T) \otimes S$

si se considera la derivada covariante de un vector  $V^\nu$ , escrita como  $\nabla_\mu V^\nu$ , la cual indica que para cada dirección  $\mu$  la derivada se entenderá como: la derivada parcial  $\partial_\mu$  más una corrección especificada por la matriz  $\Gamma_{\mu\sigma}^\rho$  (coeficientes de la conexión), es decir

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda$$

se puede demostrar que esto es un tensor de clase (1, 1) dadas las propiedades de transformación de la matriz  $\Gamma_{\mu\sigma}^\rho$  (ver[2] pág. 56).

3. Conmuta con la contracción:  $\nabla_\mu (\Gamma_{\lambda\rho}^\lambda) = (\nabla T)_{\mu\lambda\rho}^\lambda$ .
4. Si se aplica el operador derivada covariante a funciones escalares, se reduce directamente a la derivada parcial:  $\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi$ .

La expresión general para la derivada covariante, en términos de las componentes de un tensor viene dada por,

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} = & \partial_\sigma T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_1} T^{\lambda \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_2} T^{\mu_1 \lambda \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} \\ & + \dots - \Gamma_{\sigma\nu_1}^\lambda T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\lambda \nu_2 \dots \nu_l} - \Gamma_{\sigma\nu_2}^\lambda T^{\mu_1 \lambda \dots \mu_k}_{\nu_1 \lambda \dots \nu_l} - \dots \end{aligned}$$

la relación es relativamente simple: para cada superíndice y subíndice se introduce un término  $+ \Gamma$  o  $- \Gamma$  respectivamente. La derivada covariante compara los valores de cada componente del tensor  $T$  definidos localmente en un punto, con los valores en puntos vecinos en la dirección definida por la coordenada del índice  $\sigma$ .

<sup>1</sup>Es importante reconocer que si este operador satisface esta regla, dicho operador puede escribirse como una derivada parcial más alguna transformación lineal[2].

## C.2. Transporte Paralelo

Después de tener la herramienta de las conexiones, es útil definir una estructura que permita comparar vectores en dos puntos distintos sobre una variedad. Cuando se hace referencia a comprar, lo que se quiere es mantener la suma, resta, el producto interno, entre otras operaciones; sobre los vectores que se transportan paralelamente de un lugar a otro. En este sentido, se pretende que está herramienta de cuenta, en un espacio curvo, de la constancia de un vector (o tensor) cuando se desplaza a lo largo de un camino.

Dada una curva  $x^\mu(\lambda)$ , la condición de constancia de un tensor  $T$  en el espacio plano es:

$$\frac{dT}{d\lambda} = \frac{\partial T}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = 0$$

extrapolando está idea a un espacio curvo, dada la estructura de derivada covariante, se tiene el operador

$$\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu$$

así, se define el transporte paralelo del tensor a lo largo de un camino por el siguiente requisito[2]:

$$\left( \frac{D}{d\lambda} T \right)_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \equiv \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}$$

que para un vector toma la forma:  $\frac{dV^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\lambda} V^\rho = 0$

## C.3. Tensor de Riemann

La curvatura es cuantificada por medio del tensor de Riemann<sup>2</sup> o tensor de curvatura, que es obtenido desde la conexión. Éste es un tensor de clase (1, 3) y no es posible escribirlo matricialmente; como, por ejemplo, es usual representar el tensor métrico de clase (0, 2). Su forma explícita está dada por:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}$$

Este tensor cuenta con varias propiedades de gran uso en relatividad general, se recomienda al lector abordarlas en [22] o [2].

## C.4. Contracciones del Tensor de Riemann

- Tensor de Ricci, éste se caracteriza por ser un tensor de clase (0, 2) simétrico que surge de la contracción  $R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$ .
- Escalar de curvatura o escalar de Ricci  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ .

<sup>2</sup>Para ver una demostración completa del tensor de Riemann ver[22] pág 37.

# D. Anexo: Derivada de Lie y Campos de Killing

## D.1. Derivada de Lie

Siguiendo a [6], es de suma importancia determinar herramientas para efectuar derivadas sobre tensores; para ello en este anexo se presenta una manera particular de diferenciar tensores, sin ayuda de la conexión, utilizando un campo vectorial auxiliar  $X^\mu$ . Por lo tanto, dado el campo vectorial y evidentemente sus curvas integrales sobre cada punto de la variedad, se quiere derivar el tensor<sup>1</sup>  $T^{\mu\nu}$  usando dicho campo; la técnica se logra “arrastrando” el tensor sobre alguna de estas curvas integrales desde un punto  $P$  a un punto  $Q$  cercano y posteriormente comparando este tensor “arrastrado” con el tensor  $T^{\mu\nu}$  definido en este punto. Considerando que el tensor “arrastrado”, desde  $P$ , tenga la misma clase que el tensor definido en  $Q$  se puede recurrir a la idea intuitiva de derivada, restando los dos tensores y definiendo la derivada por medio de la noción de límite a medida que  $P$  tiende a  $Q$ .

De esta manera, utilizando la transformación de coordenadas del punto  $P$  al punto  $Q$ , bajo el sistema coordenado  $x^\mu$ , es decir;

$$x'^\mu \longrightarrow x^\mu + \delta u X^\mu \quad \text{diferenciando respecto a } x^\nu$$
$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu + \delta u \partial_\nu X^\mu \quad \text{donde } \delta u \text{ es un parámetro pequeño,}$$

y utilizando la ley de transformación para tensores, entre el tensor definido en  $P$  y el “arrastrado” a  $Q$ , se obtiene:

$$T'^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + [\partial_\sigma X^\nu T^{\mu\sigma} + \partial_\rho X^\mu T^{\rho\nu}] \delta u + O(\delta u)^2$$

así, se define la derivada de Lie respecto a  $X^\mu$ , como

$$L_X T^{\mu\nu} = \lim_{\delta u \rightarrow 0} \frac{T^{\mu\nu}(x') - T'^{\mu\nu}(x')}{\delta u} \quad (\text{D-1})$$

esto da cuenta de la comparación del tensor  $T^{\mu\nu}(x')$  definido en  $Q$  y el tensor “arrastrado” al mismo punto vecino  $T'^{\mu\nu}(x')$ . Logrando por este medio obtener

$$L_X T^{\mu\nu} = X^\rho \partial_\rho T^{\mu\nu}(x) - T^{\mu\rho}(x) \partial_\rho X^\nu(x) - T^{\rho\nu}(x) \partial_\rho X^\mu(x) \quad (\text{D-2})$$

---

<sup>1</sup>Se considera para el cálculo tensores de rango 2, pero se podría extender a tensores de rango superior.

algunas propiedades de la diferenciación de Lie:

- La derivada de Lie es lineal:  $L_X[aY^\mu + bZ^\mu] = aL_XY^\mu + bL_XZ^\mu$ , en donde  $a$  y  $b$  son reales.
- La derivada de Lie satisface la regla del producto de derivadas:

$$L_X[Y^\mu Z_{\nu\sigma}] = Y^\mu [L_X Z_{\nu\sigma}] + [L_X Y^\mu] Z_{\nu\sigma}$$

- La derivada de Lie de un tensor de clase  $(k, l)$  es también de clase  $(k, l)$ .
- La derivada de Lie de un campo escalar  $\phi$  está dada por:  $L_X\phi = X^\mu \partial_\mu \phi$ .
- La derivada de un campo vectorial  $Y^\mu$  está dada por el bracket de Lie de  $X$  y  $Y$ .

$$L_X Y^\mu = [X, Y]^\mu = X^\nu \partial_\nu Y^\mu - Y^\nu \partial_\nu X^\mu$$

## D.2. Campos de Killing

En el análisis de cualquier sistema físico, por lo general siempre se está interesado en identificar cuales son las cantidades que se conservan, o invariantes, bajo una transformación de coordenadas. En este caso particular las transformaciones que dejan invariante la métrica son de suma importancia por que contienen información sobre las simétrías de la variedad. Siguiendo a [23], una métrica  $g_{\mu\nu}$  es invariante bajo la transformación  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ , si se cumple

$$g'_{\mu\nu}(y) = g_{\mu\nu}(y) \quad \text{para todas las coordenadas } y^\sigma$$

utilizando la ley de transformación entre tensores, sobre la métrica  $g_{\mu\nu}$ ,

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g'_{\rho\sigma}(x')$$

y asumiendo la condición para la invarianza de la métrica, se obtiene:

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\rho\sigma}(x')$$

así para cualquier transformación  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ , que satisfaga la relación anterior es llamada una isometría. Sin embargo por medio de transformaciones infinitesimales, de la forma

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon X^\mu(x)$$

y considerando los términos de primer orden para  $\varepsilon$ , se puede mostrar que

$$L_X g_{\mu\nu} = X^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu} + g_{\mu\sigma} \partial_\nu X^\sigma + g_{\nu\sigma} \partial_\mu X^\sigma = 0$$

cambiando las derivadas por derivadas covariantes, finalmente se obtiene

$$\boxed{L_X g_{\mu\nu} = \nabla_\nu X_\mu + \nabla_\mu X_\nu = 0} \quad (\text{D-3})$$

La expresión (D-3) es llamada la ecuación de Killing y cualquier solución a ésta se llama un campo vectorial de Killing  $X^\mu$  asociado a la métrica  $g_{\mu\nu}$ . Para ver más detalles sobre esto ver [23] pág. 377.

# E. Anexo: Algunos Cálculos para la Solución de Schwarzschild

## E.1. Conexiones de Christoffel

Dada la conexión de Christoffel  $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho} [\partial_{\mu}g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}]$ , el tensor métrico y el tensor métrico inverso, respectivamente:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -e^{2\alpha(t,r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\beta(t,r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}; g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -e^{-2\alpha(t,r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\beta(t,r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{bmatrix} \quad (\text{E-1})$$

y expandiendo de 0 a 4 para cada índice que indica suma, tenemos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} &= \frac{1}{2}g^{\sigma 0}\partial_{\mu}g_{\nu 0} + \frac{1}{2}g^{\sigma 0}\partial_{\nu}g_{0\mu} - \frac{1}{2}g^{\sigma 0}\partial_0g_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\sigma 1}\partial_{\mu}g_{\nu 1} + \frac{1}{2}g^{\sigma 1}\partial_{\nu}g_{1\mu} - \frac{1}{2}g^{\sigma 1}\partial_1g_{\mu\nu} \\ &+ \frac{1}{2}g^{\sigma 2}\partial_{\mu}g_{\nu 2} + \frac{1}{2}g^{\sigma 2}\partial_{\nu}g_{2\mu} - \frac{1}{2}g^{\sigma 2}\partial_2g_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\sigma 3}\partial_{\mu}g_{\nu 3} + \frac{1}{2}g^{\sigma 3}\partial_{\nu}g_{3\mu} - \frac{1}{2}g^{\sigma 3}\partial_3g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{E-2})$$

que los coeficientes no nulos están dados por las expresiones,

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}\partial_0g_{00} + \frac{1}{2}g^{00}\partial_0g_{00} - \frac{1}{2}g^{00}\partial_0g_{00} = \frac{1}{2}[-e^{-2\alpha(t,r)}] \frac{\partial}{\partial t} [-e^{2\alpha(t,r)}] \\ &= \frac{1}{2}e^{-2\alpha(t,r)} 2e^{2\alpha(t,r)} \frac{\partial}{\partial t} \alpha(t,r) = \frac{\partial}{\partial t} \alpha(t,r) \longrightarrow \boxed{\Gamma_{00}^0 = \partial_0 \alpha(t,r)} \end{aligned} \quad (\text{E-3})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{10}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}\partial_1g_{00} = \frac{1}{2}[e^{-2\alpha(t,r)}] \frac{\partial}{\partial r} [-e^{2\alpha(t,r)}] = \frac{1}{2}e^{-2\alpha(t,r)} 2e^{2\alpha(t,r)} \frac{\partial}{\partial r} \alpha(t,r) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \alpha(t,r) \longrightarrow \boxed{\Gamma_{10}^0 = \Gamma_{01}^0 = \partial_1 \alpha(t,r)} \end{aligned} \quad (\text{E-4})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0g_{11} = -\frac{1}{2}[-e^{-2\alpha(t,r)}] \frac{\partial}{\partial t} e^{2\beta(t,r)} = \frac{1}{2}e^{-2\alpha(t,r)} 2e^{\beta(t,r)} \frac{\partial}{\partial t} \beta(t,r) \\ &= e^{2(\beta-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \beta(t,r) \longrightarrow \boxed{\Gamma_{11}^0 = e^{2(\beta-\alpha)} \partial_0 \beta(t,r)} \end{aligned} \quad (\text{E-5})$$

$$\Gamma_{20}^0 = \Gamma_{02}^0 = \Gamma_{30}^0 = \Gamma_{03}^0 = \Gamma_{12}^0 = \Gamma_{21}^0 = \Gamma_{22}^0 = \Gamma_{13}^0 = \Gamma_{31}^0 = \Gamma_{23}^0 = \Gamma_{32}^0 = \Gamma_{33}^0 = 0 \quad (\text{E-6})$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^1 &= -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1g_{00} = -\frac{1}{2}[e^{-2\beta(t,r)}]\frac{\partial}{\partial r}[-e^{2\alpha(t,r)}] = -\frac{1}{2}e^{-2\beta(t,r)}[-2e^{2\alpha(t,r)}]\frac{\partial}{\partial r}\alpha(t,r) \\
&= e^{2(\alpha-\beta)}\frac{\partial}{\partial r}\alpha(t,r) \longrightarrow \boxed{\Gamma_{00}^1 = e^{2(\alpha-\beta)}\partial_1\alpha(t,r)} \tag{E-7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{01}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}\partial_0g_{11} = \frac{1}{2}e^{-2\beta(t,r)}\frac{\partial}{\partial t}e^{2\beta(t,r)} = \frac{1}{2}e^{-2\beta(t,r)}2e^{2\beta(t,r)}\frac{\partial}{\partial t}\beta(t,r) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\beta(t,r) \longrightarrow \boxed{\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \partial_0\beta(t,r)} \tag{E-8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}\partial_1g_{11} + \frac{1}{2}g^{11}\partial_1g_{11} - \frac{1}{2}g^{11}\partial_1g_{11} = \frac{1}{2}g^{11}\partial_1g_{11} = \frac{1}{2}e^{-2\beta(t,r)}\frac{\partial}{\partial r}e^{2\beta(t,r)} \\
&= \frac{1}{2}e^{-2\beta(t,r)}2e^{2\beta(t,r)}\frac{\partial}{\partial r}\beta(t,r) = \frac{\partial}{\partial r}\beta(t,r) \longrightarrow \boxed{\Gamma_{11}^1 = \partial_1\beta(t,r)} \tag{E-9}
\end{aligned}$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1g_{22} = -\frac{1}{2}e^{-2\beta(t,r)}\frac{\partial}{\partial r}r^2 - \frac{1}{2}e^{-2\beta(t,r)}(2r) \longrightarrow \boxed{\Gamma_{22}^1 = -re^{-2\beta(t,r)}} \tag{E-10}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^1 &= -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1g_{33} = -\frac{1}{2}e^{-2\beta(t,r)}\frac{\partial}{\partial r}r^2\sin^2\theta = -\frac{1}{2}e^{-2\beta(t,r)}2r\sin^2\theta \\
&\longrightarrow \boxed{\Gamma_{33}^1 = -r\sin^2\theta e^{-2\beta(t,r)}} \tag{E-11}
\end{aligned}$$

$$\Gamma_{02}^1 = \Gamma_{20}^1 = \Gamma_{03}^1 = \Gamma_{30}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{31}^1 = \Gamma_{13}^1 = \Gamma_{32}^1 = \Gamma_{23}^1 = 0 \tag{E-12}$$

$$\Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2}g^{22}\partial_1g_{22} = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}(2r) \longrightarrow \boxed{\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}} \tag{E-13}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^2 &= -\frac{1}{2}g^{22}\partial_2g_{33} = -\frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}r^2\sin^2\theta = -\frac{1}{2}\frac{1}{r^2}2r^2\sin\theta\cos\theta \\
&\longrightarrow \boxed{\Gamma_{33}^2 = -\sin\theta\cos\theta} \tag{E-14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^2 &= \Gamma_{01}^2 = \Gamma_{10}^2 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{03}^2 = \Gamma_{30}^2 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 \\
&= \Gamma_{31}^2 = \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{32}^2 = \Gamma_{23}^2 = 0 \tag{E-15}
\end{aligned}$$

$$\Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2}g^{33}\partial_1g_{33} = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial r}r^2\sin^2\theta \longrightarrow \boxed{\Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}} \tag{E-16}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{32}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}\partial_2g_{33} = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}r^2\sin^2\theta = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}2r^2\sin\theta\cos\theta \\
&\longrightarrow \boxed{\Gamma_{32}^3 = \Gamma_{23}^3 = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}} \tag{E-17}
\end{aligned}$$

$$\Gamma_{00}^3 = \Gamma_{01}^3 = \Gamma_{10}^3 = \Gamma_{02}^3 = \Gamma_{20}^3 = \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 = \Gamma_{11}^3 = \Gamma_{21}^3 = \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{22}^3 = \Gamma_{33}^3 = 0 \tag{E-18}$$

## E.2. Componentes del Tensor de Riemann

Dado el tensor de Riemann, y su expansión sobre los índices que indican suma.

$$\begin{aligned}
R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} &= \partial_\mu\Gamma^\rho{}_{\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma^\rho{}_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma} \\
&= \partial_\mu\Gamma^\rho{}_{\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma^\rho{}_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho{}_{\mu 0}\Gamma^0{}_{\nu\sigma} + \Gamma^\rho{}_{\mu 1}\Gamma^1{}_{\nu\sigma} + \Gamma^\rho{}_{\mu 2}\Gamma^2{}_{\nu\sigma} + \Gamma^\rho{}_{\mu 3}\Gamma^3{}_{\nu\sigma} \\
&\quad - \Gamma^\rho{}_{\nu 0}\Gamma^0{}_{\mu\sigma} - \Gamma^\rho{}_{\nu 1}\Gamma^1{}_{\mu\sigma} - \Gamma^\rho{}_{\nu 2}\Gamma^2{}_{\mu\sigma} - \Gamma^\rho{}_{\nu 3}\Gamma^3{}_{\mu\sigma}
\end{aligned}$$

