Mejoramiento de las Cotas Para Valores Propios y Valores Singulares

Angie Rocio Melo Casas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2015

Mejoramiento de las Cotas Para Valores Propios y Valores Singulares

Angie Rocio Melo Casas

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias Matemáticas

Director:
Ph.D.Humberto Sarria Zapata

Línea de Investigación:
Teoría de Matrices

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2015

A mi familia

Agradecimientos

A Dios, quien ha proveído lo justo en el momento adecuado; a mis padres por su desmedido amor, su incondicional apoyo y respaldo a todos mis sueños y mis pasos; a mi hermano quien ha sido mi cómplice y aliado; a Leonardo quien me presto su incondicional acesoria en este trabajo; a Cesar, por ser mi maestro y apoyo en todos estos años; a mis amigos, que me acompañaron y creyeron en mí; a mi familia.

Al Profesor Humberto Sarria Zapata, director del presente trabajo de grado; no solo un profesor de amplios conocimientos y perspectivas, sino también una memorable persona con cualidades humanas que en pocos reconozco; gracias a su paciencia y orientación me fue posible cerrar este capítulo tan importante en mi vida académica.

Resumen

Dada una matriz cuadrada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, se ha probado previamente que sus valores propios están acotados en términos de la traza, de la norma de Frobenius y el valor n. Así mismo, toda matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ admite una descomposición a valores singulares, estos valores, al igual que los valores propios, también pueden ser acotados utilizando la traza de la matriz, la norma de Frobenius y el valor n. Surge entonces la intensión de determinar si es posible encontrar cotas mejores, tanto para valores propios como para singulares, utilizando información a la traza y la norma de Frobenius.

Palabras clave: Valores Propios, Valores Singulares, Cotas, Norma de Frobenius.

Abstract

Given a square matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, it has been previously proved that its eigenvalues are bounded in terms of trace, Frobenius' Norm and the number n. Likewise, every matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ admits a decomposition of singular values, these values, just like the eigenvalues, can be bounded using the matrix trace, Frobenius' Norm and the number n. It then arises the intention of determining, whether it is possible to find better bounds for eigenvalues as well as for singular values, using additional information from the trace and the Frobenius´ Norm.

Keywords: Eigenvalues, Singular Values, Bounds, Frobenius' Norm

Índice general

1. Introducción

Estimar los valores propios y singulares de una matriz puede ser un proceso muy dispendioso en términos de las operaciones que se deben realizar para obtenerlos, ya que cuando tratamos con matrices de tamaños grandes, los algoritmos conocidos para la localización de dichos valores, realizan bastantes operaciones. La acotación de los valores propios y singulares brindan un panorama de la ubicación de éstos: mientras más precisas sean las cotas, la estimación de estos valores será mucho mejor. Dada una matriz cuadrada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, se ha determinado que sus valores propios están acotados en términos de la traza, de la norma de Frobenius y el valor n. Así mismo, toda matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ admite una descomposición a valores singulares, estos valores, al igual que los valores propios, también pueden ser acotados utilizando la traza de la matriz, la norma de Frobenius y el valor $q = min\{m, n\}$.

En 1969 F. A. Graybill [2] había determinado que la varianza de los valores propios de una matriz puede calcularse en función de la traza de la matriz y su cuadrado, esto es,

$$s^2 = \frac{Tr(A^2) - \frac{Tr(A)^2}{n}}{n}.$$

Para 1974 Samuelson [1] y Arnold [3] habían probado que para cualquier conjunto de n números reales ordenados $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$, conociendo la media $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$ y la varianza $s^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\bar{x})^2}{n}$, se cumplen las desigualdades

$$x_1 \leq \bar{x} + s(n-1)^{1/2}$$

$$x_n \geq \bar{x} - s(n-1)^{1/2}.$$

Estas desigualdades fueron extendidas por H. Wolkowicz y G. Styan en [4] donde establecen que para $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\bar{x} - s\left(\frac{k-1}{n-k+1}\right)^{1/2} \leq x_k \leq \bar{x} + s\left(\frac{n-k}{k}\right)^{1/2}$$

donde las igualdades se cumplen a izquierda si, y sólo si, $x_1 = x_2 = \ldots = x_{k-1}$ y $x_k = x_{k+1} = \ldots = x_n$ y a derecha si, y sólo si, $x_1 = x_2 = \ldots = x_k$ y $x_{k+1} = x_{k+2} = \ldots = x_n$. En 1980 H. Wolkowicz y G. Styan en [5] utilizan la desviación estándar estudiada por Graybill, junto con la desigualdad de Samuelson y establecen las cotas para los valores propios de una matriz en términos de la traza; este trabajo lo complementaron ese mismo año en [6], donde trabajaron con valores propios complejos no reales. Wolkowicz en [7] utiliza métodos de optimización para encontrar cotas de los valores propios de una matriz, el más notable y útil es el de Karuh-Kuhn-Tucker; con el que obtuvo cotas más refinadas dadas solamente, usando la traza de la matriz, la traza del cuadrado de la matriz y la dimensión n.

En 1990 [10], P. Tarazaga trabaja sobre las cotas de valores propios de matrices simétricas, aprovechando el hecho que las matrices simétricas semidefinidas positivas de orden n forman un cono y que la posición de cada matriz en el cono depende de sus valores propios y del rango. Para estas instancias ya es utilizada no solo la traza de la matriz si no también la norma de Frobenius. Adicionalmente prueba que si el ángulo entre una matriz y la identidad aumenta, entonces la cantidad de valores propios por arriba de la media decrece; nuevamente esta relación está determinada por la norma de Frobenius y la traza. Finalmente menciona que los resultados pueden ser extendidos a matrices simétricas semidefinidas negativas. Un año más tarde en [11], se generalizan algunas propiedades para matrices no simétricas, se proporciona una cota inferior para el valor propio máximo y se determina la unicidad del valor propio en el intervalo conocido. Adicionalmente se realiza una generalización de las cotas de los valores singulares, siguiendo la misma línea utilizada para los valores propios, sin embargo, no todas las cotas funcionan igualmente para los valores singulares, así que se presentan algunas cotas débiles. En 1994, Merikoski, Tarazaga y H. Sarria [12] recopilan los resultados anteriores para matrices complejas y extienden los resultados obtenidos para los valores propios a valores singulares. Esto a través de métodos de optimización apropiados como el de Karush-Kuhn-Tucker. Todo esto utilizando únicamente la información determinada por la traza de la matriz y su norma de Frobenius.

En los últimos años, Merikoski [13] ha conseguido cotas para los valores singulares de una matriz trabajando con información diferente a la ya establecida, es el caso de la norma espectral, el rango y el determinante. Tomando una matriz A de tamaño $n \times n$ con valores singulares $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_n$ y $||\cdot||$ es la norma espectral, si $1 \leq r \leq n$, entonces $\sigma_r = \min\limits_{H \in S_r} ||H||$, donde S_r es el conjunto de las matrices H de tamaño $n \times n$, tales que $ran(A+H) \leq r-1$; el autor determina las cotas superiores de los valores singulares tomando la matriz H de forma apropiada.