Así para las componentes no nulas, utilizando las ecuaciones (E-3) a (E-18), se encuentra:

$$\begin{aligned}
R^0_{101} &= \partial_0 \Gamma_{11}^0 - \partial_1 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{00}^0 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{02}^0 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{03}^0 \Gamma_{11}^3 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 \\
&\quad - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{01}^1 - \Gamma_{12}^0 \Gamma_{01}^2 - \Gamma_{13}^0 \Gamma_{01}^3 \\
&= \partial_0 [e^{2(\beta-\alpha)} \partial_0 \beta] - \partial_1 \partial_1 \alpha + (\partial_0 \alpha) [e^{2(\beta-\alpha)} \partial_0 \beta] + (\partial_1 \alpha)(\partial_1 \beta) - (\partial_1 \alpha)(\partial_1 \alpha) \\
&\quad - [e^{2(\beta-\alpha)} \partial_0 \beta] (\partial_0 \beta) \\
&= \partial_0 e^{2(\beta-\alpha)} [\partial_0 \beta] + \partial_0^2 \beta [e^{2(\beta-\alpha)}] - \partial_1^2 \alpha + (\partial_0 \alpha) [e^{2(\beta-\alpha)} \partial_0 \beta] + (\partial_1 \alpha)(\partial_1 \beta) \\
&\quad - (\partial_1 \alpha)^2 - [e^{2(\beta-\alpha)} \partial_0 \beta] (\partial_0 \beta) \\
&= [2e^{2(\beta-\alpha)} (\partial_0 \beta - \partial_0 \alpha)] \partial_0 \beta + \partial_0^2 \beta [e^{2(\beta-\alpha)}] - \partial_1^2 \alpha + (\partial_0 \alpha) [e^{2(\beta-\alpha)} \partial_0 \beta] \\
&\quad + (\partial_1 \alpha)(\partial_1 \beta) - (\partial_1 \alpha)^2 - [e^{2(\beta-\alpha)} \partial_0 \beta] (\partial_0 \beta) \\
&= 2(\partial_0 \beta)^2 e^{2(\beta-\alpha)} - 2(\partial_0 \alpha)(\partial_0 \beta) e^{2(\beta-\alpha)} + \partial_0^2 \beta [e^{2(\beta-\alpha)}] - \partial_1^2 \alpha + (\partial_0 \alpha)(\partial_0 \beta) e^{2(\beta-\alpha)} \\
&\quad + (\partial_1 \alpha)(\partial_1 \beta) - (\partial_1 \alpha)^2 - (\partial_0 \beta)^2 e^{2(\beta-\alpha)} \\
&= (\partial_0 \beta)^2 e^{2(\beta-\alpha)} - (\partial_0 \alpha)(\partial_0 \beta) e^{2(\beta-\alpha)} + \partial_0^2 \beta [e^{2(\beta-\alpha)}] - \partial_1^2 \alpha + (\partial_1 \alpha)(\partial_1 \beta) - (\partial_1 \alpha)^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{R^0_{101} = e^{2(\beta-\alpha)} [(\partial_0 \beta)^2 + \partial_0^2 \beta - (\partial_0 \alpha)(\partial_0 \beta)] + [\partial_1 \alpha \partial_1 \beta - \partial_1^2 \alpha - (\partial_1 \alpha)^2]} \quad (\text{E-19})$$

$$\begin{aligned}
R^0_{202} &= \partial_0 \Gamma_{22}^0 - \partial_2 \Gamma_{02}^0 + \Gamma_{00}^0 \Gamma_{22}^0 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{02}^0 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{03}^0 \Gamma_{22}^3 - \Gamma_{20}^0 \Gamma_{02}^0 \\
&\quad - \Gamma_{21}^0 \Gamma_{02}^1 - \Gamma_{22}^0 \Gamma_{02}^2 - \Gamma_{23}^0 \Gamma_{02}^3 \\
&= (\partial_1 \alpha) [-re^{-2\beta}]
\end{aligned}$$

$$\boxed{R^0_{202} = -re^{-2\beta} \partial_1 \alpha} \quad (\text{E-20})$$

$$\begin{aligned}
R^0_{303} &= \partial_0 \Gamma_{33}^0 - \partial_3 \Gamma_{03}^0 + \Gamma_{00}^0 \Gamma_{33}^0 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{02}^0 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{03}^0 \Gamma_{33}^3 - \Gamma_{30}^0 \Gamma_{03}^0 \\
&\quad - \Gamma_{31}^0 \Gamma_{03}^1 - \Gamma_{32}^0 \Gamma_{03}^2 - \Gamma_{33}^0 \Gamma_{03}^3 \\
&= (\partial_1 \alpha) [-re^{-2\beta} \sin^2 \theta]
\end{aligned}$$

$$\boxed{R^0_{303} = -re^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_1 \alpha} \quad (\text{E-21})$$

$$\begin{aligned}
R^0_{212} &= \partial_1 \Gamma_{22}^0 - \partial_2 \Gamma_{12}^0 + \Gamma_{10}^0 \Gamma_{22}^0 + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{12}^0 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{13}^0 \Gamma_{22}^3 - \Gamma_{20}^0 \Gamma_{12}^0 \\
&\quad - \Gamma_{21}^0 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^0 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{23}^0 \Gamma_{12}^3 \\
&= [e^{2(\beta-\alpha)} \partial_0 \beta] [-re^{-2\beta}]
\end{aligned}$$

$$\boxed{R^0_{212} = -re^{-2\alpha} \partial_0 \beta} \quad (\text{E-22})$$

$$\begin{aligned}
R^0_{313} &= \partial_1 \Gamma_{33}^0 - \partial_3 \Gamma_{13}^0 + \Gamma_{10}^0 \Gamma_{33}^0 + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{12}^0 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{13}^0 \Gamma_{33}^3 - \Gamma_{30}^0 \Gamma_{13}^0 \\
&\quad - \Gamma_{31}^0 \Gamma_{13}^1 - \Gamma_{32}^0 \Gamma_{13}^2 - \Gamma_{33}^0 \Gamma_{13}^3 \\
&= [e^{2(\beta-\alpha)} \partial_0 \beta] [-re^{-2\beta} \sin^2 \theta]
\end{aligned}$$

$$\boxed{R^0_{313} = -re^{-2\alpha} \sin^2 \theta \partial_0 \beta} \quad (\text{E-23})$$

$$\begin{aligned} R^1_{212} &= \partial_1 \Gamma^1_{22} - \partial_2 \Gamma^1_{12} + \Gamma^1_{10} \Gamma^0_{22} + \Gamma^1_{11} \Gamma^1_{22} + \Gamma^1_{12} \Gamma^2_{22} + \Gamma^1_{13} \Gamma^3_{22} - \Gamma^1_{20} \Gamma^0_{12} \\ &\quad - \Gamma^1_{21} \Gamma^1_{12} - \Gamma^1_{22} \Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{23} \Gamma^3_{12} \\ &= \partial_1 [-re^{-2\beta}] + (\partial_1 \beta) [-re^{-2\beta}] - [-re^{-2\beta}] \left[ \frac{1}{r} \right] \\ &= -[\partial_1(r)e^{-2\beta} + r\partial_1 e^{-2\beta}] - re^{-2\beta} \partial_1 \beta + e^{-2\beta} \\ &= -e^{-2\beta} + 2re^{-2\beta} \partial_1 \beta - re^{-2\beta} \partial_1 \beta + e^{-2\beta} \end{aligned}$$

$$\boxed{R^1_{212} = re^{-2\alpha} \partial_1 \beta} \quad (\text{E-24})$$

$$\begin{aligned} R^1_{313} &= \partial_1 \Gamma^1_{33} - \partial_3 \Gamma^1_{13} + \Gamma^1_{10} \Gamma^0_{33} + \Gamma^1_{11} \Gamma^1_{33} + \Gamma^1_{12} \Gamma^1_{33} + \Gamma^1_{13} \Gamma^3_{33} - \Gamma^1_{30} \Gamma^0_{13} \\ &\quad - \Gamma^1_{31} \Gamma^1_{13} - \Gamma^1_{32} \Gamma^2_{13} - \Gamma^1_{33} \Gamma^3_{13} \\ &= [\partial_1 \beta] [-re^{-2\beta} \sin^2 \theta] - [-re^{-2\beta} \sin^2 \theta] \left[ \frac{1}{r} \right] + \partial_1 [-re^{-2\beta} \sin^2 \theta] \\ &= -re^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_1 \beta + e^{-2\beta} \sin^2 \theta - [\partial_1(r)e^{-2\beta} \sin^2 \theta + r \sin^2 \theta \partial_1(e^{-2\beta})] \\ &= -re^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_1 \beta + e^{-2\beta} \sin^2 \theta - e^{-2\beta} \sin^2 \theta + 2r \sin^2 \theta e^{-2\beta} \partial_1 \beta \end{aligned}$$

$$\boxed{R^1_{313} = r \sin^2 \theta e^{-2\beta} \partial_1 \beta} \quad (\text{E-25})$$

$$\begin{aligned} R^2_{323} &= \partial_2 \Gamma^2_{33} - \partial_3 \Gamma^2_{23} + \Gamma^2_{20} \Gamma^0_{33} + \Gamma^2_{21} \Gamma^1_{33} + \Gamma^2_{22} \Gamma^2_{33} + \Gamma^2_{23} \Gamma^3_{33} - \Gamma^2_{30} \Gamma^0_{23} \\ &\quad - \Gamma^2_{31} \Gamma^1_{23} - \Gamma^2_{32} \Gamma^2_{23} - \Gamma^2_{33} \Gamma^3_{23} \\ &= \partial_2 [-\sin \theta \cos \theta] + \frac{1}{r} [-re^{-2\beta} \sin^2 \theta] - [-\sin \theta \cos \theta] \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= -[(\partial_2 \sin \theta) \cos \theta + \sin \theta (\partial_2 \cos \theta)] - e^{-2\beta} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \\ &= -\cos^2 \theta + \sin^2 \theta - e^{-2\beta} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{aligned}$$

$$\boxed{R^2_{323} = [1 - e^{-2\beta}] \sin^2 \theta} \quad (\text{E-26})$$

### E.3. Componentes del Tensor de Ricci

Tomando las contracciones del tensor de Riemann:

$$R_{00} = R^\lambda_{0\lambda 0} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{00} - \partial_0 \Gamma^\lambda_{\lambda 0} + \Gamma^\lambda_{\lambda\alpha} \Gamma^\alpha_{00} - \Gamma^\lambda_{0\alpha} \Gamma^\alpha_{\lambda 0} \quad (\text{E-27})$$

$$R_{11} = R^\lambda_{1\lambda 1} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{11} - \partial_1 \Gamma^\lambda_{\lambda 1} + \Gamma^\lambda_{\lambda\alpha} \Gamma^\alpha_{11} - \Gamma^\lambda_{1\alpha} \Gamma^\alpha_{\lambda 1} \quad (\text{E-28})$$

$$R_{01} = R^\lambda_{0\lambda 1} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{01} - \partial_1 \Gamma^\lambda_{\lambda 0} + \Gamma^\lambda_{\lambda\alpha} \Gamma^\alpha_{10} - \Gamma^\lambda_{1\alpha} \Gamma^\alpha_{\lambda 0} \quad (\text{E-29})$$

$$R_{22} = R^\lambda_{2\lambda 2} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{22} - \partial_2 \Gamma^\lambda_{\lambda 2} + \Gamma^\lambda_{\lambda\alpha} \Gamma^\alpha_{22} - \Gamma^\lambda_{2\alpha} \Gamma^\alpha_{\lambda 2} \quad (\text{E-30})$$

$$R_{33} = R^\lambda_{3\lambda 3} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{33} - \partial_3 \Gamma^\lambda_{\lambda 3} + \Gamma^\lambda_{\lambda\alpha} \Gamma^\alpha_{33} - \Gamma^\lambda_{3\alpha} \Gamma^\alpha_{\lambda 3} \quad (\text{E-31})$$



expandiendo  $\lambda$  y  $\alpha$  de 0 a 3, y utilizando las componentes no nulas de Christoffel, se tiene:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \partial_0 \Gamma_{00}^0 - \partial_0 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{0\alpha}^0 \Gamma_{00}^\alpha - \Gamma_{0\alpha}^0 \Gamma_{00}^\alpha + \partial_1 \Gamma_{00}^1 - \partial_0 \Gamma_{10}^1 + \Gamma_{1\alpha}^1 \Gamma_{00}^\alpha - \Gamma_{0\alpha}^1 \Gamma_{10}^\alpha \\
&+ \partial_2 \Gamma_{00}^2 - \partial_0 \Gamma_{20}^2 + \Gamma_{2\alpha}^2 \Gamma_{00}^\alpha - \Gamma_{0\alpha}^2 \Gamma_{20}^\alpha + \partial_3 \Gamma_{00}^3 - \partial_0 \Gamma_{30}^3 + \Gamma_{3\alpha}^3 \Gamma_{00}^\alpha - \Gamma_{0\alpha}^3 \Gamma_{30}^\alpha \\
&= \partial_1 \Gamma_{00}^1 - \partial_0 \Gamma_{10}^1 + \Gamma_{10}^1 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{00}^2 + \Gamma_{13}^1 \Gamma_{00}^3 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0 - \Gamma_{01}^1 \Gamma_{10}^1 \\
&- \Gamma_{02}^1 \Gamma_{10}^2 - \Gamma_{03}^1 \Gamma_{10}^3 + \partial_2 \Gamma_{00}^2 - \partial_0 \Gamma_{20}^2 + \Gamma_{20}^2 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{00}^2 + \Gamma_{23}^2 \Gamma_{00}^3 \\
&- \Gamma_{00}^2 \Gamma_{20}^0 - \Gamma_{01}^2 \Gamma_{20}^1 - \Gamma_{02}^2 \Gamma_{20}^2 - \Gamma_{03}^2 \Gamma_{20}^3 + \partial_3 \Gamma_{00}^3 - \partial_0 \Gamma_{30}^3 + \Gamma_{30}^3 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{00}^1 \\
&+ \Gamma_{32}^3 \Gamma_{00}^2 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{00}^3 - \Gamma_{00}^3 \Gamma_{30}^0 - \Gamma_{01}^3 \Gamma_{30}^1 - \Gamma_{02}^3 \Gamma_{30}^2 - \Gamma_{03}^3 \Gamma_{30}^3 \\
&= \frac{\partial}{\partial r} [e^{2(\alpha-\beta)} \partial_1 \alpha] - \frac{\partial}{\partial t} [\partial_0 \beta] + [\partial_0 \beta] [\partial_0 \alpha] + [\partial_1 \beta] [e^{2(\alpha-\beta)} \partial_1 \alpha] \\
&- [e^{2(\alpha-\beta)} \partial_1 \alpha] [\partial_1 \alpha] - [\partial_0 \beta] [\partial_0 \beta] + \frac{1}{r} [e^{2(\alpha-\beta)} \partial_1 \alpha] + \frac{1}{r} [e^{2(\alpha-\beta)} \partial_1 \alpha] \\
&= \frac{\partial}{\partial r} [e^{2(\alpha-\beta)}] \partial_1 \alpha + [e^{2(\alpha-\beta)}] \frac{\partial}{\partial r} [\partial_1 \alpha] - \partial_0^2 \beta - \partial_0 \beta \partial_0 \alpha + e^{2(\alpha-\beta)} \partial_1 \alpha \partial_1 \beta \\
&- e^{2(\alpha-\beta)} [\partial_1 \alpha]^2 - [\partial_0 \beta]^2 + \frac{1}{r} e^{2(\alpha-\beta)} \partial_1 \alpha + \frac{1}{r} e^{2(\alpha-\beta)} \partial_1 \alpha \\
&= e^{2(\alpha-\beta)} [2\partial_1 \alpha - 2\partial_1 \beta] \partial_1 \alpha + e^{2(\alpha-\beta)} \partial_1^2 \alpha - \partial_0^2 \beta - \partial_0 \beta \partial_0 \alpha + e^{2(\alpha-\beta)} \partial_1 \alpha \partial_1 \beta \\
&- e^{2(\alpha-\beta)} [\partial_1 \alpha]^2 - [\partial_0 \beta]^2 + \frac{2}{r} e^{2(\alpha-\beta)} \partial_1 \alpha
\end{aligned}$$

$$\boxed{R_{00} = e^{2(\alpha-\beta)} \left[ (\partial_1 \alpha)^2 + \partial_1^2 \alpha - \partial_1 \beta \partial_1 \alpha + \frac{2}{r} \partial_1 \alpha \right] - [\partial_0^2 \beta - \partial_0 \beta \partial_0 \alpha + (\partial_0 \beta)^2]} \quad (\text{E-32})$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \partial_0 \Gamma_{11}^0 - \partial_1 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{0\alpha}^0 \Gamma_{11}^\alpha - \Gamma_{1\alpha}^0 \Gamma_{01}^\alpha + \partial_1 \Gamma_{11}^1 - \partial_1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{1\alpha}^1 \Gamma_{11}^\alpha - \Gamma_{1\alpha}^1 \Gamma_{11}^\alpha \\
&+ \partial_2 \Gamma_{11}^2 - \partial_1 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{2\alpha}^2 \Gamma_{11}^\alpha - \Gamma_{1\alpha}^2 \Gamma_{21}^\alpha + \partial_3 \Gamma_{11}^3 - \partial_1 \Gamma_{31}^3 + \Gamma_{3\alpha}^3 \Gamma_{11}^\alpha - \Gamma_{1\alpha}^3 \Gamma_{31}^\alpha \\
&= \partial_0 \Gamma_{11}^0 - \partial_1 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{00}^0 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{02}^0 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{03}^0 \Gamma_{11}^3 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{01}^1 \\
&- \Gamma_{12}^0 \Gamma_{01}^2 - \Gamma_{13}^0 \Gamma_{01}^3 + \partial_2 \Gamma_{11}^2 - \partial_1 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{20}^2 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{23}^2 \Gamma_{11}^3 \\
&- \Gamma_{10}^2 \Gamma_{21}^0 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{13}^2 \Gamma_{21}^3 + \partial_3 \Gamma_{11}^3 - \partial_1 \Gamma_{31}^3 + \Gamma_{30}^3 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{11}^1 \\
&+ \Gamma_{32}^3 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{11}^3 - \Gamma_{10}^3 \Gamma_{31}^0 - \Gamma_{11}^3 \Gamma_{31}^1 - \Gamma_{12}^3 \Gamma_{31}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3 \\
&= \frac{\partial}{\partial t} [e^{2(\beta-\alpha)} \partial_0 \beta] - \frac{\partial}{\partial r} [\partial_1 \beta] + [\partial_0 \alpha] [e^{2(\beta-\alpha)} \partial_0 \beta] + [\partial_1 \alpha] [\partial_1 \beta] - [\partial_1 \alpha] [\partial_1 \alpha] \\
&- [e^{2(\beta-\alpha)} \partial_0 \beta] [\partial_0 \beta] - \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \right] + \frac{1}{r} [\partial_1 \beta] - \frac{1}{r} \frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \right] + \frac{1}{r} [\partial_1 \beta] \\
&= \frac{\partial}{\partial t} [e^{2(\beta-\alpha)}] \partial_0 \beta + e^{2(\beta-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} [\partial_0 \beta] - \partial_1^2 \alpha + e^{2(\beta-\alpha)} \partial_0 \beta \partial_0 \alpha + \partial_1 \alpha \partial_1 \beta \\
&- [\partial_1 \alpha]^2 - e^{2(\beta-\alpha)} [\partial_0 \beta]^2 + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \partial_1 \beta - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \partial_1 \beta - \frac{1}{r^2} \\
&= e^{2(\beta-\alpha)} [2\partial_0 \beta - 2\partial_0 \alpha] \partial_0 \beta + e^{2(\beta-\alpha)} \partial_0^2 \beta - \partial_1^2 \alpha + e^{2(\beta-\alpha)} \partial_0 \beta \partial_0 \alpha + \partial_1 \alpha \partial_1 \beta \\
&- [\partial_1 \alpha]^2 - e^{2(\beta-\alpha)} [\partial_0 \beta]^2 + \frac{2}{r} \partial_1 \beta
\end{aligned}$$

$$R_{11} = e^{2(\beta-\alpha)} [(\partial_0\beta)^2 - \partial_0\alpha\partial_0\beta + \partial_0^2\beta] - \left[ \partial_1^2\alpha + (\partial_1\alpha)^2 - \partial_1\alpha\partial_1\beta - \frac{2}{r}\partial_1\beta \right] \quad (\text{E-33})$$

$$\begin{aligned} R_{01} &= \partial_0\Gamma_{01}^0 - \partial_1\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{0\alpha}^0\Gamma_{10}^\alpha - \Gamma_{1\alpha}^0\Gamma_{00}^\alpha + \partial_1\Gamma_{01}^1 - \partial_1\Gamma_{10}^1 + \Gamma_{1\alpha}^1\Gamma_{10}^\alpha - \Gamma_{1\alpha}^1\Gamma_{10}^\alpha \\ &+ \partial_2\Gamma_{01}^2 - \partial_1\Gamma_{20}^2 + \Gamma_{2\alpha}^2\Gamma_{10}^\alpha - \Gamma_{1\alpha}^2\Gamma_{20}^\alpha + \partial_3\Gamma_{01}^3 - \partial_1\Gamma_{30}^3 + \Gamma_{3\alpha}^3\Gamma_{10}^\alpha - \Gamma_{1\alpha}^3\Gamma_{30}^\alpha \\ &= \partial_0\Gamma_{01}^0 - \partial_1\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{00}^0\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{01}^0\Gamma_{10}^1 + \Gamma_{02}^0\Gamma_{10}^2 + \Gamma_{03}^0\Gamma_{10}^3 - \Gamma_{10}^0\Gamma_{00}^0 - \Gamma_{11}^0\Gamma_{00}^1 \\ &- \Gamma_{12}^0\Gamma_{00}^2 - \Gamma_{13}^0\Gamma_{00}^3 + \partial_2\Gamma_{01}^2 - \partial_1\Gamma_{20}^2 + \Gamma_{20}^2\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{21}^2\Gamma_{10}^1 + \Gamma_{22}^2\Gamma_{10}^2 + \Gamma_{23}^2\Gamma_{10}^3 \\ &- \Gamma_{10}^2\Gamma_{00}^0 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{00}^1 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{00}^2 - \Gamma_{13}^2\Gamma_{00}^3 + \partial_3\Gamma_{01}^3 - \partial_1\Gamma_{30}^3 + \Gamma_{30}^3\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{31}^3\Gamma_{10}^1 \\ &+ \Gamma_{32}^3\Gamma_{10}^2 + \Gamma_{33}^3\Gamma_{10}^3 - \Gamma_{10}^3\Gamma_{30}^0 - \Gamma_{11}^3\Gamma_{30}^1 - \Gamma_{12}^3\Gamma_{30}^2 - \Gamma_{13}^3\Gamma_{30}^3 \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [\partial_1\alpha] - \frac{\partial}{\partial r} [\partial_0\alpha] + [\partial_0\alpha][\partial_1\alpha] + [\partial_1\alpha][\partial_0\beta] - [\partial_1\alpha][\partial_0\alpha] \\ &- [e^{2(\beta-\alpha)}\partial_0\beta] [e^{2(\alpha-\beta)}\partial_1\alpha] + \frac{1}{r} [\partial_0\beta] + \frac{1}{r} [\partial_0\beta] \\ &= \frac{1}{r} [\partial_0\beta] + \frac{1}{r} [\partial_0\beta] \end{aligned}$$

$$R_{01} = \frac{2}{r}\partial_0\beta \quad (\text{E-34})$$

$$\begin{aligned} R_{22} &= \partial_0\Gamma_{22}^0 - \partial_2\Gamma_{02}^0 + \Gamma_{0\alpha}^0\Gamma_{22}^\alpha - \Gamma_{2\alpha}^0\Gamma_{02}^\alpha + \partial_1\Gamma_{22}^1 - \partial_2\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{1\alpha}^1\Gamma_{22}^\alpha - \Gamma_{2\alpha}^1\Gamma_{12}^\alpha \\ &+ \partial_2\Gamma_{22}^2 - \partial_2\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{2\alpha}^2\Gamma_{22}^\alpha - \Gamma_{2\alpha}^2\Gamma_{22}^\alpha + \partial_3\Gamma_{22}^3 - \partial_2\Gamma_{32}^3 + \Gamma_{3\alpha}^3\Gamma_{22}^\alpha - \Gamma_{2\alpha}^3\Gamma_{32}^\alpha \\ &= \partial_0\Gamma_{22}^0 - \partial_2\Gamma_{02}^0 + \Gamma_{00}^0\Gamma_{22}^0 + \Gamma_{01}^0\Gamma_{22}^1 + \Gamma_{02}^0\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{03}^0\Gamma_{22}^3 - \Gamma_{20}^0\Gamma_{02}^0 - \Gamma_{21}^0\Gamma_{02}^1 \\ &- \Gamma_{22}^0\Gamma_{02}^2 - \Gamma_{23}^0\Gamma_{02}^3 + \partial_1\Gamma_{22}^1 - \partial_2\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{10}^1\Gamma_{22}^0 + \Gamma_{11}^1\Gamma_{22}^1 + \Gamma_{12}^1\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{13}^1\Gamma_{22}^3 \\ &- \Gamma_{20}^1\Gamma_{12}^0 - \Gamma_{21}^1\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^1\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{23}^1\Gamma_{12}^3 + \partial_3\Gamma_{22}^3 - \partial_2\Gamma_{32}^3 + \Gamma_{30}^3\Gamma_{22}^0 + \Gamma_{31}^3\Gamma_{22}^1 \\ &+ \Gamma_{32}^3\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{33}^3\Gamma_{22}^3 - \Gamma_{20}^3\Gamma_{32}^0 - \Gamma_{21}^3\Gamma_{32}^1 - \Gamma_{22}^3\Gamma_{32}^2 - \Gamma_{23}^3\Gamma_{32}^3 \\ &= [\partial_1\alpha] [-re^{-2\beta}] + \frac{\partial}{\partial r} [-re^{-2\beta}] + [\partial_1\beta] [-re^{-2\beta}] - [-re^{-2\beta}] \frac{1}{r} - \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta \sin \theta} \\ &+ \frac{1}{r} [-re^{-2\beta}] - \frac{\cos \theta \cos \theta}{\sin \theta \sin \theta} \\ &= -re^{-2\beta}\partial_1\alpha - \left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} \right) e^{-2\beta} + r \frac{\partial}{\partial r} e^{-2\beta} \right] - re^{-2\beta}\partial_1\beta + e^{-2\beta} \\ &- \left[ \frac{\sin \theta (-\sin \theta) - \cos \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right] - e^{-2\beta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= -re^{-2\beta}\partial_1\alpha - e^{-2\beta} - re^{-2\beta}(-2\partial_1\beta) - re^{-2\beta}\partial_1\beta + \csc^2 \theta - \cot^2 \theta \\ &= -re^{-2\beta}\partial_1\alpha - e^{-2\beta} + re^{-2\beta}\partial_1\beta + \csc^2 \theta - \cot^2 \theta \end{aligned}$$

$$R_{22} = e^{-2\beta} [r(\partial_1\beta - \partial_1\alpha) - 1] + 1 \quad (\text{E-35})$$

$$\begin{aligned}
R_{33} &= \partial_0 \Gamma_{33}^0 - \partial_3 \Gamma_{03}^0 + \Gamma_{0\alpha}^0 \Gamma_{33}^\alpha - \Gamma_{3\alpha}^0 \Gamma_{03}^\alpha + \partial_1 \Gamma_{33}^1 - \partial_3 \Gamma_{13}^1 + \Gamma_{1\alpha}^1 \Gamma_{33}^\alpha - \Gamma_{3\alpha}^1 \Gamma_{13}^\alpha \\
&+ \partial_2 \Gamma_{33}^2 - \partial_3 \Gamma_{23}^2 + \Gamma_{2\alpha}^2 \Gamma_{33}^\alpha - \Gamma_{3\alpha}^2 \Gamma_{23}^\alpha + \partial_3 \Gamma_{33}^3 - \partial_3 \Gamma_{33}^3 + \Gamma_{3\alpha}^3 \Gamma_{33}^\alpha - \Gamma_{3\alpha}^3 \Gamma_{33}^\alpha \\
&= \partial_0 \Gamma_{33}^0 - \partial_3 \Gamma_{03}^0 + \Gamma_{00}^0 \Gamma_{33}^0 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{02}^0 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{03}^0 \Gamma_{33}^3 - \Gamma_{30}^0 \Gamma_{03}^0 - \Gamma_{31}^0 \Gamma_{03}^1 \\
&- \Gamma_{32}^0 \Gamma_{03}^2 - \Gamma_{33}^0 \Gamma_{03}^3 + \partial_1 \Gamma_{33}^1 - \partial_3 \Gamma_{13}^1 + \Gamma_{10}^1 \Gamma_{33}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{13}^1 \Gamma_{33}^3 \\
&- \Gamma_{30}^1 \Gamma_{13}^0 - \Gamma_{31}^1 \Gamma_{13}^1 - \Gamma_{32}^1 \Gamma_{13}^2 - \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 + \partial_2 \Gamma_{33}^2 - \partial_3 \Gamma_{23}^2 + \Gamma_{20}^2 \Gamma_{33}^0 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{33}^1 \\
&+ \Gamma_{22}^2 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{23}^2 \Gamma_{33}^3 - \Gamma_{30}^2 \Gamma_{23}^0 - \Gamma_{31}^2 \Gamma_{23}^1 - \Gamma_{32}^2 \Gamma_{23}^2 - \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 \\
&= [\partial_1 \alpha] [-re^{2\beta} \sin^2 \theta] + \frac{\partial}{\partial r} [-re^{2\beta} \sin^2 \theta] + [\partial_1 \beta] [-re^{2\beta} \sin^2 \theta] \\
&- [-re^{2\beta} \sin^2 \theta] \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial \theta} [-\sin \theta \cos \theta] + \frac{1}{r} [-re^{2\beta} \sin^2 \theta] - [-\sin \theta \cos \theta] \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\
&= -re^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_1 \alpha - \sin^2 \theta \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r) e^{-2\beta} + r \frac{\partial}{\partial r} e^{-2\beta} \right] - re^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_1 \beta \\
&+ e^{-2\beta} \sin^2 \theta - [\cos \theta \cos \theta - \sin \theta \sin \theta] - e^{-2\beta} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \\
&= -re^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_1 \alpha - e^{-2\beta} \sin^2 \theta - re^{-2\beta} \sin^2 \theta (-2\partial_1 \beta) - re^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_1 \beta \\
&- \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \\
&= -re^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_1 \alpha - e^{-2\beta} \sin^2 \theta + 2re^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_1 \beta + \sin^2 \theta \\
&= [e^{-2\beta} [r(\partial_1 \beta - \partial_1 \alpha) - 1] + 1] \sin^2 \theta
\end{aligned}$$

$$\boxed{R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta} \tag{E-36}$$

## E.4. Límite Newtoniano

Como es bien conocido, la mecánica Newtoniana responde a una gran variedad de situaciones de la vida cotidiana. Sin embargo, su valor esta restringido para movimientos con velocidades muy inferiores a la velocidad de la luz. Por otro lado, adicional a que el movimiento posea una velocidad leve respecto a  $c$ , en varias situaciones el campo gravitacional generado por una distribución de materia es débil, haciendo que la geometría sea plana; logrando, de esta manera, asumir que la métrica asociada a dicho espacio difiera muy poco de  $\eta_{\mu\nu}$ .

En contraste, si se estudia un campo con las siguientes características: débil y estático; y además se considera una partícula moviéndose con una velocidad  $v \ll c$ , el tensor métrico asociado a dicho campo (débil) será,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{E-37}$$

con  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ , y considerando, en esta oportunidad, un movimiento no relativista de tal forma que  $\tau \approx t$ ,  $dx^0/d\tau = c$  y  $dx^\mu/d\tau \approx v^\mu \ll c$ . Sobre la ecuación de la geodésica se obtiene:

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = -c^2 \Gamma_{00}^\mu \tag{E-38}$$

En donde, en el contexto de la teoría clásica el miembro derecho de la anterior ecuación, puede ser entendido como la fuerza gravitacional que da a la partícula su aceleración. Calculando los coeficientes de la conexión, se obtienen las siguientes igualdades:

$$\Gamma_{00}^{\mu} = -\frac{1}{2}g^{\mu\sigma}g_{00,\sigma} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\sigma}}$$

para las cuales, se ha mantenido el primer orden de los términos de  $\eta$ . Reconociendo que  $\eta^{\mu\sigma} = \delta^{\mu\sigma}$  para los índices como de espacio,

$$\Gamma_{00}^{\mu} = -\frac{1}{2}\nabla_{\sigma}h_{00}$$

Sustituyendo, el último resultado en la ecuación (E-38),

$$\frac{d^2x^{\mu}}{dt^2} = \frac{c^2}{2}\nabla_{\sigma}h_{00}$$

y comparándose con la ecuación de Newton  $\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla\Phi$ , en donde  $\Phi$  se conoce como el potencial gravitacional, se puede rescatar fácilmente que:

$$h_{00} = -\frac{2\Phi}{c^2} \tag{E-39}$$

Identificando a  $\Phi = -GM/r$ , como el potencial asociado a una fuente de masa  $M$  calculado a una distancia  $r$ . Se tiene que el primer elemento del tensor métrico (E-37) es:

$$g_{00} = -\left[1 - \frac{2GM}{rc^2}\right]$$

## E.5. Escalar de Kretschmann

Es importante reconocer que, para el cálculo del escalar sería pertinente, en términos de tiempo, construir algún programa en Fortran o Maple(GRTensor). Sin embargo, es significativo, por lo menos para la métrica de Schwarzschild reconocer algunos de los pasos de este cálculo. Para iniciar recuérdese el tensor de Riemann

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}$$

que al ser aplicada la operación de subir o bajar índices, por medio del tensor métrico, se obtiene  $R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\gamma}R^{\gamma}{}_{\sigma\mu\nu}$  y  $R^{\rho\sigma\mu\nu} = g^{\alpha\sigma}g^{\beta\mu}g^{\lambda\nu}R^{\gamma}{}_{\alpha\beta\lambda}$ . Por otro lado, utilizando el tensor métrico de Schwarzschild,

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\left[1 - \frac{2GM}{rc^2}\right] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left[1 - \frac{2GM}{rc^2}\right]^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

junto con sus componentes inversas, se obtienen las conexiones no nulas de Christoffel:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 &= \frac{GM}{r(c^2r - 2GM)} & \Gamma_{33}^1 &= -\frac{1}{c^2}(rc^2 - 2GM)\sin^2\theta \\
\Gamma_{00}^1 &= \frac{GM(rc^2 - 2GM)}{r^3c^4} & \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{r} \\
\Gamma_{11}^1 &= -\frac{GM}{r(c^2r - 2GM)} & \Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta\cos\theta \\
\Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{c^2}(rc^2 - 2GM) & \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{r} \\
& & \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}
\end{aligned}$$

Con el objetivo de obtener las componentes no nulas del tensor de Riemann, dado que al expandir la expresión  $R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho 0}R^0_{\sigma\mu\nu} + g_{\rho 1}R^1_{\sigma\mu\nu} + g_{\rho 2}R^2_{\sigma\mu\nu} + g_{\rho 3}R^3_{\sigma\mu\nu}$  se observa la importancia de encontrar dichas componentes. Así, después de un cálculo laborioso y con ayuda de algunas propiedades del tensor, se encuentra

$$\begin{aligned}
R^0_{101} = -R^0_{110} &= \frac{2GM}{r^2(c^2r - 2GM)} & R^2_{020} = -R^2_{002} &= \frac{GM(rc^2 - 2GM)}{r^4c^4} \\
R^0_{220} = -R^0_{202} &= \frac{GM}{rc^2} & R^2_{112} = -R^2_{121} &= \frac{GM}{r^2(rc^2 - 2GM)} \\
R^0_{330} = -R^0_{303} &= \frac{GM\sin^2\theta}{rc^2} & R^2_{323} = -R^2_{332} &= \frac{2GM\sin^2\theta}{rc^2} \\
R^1_{001} = -R^1_{010} &= \frac{2GM(rc^2 - 2GM)}{r^4c^4} & R^3_{113} = -R^3_{131} &= \frac{GM}{r(rc^2 - 2GM)} \\
R^1_{221} = -R^1_{212} &= \frac{GM}{rc^2} & R^3_{232} = -R^3_{223} &= \frac{2GM}{rc^2} \\
R^1_{331} = -R^1_{313} &= \frac{GM\sin^2\theta}{rc^2} & R^3_{030} = -R^3_{003} &= \frac{GM(rc^2 - 2GM)}{r^4c^4}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, con ayuda de la expresión descrita en el párrafo anterior, se encuentran las componentes no nulas del tensor  $R_{\rho\sigma\mu\nu}$ .

$$\begin{aligned}
R_{0110} = -R_{0101} &= \frac{2GM}{r^3c^2} & R_{1001} = -R_{1010} &= \frac{2GM}{r^3c^2} \\
R_{0202} = -R_{0220} &= \frac{GM(rc^2 - 2GM)}{r^2c^4} & R_{1221} = -R_{1212} &= \frac{GM}{rc^2 - 2GM} \\
R_{0303} = -R_{0330} &= \frac{GM(rc^2 - 2GM)\sin^2\theta}{r^2c^4} & R_{1331} = -R_{1313} &= \frac{GM\sin^2\theta}{rc^2 - 2GM}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{2020} = -R_{2002} &= \frac{GM(rc^2 - 2GM)}{r^2 c^4} & R_{3030} = -R_{3003} &= \frac{GM(rc^2 - 2GM) \sin^2 \theta}{r^2 c^4} \\
R_{2112} = -R_{2121} &= \frac{GM}{rc^2 - 2GM} & R_{3113} = -R_{3131} &= \frac{GM r \sin^2 \theta}{rc^2 - 2GM} \\
R_{2323} = -R_{2332} &= \frac{2GM r \sin^2 \theta}{c^2} & R_{3232} = -R_{3223} &= \frac{2GM r \sin^2 \theta}{c^2}
\end{aligned}$$

De la misma manera corriendo los índices que indican suma para el tensor  $R^{\rho\sigma\mu\nu}$ , utilizando las componentes del tensor  $g^{\mu\nu}$  (Schwarzschild) y el tensor de Riemann; se encuentra que, de los 256 términos, los únicos distintos a cero son:

$$\begin{aligned}
R^{0110} = -R^{0101} &= \frac{2GM}{r^3 c^2} & R^{2020} = -R^{2002} &= \frac{GM}{r^4 (rc^2 - 2GM)} \\
R^{0202} = -R^{0220} &= \frac{GM}{r^4 (rc^2 - 2GM)} & R^{2112} = -R^{2121} &= \frac{GM(rc^2 - 2GM)}{r^6 c^4} \\
R^{0303} = -R^{0330} &= \frac{GM}{r^4 \sin^2 \theta (rc^2 - 2GM)} & R^{2323} = -R^{2332} &= \frac{2GM}{r^7 c^2 \sin^2 \theta} \\
R^{1001} = -R^{1010} &= \frac{2GM}{r^3 c^2} & R^{3113} = -R^{3131} &= \frac{GM(rc^2 - 2GM)}{r^7 c^4 \sin^2 \theta} \\
R^{1221} = -R^{1212} &= \frac{GM(rc^2 - 2GM)}{r^6 c^4} & R^{3232} = -R^{3223} &= \frac{2GM}{r^7 c^2 \sin^2 \theta} \\
R^{1331} = -R^{1313} &= \frac{GM(rc^2 - 2GM)}{r^6 c^4 \sin^2 \theta} & R^{3030} = -R^{3003} &= \frac{GM}{r^4 (rc^2 - 2GM) \sin^2 \theta}
\end{aligned}$$

Finalmente, después de correr los índices que indican suma para la expresión  $R^{\rho\sigma\mu\nu} R_{\rho\sigma\mu\nu}$ , el escalar de Kretschmann está dado por el producto de los 24 términos no nulos, de los 256, descritos en los 4 bloques anteriores de ecuaciones, de tal manera que,

$$\boxed{R^{\rho\sigma\mu\nu} R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{48G^2 M^2}{r^6 c^4}} \quad (\text{E-40})$$

## E.6. Coordenadas de Eddington-Finkelstein

Introducción de la coordenada tortuga  $r^*$ , solución a la ecuación (2-34).