En el presente trabajo se pretende establecer cotas más precisas para valores propios y singulares, está organizado de acuerdo al siguiente esquema: En el capítulo II se proporcionan las nociones básicas y algunos teoremas preliminares. En el capítulo III se establecen unas cotas iniciales para valores propios, y para extender el proceso a los valores singulares se utiliza el Teorema de Karush $-$ Kuhn $-$ Tucker en la equivalencia de problemas de optimización. En el capítulo IV se utiliza información adicional a la conocida en el capítulo III, en este caso se suponen cotas que mejoran las cotas ya conocidas, y con ella se generan nuevas cotas para los valores propios y singulares. En el capítulo V se proporcionan ejemplos de las cotas y los refinamientos para matrices Hermitiana y randómicas, así como se busca una relación de las cotas con los teoremas de entrelazamiento de valores propios y singulares. En el capítulo VI se encuentra el posible trabajo próximo y en el capítulo VII las conclusiones. En los anexos, los códigos trabajados a lo largo del trabajo.

2. Preliminares

Para el desarrollo de los temas a tratar en el presente trabajo, es necesario hacer una revisión de algunos conceptos, nociones básicas y teoremas fundamentales acerca de valores propios y valores singulares. A continuación se encuentra la notación que se utilizará en adelante.

$M_{m,n}(\mathbb{F})$: Conjunto de matrices de tamaño $m \times n$ sobre el campo $\mathbb{F}$. En el caso en que $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, se abrevia como $M_{m,n}$.
$M_n(\mathbb{F})$: Conjunto de matrices de tamaño $n \times n$ sobre el campo $\mathbb{F}$. En el caso en que $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, se abrevia como M_n.
$\mathbb{R}^n$: Conjunto de todos los vectores de n componentes reales, considerados como vectores columna.
$\mathbb{C}^n$: Conjunto de todos los vectores de n componentes complejas, considerados como vectores columna.

Definición 1 (Traza de una Matriz). *Si $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$, la traza de A esta definida por $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.*

Definición 2 (Matriz Transpuesta). *Si $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, la transpuesta de A, notada A^T, es la matriz en $M_{n,m}(\mathbb{F})$ generada por (a_{ji}).*

Definición 3 (Matriz Adjunta Hermitiana). *Si $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}$, la matriz adjunta Hermitiana está definida por $A^* = \overline{A}^T$, donde $\overline{A}$ es la matriz generada por $(\overline{a_{ij}})$, es decir, el conjugado complejo de las componentes de A.*

Definición 4 (Matriz Hermitiana). *Si $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}$, la matriz se dice Hermitiana, si $A = A^*$.*

Definición 5 (Matriz Normal). *Decimos que una matriz A es normal, si $AA^* = A^*A$.*

Definición 6 (Matriz Unitaria). *Una matriz $U \in M_n$ se dice unitaria, si $U^*U = I$. En caso que $U \in M_n(\mathbb{R})$, U se dice ortogonal.*

El siguiente Teorema es tomado de [15]

Teorema 1. *Sea $U \in M_n$. Si U es unitaria, entonces U^* es unitaria.*

Definición 7 (Similaridad). *Sean $A, B \in M_n$. Decimos que A es similar a B, si existe una matriz invertible $S \in M_n$ tal que $A = S^{-1}BS$.*

Definición 8 (Diagonalización Unitaria). *Si la matriz $A \in M_n$ es unitariamente equivalente a una matriz diagonal, esto es $A = U^*DU$ con D una matriz diagonal y U una matriz unitaria, decimos que A es unitariamente diagonalizable.*

Teorema 2. *La relación de similaridad preserva la traza y el determinante.*

Demostración. Para ver que la relación de similaridad preserva la traza, tomemos A y B matrices similares, por lo tanto debe existir una matriz invertible S tal que $A = S^{-1}BS$. Entonces,

$$\begin{aligned} Tr(A) =& Tr(S^{-1}BS) \\ =& Tr(BSS^{-1}) \\ =& Tr(B). \end{aligned}$$

Por lo tanto las trazas de dos matrices similares son iguales.
Para probar que la similaridad también preserva el determinante, consideremos el determinante y sus propiedades:

$$\begin{aligned} det(A) =& det(S^{-1}BS) \\ =& det(S^{-1})det(BS) \\ =& det(BS)det(S^{-1}) \\ =& det(BSS^{-1}) \\ =& det(B). \end{aligned}$$

Así vemos que matrices similares tienen determinantes iguales. □

Definición 9 (Norma de Frobenius). *Sea $A \in M_{m,n}$. La norma de Frobenius de A se define como el valor*

$$||A||_F = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observemos que $\bar{a}_{ij}a_{ij} = a_{ij}\bar{a}_{ij} = |a_{ij}|^2$, por lo tanto, si consideramos la matriz $A^*A = (\alpha_{ij})$, ésta tiene en la diagonal los elementos $\alpha_{ii} = \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2$ y calculando su traza notamos que

$$||A||_F^2 = Tr(A^*A).$$

Lema 1. *La norma de Frobenius $||\cdot||_F$ es unitariamente invariante, esto es, $||UA||_F = ||A||_F$, donde $U, A \in M_n$ y U es unitaria.*

Demostración. Sean $U, A \in M_n$, U unitaria y consideremos

$$\begin{aligned} ||UA||_F^2 &= Tr((UA)^*(UA)) \\ &= Tr(A^*U^*UA) \\ &= Tr(A^*A) \\ &= ||A||_F^2. \end{aligned}$$

□

Proposición 1. *Sea $A \in M_n$, la norma de Frobenius cumple la propiedad $||A||_F = ||A^*||_F$.*

Demostración. Sea $A \in M_n$, recordemos que $\bar{a}_{ij}a_{ij} = a_{ij}\bar{a}_{ij} = |a_{ij}|^2$, por lo tanto, si $AA^* = (\alpha_{ij})$, ésta tiene en la diagonal los elementos $\alpha_{ii} = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2$. Entonces,

$$\begin{aligned} ||A^*||_F^2 &= Tr(AA^*) \\ &= \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ii}|^2 \\ &= Tr(A^*A) \\ &= ||A||_F^2. \end{aligned}$$

□

2.1. Valores Propios

Definición 10 (Valores y Vectores Propios)**.** *Sean $A \in M_n$, λ un escalar y $x \in \mathbb{C}^n$ no nulo. Si $Ax = \lambda x$, entonces λ se llama un valor propio de la matriz A y x el vector propio asociado a λ.*

De la definición anterior podemos observar que, si λ es un valor propio de A y x es el vector propio asociado a λ, $0 = \lambda x - Ax = (\lambda I - A)x$, con $x \neq 0$. Esto indica que λ es un valor propio de A si, y sólo si, $\lambda I - A$ es una matriz singular, en concecuencia $det(\lambda I - A) = 0$.

Definición 11 (Polinomio Característico)**.** *El polinomio característico de $A \in M_n$ está definido como $P_A(t) := det(tI - A)$.*

Considerando las deficiones (10) y (11), podemos ver que los valores propios de la matriz A, satisfacen $0 = det(\lambda I - A) = P_A(\lambda)$, por lo tanto éstos son las raíces del polinomio característico.

El siguiente Teorema es tomado de [15], y caracteriza los valores propios de una matriz Hermitiana.

Teorema 3. *Sea $A \in M_n$, si A es Hermitiana, entonces todos sus valores propios son reales.*

Necesitamos también, algunos Teoremas de Similaridad.