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{dr} &= \pm \frac{1}{c} \left[ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right]^{-1} = \pm \frac{1}{c} \frac{1}{rc^2 - 2GM} \\
\int dt &= \pm \frac{1}{c} \int \frac{rc^2 dr}{rc^2 - 2GM}
\end{aligned}$$

efectuando la sustitución simple  $u = rc^2 - 2GM$ ,

$$\begin{aligned} \int dt &= \pm \frac{1}{c} \int \frac{u + 2GM}{u} \frac{du}{c^2} = \pm \frac{1}{c^3} \int \left[ 1 + \frac{2GM}{u} \right] du \\ &= \pm \left[ \frac{u}{c^3} + \frac{2GM}{c^3} \ln u + \text{Constante} \right] \\ &= \pm \left[ \frac{rc^2 - 2GM}{c^3} + \frac{2GM}{c^3} \ln \left[ 2GM \left( \frac{rc^2}{2GM} - 1 \right) \right] + \text{Constante} \right] \end{aligned}$$

aplicando la regla del producto sobre el logaritmo y agrupando los términos independientes de  $r$ , utilizando la notación; constante =  $\frac{2GM}{c^3} \ln(2GM) - \frac{2GM}{c^3} + \text{Constante}$ , se logra

$$t = \pm \frac{r}{c} + \frac{2GM}{c^3} \ln \left[ \frac{rc^2}{2GM} - 1 \right] + \text{constante}$$

y definiendo a  $r^* = \frac{r}{c} + \frac{2GM}{c^3} \ln \left[ \frac{rc^2}{2GM} - 1 \right]$ , se tiene

$$\boxed{t = \pm r^* + \text{constante}} \quad (\text{E-41})$$

Ahora la solución de Schwarzschild en términos de la coordenada  $r^*$ , se logra por medio de cálculo simple,

$$\begin{aligned} \frac{dr^*}{dr} &= \frac{1}{c} + \frac{2GM}{c^3} \frac{2GM}{rc^2 - 2GM} \frac{c^2}{2GM} = \frac{rc}{rc^2 - 2GM} \quad \text{despejando } dr \text{ y elevando al cuadrado.} \\ dr^2 &= \left[ c - \frac{2GM}{rc} \right]^2 dr^{*2} = c^2 \left[ 1 - \frac{2GM}{rc^2} \right]^2 dr^{*2} \end{aligned}$$

y sustituyendo sobre (2-33), se encuentra:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 \left[ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right] dt^2 + \left[ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right]^{-1} c^2 \left[ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right]^2 dr^{*2} + r^2 d\Omega^2 \\ &= -c^2 \left[ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right] dt^2 + c^2 \left[ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right] dr^{*2} + r^2 d\Omega^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{ds^2 = c^2 \left[ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right] (-dt^2 + dr^{*2}) + r^2 d\Omega^2} \quad (\text{E-42})$$

Finalmente utilizando coordenadas nulas, para geodésicas entrantes  $\tilde{u} = t + r^*$  [2], y derivando respecto a  $r$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dr} &= \frac{d\tilde{u}}{dr} - \frac{dr^*}{dr} = \frac{d\tilde{u}}{dr} - \frac{d}{dr} \left[ \frac{r}{c} + \frac{2GM}{c^3} \ln \left( \frac{rc^2}{2GM} - 1 \right) \right] \\ &= \frac{d\tilde{u}}{dr} - \frac{1}{c} - \frac{2GM}{c^3} \frac{2GM}{rc^2 - 2GM} \frac{c^2}{2GM} = \frac{d\tilde{u}}{dr} - \frac{rc}{rc^2 - 2GM} \\ dt &= d\tilde{u} - \frac{rc}{rc^2 - 2GM} dr \end{aligned}$$

elevando al cuadrado

$$dt^2 = d\tilde{u}^2 - 2\frac{rc}{rc^2 - 2GM}drd\tilde{u} + \left[\frac{rc}{rc^2 - 2GM}dr\right]^2$$

reemplazando en (2-33),

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 \left[1 - \frac{2GM}{c^2r}\right] \left[ d\tilde{u}^2 - 2\frac{rc}{rc^2 - 2GM}drd\tilde{u} + \left[\frac{rc}{rc^2 - 2GM}dr\right]^2 \right] \\ &+ \left[1 - \frac{2GM}{rc^2}\right]^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\ &= -c^2 \left[1 - \frac{2GM}{c^2r}\right] d\tilde{u}^2 + 2c^2 \left[\frac{c^2r - 2GM}{c^2r}\right] \frac{rc}{rc^2 - 2GM} drd\tilde{u} \\ &- c^2 \left[\frac{c^2r - 2GM}{c^2r}\right] \frac{c^2r^2}{(c^2r - 2GM)^2} dr^2 + \frac{rc^2}{rc^2 - 2GM} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\ &= -c^2 \left[1 - \frac{2GM}{c^2r}\right] d\tilde{u}^2 + 2cd\tilde{u}dr - \frac{c^2r}{rc^2 - 2GM} dr^2 + \frac{c^2r}{rc^2 - 2GM} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{ds^2 = -c^2 \left[1 - \frac{2GM}{c^2r}\right] d\tilde{u}^2 + 2cd\tilde{u}dr + r^2 d\Omega^2} \quad (\text{E-43})$$



## F. Anexo: Formulación de la Tétrada

Siguiendo a [3] y [16], en este anexo se presenta un acercamiento a la construcción de la tétrada empleada para la solución del problema. Es importante reconocer el papel que juegan estas estructuras en la solución de problemas en la TGR; por lo tanto, se recomienda al lector ver [3] pág. 35.

En cualquier punto del espacio-tiempo podemos erigir un conjunto de cuatro vectores (ortogonales), uno como de tiempo y tres como de espacio. Denotados de la forma  $e_{(a)}{}^\mu$ , en donde el índice encerrado en paréntesis, usualmente notados con las primeras letras del alfabeto, indican los índices de la tétrada (denota cual vector de la tétrada se tiene  $a = 0, 1, 2, 3$ ) y los índices tensoriales, denotados con letras del alfabeto griego, denotan las componentes del vector  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . De esta manera, por ejemplo, para el espacio-tiempo de Minkowski, se mantiene la relación

$$e_{(a)}{}^\mu e_{(b)\mu} = \eta_{(a)(b)} \quad \circ \quad \eta_{\mu\nu} e_{(a)}{}^\mu e_{(b)}{}^\nu = \eta_{(a)(b)}$$

en donde se hace evidente, que los índices de las tétradas también se pueden subir o bajar utilizando la métrica del espacio plano<sup>1</sup>. Sin embargo, para un espacio-tiempo más general con métrica  $g_{\mu\nu}$ , se tiene:

$$g_{\mu\nu} e_{(a)}{}^\mu e_{(b)}{}^\nu = \eta_{(a)(b)}$$

y mientras  $g_{\mu\nu}$  sea no singular, siempre es posible definir la inversa de  $e_{(a)}{}^\mu$ , denotada como  $e^{(a)}{}_\mu$ , de la forma<sup>2</sup>

$$g_{\mu\nu} = e^{(a)}{}_\mu e^{(b)\nu} \eta_{(a)(b)}$$

Entonces, asumiendo que  $u_\mu = (-1, 0, 0, 0)$ ,  $i_\mu = (0, 1, 0, 0)$ ,  $j_\mu = (0, 0, 1, 0)$  y  $k_\mu = (0, 0, 0, 1)$  junto con las condiciones de orto-normalidad:

$$\begin{aligned} u^\mu u_\mu &= u^0 u_0 + u^1 u_1 + u^2 u_2 + u^3 u_3 = -1 \\ i^\mu i_\mu &= j^\mu j_\mu = k^\mu k_\mu = 1, \quad u^\mu i_\mu = u^\mu j_\mu = u^\mu k_\mu = 0 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>También, podrían afirmarse los siguientes enunciados[3]:

- La convención de suma de índices se puede utilizar sobre las dos clases de índices.
- No hay inconvenientes en tener cantidades en las que se tienen presentes índices de ambos tipos.
- Se puede pasar libremente de los índices tensoriales a los índices de la tétrada y viceversa.

<sup>2</sup>Se supone que si la base de vectores  $e_{(a)}{}^\mu$  son ortonormales,  $\eta_{(a)(b)}$  representa una matriz diagonal con elementos en su diagonal, dados por  $\text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ .

y debido a la definición no positiva del elemento de línea, se puede construir una base de vectores nula (formalismo de Newman-Penrose [13]), de manera que, se definen los vectores nulos  $l_\mu$  y  $n_\mu$  a partir de la base utilizada en el espacio plano (combinado el vector como de tiempo  $u_\mu$  y un vector como de espacio  $i_\mu$ ):

$$e_{(0)}{}^\mu = l^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(u^\mu + i^\mu) \quad e_{(1)}{}^\mu = n^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(u^\mu - i^\mu)$$

con inversas

$$u^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(l^\mu + n^\mu) \quad i^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(l^\mu - n^\mu)$$

que satisfacen las relaciones,

$$l^\mu n_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(u^\mu + i^\mu) \frac{1}{\sqrt{2}}(u_\mu - i_\mu) = \frac{1}{2}(u^\mu u_\mu - u^\mu i_\mu + i^\mu u_\mu - i^\mu i_\mu) = -1 \quad (\text{F-1})$$

$$l^\mu l_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(u^\mu + i^\mu) \frac{1}{\sqrt{2}}(u_\mu + i_\mu) = \frac{1}{2}(u^\mu u_\mu + u^\mu i_\mu + i^\mu u_\mu + i^\mu i_\mu) = 0 \quad (\text{F-2})$$

$$n^\mu n_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(u^\mu - i^\mu) \frac{1}{\sqrt{2}}(u_\mu - i_\mu) = \frac{1}{2}(u^\mu u_\mu - u^\mu i_\mu - i^\mu u_\mu + i^\mu i_\mu) = 0 \quad (\text{F-3})$$

Construyendo dos vectores más (usando los vectores como de espacio restantes  $j_\mu$  y  $k_\mu$ ), utilizando una combinación compleja de la forma, con  $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$

$$e_{(2)}{}^\mu = m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(j^\mu + \mathbf{i}k^\mu) \quad e_{(3)}{}^\mu = \bar{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(j^\mu - \mathbf{i}k^\mu)$$

en donde  $\bar{m}$  denota el complejo conjugado de  $m$ , con inversas

$$j^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(m^\mu + \bar{m}^\mu) \quad k^\mu = -\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}(m^\mu - \bar{m}^\mu)$$

se cumplen también las relaciones,

$$m^\mu m_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(j^\mu + \mathbf{i}k^\mu) \frac{1}{\sqrt{2}}(j_\mu + \mathbf{i}k_\mu) = \frac{1}{2}(j^\mu j_\mu + \mathbf{i}j^\mu k_\mu + \mathbf{i}k^\mu j_\mu - k^\mu k_\mu) = 0 \quad (\text{F-4})$$

$$\bar{m}^\mu \bar{m}_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(j^\mu - \mathbf{i}k^\mu) \frac{1}{\sqrt{2}}(j_\mu - \mathbf{i}k_\mu) = \frac{1}{2}(j^\mu j_\mu - \mathbf{i}j^\mu k_\mu - \mathbf{i}k^\mu j_\mu - k^\mu k_\mu) = 0 \quad (\text{F-5})$$

$$m^\mu \bar{m}_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(j^\mu + \mathbf{i}k^\mu) \frac{1}{\sqrt{2}}(j_\mu - \mathbf{i}k_\mu) = \frac{1}{2}(j^\mu j_\mu - \mathbf{i}j^\mu k_\mu + \mathbf{i}k^\mu j_\mu + k^\mu k_\mu) = 1 \quad (\text{F-6})$$

Observe finalmente que las relaciones dadas en (F-2), (F-3), (F-4) y (F-5) dan cuenta de que los vectores construidos son nulos y las ecuaciones (F-1) y (F-6) muestran que cada par de vectores no son ortogonales. También, es fácil comprobar que, dicha elección, satisface las condiciones de ortogonalidad,

$$m^\mu l_\mu = m^\mu n_\mu = \bar{m}^\mu l_\mu = \bar{m}^\mu n_\mu = 0.$$

Así, se tiene que la métrica para el espacio-tiempo construida a partir de la tétrada nula, esta dada por los coeficientes:

$$\eta_{(a)(b)} = e_{(a)}{}^\mu e_{(b)\mu} = e_{(a)}{}^0 e_{(b)0} + e_{(a)}{}^1 e_{(b)1} + e_{(a)}{}^2 e_{(b)2} + e_{(a)}{}^3 e_{(b)3}$$

por tanto para cada coeficiente, se tiene el valor:

$$\begin{aligned} \eta_{(0)(0)} &= e_{(0)}{}^\mu e_{(0)\mu} = e_{(0)}{}^0 e_{(0)0} + e_{(0)}{}^1 e_{(0)1} + e_{(0)}{}^2 e_{(0)2} + e_{(0)}{}^3 e_{(0)3} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \\ \eta_{(0)(1)} &= e_{(0)}{}^\mu e_{(1)\mu} = e_{(0)}{}^0 e_{(1)0} + e_{(0)}{}^1 e_{(1)1} + e_{(0)}{}^2 e_{(1)2} + e_{(0)}{}^3 e_{(1)3} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = -1 \\ \eta_{(0)(2)} &= e_{(0)}{}^\mu e_{(2)\mu} = e_{(0)}{}^0 e_{(2)0} + e_{(0)}{}^1 e_{(2)1} + e_{(0)}{}^2 e_{(2)2} + e_{(0)}{}^3 e_{(2)3} = 0 \\ \eta_{(0)(3)} &= e_{(0)}{}^\mu e_{(3)\mu} = e_{(0)}{}^0 e_{(3)0} + e_{(0)}{}^1 e_{(3)1} + e_{(0)}{}^2 e_{(3)2} + e_{(0)}{}^3 e_{(3)3} = 0 \end{aligned}$$

y de la misma manera, además del supuesto de simetría, para los coeficientes restantes se obtiene el tensor métrico:

$$\eta_{(a)(b)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente al ser aplicada esta tétrada al espacio-tiempo de Minkowski (o si se quiere corriendo los índices  $(a)$  y  $(b)$  de la expresión  $g_{\mu\nu} = e^{(a)}{}_\mu e^{(b)}{}_\nu \eta_{(a)(b)}$ ), se obtiene,

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} = -u_\mu u_\nu + i_\mu i_\nu + j_\mu j_\nu + k_\mu k_\nu \\ &= -\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(l_\mu + n_\mu)\right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(l_\nu + n_\nu)\right] + \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(l_\mu - n_\mu)\right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(l_\nu - n_\nu)\right] \\ &+ \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(m_\mu + \bar{m}_\mu)\right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(m_\nu + \bar{m}_\nu)\right] + \left[-\frac{i}{\sqrt{2}}(m_\mu - \bar{m}_\mu)\right] \left[-\frac{i}{\sqrt{2}}(m_\nu - \bar{m}_\nu)\right] \\ &= -\frac{1}{2}(l_\mu l_\nu + l_\mu n_\nu + n_\mu l_\nu + n_\mu n_\nu) + \frac{1}{2}(l_\mu l_\nu - l_\mu n_\nu - n_\mu l_\nu + n_\mu n_\nu) \\ &+ \frac{1}{2}(m_\mu m_\nu + m_\mu \bar{m}_\nu + \bar{m}_\mu m_\nu + \bar{m}_\mu \bar{m}_\nu) - \frac{1}{2}(m_\mu m_\nu - m_\mu \bar{m}_\nu - \bar{m}_\mu m_\nu + \bar{m}_\mu \bar{m}_\nu) \end{aligned}$$

$$\boxed{g_{\mu\nu} = -l_\mu n_\nu - n_\mu l_\nu + m_\mu \bar{m}_\nu + \bar{m}_\mu m_\nu} \quad (\text{F-7})$$

y su forma contravariante equivalente.

$$\boxed{g^{\mu\nu} = -l^\mu n^\nu - n^\mu l^\nu + m^\mu \bar{m}^\nu + \bar{m}^\mu m^\nu} \quad (\text{F-8})$$

## G. Anexo: Transformación de Coordenadas

Este anexo presenta en forma detallada como se representa la base nula de vectores construida en las ecuaciones (3-12) a (3-15) por medio de la transformación,

$$r = r' - i\frac{a}{c} \cos \theta, \quad u = u' - i\frac{a}{c^2} \cos \theta, \quad \theta = \theta', \quad \varphi = \varphi'$$

recordando la forma usual para transformación de componentes contravariantes:

$$V'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu}$$

y reconociendo que  $x'^0 = cu'$ ,  $x'^1 = r'$ ,  $x'^2 = \theta'$  y  $x'^3 = \varphi'$ ; se obtiene la relación matricial

$$\begin{bmatrix} V'^0 \\ V'^1 \\ V'^2 \\ V'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^0}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^0}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^0}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x'^1}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x'^3}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^0 \\ V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{ia}{c} \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{ia}{c} \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^0 \\ V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{bmatrix} \quad (\text{G-1})$$

Así para cada vector de la base nula se tiene:

$$l'^{\mu} = (0, 1, 0, 0) \quad (\text{G-2})$$

$$n'^{\mu} = \left( -1, -\frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{GM}{c^2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}} \right) \right], 0, 0 \right) \quad (\text{G-3})$$

$$m'^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}\bar{r}} \left( -\frac{ia}{c} \sin \theta, -\frac{ia}{c} \sin \theta, 1, \frac{i}{\sin \theta} \right) \quad (\text{G-4})$$

$$\bar{m}'^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left( \frac{ia}{c} \sin \theta, \frac{ia}{c} \sin \theta, 1, -\frac{i}{\sin \theta} \right) \quad (\text{G-5})$$

# H. Anexo: Algunos Cálculos para la Solución de Kerr

## H.1. Coeficientes del Tensor Métrico en la Base Nula

Utilizando (3-16) a (3-19) sobre (3-11), para cada coeficiente se tiene:

$$\begin{aligned}
 g'^{00} &= -l'^0 n'^0 - n'^0 l'^0 + m'^0 \bar{m}'^0 + \bar{m}'^0 m'^0 = \left[ -\frac{ia \sin \theta}{c\sqrt{2\bar{r}}} \right] \left[ \frac{ia \sin \theta}{c\sqrt{2r}} \right] \\
 &+ \left[ \frac{ia \sin \theta}{c\sqrt{2\bar{r}}} \right] \left[ -\frac{ia \sin \theta}{c\sqrt{2r}} \right] = \frac{a^2 \sin^2 \theta}{c^2(r'^2 + (a^2/c^2) \cos^2 \theta)} \\
 \boxed{g'^{00} = \frac{(a^2/c^2) \sin^2 \theta}{\Sigma}} &\quad \text{con } r\bar{r} = \Sigma = r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta
 \end{aligned} \tag{H-1}$$

$$\begin{aligned}
 g'^{01} &= -l'^0 n'^1 - n'^0 l'^1 + m'^0 \bar{m}'^1 + \bar{m}'^0 m'^1 = 1 + \left[ -\frac{ia \sin \theta}{c\sqrt{2\bar{r}}} \right] \left[ \frac{ia \sin \theta}{c\sqrt{2r}} \right] \\
 &+ \left[ \frac{ia \sin \theta}{c\sqrt{2\bar{r}}} \right] \left[ -\frac{ia \sin \theta}{c\sqrt{2r}} \right] = 1 + \frac{(a^2/c^2) \sin^2 \theta}{\Sigma} \\
 \boxed{g'^{01} = g'^{10} = \frac{r'^2 + (a^2/c^2)}{\Sigma}} &
 \end{aligned} \tag{H-2}$$

$$\begin{aligned}
 g'^{02} &= -l'^0 n'^2 - n'^0 l'^2 + m'^0 \bar{m}'^2 + \bar{m}'^0 m'^2 = \left[ -\frac{ia \sin \theta}{c\sqrt{2\bar{r}}} \right] \left[ \frac{1}{\sqrt{2r}} \right] \\
 &+ \left[ \frac{ia \sin \theta}{c\sqrt{2\bar{r}}} \right] \left[ \frac{1}{\sqrt{2\bar{r}}} \right] \\
 \boxed{g'^{02} = g'^{20} = 0} &
 \end{aligned} \tag{H-3}$$

$$\begin{aligned}
 g'^{03} &= -l'^0 n'^3 - n'^0 l'^3 + m'^0 \bar{m}'^3 + \bar{m}'^0 m'^3 = \left[ -\frac{ia \sin \theta}{c\sqrt{2\bar{r}}} \right] \left[ \frac{i/\sin \theta}{\sqrt{2r}} \right] \\
 &+ \left[ \frac{ia \sin \theta}{c\sqrt{2\bar{r}}} \right] \left[ \frac{i/\sin \theta}{\sqrt{2\bar{r}}} \right] \\
 \boxed{g'^{03} = g'^{30} = -\frac{a}{c\Sigma}} &
 \end{aligned} \tag{H-4}$$

$$\begin{aligned}
g'^{11} &= -l'^1 n'^1 - n'^1 l'^1 + m'^1 \bar{m}'^1 + \bar{m}'^1 m'^1 \\
&= -2 \left[ -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{(2GM/c^2)r'}{r'^2 + (a/c)^2 \cos^2 \theta} \right) \right] + \left[ \frac{-ia \sin \theta}{\sqrt{2c\bar{r}}} \right] \left[ \frac{ia \sin \theta}{\sqrt{2cr}} \right] \\
&\quad + \left[ \frac{-ia \sin \theta}{\sqrt{2c\bar{r}}} \right] \left[ \frac{ia \sin \theta}{\sqrt{2cr}} \right] \\
&= \frac{r'^2 + (a^2/c^2)(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - (2MG/c^2)r'}{\Sigma}
\end{aligned}$$

$$\boxed{g'^{11} = \frac{r'^2 + (a^2/c^2) - (2MG/c^2)r'}{\Sigma}} \quad (\text{H-5})$$

$$\begin{aligned}
g'^{12} &= -l'^1 n'^2 - l'^2 n'^1 + m'^1 \bar{m}'^2 + \bar{m}'^1 m'^2 = \left[ -\frac{ia \sin \theta}{\sqrt{2c\bar{r}}} \right] \left[ \frac{1}{\sqrt{2r}} \right] \\
&\quad + \left[ \frac{1}{\sqrt{2\bar{r}}} \right] \left[ \frac{ia \sin \theta}{\sqrt{2cr}} \right]
\end{aligned}$$

$$\boxed{g'^{12} = g'^{21} = 0} \quad (\text{H-6})$$

$$\begin{aligned}
g'^{13} &= -l'^1 n'^3 - n'^1 l'^3 + m'^1 \bar{m}'^3 + \bar{m}'^1 m'^3 = \left[ \frac{-ia \sin \theta}{\sqrt{2cr}} \right] \left[ -\frac{i/\sin \theta}{\sqrt{2\bar{r}}} \right] \\
&\quad + \left[ \frac{ia \sin \theta}{\sqrt{2c\bar{r}}} \right] \left[ \frac{i/\sin \theta}{\sqrt{2r}} \right] = -\frac{a}{c[r'^2 + (a^2/c^2) \cos^2 \theta]}
\end{aligned}$$

$$\boxed{g'^{13} = g'^{31} = -\frac{a}{c\Sigma}} \quad (\text{H-7})$$

$$\begin{aligned}
g'^{22} &= -l'^2 n'^2 - l'^2 n'^2 + m'^2 \bar{m}'^2 + \bar{m}'^2 m'^2 = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\bar{r}}} \right] \left[ \frac{1}{\sqrt{2r}} \right] \\
&\quad + \left[ \frac{1}{\sqrt{2\bar{r}}} \right] \left[ \frac{1}{\sqrt{2r}} \right] = \frac{1}{r'^2 + (a^2/c^2) \cos^2 \theta}
\end{aligned}$$

$$\boxed{g'^{22} = \frac{1}{\Sigma}} \quad (\text{H-8})$$

$$\begin{aligned}
g'^{23} &= -l'^2 n'^3 - n'^2 l'^3 + m'^2 \bar{m}'^3 + \bar{m}'^2 m'^3 = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\bar{r}}} \right] \left[ -\frac{i/\sin \theta}{\sqrt{2r}} \right] \\
&\quad + \left[ \frac{1}{\sqrt{2r}} \right] \left[ \frac{i/\sin \theta}{\sqrt{2\bar{r}}} \right]
\end{aligned}$$

$$\boxed{g'^{23} = g'^{32} = 0} \quad (\text{H-9})$$

$$g'^{33} = -l'^3 n'^3 - l'^3 n'^3 + m'^3 \bar{m}'^3 + \bar{m}'^3 m'^3 = \left[ \frac{i/\sin\theta}{\sqrt{2\bar{r}}} \right] \left[ -\frac{i/\sin\theta}{\sqrt{2r}} \right] \\ + \left[ \frac{i/\sin\theta}{\sqrt{2\bar{r}}} \right] \left[ -\frac{i/\sin\theta}{\sqrt{2r}} \right] = \frac{1}{(r'^2 + (a^2/c^2) \cos^2 \theta) \sin^2 \theta}$$

$$\boxed{g'^{33} = \frac{1}{\Sigma \sin^2 \theta}} \quad (\text{H-10})$$

## H.2. Componentes Covariantes del Tensor Métrico (3-20)

Para determinar la solución en componentes covariantes, recuerde que:  $g_{\mu\nu} g^{\nu\sigma} = \delta_{\mu}^{\sigma}$ . Por lo tanto para  $\sigma = 0$  y  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , se tiene las ecuaciones:

$$g_{00} \left[ \frac{(a^2/c^2) \sin^2 \theta}{\Sigma} \right] + g_{01} \left[ \frac{r'^2 + (a^2/c^2)}{\Sigma} \right] + g_{03} \left[ -\frac{a}{c\Sigma} \right] = 1 \quad (\text{H-11})$$

$$g_{10} \left[ \frac{(a^2/c^2) \sin^2 \theta}{\Sigma} \right] + g_{11} \left[ \frac{r'^2 + (a^2/c^2)}{\Sigma} \right] + g_{13} \left[ -\frac{a}{c\Sigma} \right] = 0 \quad (\text{H-12})$$

$$g_{20} \left[ \frac{(a^2/c^2) \sin^2 \theta}{\Sigma} \right] + g_{21} \left[ \frac{r'^2 + (a^2/c^2)}{\Sigma} \right] + g_{23} \left[ -\frac{a}{c\Sigma} \right] = 0 \quad (\text{H-13})$$

$$g_{30} \left[ \frac{(a^2/c^2) \sin^2 \theta}{\Sigma} \right] + g_{31} \left[ \frac{r'^2 + (a^2/c^2)}{\Sigma} \right] + g_{33} \left[ -\frac{a}{c\Sigma} \right] = 0 \quad (\text{H-14})$$

con  $\sigma = 1$  y  $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$g_{00} \left[ \frac{r'^2 + (a^2/c^2)}{\Sigma} \right] + g_{01} \left[ \frac{r'^2 + (a^2/c^2) - (2GM/c^2)r'}{\Sigma} \right] + g_{03} \left[ -\frac{a}{c\Sigma} \right] = 0 \quad (\text{H-15})$$

$$g_{10} \left[ \frac{r'^2 + (a^2/c^2)}{\Sigma} \right] + g_{11} \left[ \frac{r'^2 + (a^2/c^2) - (2GM/c^2)r'}{\Sigma} \right] + g_{13} \left[ -\frac{a}{c\Sigma} \right] = 1 \quad (\text{H-16})$$

$$g_{20} \left[ \frac{r'^2 + (a^2/c^2)}{\Sigma} \right] + g_{21} \left[ \frac{r'^2 + (a^2/c^2) - (2GM/c^2)r'}{\Sigma} \right] + g_{23} \left[ -\frac{a}{c\Sigma} \right] = 0 \quad (\text{H-17})$$

$$g_{30} \left[ \frac{r'^2 + (a^2/c^2)}{\Sigma} \right] + g_{31} \left[ \frac{r'^2 + (a^2/c^2) - (2GM/c^2)r'}{\Sigma} \right] + g_{33} \left[ -\frac{a}{c\Sigma} \right] = 0 \quad (\text{H-18})$$

con  $\sigma = 2$  y  $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$g_{02} \left[ \frac{1}{\Sigma} \right] = g_{12} \left[ \frac{1}{\Sigma} \right] = g_{32} \left[ \frac{1}{\Sigma} \right] = 0 \rightarrow \boxed{g_{02} = 0} \quad \boxed{g_{12} = 0} \quad \boxed{g_{32} = 0} \quad (\text{H-19})$$

$$g_{22} \left[ \frac{1}{\Sigma} \right] = 0 \rightarrow \boxed{g_{22} = \Sigma} \quad (\text{H-20})$$

con  $\sigma = 3$  y  $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$g_{00} \left[ -\frac{a}{c\Sigma} \right] + g_{01} \left[ -\frac{a}{c\Sigma} \right] + g_{03} \left[ \frac{1}{\Sigma \sin^2 \theta} \right] = 0 \quad (\text{H-21})$$

$$g_{10} \left[ -\frac{a}{c\Sigma} \right] + g_{11} \left[ -\frac{a}{c\Sigma} \right] + g_{13} \left[ \frac{1}{\Sigma \sin^2 \theta} \right] = 0 \quad (\text{H-22})$$

$$g_{20} \left[ -\frac{a}{c\Sigma} \right] + g_{21} \left[ -\frac{a}{c\Sigma} \right] + g_{23} \left[ \frac{1}{\Sigma \sin^2 \theta} \right] = 0 \quad (\text{H-23})$$

$$g_{30} \left[ -\frac{a}{c\Sigma} \right] + g_{31} \left[ -\frac{a}{c\Sigma} \right] + g_{33} \left[ \frac{1}{\Sigma \sin^2 \theta} \right] = 1 \quad (\text{H-24})$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones generado por (H-11), (H-15) y (H-21), se obtiene

$$\boxed{g_{00} = - \left[ 1 - \frac{2GM r'}{c^2 \Sigma} \right]} \quad \boxed{g_{01} = 1} \quad \boxed{g_{03} = \frac{2GM a r' \sin^2 \theta}{c^3 \Sigma}} \quad (\text{H-25})$$

de la misma manera para (H-12), (H-16) y (H-22)

$$\boxed{g_{10} = 1} \quad \boxed{g_{11} = 0} \quad \boxed{g_{13} = -\frac{a}{c} \sin^2 \theta} \quad (\text{H-26})$$

para el sistema de ecuaciones homogéneo (H-13), (H-17) y (H-23); se tiene la solución trivial

$$\boxed{g_{20} = 0} \quad \boxed{g_{21} = 0} \quad \boxed{g_{23} = 0} \quad (\text{H-27})$$

y finalmente para el sistema conformado por (H-14), (H-18) y (H-24), se encuentran los coeficientes

$$\boxed{g_{30} = \frac{2GM a r' \sin^2 \theta}{c^3 \Sigma}} \quad \boxed{g_{31} = \frac{a}{c} \sin^2 \theta} \quad \boxed{g_{33} = \sin^2 \theta \left[ \frac{2GM a^2 r' \sin^2 \theta}{c^4 \Sigma} + r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right]} \quad (\text{H-28})$$

### H.3. Métrica de Kerr en la Forma de Boyer-Lindquist

Dadas las relaciones de transformación

$$cd u' = cdt + \frac{r'^2 + (a^2/c^2)}{\Delta} dr', \quad d\varphi' = d\varphi + \frac{a}{c\Delta} dr'$$

se calcula

$$\begin{aligned} c^2 du'^2 &= \left[ cdt + \frac{r'^2 + (a^2/c^2)}{\Delta} dr' \right]^2 = c^2 dt^2 + 2c \frac{r'^2 + (a^2/c^2)}{\Delta} dt dr' \\ &+ \left[ \frac{r'^2 + (a^2/c^2)}{\Delta} \right]^2 dr'^2 \end{aligned} \quad (\text{H-29})$$

$$d\varphi'^2 = \left[ d\varphi + \frac{a}{c\Delta} dr' \right]^2 = d\varphi^2 + 2 \frac{a}{c\Delta} d\varphi dr' + \left[ \frac{a}{c\Delta} \right]^2 dr'^2 \quad (\text{H-30})$$



y aplicando sobre (3-23)

$$\begin{aligned}
ds^2 &= - \left[ 1 - \frac{2GMr'}{c^2\Sigma} \right] \left[ c^2 dt^2 + 2c \frac{r'^2 + (a^2/c^2)}{\Delta} dt dr' + \left[ \frac{r'^2 + (a^2/c^2)}{\Delta} \right]^2 dr'^2 \right] \\
&+ 2c \left[ c dt - \frac{r'^2 + (a^2/c^2)}{\Delta} dr' \right] dr' - 2 \frac{a}{c} \sin^2 \theta \left[ d\varphi + \frac{a}{c\Delta} dr' \right] dr' + \Sigma d\theta^2 \\
&- \frac{4GMa r' \sin^2 \theta}{c^3 \Sigma} \left[ c dt + \frac{r'^2 + (a^2/c^2)}{\Delta} dr' \right] \left[ d\varphi + \frac{a}{c\Delta} dr' \right] \\
&+ \sin^2 \theta \left[ \frac{2GMa^2 r' \sin^2 \theta}{c^4 \Sigma} + r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right] \left[ d\varphi^2 + 2 \frac{a}{c\Delta} d\varphi dr' + \left[ \frac{a}{c\Delta} \right]^2 dr'^2 \right] \quad (H-31)
\end{aligned}$$

efectuando los productos y reduciendo a la mínima expresión cada término que se obtiene: términos que contienen a  $c^2 dt^2$ ,

$$\begin{aligned}
- \left[ 1 - \frac{2GMr'}{c^2\Sigma} \right] &= - \left[ \frac{c^2 r'^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2GMr'}{c^2 \Sigma} \right] = - \left[ \frac{c^2 r'^2 + a^2 (1 - \sin^2 \theta) - 2GMr'}{c^2 \Sigma} \right] \\
&= - \left[ \frac{r'^2 + \frac{a^2}{c^2} - \frac{a^2}{c^2} \sin^2 \theta - \frac{2GM}{c^2} r'}{\Sigma} \right] = - \left[ \frac{\Delta - (a^2/c^2) \sin^2 \theta}{\Sigma} \right] \quad (H-32)
\end{aligned}$$

términos que contienen a  $dr'^2$ ,

$$\begin{aligned}
- \left[ 1 - \frac{2GMr'}{c^2\Sigma} \right] \left[ \frac{r'^2 + (a^2/c^2)}{\Delta} \right]^2 &+ 2 \frac{r'^2 + (a^2/c^2)}{\Delta} - \frac{4GMa^2 r' \sin^2 \theta}{c^3 \Sigma} \frac{r'^2 + (a^2/c^2)}{c\Delta^2} \\
- \frac{2a^2 \sin^2 \theta}{c^2 \Delta} + \frac{a^2}{c^2 \Delta^2} \sin^2 \theta \left[ \frac{2GMa^2 r' \sin^2 \theta}{c^4 \Sigma} + r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right] &= \frac{\Sigma}{\Delta} \quad (H-33)
\end{aligned}$$

términos que contienen a  $dt dr'$ ,

$$\begin{aligned}
-2c \left[ 1 - \frac{2GMr'}{c^2\Sigma} \right] \left[ \frac{r'^2 + (a^2/c^2)}{\Delta} \right] &+ 2c - \frac{4GMa r' \sin^2 \theta}{c^3 \Sigma} \frac{a}{\Delta} \\
= -2c \left[ 1 - \frac{2GMr'}{c^2\Sigma} \right] \left[ 1 + \frac{2GMr'}{c^2\Delta} \right] &+ 2c - \frac{4GMr'(\Delta + (2GMr'/c^2) - \Sigma)}{c\Sigma\Delta} \\
= -2c - \frac{4GMr'}{c\Delta} + \frac{4GMr'}{c\Sigma} + \frac{8G^2 M^2 r'^2}{c^3 \Sigma \Delta} &+ 2c - \frac{4GMr'}{c\Sigma} - \frac{8G^2 M^2 r'^2}{c^3 \Sigma \Delta} + \frac{4GMr'}{c\Delta} \\
= 0 \quad (H-34)
\end{aligned}$$

términos que contienen a  $d\varphi dr'$ ,

$$\begin{aligned}
- \frac{4GMa r' \sin^2 \theta}{c^3 \Sigma} \frac{r'^2 + (a^2/c^2)}{\Delta} &- 2 \frac{a}{c} \sin^2 \theta + \frac{2a \sin^2 \theta}{c\Delta} \left[ \frac{2GMa^2 r' \sin^2 \theta}{c^4 \Sigma} + r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right] \\
= \sin^2 \theta \left( - \frac{4GMa r' r'^2 + (a^2/c^2)}{c^3 \Sigma} \frac{a}{\Delta} - 2 \frac{a}{c} + \frac{4GMa^3 r' \sin^2 \theta}{c^5 \Sigma \Delta} + 2 \frac{a^3}{c^3 \Delta} + 2 \frac{a r'^2}{c\Delta} \right) \\
= \sin^2 \theta \left( -2 \frac{a}{c} - \frac{4GMa r'}{c^3 \Delta} + \frac{2a^3}{c^3 \Delta} + \frac{2a r'^2}{c\Delta} \right) = 0 \quad (H-35)
\end{aligned}$$

Así (H-31) se reduce a

$$ds^2 = -c^2 \left[ \frac{\Delta - (a^2/c^2) \sin^2 \theta}{\Sigma} \right] dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr'^2 + \Sigma d\theta^2 + \sin^2 \theta \left[ \frac{2GMa^2 r' \sin^2 \theta}{c^4 \Sigma} + r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right] d\varphi^2 - \frac{2a \sin^2 \theta}{c \Sigma} \left[ r'^2 + \frac{a^2}{c^2} - \Delta \right] (cdt)d\varphi \quad (\text{H-36})$$