Teorema 4. *Las matrices similares tienen el mismo polinomio característico, y en consecuencia los mismos valores propios.*

Demostración. Tomemos dos matrices similares $A, B \in M_n$, exite S invertible talque $A = S^{-1}BS$, haciendo la diferencia con la matriz λI tenemos que $\lambda I - A = \lambda I - S^{-1}BS$, y utilizando las propiedades del producto de matrices y los determinantes tenemos

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = det(\lambda I - A) &= det(\lambda I - S^{-1}BS) \\ &= det(\lambda S^{-1}S - S^{-1}BS) \\ &= det(S^{-1}(\lambda S - BS)) \\ &= det(S^{-1}(\lambda I - B)S) \\ &= det(S^{-1})det(\lambda I - B)det(S) \\ &= \frac{1}{det(S)}det(\lambda I - B)det(S) \\ &= det(\lambda I - B) = P_B(\lambda). \end{aligned}$$

□

El siguiente Teorema es tratado en [15].

Teorema 5 (Teorema de Schur)**.** *Toda matriz $A \in M_n$ es similar a una matriz triangular superior vía matrices unitarias.*

Teorema 6. *Dada una matriz $A \in M_n$, si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son sus valores propios, se tiene que*

1. $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.
2. $det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Demostración. 1. Por el Teorema de Schur, A es similar a una matriz triangular superior, es decir, existe una matriz invertible S y una triangular superior T tales que $A = S^{-1}TS$, y como las matrices similares tienen la misma traza, entonces $Tr(A) = Tr(T) = \sum_{i=1}^{n} t_{ii}$, como los elementos de la diagonal de una matriz triangular son sus valores propios, y dado que la similaridad también preserva los valores propios, éstos son los mismos para la matriz A, luego $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} t_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

2. Dado que A es similar a una matriz triangular superior T, ellas tienen el mismo determinante. El determinante de T es el producto de los elementos de la diagonal, por ser triangular superior estos son sus valores propios. Ahora, como A y T son matrices similares tienen los mismos valores propios, por lo tanto: $det(A) = det(T) = \prod_{i=1}^{n} t_{ii} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

$\square$

Teorema 7. *Sean $A \in M_n$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sus valores propios. Si A es unitariamente diagonalizable, entonces $||A||_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.*

Demostración. Si A es unitariamente diagonalizable, existe una matriz unitaria U, tal que $A = U^*DU$, donde $D = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$. Tomando la norma de Frobenius, del Lema 1 y la Proposición 1 tenemos

$$\begin{aligned} ||A||_F^2 &= ||U^*DU||_F^2 \\ &= ||DU||_F^2 \\ &= ||U^*D^*||_F^2 \\ &= ||D^*||_F^2 \\ &= Tr(DD^*) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2. \end{aligned}$$

$\square$

2.2. Valores singulares

Definición 12 (Valores Singulares)**.** *Sea $A \in M_{m,n}$ con rango k, las raíces cuadradas no negativas de los valores propios de AA^*, se llaman valores singulares de A y se notan como σ_i. En adelante, supondremos que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_k > \sigma_{k+1} = \cdots = \sigma_q = 0$, donde $q = min\{m, n\}$.*

El Teorema que veremos a continuación, determina la posibilidad de tener una descomposición a valores singulares, y fue tomada de [15].

Teorema 8 (Descomposición a Valores Singulares)**.** *Si $A \in M_{m,n}$ tiene rango k, entonces A se puede escribir como*

$$A = V\Sigma W^*,$$

donde $V \in M_m$ y $W \in M_n$ son matrices unitarias. La matriz $\Sigma = (\sigma_{ij})$ tiene $\sigma_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $\sigma_i = \sigma_{ii}$ los valores singulares de A. Las columnas de V son los vectores propios de AA^* y las columnas de W son los vectores propios de A^*A, en el orden correspondiente de los valores singulares.

A la factorización del Teorema anterior se le conoce como la Descomposición a Valores Singulares de una matriz A.

Si $A \in M_n$ es no singular, entonces la descomposición a valores singulares puede determinarse con el siguiente proceso, propuesto en [15].

1. Construya la matriz AA^*, ésta es Hermitiana, ya que $(AA^*)^* = AA^*$, se sigue que es normal y unitariamente diagonalizable, ya que sus valores propios $\{\lambda_i\}$ son las componentes de la matriz diagonal (Λ) y sus vectores propios $\{u_i\}$ son las columnas de la matriz unitaria (U), es decir $AA^* = U\Lambda U^*$.

2. Construya $\Sigma = (\sigma_{ij})$ donde $\sigma_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $\sigma_{ii} = \sigma_i = \lambda_i^{1/2}$.

3. Construya $V = [u_1 u_2 \dots u_n] = U$.

4. Como la descomposición está dada por $A = V\Sigma W^*$, entonces

$$\begin{aligned} V^{-1}A &= \Sigma W^* \\ \Sigma^{-1}V^{-1}A &= W^* \\ (\Sigma^{-1}V^{-1}A)^* &= (W^*)^* \\ A^*(V^{-1})^*(\Sigma^{-1})^* &= W \\ A^*V\Sigma^{-1} &= W. \end{aligned}$$

   Note que V es unitaria, entonces $V^{-1} = V^*$ y $(V^*)^* = V$. Σ^{-1} tiene entradas reales y es una matriz diagonal, de donde $(\Sigma^{-1})^* = \Sigma^{-1}$.

5. Veamos que W es unitaria. Calculemos

$$\begin{aligned} W^*W &= \Sigma^{-1}V^{-1}AA^*V\Sigma^{-1} \\ &= \Sigma^{-1}V^{-1}V\Lambda V^*V\Sigma^{-1} \\ &= \Sigma^{-1}I\Lambda I\Sigma^{-1} \\ &= I. \end{aligned}$$

Finalmente observemos que en vista del Teorema 6 y la Definición 12 tenemos

$$||A||_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2. \tag{2-1}$$

3. Cotas Para Valores Propios y Valores Singulares

Supongamos un conjunto finito de números reales ordenados de forma decreciente $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$, organizados en un vector $\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$, $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$ su media, $s^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\bar{x})^2}{n}$ su varianza y $\bar{x}_{(k,l)} = \frac{1}{l-k+1} \sum_{j=k}^{l} x_j$. Siguiendo las ideas expuestas en [4], consideremos el vector $e^T = (1, 1, \cdots, 1)$ de n componentes y junto con la matriz identidad de tamaño $n \times n$ construyamos la matriz $C = I_n - \frac{ee^T}{n}$,

$$C = \begin{bmatrix} \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & \frac{n-1}{n} \end{bmatrix}.$$

Observemos que esta es una matriz simétrica e idempotente.

Tomemos los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, es decir, los e_j cuya componente $j-$ésima es 1 y sus demás componentes son 0, y construyamos el vector $\mathbf{w} = \sum_{j=k}^{l} \frac{e_j}{l-k+1}$ y realizando las siguientes operaciones obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}^T C\mathbf{x} =& \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{l-k+1} \\ \vdots \\ \frac{1}{l-k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & \frac{n-1}{n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
=& \left[-\frac{1}{n}, \cdots, -\frac{1}{n}, \frac{1}{l-k+1} - \frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{l-k+1} - \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \cdots, -\frac{1}{n}\right] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
=& -\frac{1}{n}[x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_{l+1} + \cdots + x_n] + \left(\frac{1}{l-k+1} - \frac{1}{n}\right)[x_k + \cdots + x_l] \\
=& \bar{x}_{(k,l)} - \bar{x}.
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{w}^T C\mathbf{x} = \bar{x}_{(k,l)} - \bar{x}. \tag{3-1}
$$

Por su parte, calculando

$$\mathbf{w}^T C\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{l-k+1} \\ \vdots \\ \frac{1}{l-k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & \frac{n-1}{n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{l-k+1} \\ \vdots \\ \frac{1}{l-k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left[-\tfrac{1}{n}, \cdots, -\tfrac{1}{n}, \tfrac{n-1-l+k}{n(l-k+1)}, \cdots, \tfrac{n-1-l+k}{n(l-k+1)}, -\tfrac{1}{n}, \cdots, -\tfrac{1}{n}\right] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{l-k+1} \\ \vdots \\ \frac{1}{l-k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{n-(l-k+1)}{n(l-k+1)} = (l-k+1)^{-1} - n^{-1}.$$

$$\mathbf{w}^T C\mathbf{w} = (l-k+1)^{-1} - n^{-1}. \tag{3-2}$$

Y también

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T C\mathbf{x} =& \mathbf{x}^T C^T C\mathbf{x} \\ =& \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & \frac{n-1}{n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & \frac{n-1}{n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ =& \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x} \\ x_2 - \bar{x} \\ \vdots \\ x_n - \bar{x} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x} \\ x_2 - \bar{x} \\ \vdots \\ x_n - \bar{x} \end{bmatrix} \\ =& \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = s^2 n. \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}^T C\mathbf{x} = s^2 n. \tag{3-3}$$

De (3-1), (3-2) y (3-3), y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$\begin{aligned}|\bar{x}_{(k,l)} - \bar{x}| = |\mathbf{w}^T C\mathbf{x}| = |\mathbf{w}^T C \cdot C\mathbf{x}| &\leq ((\mathbf{w}^T C(\mathbf{w}^T C)^T)((C\mathbf{x})^T C\mathbf{x}))^{\frac{1}{2}} \\ &= (\mathbf{w}^T CC^T\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}^T C^T C\mathbf{x})^{\frac{1}{2}} \\ &= (\mathbf{w}^T C\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}^T C\mathbf{x})^{\frac{1}{2}} \\ &= (((l-k+1)^{-1} - n^{-1})s^2 n)^{\frac{1}{2}} \\ &= s\left(\frac{n-l+k-1}{l-k+1}\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

$$|\bar{x}_{(k,l)} - \bar{x}| = s\left(\frac{n-l+k-1}{l-k+1}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3-4}$$

Por lo tanto

$$\bar{x} - s\left(\frac{n-l+k-1}{l-k+1}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \bar{x}_{(k,l)} \leq \bar{x} + s\left(\frac{n-l+k-1}{l-k+1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Considerando los casos en que $l = n, l = k$ y $k = 1$, entonces

$$\bar{x} - s\left(\frac{k-1}{n-k+1}\right)^{1/2} \leq \bar{x}_{(k,n)} \leq x_k \leq \bar{x}_{(1,k)} \leq \bar{x} + s\left(\frac{n-k}{k}\right)^{1/2}. \tag{3-5}$$

Realizando el mismo procedimiento con $\mathbf{w} = e_1$ y $\mathbf{w} = e_n$ obtenemos respectivamente

$$\bar{x} + \frac{s}{(n-1)^{\frac{1}{2}}} \leq x_1 \leq \bar{x} + s(n-1)^{\frac{1}{2}}, \tag{3-6}$$

$$\bar{x} - s(n-1)^{\frac{1}{2}} \leq x_n \leq \bar{x} - \frac{s}{(n-1)^{\frac{1}{2}}}. \tag{3-7}$$

Si observamos las desigualdades obtenidas, tomando $a = \sum_{i=1}^{n} x_i$ y $b^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ podemos notar que

$$\bar{x} = \frac{a}{n} \qquad \text{y} \qquad s^2 = \frac{b^2}{n} - \frac{a^2}{n^2}$$

ésto nos permite ver que estamos tratando los problemas de optimización restringidos a unas condiciones particulares:

$$P1 = \begin{cases} \text{mín } x_i; 1 \leq i \leq n \\ \text{Sujeto a} \\ a = \sum_{i=1}^{n} x_i \\ b^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n. \end{cases} \qquad P2 = \begin{cases} \text{máx } x_i; 1 \leq i \leq n \\ \text{Sujeto a} \\ a = \sum_{i=1}^{n} x_i \\ b^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n. \end{cases}$$

3.1. Cotas Para Valores Propios

Sea $A \in M_n$ una matriz Hermitiana y $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ sus valores propios.

3.1.1. Consideraciones Previas

- Si retomamos el estudio realizado en el capítulo anterior, calculando su media y desviación estándar observamos que:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \frac{Tr(A)}{n} = m.$$

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i - \bar{\lambda})^2 = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 - \frac{1}{n}(Tr(A))^2\right] = \frac{1}{n}\left[Tr(A^2) - \frac{1}{n}(Tr(A))^2\right].$$

- Considerando el caso anterior, tenemos dos problema equivalentes a $P1$ y $P2$ respectivamente para estos valores propios:

$$P1{,}1 = \begin{cases} \text{mín } \lambda_i; 1 \leq i \leq n \\ \text{Sujeto a} \\ Tr(A) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \\ ||A||_F^2 = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 \\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \end{cases} \qquad P1{,}2 = \begin{cases} \text{máx } \lambda_i; 1 \leq i \leq n \\ \text{Sujeto a} \\ Tr(A) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \\ ||A||_F^2 = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 \\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \end{cases}$$

3.1.2. Cotas

De las ecuaciones (3-5), (3-6) y (3-7) tenemos que, como se obtuvo en [5]:

$$\frac{Tr(A)}{n} + \frac{s}{(n-1)^{1/2}} \leq \lambda_1 \leq \frac{Tr(A)}{n} + s(n-1)^{1/2}. \tag{3-8}$$

$$\frac{Tr(A)}{n} - s\left(\frac{k-1}{n-k+1}\right)^{1/2} \leq \lambda_k \leq \frac{Tr(A)}{n} + s\left(\frac{n-k}{k}\right)^{1/2}. \tag{3-9}$$

$$\frac{Tr(A)}{n} - s(n-1)^{1/2} \leq \lambda_n \leq \frac{Tr(A)}{n} - \frac{s}{(n-1)^{1/2}}. \tag{3-10}$$

Además la igualdad a la izquierda de la ecuación (3-9) se obtiene si $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{k-1}$ y $\lambda_k = \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_n$. La igualdad a la derecha de la ecuación (3-9) se alcanza si $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k$ y $\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \cdots = \lambda_n$.

3.2. Cotas Para Valores Singulares

Supongamos que tenemos una matriz $A \in M_{m,n}$, con valores singulares ordenados de forma decreciente $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_q \geq 0$, donde $q = min\{m, n\}$.

3.2.1. Consideraciones previas

- Observemos que, como se desarrolla en [14]

$$||A||_F^2 = \sum_{i=1}^{q} \sigma_i^2 \leq q\sigma_1^2.$$

y asi

$$\frac{||A||_F}{\sqrt{q}} \leq \sigma_1. \tag{3-11}$$

Además, para algún j, $1 \leq j \leq q$

$$||A||_F^2 \geq \sum_{i=1}^{j} \sigma_i^2 \geq j\sigma_j^2.$$

luego

$$\sigma_j \leq \frac{||A||_F}{\sqrt{j}}. \tag{3-12}$$

- Dado que los valores singulares son todos no negativos, entonces podemos considerar $a, b \in \mathbb{R}, a \geq 0, b \geq 0$, tal que $a \leq \sum_{i=1}^{q} \sigma_i$ y $b^2 \geq \sum_{i=1}^{q} \sigma_i^2$; este valor a debe ser determinado de forma que permita refinar las cotas de los valores singulares. Veamos que, si tomamos $a \leq ||A||_F$, en la ecuación (3-11) no obtendríamos una mejora sobre la cota de σ_1, por lo tanto, necesariamente $||A||_F < a$. Además, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$a \leq \sum_{i=1}^{q} \sigma_i = (1, \cdots, 1) \cdot (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_q) \leq \sqrt{q}||A||_F.$$

Luego $||A||_F < a \leq \sqrt{q}||A||_F$. Notemos también, que necesariamente existe un k, $1 < k \leq q$ tal que $\sqrt{k-1}||A||_F < a \leq \sqrt{k}||A||_F$.