## H.4. Métrica de Minkowski en la Forma de Kerr-Schild

Diferenciando (3-29) a (3-31)

$$dx = \sin \theta \cos \varphi dr' + \cos \theta \left( r' \cos \varphi - \frac{a}{c} \sin \varphi \right) d\theta + \sin \theta \left( -r' \sin \varphi - \frac{a}{c} \cos \varphi \right) d\varphi \quad (\text{H-37})$$

$$dy = \sin \theta \sin \varphi dr' + \cos \theta \left( r' \sin \varphi + \frac{a}{c} \cos \varphi \right) d\theta + \sin \theta \left( r' \cos \varphi - \frac{a}{c} \sin \varphi \right) d\varphi \quad (\text{H-38})$$

$$dz = \cos \theta dr' - r' \sin \theta d\theta \quad (\text{H-39})$$

que al ser substituidos en el elemento de línea,  $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ , se tienen las siguientes líneas de álgebra,

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 &= [\cos \theta dr' - r' \sin \theta d\theta]^2 \\ &+ \left[ \sin \theta \cos \varphi dr' + \cos \theta \left( r' \cos \varphi - \frac{a}{c} \sin \varphi \right) d\theta + \sin \theta \left( -r' \sin \varphi - \frac{a}{c} \cos \varphi \right) d\varphi \right]^2 \\ &+ \left[ \sin \theta \sin \varphi dr' + \cos \theta \left( r' \sin \varphi + \frac{a}{c} \cos \varphi \right) d\theta + \sin \theta \left( r' \cos \varphi - \frac{a}{c} \sin \varphi \right) d\varphi \right]^2 \end{aligned}$$

resolviendo productos notables,

$$\begin{aligned} &= (\sin \theta \cos \varphi dr')^2 + 2 \sin \theta \cos \varphi \cos \theta \left( r' \cos \varphi - \frac{a}{c} \sin \varphi \right) dr' d\theta \\ &+ \cos^2 \theta \left( r' \cos \varphi - \frac{a}{c} \sin \varphi \right)^2 d\theta^2 + \sin^2 \theta \left( -r' \sin \varphi - \frac{a}{c} \cos \varphi \right)^2 d\varphi^2 \\ &+ 2 \left[ \sin \theta \cos \varphi dr' + \cos \theta \left( r' \cos \varphi - \frac{a}{c} \sin \varphi \right) d\theta \right] \sin \theta \left( -r' \sin \varphi - \frac{a}{c} \cos \varphi \right) d\varphi \\ &+ (\sin \theta \sin \varphi dr')^2 + 2 \sin \theta \sin \varphi \cos \theta \left( r' \sin \varphi + \frac{a}{c} \cos \varphi \right) dr' d\theta \\ &+ \cos^2 \theta \left( r' \sin \varphi + \frac{a}{c} \cos \varphi \right)^2 d\theta^2 + \sin^2 \theta \left( r' \cos \varphi - \frac{a}{c} \sin \varphi \right)^2 d\varphi^2 \\ &+ 2 \left[ \sin \theta \sin \varphi dr' + \cos \theta \left( r' \sin \varphi + \frac{a}{c} \cos \varphi \right) d\theta \right] \sin \theta \left( r' \cos \varphi - \frac{a}{c} \sin \varphi \right) d\varphi \\ &+ \cos^2 \theta dr'^2 - 2r' \cos \theta \sin \theta dr' d\theta + r'^2 \sin^2 \theta d\theta^2 \end{aligned}$$

agrupando y simplificando,

$$= dr'^2 + \left[ \cos^2 \theta \left( r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right) + r'^2 \sin^2 \theta \right] d\theta^2 + \sin^2 \theta \left[ r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right] d\varphi^2 - 2 \frac{a}{c} \sin^2 \theta dr' d\varphi$$

de donde se obtiene, utilizando la relación  $\Sigma = r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta$ ,

$$= dr'^2 + \Sigma d\theta^2 + \sin^2 \theta \left[ r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right] d\varphi^2 - 2\frac{a}{c} \sin^2 \theta dr' d\varphi$$

Finalmente, la métrica de Minkowski en las coordenadas de Kerr-Schild se escribe como,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr'^2 + \Sigma d\theta^2 - 2\frac{a}{c} \sin^2 \theta dr' d\varphi + \sin^2 \theta \left( r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right) d\varphi^2 \quad (\text{H-40})$$

## H.5. Transformación $cu' = ct + r'$

Diferenciando  $cu' = ct + r'$  respecto a  $t$ , se tiene el diferencial  $cd u' = cdt + dr'$ ; que al elevarse al cuadrado y ser aplicada en el elemento de línea, se encuentran las siguientes líneas:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt^2 - 2cdtdr' - dr'^2 + 2c(dt + dr')dr' + \Sigma d\theta^2 + \left[ r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right] \sin^2 \theta d\varphi^2 \\ &\quad - 2\frac{a}{c} \sin^2 \theta dr' d\varphi + \frac{2GM r'}{c^2 \Sigma} \left[ cdt + dr' - \frac{a}{c} \sin^2 \theta d\varphi \right]^2 \\ &= -c^2 dt^2 - 2cdtdr' - dr'^2 + 2cdtdr' + 2dr'^2 + \Sigma d\theta^2 + \left[ r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right] \sin^2 \theta d\varphi^2 \\ &\quad - 2\frac{a}{c} \sin^2 \theta dr' d\varphi + \frac{2GM r'}{c^2 \Sigma} \left[ cdt + dr' - \frac{a}{c} \sin^2 \theta d\varphi \right]^2 \\ &= -c^2 dt^2 + dr'^2 + \Sigma d\theta^2 + \left[ r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right] \sin^2 \theta d\varphi^2 - 2\frac{a}{c} \sin^2 \theta dr' d\varphi \\ &\quad + \frac{2GM r'}{c^2 \Sigma} \left[ cdt + dr' - \frac{a}{c} \sin^2 \theta d\varphi \right]^2 \end{aligned}$$

en donde finalmente se encuentra:

$$ds^2 = \text{Ecuación (H-40)} + \frac{2GM r'}{c^2 \Sigma} \left[ cdt + dr' - \frac{a}{c} \sin^2 \theta d\varphi \right]^2 \quad (\text{H-41})$$

## H.6. Métrica de Kerr en las Coordenadas de Kerr-Schild

Recordando que  $\Sigma = r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta$  y  $z = r' \cos \theta$ , para el factor  $\frac{2GM r'}{c^2 \Sigma}$ , se tiene:

$$\frac{2GM r'}{c^2 \Sigma} = \frac{2GM r'}{c^2 \left[ r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta \right]} = \frac{2GM r'}{c^2 r'^2 + \frac{a^2 z^2}{r'^2}} = \frac{2GM r'}{c^2 r'^4 + a^2 z^2} = \frac{2GM r'^3}{c^2 r'^4 + a^2 z^2}$$

Utilizando las relaciones de transformación (3-29) a (3-31) sobre los diferenciales obtenidos en (H-37) a (H-39), se obtienen las siguientes relaciones:

$$dx = \sin \theta \cos \varphi dr' + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} [x] d\theta - [y] d\varphi \quad (\text{H-42})$$

$$dy = \sin \theta \sin \varphi dr' + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} [y] d\theta + [x] d\varphi \quad (\text{H-43})$$

$$dz = \cos \theta dr' - r' \sin \theta d\theta \quad (\text{H-44})$$

y respecto a estas; se calculan las relaciones,

$$\begin{aligned} xdx + ydy &= x \left[ \sin \theta \cos \varphi dr' + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} x d\theta - y d\varphi \right] + y \left[ \sin \theta \sin \varphi dr' + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} y d\theta + x d\varphi \right] \\ &= x \sin \theta \cos \varphi dr' + x^2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta - xy d\varphi + y \sin \theta \sin \varphi dr' + y^2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta + y x d\varphi \\ &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} [x^2 + y^2] d\theta + \sin \theta [x \cos \varphi + y \sin \varphi] dr' \\ &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \left[ r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right] \sin^2 \theta d\theta + \sin \theta [x \cos \varphi + y \sin \varphi] dr' \\ &= \sin \theta \cos \theta \left[ r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right] d\theta + \sin^2 \theta \left[ r' \cos^2 \varphi - \frac{a}{c} \sin \varphi \cos \varphi + r' \sin^2 \varphi \right. \\ &\quad \left. - \frac{a}{c} \cos \varphi \sin \varphi \right] dr' \end{aligned}$$

$$\boxed{xdx + ydy = \sin \theta \cos \theta \left[ r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right] d\theta + r' \sin^2 \theta dr'} \quad (\text{H-45})$$

$$\begin{aligned} ydx - xdy &= y \left[ \sin \theta \cos \varphi dr' + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} x d\theta - y d\varphi \right] - x \left[ \sin \theta \sin \varphi dr' + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} y d\theta + x d\varphi \right] \\ &= y \sin \theta \cos \varphi dr' + yx \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta - y^2 d\varphi - x \sin \theta \sin \varphi dr' - xy \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta - x^2 d\varphi \\ &= -(x^2 + y^2) d\varphi + \sin \theta (y \cos \varphi - x \sin \varphi) dr' \\ &= - \left[ r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right] \sin^2 \theta d\varphi + \sin^2 \theta \left[ r' \cos \varphi \sin \varphi + \frac{a}{c} \cos^2 \varphi - r' \cos \varphi \sin \varphi \right. \\ &\quad \left. + \frac{a}{c} \sin^2 \varphi \right] dr' = - \left[ r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right] \sin^2 \theta d\varphi + \frac{a}{c} \sin^2 \theta dr' \end{aligned}$$

$$\boxed{ydx - xdy = \frac{a}{c} \sin^2 \theta dr' - \left[ r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right] \sin^2 \theta d\varphi} \quad (\text{H-46})$$

$$zdz = r' \cos \theta [-r' \sin \theta d\theta + \cos \theta dr'] = -r'^2 \cos \theta \sin \theta d\theta + r' \cos^2 \theta dr'$$

$$\boxed{zdz = r' \cos^2 \theta dr' - r'^2 \cos \theta \sin \theta d\theta} \quad (\text{H-47})$$

Por lo tanto, para la expresión:

$$(xdx + ydy) \frac{r'}{r'^2 + a^2/c^2} - (xdy - ydx) \frac{a/c}{r'^2 + a^2/c^2} + \frac{z}{r'} dz$$

, fácilmente se verifica, que es igual a:

$$\begin{aligned} &= \left[ \sin \theta \cos \theta \left[ r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right] d\theta + r' \sin^2 \theta dr' \right] \frac{r'}{r'^2 + a^2/c^2} \\ &- \left[ \frac{a}{c} \sin^2 \theta dr' - \left[ r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right] \sin^2 \theta d\varphi \right] \frac{a/c}{r'^2 + a^2/c^2} + \frac{1}{r'} [r' \cos^2 \theta dr' - r'^2 \cos \theta \sin \theta d\theta] \\ &= r' \sin \theta \cos \theta d\theta + \frac{r'^2 \sin^2 \theta}{r'^2 + a^2/c^2} dr' - \frac{a}{c} \sin^2 \theta d\varphi + \frac{(a^2/c^2) \sin^2 \theta}{r'^2 + a^2/c^2} dr' + \cos^2 \theta dr' \\ &- r' \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= \left[ \frac{r'^2 \sin^2 \theta}{r'^2 + a^2/c^2} + \frac{(a^2/c^2) \sin^2 \theta}{r'^2 + a^2/c^2} \right] dr' - \frac{a}{c} \sin^2 \theta d\varphi + \cos^2 \theta dr' \\ &= \sin^2 \theta dr' + \cos^2 \theta dr' - \frac{a}{c} \sin^2 \theta d\varphi \\ &= dr' - \frac{a}{c} \sin^2 \theta d\varphi' \end{aligned}$$

que corresponde a parte del factor del segundo término en la ecuación (H-41). De esta manera se ha logrado escribir dicho factor en términos de coordenadas cartesianas.

## H.7. Expansión en Potencias de $1/r$ para la Métrica de Kerr en las Coordenadas de Kerr-Schild

Dada la expresión (3-34), y especialmente, desarrollando el factor del segundo término  $[\dots]^2$ , se encuentran las siguientes líneas:

$$\begin{aligned} \left[ cdt + \frac{(xdx + ydy)r' - (xdy - ydx)(a/c)}{r'^2 + a^2/c^2} + \frac{z}{r'} dz \right]^2 &= \left[ cdt + \frac{(xdx + ydy)r' - (xdy - ydx)(a/c)}{r'^2 + a^2/c^2} \right]^2 \\ &+ 2 \left[ cdt + \frac{(xdx + ydy)r' - (xdy - ydx)(a/c)}{r'^2 + a^2/c^2} \right] \frac{z}{r'} dz + \frac{z^2}{r'^2} dz^2 \end{aligned}$$

resolviendo,

$$\begin{aligned} &= c^2 dt^2 + 2 \left[ \frac{(xdx + ydy)r' - (xdy - ydx)(a/c)}{r'^2 + a^2/c^2} \right] cdt + \left[ \frac{(xdx + ydy)r' - (xdy - ydx)(a/c)}{r'^2 + a^2/c^2} \right]^2 \\ &+ 2c \frac{z}{r'} dt dz + 2 \left[ \frac{(xdx + ydy)r' - (xdy - ydx)(a/c)}{r'^2 + a^2/c^2} \right] \frac{z}{r'} dz + \frac{z^2}{r'^2} dz^2 \end{aligned} \quad (\text{H-48})$$

considerando que  $r' \gg a/c$ , es decir, considerando el límite de bajas rotaciones, se encuentra para cada término de la expresión anterior, en su respectivo orden:

$$\begin{aligned}
& \rightarrow 2 \left[ \frac{(xdx + ydy)r' - (xdy - ydx)(a/c)}{r'^2 + a^2/c^2} \right] cdt \\
& = 2 \left[ \frac{(xdx + ydy)r' - (xdy - ydx)(a/c)}{r'^2} \right] \left[ 1 + \frac{a^2}{c^2 r'^2} \right]^{-1} cdt \\
& = \frac{2}{r'} (xdx + ydy) \left[ 1 - \frac{a^2}{c^2 r'^2} + \dots \right] cdt - \frac{2a}{c r'^2} (xdy - ydx) \left[ 1 - \frac{a^2}{c^2 r'^2} + \dots \right] cdt \\
& \simeq \frac{2}{r'} (xdx + ydy) cdt - \frac{2a}{c r'^2} (xdy - ydx) cdt + O(r'^{-3})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rightarrow \left[ \frac{(xdx + ydy)r' - (xdy - ydx)(a/c)}{r'^2 + a^2/c^2} \right]^2 \\
& = \frac{(xdx + ydy)^2 r'^2}{(r'^2 + a^2/c^2)^2} - 2 \frac{(xdx + ydy)r' (xdy - ydx)(a/c)}{(r'^2 + a^2/c^2)^2} + \frac{(xdy - ydx)^2 (a/c)^2}{(r'^2 + a^2/c^2)^2} \\
& = \left[ \frac{(xdx + ydy)^2 r'^2}{r'^4} - 2 \frac{r'(a/c)(xdy + ydy)(xdy - ydx)}{r'^4} \right. \\
& \left. + \frac{(a/c)^2 (xdy - ydx)^2}{r'^4} \right] \left[ 1 - 2 \frac{a^2}{c^2 r'^2} + \dots \right] \\
& \simeq \frac{(xdx + ydy)^2}{r'^2} - 2 \frac{(a/c)(xdx + ydy)(xdy - ydx)}{r'^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rightarrow 2 \left[ \frac{(xdx + ydy)r' - (xdy - ydx)(a/c)}{r'^2 + a^2/c^2} \right] \frac{z}{r'} dz \\
& = 2 \frac{z}{r'} dz \left[ \frac{(xdx + ydy)r' - (xdy - ydx)(a/c)}{r'^2} \right] \left[ 1 + \frac{a^2}{c^2 r'^2} \right]^{-1} \\
& \simeq \frac{2z}{r'^2} (xdx + ydy) dz - \frac{2a}{c r'^3} (xdy - ydx) z dz
\end{aligned}$$

De tal forma que, aplicando estos resultados sobre la expresión (H-48)

$$\begin{aligned}
& = c^2 dt^2 + \frac{2}{r'} (xdx + ydy) cdt - \frac{2a}{c r'^2} (xdy - ydx) cdt + O(r'^{-3}) - 2 \frac{(a/c)(xdx + ydy)(xdy - ydx)}{r'^3} \\
& + \frac{(xdx + ydy)^2}{r'^2} + 2c \frac{z}{r'} dt dz + \frac{2z}{r'^2} (xdx + ydy) dz - \frac{2a}{c r'^3} (xdy - ydx) z dz + \frac{z^2}{r'^2} dz^2 \\
& = c^2 dt^2 + \frac{2}{r'} (xdx + ydy + zdz) cdt + \frac{1}{r'^2} (x^2 dx^2 + 2xy dx dy + y^2 dy^2 + z^2 dz^2) \\
& - \frac{2a}{c r'^2} (xdy - ydx) cdt - \frac{2a}{c r'^3} [(xdx + ydy)(xdy - ydx) + (xdy - ydx) z dz] \\
& + \frac{2z}{r'^2} (xdx + ydy) dz + O(r'^{-3})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c^2 dt^2 + \frac{1}{r'^2} (x^2 dx^2 + 2xy dx dy + y^2 dy^2 + z^2 dz^2 + 2xz dx dz + 2yz dy dz) + O(r'^{-3}) \\
&+ \frac{2}{r'} (x dx + y dy + z dz) c dt - \frac{2a}{cr'^2} (x dy - y dx) \left[ c dt + \frac{(x dx + y dy + z dz)}{r'} \right] \quad (\text{H-49})
\end{aligned}$$

y dado que se está trabajando en el límite de bajas rotaciones, de acuerdo a la propiedad 5 de la sección 3.3 ( $r \simeq r'$ ); de este modo, para  $r' = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ , se observa:

$$dr' = \frac{1}{2} (2x dx + 2y dy + 2z dz) (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = \frac{1}{r'} (x dx + y dy + z dz)$$

elevando al cuadrado,

$$dr'^2 = \frac{1}{r'^2} [x^2 dx^2 + 2xy dx dy + y^2 dy^2 + 2xz dx dz + 2yz dy dz + z^2 dz^2]$$

e identificando que tanto  $dr'$  como  $dr'^2$  se encuentran en la relación (H-49), se reescribe ésta de la forma:

$$\begin{aligned}
&= c^2 dt^2 + 2dr' c dt + dr'^2 - 2\frac{a}{r'^2} (x dy - y dx) (c dt + dr') + O(r'^{-3}) \\
&= (c dt + dr')^2 - 2\frac{a}{r'^2} (x dy - y dx) (c dt + dr') + O(r'^{-3}) \quad (\text{H-50})
\end{aligned}$$

en consecuencia, se tiene

$$\begin{aligned}
&\left[ c dt + \frac{(x dx + y dy) r' - (x dy - y dx) (a/c)}{r'^2 + a^2/c^2} + \frac{z}{r'} dz \right]^2 \\
&= (c dt + dr')^2 - 2\frac{a}{r'^2} (x dy - y dx) (c dt + dr') + O(r'^{-3}) \quad (\text{H-51})
\end{aligned}$$

Por otro lado, para el factor,

$$\frac{2GM r'^3}{c^2 r'^4 + a^2 z^2} = \frac{2GM}{c^2 r'} \left[ 1 + \frac{a^2 z^2}{c^2 r'^4} \right]^{-1} \simeq \frac{2GM}{c^2 r'} \left[ 1 - \left( \frac{az}{cr'^2} \right)^2 + \dots \right] \simeq \frac{2GM}{c^2 r'} \quad (\text{H-52})$$

así del producto de (H-51) con (H-52), se obtienen los términos.

$$\boxed{\frac{2GM}{c^2 r'} (c dt + dr')^2 - 4\frac{GM a}{c^2 r'^3} (x dy - y dx) (c dt + dr') + O(r'^{-3})} \quad (\text{H-53})$$

Que corresponden a los últimos tres términos presentados en (3-35).