Ésto amplía el espacio factible del problema, ya que buscamos resolver los siguientes problemas para los valores singulares:

$$P2{,}1 = \begin{cases} \text{mín } \sigma_i; 1 < i \leq k \\ \text{Sujeto a} \\ a \leq \sum_{i=1}^{q} \sigma_i \\ b^2 \geq \sum_{i=1}^{q} \sigma_i^2 \\ \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_q. \end{cases} \qquad P2{,}2 = \begin{cases} \text{máx } \sigma_i; 1 \leq i < k \\ \text{Sujeto a} \\ a \leq \sum_{i=1}^{q} \sigma_i \\ b^2 \geq \sum_{i=1}^{q} \sigma_i^2 \\ \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_q. \end{cases}$$

- Si consideramos $a \geq 0, m = \frac{a}{q}, s^2 = \frac{||A||_F^2}{q} - m^2$ y $a > \sqrt{k-1}||A||_F$ podemos garantizar la positividad de las cotas de algunos valores singulares. Veamos que, según [14]:

$$\begin{aligned} m - s\left(\frac{k-1}{q-k+1}\right)^{1/2} &> 0 \\ m &> s\left(\frac{k-1}{q-k+1}\right)^{1/2} \\ m^2 &> s^2\left(\frac{k-1}{q-k+1}\right) \\ m^2 &> \left(\frac{||A||_F^2}{q} - m^2\right)\left(\frac{k-1}{q-k+1}\right) \\ m^2\left(1 + \frac{k-1}{q-k+1}\right) &> \left(\frac{||A||_F^2}{q}\right)\left(\frac{k-1}{q-k+1}\right) \\ m^2\left(\frac{q}{q-k+1}\right) &> \left(\frac{||A||_F^2}{q}\right)\left(\frac{k-1}{q-k+1}\right) \\ a^2 &> ||A||_F^2(k-1). \end{aligned}$$

$$a > ||A||_F\sqrt{k-1}. \tag{3-13}$$

- El siguiente Teorema nos permite establecer equivalencias entre diferentes problemas y será de gran utilidad. Comencemos por algunas definiciones:

  Definición 13 (Programa convexo superconsistente). *P un problema, se dice consistente si la región de factibilidad es no vacia; superconsistente si hay un punto factible x talque $g_i(x) < 0$ con g_i una restricción para todo $i = 1, \ldots, m$; convexo si la región factible, las restricciones y la función objetivo son todas convexas.*

  Teorema 9 (Karush-Kuhn-Tucker). *Supongamos que (P) es un programa convexo superconsistente tal que la función objetivo $f(x)$ y las funciones de restricción $g_1(x), \cdots, g_n(x)$ tienen primeras derivadas parciales continuas sobre K, entonces x^* es una solución de (P) si y sólo si existe un $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tal que:*

  1. *$\lambda_i^* \geq 0$ para $i = 1, \ldots, m$.*

2. $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$ *para* $i = 1, \ldots, m$.

3. $\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0$.

3.2.2. Problemas Equivalentes

Observemos que el problema $P2{,}1$ es equivalente al problema $P1$ y el problema $P2{,}2$ es equivalente al problema $P2$ utilizando el método de Karush-Kuhn-Tucker. La prueba de estas equivalencias sigue las ideas de las demostraciones expuestas en [14].

P1 y P2.1

Aplicado el Teorema 9 al problema $P2{,}1$ genera las siguientes condiciones:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 pos.i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma_q \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{q-1} \alpha_i \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 pos.i \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0. \tag{P2.1.1}$$

$$\alpha \geq 0; \alpha_i \geq 0; \beta \geq 0. \tag{P2.1.2}$$

$$\alpha \left(a - \sum_{i=1}^{q} \sigma_i \right) = 0; \beta \left(b^2 - \sum_{i=1}^{q} \sigma_i^2 \right) = 0; \alpha_i(\sigma_{i+1} - \sigma_i) = 0, 1 \leq i \leq q. \tag{P2.1.3}$$

La ecuación (P2.1.1) genera las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} -\alpha + \beta\sigma_1 - \alpha_1 &= 0 \\ -\alpha + \beta\sigma_2 + \alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \\ &\vdots \\ -\alpha + \beta\sigma_{j-1} + \alpha_{j-2} - \alpha_{j-1} &= 0 \\ 1 - \alpha + \beta\sigma_j + \alpha_{j-1} - \alpha_j &= 0 \\ -\alpha + \beta\sigma_{j+1} + \alpha_j - \alpha_{j+1} &= 0 \\ &\vdots \\ -\alpha + \beta\sigma_{q-1} + \alpha_{q-2} - \alpha_{q-1} &= 0 \\ -\alpha + \beta\sigma_q + \alpha_{q-1} &= 0. \end{aligned}$$

Si suponemos que $\beta = 0$ y sumamos todas las anteriores ecuaciones, tenemos que $\alpha = \frac{1}{q} > 0$, y de la primera ecuación sabemos que $0 < \alpha = -\alpha_1$, lo que no es posible debido a la ecuación (P2.1.2); por lo tanto $\beta > 0$, lo que implica que

$$b^2 = \sum_{i=1}^{q} \sigma_i^2 \quad \text{y de (2-1)} \quad b^2 = ||A||_F^2. \tag{3-14}$$

Por su parte, suponiendo que $\alpha = 0$ y sumando nuevamente todas las ecuaciones tenemos que $\beta \sum_{i=0}^{q} \sigma_i = -1$ y como los $\sigma_i \geq 0$, entonces $\beta < 0$, una contradicción, por lo tanto $\alpha > 0$ y en consecuencia

$$a = \sum_{i=1}^{q} \sigma_i. \tag{3-15}$$

Las ecuaciones (3-14) y (3-15) son las condiciones que se tienen en el problema $P1$ si $n = q$ y $x_i = \sigma_i$, por lo tanto, haciendo la equivalencia entre los problemas podemos observar que

$$m - s\sqrt{\frac{j-1}{q-j+1}} \leq \sigma_j \text{ para } 1 < j \leq k. \tag{3-16}$$

P2 y P2.2

Aplicado el Teorema 9 al problema $P2{,}2$ genera las siguientes condiciones:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1pos.i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma_q \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{q-1} \alpha_i \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1pos.i \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0. \tag{P2.2.1}$$

$$\alpha \geq 0; \alpha_i \geq 0; \beta \geq 0. \tag{P2.2.2}$$

$$\alpha \left(a - \sum_{i=1}^{q} \sigma_i \right) = 0; \beta \left(b^2 - \sum_{i=1}^{q} \sigma_i^2 \right) = 0; \alpha_i(\sigma_{i+1} - \sigma_i) = 0, 1 \leq i \leq q. \tag{P2.2.3}$$

La ecuación (P2.2.1) genera las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
-\alpha + \beta\sigma_1 - \alpha_1 &= 0 \\
-\alpha + \beta\sigma_2 + \alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \\
&\vdots \\
-\alpha + \beta\sigma_{j-1} + \alpha_{j-2} - \alpha_{j-1} &= 0 \\
-1 - \alpha + \beta\sigma_j + \alpha_{j-1} - \alpha_j &= 0 \\
-\alpha + \beta\sigma_{j+1} + \alpha_j - \alpha_{j+1} &= 0 \\
&\vdots \\
-\alpha + \beta\sigma_{q-1} + \alpha_{q-2} - \alpha_{q-1} &= 0 \\
-\alpha + \beta\sigma_q + \alpha_{q-1} &= 0.
\end{aligned}$$

Si suponemos que $\beta = 0$ y sumamos todas las anteriores ecuaciones, tenemos que $\alpha = -\frac{1}{q} < 0$, lo que no es posible debido a la ecuación (P2.2.2); por lo tanto $\beta > 0$, lo que implica que

$$b^2 = \sum_{i=1}^{q} \sigma_i^2 \quad \text{y de (2-1)} \quad b^2 = ||A||_F^2 \tag{3-17}$$

Por su parte, suponiendo que $\alpha = 0$ y sumando las ecuaciones desde la $j+1$ hasta la q, con $j < k$, tenemos que $\beta \sum\limits_{i=j+1}^{q} \sigma_i = \alpha_j$, como $\beta > 0$, de (P2.2.2) obtenemos que $\sum\limits_{i=j+1}^{q} \sigma_i = 0$, lo que implica que $\sigma_{j+1} = \cdots = \sigma_q = 0$, pero por la ecuación (3-16), $0 < \sigma_{j+1}$, una contradicción, por lo tanto $\alpha > 0$ y en consecuencia

$$a = \sum_{i=1}^{q} \sigma_i. \tag{3-18}$$

Las ecuaciones (3-17) y (3-18) son las condiciones que se tienen en el problema $P2$ si $n = q$ y $x_i = \sigma_i$.

3.2.3. Cotas

Del modo en que se determinó en [14], veamos las cotas que se han establecido para los valores singulares:

Teorema 10. *Sea $A \in M_{m,n}$ con valores singulares $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_q \geq 0$ donde $q = min\{m, n\}$. Si $a \in \left(\sqrt{k-1}||A||_F, \sqrt{k}||A||_F\right]$ para algún $1 < k \leq q$, entonces*

1. $\frac{||A||_F}{\sqrt{q}} \leq \sigma_1 \leq m + s\sqrt{q-1}$.

2. $m - s\sqrt{\frac{j-1}{q-j+1}} \leq \sigma_j \leq m + s\sqrt{\frac{q-j}{j}}; 1 < j < k.$

3. $m - s\sqrt{\frac{k-1}{q-k+1}} \leq \sigma_k \leq \frac{||A||_F}{\sqrt{k}}.$

4. $0 \leq \sigma_j \leq \frac{||A||_F}{\sqrt{j}}, k < j \leq q.$

donde $m = \frac{a}{q}$ *y* $s^2 = \frac{||A||_F^2}{q} - \frac{a^2}{q^2}$*. Las igualdades se alcanzan:*

- *A la izquierda de* 1. *si y sólo si* $\sigma_1 = \cdots = \sigma_q$*, a la derecha si y sólo si* $\sigma_2 = \cdots = \sigma_q$*.*
- *A la izquierda de* 2. *si y sólo si* $\sigma_1 = \cdots = \sigma_{j-1}$ *y* $\sigma_j = \cdots = \sigma_q$*; a la derecha si y sólo si* $\sigma_1 = \cdots = \sigma_j$ *y* $\sigma_{j+1} = \cdots = \sigma_q$*.*
- *A la izquierda de* 3. *si y sólo si* $\sigma_1 = \cdots = \sigma_{k-1}$ *y* $\sigma_k = \cdots = \sigma_q$*; y a la derecha si y sólo si* $\sigma_1 = \cdots = \sigma_k = \frac{||A||_F}{\sqrt{k}}$ *y* $\sigma_{k+1} = \cdots = \sigma_q = 0$*.*
- *A la izquierda de* 4. *si y sólo si* $\sigma_1 = \cdots = \sigma_{j-1} = \frac{||A||_F}{\sqrt{j-1}}$ *y* $\sigma_j = \cdots = \sigma_q = 0$*; y a la derecha si y sólo si* $\sigma_1 = \cdots = \sigma_j = \frac{||A||_F}{\sqrt{j}}$ *y* $\sigma_{j+1} = \cdots = \sigma_q = 0$*.*

Demostración. La desigualdad izquierda de 1. se tiene de la ecuación (3-11), las desigualdades a la izquierda de 2. y 3. se obtienen gracias a la equivalencia del problema $P2{,}1$ con $P1$. Las desigualdades a la derecha en 1. y 2. se obtienen con la equivalencia entre los problemas $P2{,}2$ y $P2$. Las desigualdades a la derecha de 3. y 4. se deben a la ecuación (3-12). □

4. Mejoramiento de las Cotas de Valores Propios y Singulares

Además de las cotas ya vistas, si se conociera una cota de algún valor propio o valor singular, podrían mejorarse las cotas que ya se han obtenido. El material del presente capítulo se basa en las demostraciones trabajadas en [14], comencemos con algunas definiciones.

Definición 14 (Cota Inferior Activa)**.** *Sea $A \in M_n$, con valores propios reales $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Decimos que $\gamma \in \mathbb{R}$ es una cota inferior activa para el valor propio λ_j, con $1 \leq j \leq n$, si $\gamma \leq \lambda_j$ y γ es mayor que la cota inferior de λ_j determinada en la ecuación 3-9. Sea $A \in M_{m,n}$, con valores singulares $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_q$, donde $q = min\{m, n\}$. Decimos que $\gamma \in \mathbb{R}$ es una cota inferior activa para el valor singular σ_j, con $1 \leq j \leq q$, si $\gamma \leq \sigma_j$ y γ es mayor que la cota inferior de σ_j determinada en la ecuación* 2 *del Teorema 10.*

Definición 15 (Cota Superior Activa)**.** *Sea $A \in M_n$, con valores propios reales $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Decimos que $\gamma \in \mathbb{R}$ es una cota superior activa para el valor propio λ_j, con $1 \leq j \leq n$, si $\gamma \geq \lambda_j$ y γ es menor que la cota superior de λ_j determinada en la ecuación 3-9. Sea $A \in M_{m,n}$, con valores singulares $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_q$, donde $q = min\{m, n\}$. Decimos que $\gamma \in \mathbb{R}$ es una cota superior activa para el valor singular σ_j, con $1 \leq j \leq q$, si $\gamma \geq \sigma_j$ y γ es menor que la cota superior de σ_j determinada en la ecuación* 2 *del Teorema 10.*

4.1. Caso de Valores Propios

4.1.1. Cotas Superiores

Consideremos γ_1 una cota inferior activa de λ_{j+1}, i_* el mayor subíndice para el cual γ_1 también es una cota inferior activa de λ_{i_*} y $n_j = i_* - j$ la cantidad de elementos desde i_*

hasta $j+1$, junto con el problema

$$P3{,}1 = \begin{cases} \text{máx } \lambda_j & 1 \leq j < i_* \\ \text{Sujeto a} & \\ a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i & \\ b^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 & \\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n & \\ \lambda_{j+1} \geq \gamma_1. & \end{cases}$$