## H.8. Comportamiento Asintótico de (3-24)

Para cada uno de los términos de la ecuación (3-24), y recordando que en este límite se cumple la equivalencia  $r' = r$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta - \frac{a^2}{c^2} \sin^2 \theta}{\Sigma} &= \frac{r^2 - \frac{2GM}{c^2}r + \frac{a^2}{c^2} - \frac{a^2}{c^2} \sin^2 \theta}{r^2 + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta} = \frac{r^2 - \frac{2GM}{c^2}r + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta}{r^2 + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta} \\ &= 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \left[ 1 - \frac{a^2}{c^2 r^2} \cos^2 \theta + \dots \right] \simeq 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \end{aligned} \quad (\text{H-54})$$

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma}{\Delta} &= \frac{r^2 + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta}{r^2 - \frac{2GM}{c^2}r + \frac{a^2}{c^2}} = \frac{r^2 \left[ 1 + \frac{a^2}{c^2 r^2} \cos^2 \theta \right]}{r^2 \left[ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{a^2}{c^2 r^2} \right]} = \left[ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right]^{-1} \\ &= 1 + (-1)^{-1-1} \left[ \frac{2GM}{c^2 r} \right] + \dots \simeq 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \end{aligned} \quad (\text{H-55})$$

$$\Sigma = r^2 + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta = r^2 \left[ 1 + \frac{a^2}{c^2 r^2} \cos^2 \theta \right] \simeq r^2 \quad (\text{H-56})$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta \left[ \frac{2GM a r \sin^2 \theta}{c^4 \Sigma} + r^2 + \frac{a^2}{c^2} \right] &= \sin^2 \theta \left[ \frac{2GM a r \sin^2 \theta}{c^4 r^2} + r^2 + \frac{a^2}{c^2} \right] \\ &= r^2 \sin^2 \theta \left[ \frac{2GM a r \sin^2 \theta}{c^4 r^3} + 1 + \frac{a^2}{c^2 r^2} \right] \\ &\simeq r^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (\text{H-57})$$

$$\begin{aligned} \frac{a \sin^2 \theta}{c \Sigma} \left[ r^2 + \frac{a^2}{c^2} - \Delta \right] &= \frac{a \sin^2 \theta}{c r^2 \left[ 1 + \frac{a^2}{c^2 r^2} \cos^2 \theta \right]} \left[ \frac{2GM r}{c^2} \right] \\ &= \frac{2GM a r \sin^2 \theta}{c^3 r^2} \simeq \frac{2GM a \sin^2 \theta}{c^3 r} \end{aligned} \quad (\text{H-58})$$

Por lo anterior, el elemento de línea (3-24) toma la forma

$$\boxed{ds^2 \simeq -c^2 \left[ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right] dt^2 + \left[ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right] dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 - \frac{4GM a \sin^2 \theta}{c^3 r} c dt d\varphi} \quad (\text{H-59})$$



## H.9. Singularidad: Anillo

Para determinar la “forma” de la singularidad se toman las relaciones de transformación encontradas en las ecuaciones (3-29) a (3-31), de tal manera que, calculando:

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= \left[ \sin \theta \left( r' \cos \varphi - \frac{a}{c} \sin \varphi \right) \right]^2 + \left[ \sin \theta \left( r' \sin \varphi + \frac{a}{c} \cos \varphi \right) \right]^2 \\
 &= \sin^2 \theta \left( r' \cos \varphi - \frac{a}{c} \sin \varphi \right)^2 + \sin^2 \theta \left( r' \sin \varphi + \frac{a}{c} \cos \varphi \right)^2 \\
 &= \sin^2 \theta \left[ r'^2 \cos^2 \varphi - 2r' \frac{a}{c} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{a^2}{c^2} \sin^2 \varphi \right] \\
 &\quad + \sin^2 \theta \left[ r'^2 \sin^2 \varphi + 2r' \frac{a}{c} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \varphi \right] \\
 x^2 + y^2 &= \sin^2 \theta \left( r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right) \tag{H-60}
 \end{aligned}$$

$$z^2 = r'^2 \cos^2 \theta = r'^2 - r'^2 \sin^2 \theta \rightarrow r'^2 \sin^2 \theta = r'^2 - z^2 \tag{H-61}$$

así, al combinar las últimas dos ecuaciones, se puede establecer:

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= r'^2 - z^2 + \left[ 1 - \frac{z^2}{r'^2} \right] \frac{a^2}{c^2} \\
 &= r'^2 - z^2 + \frac{r'2a^2 - z^2a^2}{c^2r'^2} = \frac{c^2r'^4 - c^2r'^2z^2 + r'^2a^2 - z^2a^2}{c^2r'^2} \\
 c^2r'^2(x^2 + y^2) &= c^2r'^4 - c^2r'^2z^2 + r'^2a^2 - z^2a^2
 \end{aligned}$$

y tomando valores de  $r'$  constantes, no nulos,

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2}{r'^2} + \frac{y^2}{r'^2} &= 1 - \frac{z^2}{r'^2} + \frac{a^2}{c^2r'^2} - \frac{z^2}{c^2r'^4}a^2 \\
 \frac{x^2}{r'^2} + \frac{y^2}{r'^2} &= 1 - \left[ 1 + \frac{a^2}{c^2r'^2} \right] \frac{z^2}{r'^2} + \frac{a^2}{c^2r'^2} \\
 \frac{x^2}{r'^2} + \frac{y^2}{r'^2} + \left[ 1 + \frac{a^2}{c^2r'^2} \right] \frac{z^2}{r'^2} &= 1 + \frac{a^2}{c^2r'^2}
 \end{aligned}$$

está ecuación representa elipsoides con focos en  $x = \pm a/c$  bajo la condición que  $r' = 0$ . Si se toma  $z = 0$

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2}{r'^2} + \frac{y^2}{r'^2} &= 1 + \frac{a^2}{c^2r'^2} \\
 x^2 + y^2 &= r'^2 + \frac{a^2}{c^2}
 \end{aligned}$$

que nuevamente bajo la condición  $r' = 0$ , los elipsoides se deforman y forman el disco,

$$\boxed{x^2 + y^2 = \frac{a^2}{c^2}} \tag{H-62}$$

## H.10. Ergosfera

Siguiendo a [8], la ergosfera es aquella región que se encuentra en el interior de la hipersuperficie de límite estacionario  $r'_{s+}$ , dada por  $g_{tt}(r, \theta) = 0$ , y por fuera al horizonte de sucesos exterior  $r'_+$ ; es decir, se encuentra para  $g_{tt}(r, \theta) < 0$ , y se afirma que de allí pueden escapar partículas (observadores)<sup>1</sup>. Ahora, como se menciona en el pie de página 1 del capítulo 4; dichos observadores en esta región no pueden mantener coordenadas fijas; por lo tanto, es posible asociarles alguna cuadri-velocidad. Inicialmente se podría asignar la cuadri-velocidad  $u^\mu = (u^t, 0, 0, 0)$ , pero el requisito,  $g_{tt}(r, \theta) < 0$ , no se satisface y por ello no es conveniente asignar esta cuadri-velocidad.

Sin embargo, para un observador que se mantenga fijo en las coordenadas  $(r, \theta)$  y rote en el mismo sentido con la fuente, se puede definir la cuadri-velocidad de tal observador como:

$$u^\mu = (c, 0, 0, \Omega)$$

en donde  $\Omega$  representa su velocidad angular medida desde un observador ubicado en el infinito. Dada esta cuadri-velocidad, se requiere de nuevo,

$$\begin{aligned} u \cdot u &= g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = c^2 \\ &= g_{tt}(u^t)^2 + g_{t\varphi} u^t u^\varphi + g_{\varphi t} u^\varphi u^t + g_{\varphi\varphi} (u^\varphi)^2 = c^2 \\ &= g_{tt}(u^t)^2 + g_{t\varphi} u^t (u^t \Omega) + g_{\varphi t} u^t (u^t \Omega) + g_{\varphi\varphi} (u^t \Omega)^2 = c^2 \\ &= g_{tt} c^2 + g_{t\varphi} c \Omega + g_{\varphi t} c \Omega + g_{\varphi\varphi} \Omega^2 = c^2 \\ &= c^2 g_{tt} + 2c g_{t\varphi} \Omega + g_{\varphi\varphi} \Omega^2 = c^2 \end{aligned}$$

en donde, para el miembro izquierdo se deben garantizar dos cosas: en primer lugar; éste siempre debe ser mayor que cero y segundo, debido a la presencia de  $\Omega$ , este término dará cuenta de los valores límite de la velocidad angular registrada por un observador muy lejano. De modo que, al resolver la ecuación  $c^2 g_{tt} + 2c g_{t\varphi} \Omega + g_{\varphi\varphi} \Omega^2 = 0$  para  $\Omega$  se obtienen las raíces,

$$\boxed{\Omega_{\pm} = -c \frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \pm c \sqrt{\left[ \frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \right]^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}} = c\omega \pm c \sqrt{\omega^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}} \quad (\text{H-63})}$$

en donde se ha definido  $\omega \equiv -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}}$ , e identificando dos casos especiales:

CASO I: Si  $g_{tt} = 0$ , es decir, se ubica a la partícula en la hipersuperficie de límite estacionario, se tiene que:

$$\Omega_- = 0 \quad \text{y} \quad \Omega_+ = 2c\omega$$

Para el caso  $\Omega_- = 0$ , se encuentra el significado físico de superficie estacionaria, allí el observador debe girar en la misma dirección que la fuente.

<sup>1</sup>Para ver más detalles acerca de esto, se recomienda al lector estudiar el método ideado por Roger Penrose para la extracción de energía en esta región[15].

CASO II: Si  $\omega^2 = g_{tt}/g_{\varphi\varphi}$ , se encuentra que:

$$\Omega_{\pm} = c\omega$$

Por lo tanto, en todo punto donde se cumpla esta condición los observadores serán forzados a moverse con velocidad angular  $\omega$ . Para verificar en que lugares se cumple la condición, se pueden sustituir los coeficientes de la solución de Kerr (3-24), en la ecuación (H-63). En primer lugar reescribimos los coeficientes para  $g_{t\varphi}$ ,  $g_{\varphi\varphi}$  y  $g_{tt}$ .

$$\begin{aligned} g_{t\varphi} &= -\frac{a \sin^2 \theta}{c\Sigma} \left[ r'^2 + \frac{a^2}{c^2} - \Delta \right] = -\frac{a \sin^2 \theta}{c\Sigma} \left[ \frac{2GM}{c^2} r' \right] \\ g_{t\varphi} &= -\frac{2aGM r' \sin^2 \theta}{c^3 \Sigma} \end{aligned} \quad (\text{H-64})$$

$$\begin{aligned} g_{\varphi\varphi} &= \sin^2 \theta \left[ \frac{2GM a^2 r' \sin^2 \theta}{c^4 \Sigma} + r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right] = \frac{\sin^2 \theta}{c^4 \Sigma} \left[ 2GM a^2 r' \sin^2 \theta + c^4 \Sigma \left( r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right) \right] \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{c^4 \Sigma} \left[ 2GM a^2 r' \sin^2 \theta + c^4 \left( r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta \right) \left( r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right) \right] \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{c^4 \Sigma} \left[ 2GM a^2 r' \sin^2 \theta + c^4 \left( r'^2 + \frac{a^2}{c^2} - \frac{a^2}{c^2} \sin^2 \theta \right) \left( r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right) \right] \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{c^4 \Sigma} \left[ 2GM a^2 r' \sin^2 \theta + c^4 \left( r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right)^2 - c^2 \left( r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right) a^2 \sin^2 \theta \right] \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{c^4 \Sigma} \left[ c^4 \left( r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right)^2 + a^2 \sin^2 \theta (2GM r' - c^2 r'^2 - a^2) \right] \\ g_{\varphi\varphi} &= \frac{\sin^2 \theta}{c^2 \Sigma} \left[ c^2 \left( r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta \right] \end{aligned} \quad (\text{H-65})$$

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -\frac{\Delta - \frac{a^2}{c^2} \sin^2 \theta}{\Sigma} = -\frac{r'^2 - \frac{2GM}{c^2} r' + \frac{a^2}{c^2} - \frac{a^2}{c^2} \sin^2 \theta}{\Sigma} = -\frac{r'^2 - \frac{2GM}{c^2} r' + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta}{\Sigma} \\ g_{tt} &= -\frac{c^2 \Sigma - 2GM r'}{c^2 \Sigma} \end{aligned} \quad (\text{H-66})$$

De tal manera, que  $\omega$  y el cociente  $\frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}$  están dados por:

$$\begin{aligned} \omega &= -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} = -\frac{-2aGM r' \sin^2 \theta / c^3 \Sigma}{B \sin^2 \theta / c^2 \Sigma}, \quad \text{en donde } B = c^2 \left( r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta \\ \omega &= \frac{2GM a r'}{cB} \end{aligned} \quad (\text{H-67})$$

$$\frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}} = \frac{-(c^2 \Sigma - 2GM r') / c^2 \Sigma}{B \sin^2 \theta / c^2 \Sigma} = \frac{2GM r' - c^2 \Sigma}{B \sin^2 \theta} \quad (\text{H-68})$$

por lo tanto para  $\Omega_{\pm}$ , tenemos las siguientes líneas:

$$\begin{aligned}
\Omega_{\pm} &= c\omega \pm c\sqrt{\frac{4G^2M^2a^2r'^2}{c^2B^2} - \frac{2GMr' - c^2\Sigma}{B\sin^2\theta}} \\
&= c\omega \pm c\sqrt{\frac{4G^2M^2a^2r'^2\sin^2\theta - (2GMc^2r' - c^4\Sigma)B}{c^2B^2\sin^2\theta}} \\
&= c\omega \pm \frac{1}{B\sin\theta}\sqrt{4G^2M^2a^2r'^2\sin^2\theta - (2GMc^2r' - c^4\Sigma)B} \\
&= c\omega \pm \frac{1}{B\sin\theta}\sqrt{4G^2M^2a^2r'^2\sin^2\theta - (2GMc^2r' - c^4\Sigma)\left[c^2\left(r'^2 + \frac{a^2}{c^2}\right)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta\right]}
\end{aligned}$$

trabajando exclusivamente con la raíz

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{4G^2M^2a^2r'^2\sin^2\theta + (2GMc^2r' - c^4\Sigma)a^2\Delta\sin^2\theta - (2GMc^4r' - c^6\Sigma)\left(r'^2 + \frac{a^2}{c^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{a^2\sin^2\theta[4G^2M^2r'^2 + (2GMc^2r' - c^4\Sigma)\Delta] - (2GMc^4r' - c^6\Sigma)\left(r'^2 + \frac{a^2}{c^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{a^2\sin^2\theta[4G^2M^2r'^2 + 2GMc^2r'\Delta - c^4\Sigma\Delta] - (2GMc^4r' - c^6\Sigma)\left(r'^2 + \frac{a^2}{c^2}\right)^2}
\end{aligned}$$

y recordando que  $\Delta = r'^2 - \frac{2GM}{c^2}r' + \frac{a^2}{c^2}$  que al ser multiplicada por  $2GMc^2r'$ , se obtiene  $2GMc^2r'\Delta = 2GMc^2r'^3 - 4G^2M^2r'^2 + 2a^2GMr'$  y al ser comparada con los términos entre  $[\dots]$  de la última expresión,

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{a^2\sin^2\theta[2GMc^2r'^3 + 2a^2GMr' - c^4\Sigma\Delta] - (2GMc^4r' - c^6\Sigma)\left(r'^2 + \frac{a^2}{c^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{a^2\sin^2\theta[2GMr'(c^2r'^2 + a^2) - c^4\Sigma\Delta] - (2GMc^4r' - c^6\Sigma)\left(r'^2 + \frac{a^2}{c^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(r'^2 + \frac{a^2}{c^2}\right)\left[2GMc^2r'a^2\sin^2\theta - (2GMc^4r' - c^6\Sigma)\left(r'^2 + \frac{a^2}{c^2}\right)\right] - a^2c^4\Sigma\Delta\sin^2\theta}
\end{aligned}$$

utilizando el hecho que  $\frac{a^2}{c^2}\sin^2\theta = r'^2 + \frac{a^2}{c^2} - \Sigma$ , para el factor  $[\dots]$

$$\begin{aligned}
&2GMc^2r'a^2\sin^2\theta - 2GMc^4r'^3 - 2GMc^2r'a^2 + c^6\Sigma r'^2 + c^4\Sigma a^2 \\
&= 2GMr'(c^4r'^2 + c^2a^2 - c^4\Sigma) - 2GMc^4r'^3 - 2GMc^2r'a^2 + c^6\Sigma r'^2 + c^4\Sigma a^2 \\
&= 2GMc^4r'^3 + 2GMc^2r'a^2 - 2GMc^4r'\Sigma - 2GMc^4r'^3 - 2GMc^2r'a^2 + c^6\Sigma r'^2 + c^4\Sigma a^2
\end{aligned}$$

simplicando y retomando la ecuación para  $\Omega_{\pm}$ , se determina,

$$\begin{aligned}
&= c\omega \pm \frac{1}{B \sin \theta} \sqrt{\left(r'^2 + \frac{a^2}{c^2}\right) [c^4 \Sigma (c^2 r'^2 + a^2 - 2GM r')] - (c^4 r'^2 + c^2 a^2 - c^4 \Sigma) c^2 \Sigma \Delta} \\
&= c\omega \pm \frac{1}{B \sin \theta} \sqrt{\left(r'^2 + \frac{a^2}{c^2}\right) c^6 \Sigma \Delta - (c^2 r'^2 + a^2 - c^2 \Sigma) c^4 \Sigma \Delta} \\
&= c\omega \pm \frac{1}{B \sin \theta} \sqrt{c^6 r'^2 \Sigma \Delta + a^2 c^4 \Sigma \Delta - c^6 r'^2 \Sigma \Delta - c^4 a^2 \Sigma \Delta + c^6 \Sigma^2 \Delta} \\
&= c\omega \pm \frac{1}{B \sin \theta} \sqrt{c^6 \Sigma^2 \Delta}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Omega_{\pm} = c\omega \pm \frac{c^3 \Sigma \Delta^{1/2}}{B \sin \theta}} \quad (\text{H-69})$$

Así la condición del caso II se mantiene, si  $\Delta = 0$ , especialmente en la superficie  $r' = r'_+$ , que como se vio antes corresponde al horizonte de eventos encontrado en interior de la superficie de estado límite estacionario  $r'_{s+}$  y además define la superficie interior de la ergosfera. Finalmente, observe que aplicando la mencionada condición sobre (H-69) y utilizando (H-67) junto con (3-39), se obtiene:

$$\begin{aligned}
\Omega_{\pm} = c\omega(r'_+, \theta) &= \frac{2GM a r'_+}{B r'_+} = \frac{2GM a r'_+}{c^2 \left(r'_+ + \frac{a^2}{c^2}\right)^2} \\
\text{con } r'^2 + \frac{a^2}{c^2} - \frac{2GM}{c^2} r' &= 0 \rightarrow \frac{2GM}{c^2} r' = r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \\
&= \frac{2GM a r'_+}{c^2 (2GM r'_+ / c^2)^2} = \frac{2GM a c^2 r'_+}{4G^2 M^2 r'^2_+} = \frac{c^2 a}{2GM r'_+}
\end{aligned}$$