El objetivo es mejorar la cota superior de λ_j. Las condiciones de Karush $-$ Kuhn $-$ Tucker para $P3{,}1$ son las siguientes:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1pos.j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1pos.i \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \alpha_* \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1pos.j+1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0. \qquad \text{(P3.1.1)}$$

$$\alpha \geq 0; \alpha_* \geq 0; \alpha_i \geq 0, 1 \leq i < n; \beta \geq 0. \qquad \text{(P3.1.2)}$$

$$\beta \left(b^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \right) = 0; \alpha_*(\gamma_1 - \lambda_{j+1}) = 0. \qquad \text{(P3.1.3)}$$

De la ecuación (P3.1.1) se generan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} -\alpha + \beta\lambda_1 - \alpha_1 &= 0 \\ -\alpha + \beta\lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \\ &\vdots \\ -\alpha + \beta\lambda_{j-1} + \alpha_{j-2} - \alpha_{j-1} &= 0 \\ -1 - \alpha + \beta\lambda_j + \alpha_{j-1} - \alpha_j &= 0 \\ -\alpha + \beta\lambda_{j+1} + \alpha_j - \alpha_{j+1} &= \alpha_* \\ &\vdots \\ -\alpha + \beta\lambda_{n-1} + \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1} &= 0 \\ -\alpha + \beta\lambda_n + \alpha_{n-1} &= 0. \end{aligned}$$

Sumando todas las ecuaciones y suponiendo $\beta = 0$, se tiene $-1 - n\alpha = \alpha_*$, lo que implica que $\alpha < 0$, absurdo, por lo tanto $\beta > 0$ y de la ecuación (P3.1.3) tenemos

$$b^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2, \qquad \text{por el Teorema (7)} \quad b^2 = ||A||_F^2 \tag{4-1}$$

Además, si $\alpha_* = 0$ la condición $\lambda_{j+1} \geq \gamma_1$ no tendría ningún efecto en el problema $P3{,}1$ y obtendríamos las mismas cotas que en (3-9), por lo que γ_1 ya no sería una cota inferior activa, por lo tanto debemos considerar $\alpha_* > 0$. En consecuencia, $\lambda_{j+1} = \gamma_1$, más aún, $\lambda_{i_*} = \lambda_{i_*-1} = \cdots = \lambda_{j+1} = \gamma_1$. Esto nos permite observar que el problema $P3{,}1$ es equivalente a tratar el problema

$$P3{,}2 = \begin{cases} \text{máx } \bar{\lambda}_j \\ \text{Sujeto a} \\ Tr(A) - n_j\gamma_1 = \sum\limits_{i=1}^{n-n_j} \bar{\lambda}_i \\ ||A||_F^2 - n_j\gamma_1^2 = \sum\limits_{i=1}^{n-n_j} \bar{\lambda}_i^2 \\ \bar{\lambda}_1 \geq \bar{\lambda}_2 \geq \cdots \geq \bar{\lambda}_{n-n_j}. \end{cases}$$

Donde $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1, \bar{\lambda}_2 = \lambda_2, \ldots, \bar{\lambda}_j = \lambda_j, \bar{\lambda}_{j+1} = \lambda_{i_*+1}, \ldots, \bar{\lambda}_{n-n_j} = \lambda_n$.
Así mismo, el problema $P3{,}2$ es equivalente al problema $P1{,}2$ si tomamos $\hat{m} = \frac{Tr(A)-n_j\gamma_1}{n-n_j}$ y $\hat{s}^2 = \frac{||A||_F^2 - n_j\gamma_1^2}{n-n_j} - \hat{m}^2$.

4.1.2. Cotas Inferiores

Podemos mejorar la cota inferior para λ_j, si ahora suponemos que conocemos una cota superior activa γ_2 para el valor propio $\lambda_{j-1}, 1 < j \leq n$, i_{**} el menor subíndice para el cual γ_2 también es una cota superior activa de $\lambda_{i_{**}}$ y $p_j = j - i_*$ la cantidad de elementos desde $j-1$ hasta i_{**}, junto con el problema

$$P3{,}3 = \begin{cases} \text{mín } \lambda_j & 1 < j \leq n \\ \text{Sujeto a} \\ Tr(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \\ b^2 \geq \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \\ \lambda_{j-1} \leq \gamma_2. \end{cases}$$

Las condiciones de Karush $-$ Kuhn $-$ Tucker para $P3{,}3$ son las siguientes:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1pos.j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1pos.i \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_* \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1pos.(j-1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0. \qquad \text{(P3.3.1)}$$

$$\alpha \geq 0; \alpha_* \geq 0; \alpha_i \geq 0, 1 \leq i < n; \beta \geq 0. \qquad \text{(P3.3.2)}$$

$$\beta \left(b^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \right) = 0; \alpha_*(\gamma_2 - \lambda_{j-1}) = 0. \qquad \text{(P3.3.3)}$$

De la ecuación (P3.3.1) se generan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} -\alpha + \beta\lambda_1 - \alpha_1 &= 0 \\ -\alpha + \beta\lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \\ &\vdots \\ -\alpha + \beta\lambda_{j-1} + \alpha_{j-2} - \alpha_{j-1} &= -\alpha_* \\ 1 - \alpha + \beta\lambda_j + \alpha_{j-1} - \alpha_j &= 0 \\ -\alpha + \beta\lambda_{j+1} + \alpha_j - \alpha_{j+1} &= 0 \\ &\vdots \\ -\alpha + \beta\lambda_{n-1} + \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1} &= 0 \\ -\alpha + \beta\lambda_n + \alpha_{n-1} &= 0. \end{aligned}$$

Sumando todas las ecuaciones y suponiendo $\beta = 0$, se tiene $1 - n\alpha = -\alpha_*$, lo que implica que $\alpha > 0$, y de la primera ecuación de este sistema $-\alpha_1 = \alpha > 0$, así $\alpha_1 < 0$, absurdo, por lo tanto $\beta > 0$ y de la ecuación (P3.3.3) tenemos

$$b^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \quad \text{y del Teorema (7)} \quad b^2 = ||A||_F^2 \qquad \text{(4-2)}$$

Además, si $\alpha_* = 0$ la condición $\lambda_{j-1} \leq \gamma_2$ no tendría ningún efecto en el problema $P3{,}3$ y obtendríamos las mismas cotas que en (3-9), por lo que γ_2 ya no sería una cota superior activa, por lo tanto debemos considerar $\alpha_* > 0$. En consecuencia, $\lambda_{j-1} = \gamma_2$, más aún, $\lambda_{i_{**}} = \lambda_{i_*+1} = \cdots = \lambda_{j-1} = \gamma_2$. Esto nos permite observar que el problema $P3{,}3$ es equivalente a tratar el problema

$$P3{,}4 = \begin{cases} \text{mín } \bar{\lambda}_j \\ \text{Sujeto a} \\ Tr(A) - p_j\gamma_2 = \sum_{i=1}^{n-p_j} \bar{\lambda}_i \\ ||A||_F^2 - p_j\gamma_2^2 = \sum_{i=1}^{n-p_j} \bar{\lambda}_i^2 \\ \bar{\lambda}_1 \geq \bar{\lambda}_2 \geq \cdots \geq \bar{\lambda}_{n-p_j}. \end{cases}$$

Donde $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1, \bar{\lambda}_2 = \lambda_2, \ldots, \bar{\lambda}_{i_{**}-1} = \lambda_{i_{**}-1}, \bar{\lambda}_{i_{**}} = \lambda_j, \ldots, \bar{\lambda}_{n-p_j} = \lambda_n$.
Así mismo, el problema $P3{,}4$ es equivalente al problema $P1{,}1$ si tomamos $\hat{m} = \frac{Tr(A)-p_j\gamma_2}{n-p_j}$ y $\hat{s}^2 = \frac{||A||_F^2-p_j\gamma_2^2}{n-p_j} - \hat{m}^2$.