Por esta razón, se puede considerar la velocidad angular del horizonte de eventos, como:

$$\boxed{\Omega_H = \frac{c^2 a}{2GM r'_+} = \frac{c^2 a}{c^2 r'^2_+ + a^2}} \quad (\text{H-70})$$

## H.11. $\xi^{\mu}$ Nulo en el Horizonte de Eventos $r' = r'_+$

Tomando el campo vectorial de Killing  $\xi^{\mu} = (1, 0, 0, 0) + (0, 0, 0, \Omega_H/c) = (1, 0, 0, \Omega_H/c)$ , se calcula su magnitud, de la forma:

$$\begin{aligned}
\xi^2 = \xi^{\alpha} \xi_{\alpha} &= g_{\alpha\beta} \xi^{\alpha} \xi^{\beta} = g_{0\beta} \xi^0 \xi^{\beta} + g_{1\beta} \xi^1 \xi^{\beta} + g_{2\beta} \xi^2 \xi^{\beta} + g_{3\beta} \xi^3 \xi^{\beta} \\
&= g_{00} \xi^0 \xi^0 + g_{01} \xi^0 \xi^1 + g_{02} \xi^0 \xi^2 + g_{03} \xi^0 \xi^3 + g_{30} \xi^3 \xi^0 + g_{31} \xi^3 \xi^1 + g_{32} \xi^3 \xi^2 + g_{33} \xi^3 \xi^3 \\
&= g_{00} + g_{03} (\Omega_H/c) + g_{30} (\Omega_H/c) + g_{33} (\Omega_H/c)^2 \\
&= g_{00} + \frac{2}{c} g_{03} (\Omega_H) + \frac{1}{c^2} g_{33} (\Omega_H)^2
\end{aligned}$$

utilizando los coeficientes de la métrica de Kerr en las coordenadas de Eddington-Finkelstein (3-23) y evaluando en la hipersuperficie  $r' = r'_+$ , se tiene,

$$\begin{aligned}\xi^\alpha \xi_\alpha|_{r'=r'_+} &= - \left[ 1 - \frac{2GM r'_+}{c^2 \Sigma_{r'_+}} \right] - \left[ \frac{4GM a r'_+ \sin^2 \theta}{c^3 \Sigma_{r'_+}} \right] \frac{\Omega_H}{c} + \frac{B_{r'_+}}{c^2 \Sigma_{r'_+}} \sin^2 \theta \frac{\Omega_H^2}{c^2} \\ &= \frac{-c^3 \Sigma_{r'_+} + 2GM c r'_+ - 4GM a r'_+ \sin^2 \theta (\Omega_H)/c + c B_{r'_+} \sin^2 \theta (\Omega_H^2/c^2)}{c^3 \Sigma_{r'_+}}\end{aligned}\quad (\text{H-71})$$

considerando las expresiones, para  $\Sigma_{r'_+}$  y  $B_{r'_+}$ , por separado,

$$\begin{aligned}\Sigma_{r'_+} &= r'^2_+ + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta = \left[ \frac{GM}{c^2} + \sqrt{\frac{G^2 M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2}} \right]^2 + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta \\ &= \frac{G^2 M^2}{c^4} + 2 \frac{GM}{c^2} \sqrt{\frac{G^2 M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2}} + \frac{G^2 M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta \\ \Sigma_{r'_+} &= 2 \frac{G^2 M^2}{c^4} + 2 \frac{GM}{c^2} \sqrt{\frac{G^2 M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2}} - \frac{a^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta\end{aligned}\quad (\text{H-72})$$

$$\begin{aligned}B_{r'_+} &= \left[ c^2 \left( \frac{GM}{c^2} + \sqrt{\frac{G^2 M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2}} \right)^2 + \frac{a^2}{c^2} \right]^2 \\ &\quad - a^2 \left[ \left( \frac{GM}{c^2} + \sqrt{\frac{G^2 M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2}} \right)^2 - 2 \frac{GM}{c^2} \left( \frac{GM}{c^2} + \sqrt{\frac{G^2 M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2}} \right) + \frac{a^2}{c^2} \right] \sin^2 \theta \\ &= \left[ c^2 \left( \frac{G^2 M^2}{c^4} + 2 \frac{GM}{c^2} \sqrt{\frac{G^2 M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2}} + \frac{G^2 M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} \right) \right]^2\end{aligned}\quad (\text{H-73})$$

$$\begin{aligned}&- a^2 \left[ \frac{G^2 M^2}{c^4} + 2 \frac{GM}{c^2} \sqrt{\frac{G^2 M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2}} + \frac{G^2 M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2} - 2 \frac{G^2 M^2}{c^4} \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{GM}{c^2} \sqrt{\frac{G^2 M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2}} + \frac{a^2}{c^2} \right] \sin^2 \theta\end{aligned}\quad (\text{H-74})$$

$$B_{r'_+} = \left[ 2 \frac{G^2 M^2}{c^2} + 2GM \sqrt{\frac{G^2 M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2}} \right]^2 \quad (\text{H-75})$$

aplicando estos resultados y la ecuación (H-70) al numerador de la expresión (H-71),

$$\begin{aligned}&- 2 \frac{G^2 M^2}{c} - 2GM c \sqrt{\frac{G^2 M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2}} + ca^2 - ca^2 \cos^2 \theta + 2GM c \left[ \frac{GM}{c^2} + \sqrt{\frac{G^2 M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2}} \right] \\ &- 4GM a r'_+ \sin^2 \theta \frac{ca}{2GM r'_+} + c \left[ 2 \frac{G^2 M^2}{c^2} + 2GM \sqrt{\frac{G^2 M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2}} \right]^2 \frac{a^2}{4G^2 M^2 r'^2_+} \sin^2 \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2\frac{G^2M^2}{c} - 2GMc\sqrt{\frac{G^2M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2}} + ca^2 - ca^2\cos^2\theta + 2\frac{G^2M^2}{c} + 2GMc\sqrt{\frac{G^2M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2}} \\
&- 2ca^2\sin^2\theta + 4cG^2M^2\left[\frac{GM}{c^2} + \sqrt{\frac{G^2M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2}}\right]^2 \frac{a^2}{4G^2M^2r_+^2}\sin^2\theta
\end{aligned}$$

simplificando,

$$= ca^2 - ca^2\cos^2\theta - 2ca^2\sin^2\theta + ca^2\sin^2\theta = ca^2 - ca^2\cos^2\theta - ca^2\sin^2\theta = ca^2 - ca^2$$

debido a lo cual, desde la ecuación (H-71), se confirma que  $\xi^\mu$  es nulo en la hipersuperficie  $r' = r'_+$ , ya que:

$$\boxed{\xi^\alpha\xi_\alpha|_{r'=r'_+} = 0} \quad (\text{H-76})$$

## H.12. Norma de $\xi^\mu\xi_\mu$

Retomado la norma,  $\xi^\mu\xi_\mu = g_{00} + \frac{2}{c}g_{03}(\Omega_H) + \frac{1}{c^2}g_{33}(\Omega_H)^2$  y reescribiendo de la forma:

$$\begin{aligned}
\xi^\mu\xi_\mu &= -\left[1 - \frac{2GMr'}{c^2\Sigma}\right] - \left[\frac{4GMa r' \sin^2\theta}{c^3\Sigma}\right] \frac{\Omega_H}{c} + \frac{B}{c^2\Sigma} \sin^2\theta \frac{\Omega_H^2}{c^2} \\
&= -\left[1 - \frac{2GMr'}{c^2\Sigma}\right] + \frac{B}{c^4\Sigma} \sin^2\theta \left[\Omega_H^2 - \frac{4GMa r'}{B} \Omega_H\right]
\end{aligned}$$

completando el cuadrado,

$$\begin{aligned}
&= -\left[1 - \frac{2GMr'}{c^2\Sigma}\right] + \frac{B}{c^4\Sigma} \sin^2\theta \left[\Omega_H^2 - \frac{4GMa r'}{B} \Omega_H + \left(\frac{2GMa r'}{B}\right)^2\right] \\
&- \frac{B}{c^4\Sigma} \sin^2\theta \left(\frac{2GMa r'}{B}\right)^2 \\
&= -\left[1 - \frac{2GMr'}{c^2\Sigma}\right] + \frac{B}{c^4\Sigma} \sin^2\theta \left[\Omega_H - \frac{2GMa r'}{B}\right]^2 - \frac{B}{c^4\Sigma} \sin^2\theta \left(\frac{2GMa r'}{B}\right)^2
\end{aligned}$$

utilizando la ecuación (H-67),

$$\xi^\mu\xi_\mu = -\left[1 - \frac{2GMr'}{c^2\Sigma}\right] + \frac{B}{c^4\Sigma} \sin^2\theta [\Omega_H - c\omega]^2 - \frac{B}{c^4\Sigma} \sin^2\theta \left(\frac{2GMa r'}{B}\right)^2 \quad (\text{H-77})$$

Trabajando únicamente con el primer y tercer término de la anterior ecuación, se encuentra:

$$\begin{aligned}
&- \left[1 - \frac{2GMr'}{c^2\Sigma}\right] - \frac{B}{c^4\Sigma} \sin^2\theta \left(\frac{2GMa r'}{B}\right)^2 = -\frac{1}{c^2\Sigma} \left[c^2\Sigma - 2GMr' + \frac{4G^2M^2a^2r'^2 \sin^2\theta}{c^2B}\right] \\
&= -\frac{1}{c^4B\Sigma} [(c^4\Sigma - 2GMc^2r')B + 4G^2M^2r'^2(a^2 \sin^2\theta)] \quad (\text{H-78})
\end{aligned}$$

reconociendo las expresiones,

$$\Sigma = r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta = r'^2 + \frac{a^2}{c^2} - \frac{a^2}{c^2} \sin^2 \theta \quad (\text{H-79})$$

$$\Delta = r'^2 + \frac{a^2}{c^2} - \frac{2GM}{c^2} r' \quad \text{y} \quad B = c^2 \left( r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta \quad (\text{H-80})$$

$$B = c^2 \left( r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right)^2 - (c^2 r'^2 + a^2 - c^2 \Sigma) \Delta \quad (\text{H-81})$$

efectuando varias líneas de álgebra, y utilizando el conjunto de ecuaciones (H-78) a (H-79) sobre el numerador de (H-77); se consigue,

$$\begin{aligned} & (c^4 \Sigma - 2GMc^2 r') B + 4G^2 M^2 r'^2 (a^2 \sin^2 \theta) \\ &= (c^4 \Sigma - 2GMc^2 r') \left[ c^2 \left( r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right)^2 - (c^2 r'^2 + a^2 - c^2 \Sigma) \Delta \right] \\ &+ 4G^2 M^2 r'^2 (c^2 r'^2 + a^2 - c^2 \Sigma) \\ &= c^6 \Sigma \left( r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right)^2 - c^4 \Delta \Sigma (c^2 r'^2 + a^2 - c^2 \Sigma) - 2GMc^4 r' \left( r'^2 + \frac{a^2}{c^2} \right)^2 \\ &+ 2GMc^2 r' (c^2 r'^2 + a^2 - c^2 \Sigma) \Delta + 4G^2 M^2 c^2 r'^4 + 4G^2 M^2 r'^2 a^2 - 4G^2 M^2 c^2 r'^2 \Sigma \\ &= c^6 \Sigma \left( r'^4 + 2r'^2 \frac{a^2}{c^2} + \frac{a^4}{c^4} \right) - c^4 \Sigma (c^2 r'^2 + a^2 - c^2 \Sigma) \left( r'^2 + \frac{a^2}{c^2} - \frac{2GM}{c^2} r' \right) \\ &- 2GMc^4 r' \left( r'^4 + 2r'^2 \frac{a^2}{c^2} + \frac{a^4}{c^4} \right) + 2GMc^2 r' \left( r'^2 + \frac{a^2}{c^2} - \frac{2GM}{c^2} r' \right) (c^2 r'^2 + a^2 - c^2 \Sigma) \\ &+ 4G^2 M^2 c^2 r'^4 + 4G^2 M^2 r'^2 a^2 - 4G^2 M^2 c^2 r'^2 \Sigma \\ &= c^6 r'^4 \Sigma + 2\Sigma c^4 r'^2 a^2 + \Sigma c^2 a^4 - c^4 \Sigma \left( c^2 r'^4 + r'^2 a^2 - 2GM r'^3 + r'^2 a^2 + \frac{a^4}{c^2} - \frac{2GM}{c^2} a^2 r' \right. \\ &- \left. c^2 r'^2 \Sigma - a^2 \Sigma + 2GM r' \Sigma \right) - 2GMc^4 r'^5 - 4GMc^2 r'^3 a^2 - 2GM r' a^4 \\ &+ 2GMc^2 r' \left( c^2 r'^4 + r'^2 a^2 - 2GM r'^3 + r'^2 a^2 + \frac{a^4}{c^2} - \frac{2GM}{c^2} a^2 r' - c^2 r'^2 \Sigma - a^2 \Sigma + 2GM r' \Sigma \right) \\ &+ 4G^2 M^2 c^2 r'^4 + 4G^2 M^2 r'^2 a^2 - 4G^2 M^2 c^2 r'^2 \Sigma \\ &= c^6 r'^2 \Sigma^2 + c^4 a^2 \Sigma^2 - 2GMc^4 r' \Sigma^2 \\ &= \Sigma^2 c^4 (c^2 r'^2 + a^2 - 2GM r') \\ &= \Sigma^4 c^6 \Delta \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación (H-76) toma la forma

$$\boxed{\xi^\mu \xi_\mu = -\frac{c^2 \Sigma \Delta}{B} + \frac{B}{c^4 \Sigma} \sin^2 \theta [\Omega_H - c\omega]^2} \quad (\text{H-82})$$



### H.13. Cálculo de $\xi^\alpha$

Utilizando el tensor métrico (3-22), de tal forma que  $\xi_\alpha = g_{\alpha\nu}\xi^\nu$  al expandir el índice que indica suma, se obtienen las componentes:

$$\xi_\alpha = g_{\alpha 0}\xi^0 + g_{\alpha 1}\xi^1 + g_{\alpha 2}\xi^2 + g_{\alpha 3}\xi^3$$

$$\xi_0 = g_{00}\xi^0 + g_{01}\xi^1 + g_{02}\xi^2 + g_{03}\xi^3 = g_{00} + g_{03}(\Omega_H/c)$$

$$\xi_1 = g_{10}\xi^0 + g_{11}\xi^1 + g_{12}\xi^2 + g_{13}\xi^3 = g_{10} + g_{13}(\Omega_H/c)$$

$$\xi_2 = g_{20}\xi^0 + g_{21}\xi^1 + g_{22}\xi^2 + g_{23}\xi^3 = 0$$

$$\xi_3 = g_{30}\xi^0 + g_{31}\xi^1 + g_{32}\xi^2 + g_{33}\xi^3 = g_{03} + g_{33}(\Omega_H/c)$$

Por lo tanto

$$\xi^\alpha = \left( g_{00} + \frac{\Omega_H}{c}g_{03}, g_{01} + \frac{\Omega_H}{c}g_{13}, 0, g_{03} + \frac{\Omega_H}{c}g_{33} \right) \quad (\text{H-83})$$

de donde se obtiene, con ayuda del elemento de línea de Kerr (3-23),

$$\xi_{r'} = 1 - a \frac{\Omega_H}{c^2} \sin^2 \theta$$

# Bibliografía

- [1] BRAUER, O. Camargo A. ; M., Socolovsky: Newman-Janis Algorithm Revisited. En: *International Journal of Theoretical Physics* 54 (2015), p. 302–314
- [2] CARROLL, S.M.: *Lectures Notes on General Relativity*. California : Institute for Theoretical Physics University of California, 1997
- [3] CHANDRASEKHAR, S.: *The Mathematical Theory of Black Holes*. United States : Oxford University Press, 1983
- [4] COHEN, J.: Note on the Kerr Metric and Rotating Masses. En: *Journal of Mathematical Physics* 8 (1967), p. 1477–1478
- [5] COHEN, J.: Angular Momentum and the Kerr Metric. En: *Journal of Mathematical Physics* 9 (1968), p. 905–904
- [6] D'INVERNO, R.A.: *Introducing Einstein's Relativity*. United States : Oxford University Press, 1992
- [7] HAWKING, S.W. ; ELLIS, G.F.R.: *The Large Scale Structure of Space-Time*. London : Cambridge University Press, 1973
- [8] HOBSON M.P., Efstathiou G. P. ; N., Lasenby A.: *General Relativity An Introduction for Physicists*. London : Cambridge University Press, 2006
- [9] KERR, R.: Gravitational Field of Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics. En: *Physical Review Letters* 2 (1963), p. 237–238
- [10] KOSNIOWSKI, C.: *Topología Algebraica*. España : Editorial Reverté, S.A., 1986
- [11] LIPSCHUTZ, M.: *Teoría y Problemas de Geometría Diferencial*. México : McGraw-Hill, 1971
- [12] NEWMAN, E. Chinnapared K. Exton A. Prakash A. ; R., Torrence: Metric of a Rotating, Charged Mass. En: *Journal of Mathematical Physics* 6 (1965), p. 918–919
- [13] NEWMAN, E. Penrose R.: An Approach to Gravitational Radiation by a Method of Spin Coefficients. En: *Journal of Mathematical Physics* 3 (1962), p. 566–578

- 
- [14] NEWMAN, E. T. ; I., Janis A.: Note on the Ker Spinning-Particle Metric. En: *Journal of Mathematical Physics* 6 (1965), p. 915–917
- [15] POISSON, E.: *A relativist's Toolkit: The Mathematics, of Black-Hole Mechanics*. London : Cambridge University Press, 2004
- [16] RYDER, L.: *Introduction to General Relativity*. London : Cambridge University Press, 2009
- [17] SCHWARZSCHILD, K.: On the Gravitational Field of a Mass Point According To Einstein Theory. En: *arXiv:physics/9905030v1* (1999)
- [18] STEPHANI H., Maccallum M. Hoenselaers C. ; E., Herlt: *Exact Solutions os Einstein's Field Equations*. London : Cambridge University Press, 2003
- [19] TALBOT, C.J.: Newman-Penrose Approach to Twisting Degenerate Metrics. En: *Communications in Mathematical Physics* 13 (1969), p. 45–61
- [20] TEJEIRO, J.M.: *Principios de Relatividad General*. Bogotá, Colombia : Universidad Nacional de Colombia, Unibiblos, 2005
- [21] TEUKOLSKY, S.: the Kerr Metric. En: *arXiv:1410.2130v2 [gr-qc]* (2015)
- [22] WALD, R.M.: *General Relativity*. London : The University of Chicago Press, 1984
- [23] WEINBERG, S.: *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of relativity*. United States : John Wiley & Sons, Inc, 1972
- [24] WILTSHIRE D., Visser M. ; S., Scott: *The Kerr Space-Time Rotating Black Holes in General Relativity*. London : Cambridge University Press, 2009