Hemos determinado entonces que, si conocemos una cota inferior activa de λ_{j+1} y una cota superior activa de λ_{j-1}, podemos mejorar las cotas de λ_j, utilizando los resultados obtenidos del problema $P1{,}1$:

4.1.3. Cotas Mejoradas

Teorema 11. *Sean $A \in M_n$ con valores propios reales ordenados en forma decreciente $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$, γ_1 una cota inferior activa para el valor propio λ_{j+1}, λ_{i_*} el valor propio con el índice más grande para el cual γ_1 es una cota inferior activa, $n_j = i_* - j$ la cantidad de valores propios entre λ_{j+1} y λ_{i_*}; γ_2 una cota superior activa del valor propio λ_{j-1}, $\lambda_{i_{**}}$ el valor propio con el indice mas pequeño para el cual γ_2 es cota superior activa, $p_j = j - i_{**}$ la cantidad de valores propios desde λ_{j-1} hasta $\lambda_{i_{**}}$.*

$$\hat{m_1} = \frac{Tr(A) - n_j\gamma_1}{n - n_j}. \qquad \hat{m_2} = \frac{Tr(A) - p_j\gamma_2}{n - p_j}.$$

$$\hat{s_1}^2 = \frac{||A||_F^2 - n_j\gamma_1^2}{n - n_j} - \hat{m_1}^2. \qquad \hat{s_2}^2 = \frac{||A||_F^2 - p_j\gamma_2^2}{n - p_j} - \hat{m_2}^2.$$

Entonces

$$\hat{m_2} - \hat{s_2}\left(\frac{j - p_j - 1}{n - j + 1}\right)^{1/2} \leq \lambda_j \leq \hat{m_1} + \hat{s_1}\left(\frac{n - n_j - j}{j}\right)^{1/2}. \tag{4-3}$$

Demostración. Por la equivalencia del problema $P3{,}4$ con $P1{,}1$, el índice del valor propio λ_j en el problema $P3{,}4$ es $i_{**} = j - pj$, la cantidad de valores propios luego de reducir el problema es $n - p_j$, por lo tanto, de la ecuación (3-9), la cota inferior mejorada de λ_j es

$$\begin{aligned} \hat{m_2} - \hat{s_2}\left(\frac{i_{**} - 1}{n - p_j - i_{**} + 1}\right)^{1/2} &= \hat{m_2} - \hat{s_2}\left(\frac{j - p_j - 1}{n - p_j - (j - p_j) + 1}\right)^{1/2} \\ &= \hat{m_2} - \hat{s_2}\left(\frac{j - p_j - 1}{n - j + 1}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Por la equivalencia del problema $P3{,}2$ con $P1{,}1$ y tomando la cantidad de valores propios como $n - n_j$, la cota superior mejorada del valor propio λ_j es

$$\hat{m}_1 + \hat{s}_1 \left(\frac{n - n_j - j}{j} \right)^{1/2}.$$

□

4.2. Caso de los Valores Singulares

Del mismo modo como se procedió con los valores propios, comencemos considerando una cota inferior activa de σ_{j+1} para obtener una cota superior de σ_j, y $a \geq 0$ un valor que acote inferiormente la suma de los valores singulares.

4.2.1. Cotas Superiores

Supongamos que γ_1 es una cota inferior activa de σ_{j+1}, para $1 \leq j < q$; además, denotemos por σ_{i_*} el valor singular con mayor índice de tal modo que γ_1 es cota inferior activa de σ_{i_*}, y un entero k tal que $a \in \left(\sqrt{k-1}||A||_F, \sqrt{k}||A||_F \right]$. Para el caso de valores singulares debemos resolver el problema

$$P3{,}5 = \begin{cases} \text{máx } \sigma_j \\ \text{Sujeto a} \\ a \leq \sum_{i=1}^{q} \sigma_i \\ b^2 \geq \sum_{i=1}^{q} \sigma_i^2 \\ \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_q \geq 0 \\ \sigma_{j+1} \geq \gamma_1. \end{cases}$$

Para este problema, las condiciones de Karush − Kuhn − Tucker son:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1pos.j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma_q \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{q-1} \alpha_i \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1pos.i \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \alpha_* \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1pos.j+1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0. \tag{P3.5.1}$$

$$\alpha \geq 0; \alpha_* \geq 0; \alpha_i \geq 0, 1 \leq i < q; \beta \geq 0. \tag{P3.5.2}$$

$$\alpha\left(a-\sum_{i=1}^{q}\sigma_i\right)=0;\beta\left(b^2-\sum_{i=1}^{q}\sigma_i^2\right)=0;\alpha_i(\sigma_i-\sigma_{i+1})=0;\alpha_*(\gamma_1-\sigma_{j+1})=0. \quad \text{(P3.5.3)}$$

La ecuación (P3.5.1) genera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
-\alpha+\beta\sigma_1-\alpha_1&=0\\
-\alpha+\beta\sigma_2+\alpha_1-\alpha_2&=0\\
&\vdots\\
-\alpha+\beta\sigma_{j-1}+\alpha_{j-2}-\alpha_{j-1}&=0\\
-1-\alpha+\beta\sigma_j+\alpha_{j-1}-\alpha_j&=0\\
-\alpha+\beta\sigma_{j+1}+\alpha_j-\alpha_{j+1}&=\alpha_*\\
-\alpha+\beta\sigma_{j+2}+\alpha_{j+1}-\alpha_{j+2}&=0\\
&\vdots\\
-\alpha+\beta\sigma_{q-1}+\alpha_{q-2}-\alpha_{q-1}&=0\\
-\alpha+\beta\sigma_q+\alpha_{q-1}&=0.
\end{aligned}$$

Si suponemos que $\alpha_*=0$, entonces la condición $\sigma_{j+1}\geq\gamma_1$ no haría efecto sobre el problema a tratar y σ_{j+1} alcanzaría la cota del Teorema 10, así γ_1 no sería una cota inferior activa; por lo tanto, necesariamente $\alpha_*>0$, y dado (P3.5.3), implica que $\gamma_1=\sigma_{j+1}$ y en consecuencia

$$\sigma_{i*}=\sigma_{i*-1}=\cdots=\sigma_{j+1}=\gamma_1. \tag{4-4}$$

Supongamos que $\beta=0$, sumando todas las anteriores ecuaciones tenemos que $-1-q\alpha=\alpha_*>0$, esto indica que $\alpha<0$, contradiciendo (P3.5.2), por lo tanto $\beta>0$ y

$$b^2=\sum_{i=1}^{q}\sigma_i^2 \quad \text{por (2-1)} \quad b^2=||A||_F^2 \tag{4-5}$$

Finalmente, si tomamos $1<j+1<i_*<k$ y suponemos $\alpha=0$, sumando las ecuaciones desde $j+2$ hasta q tenemos que $\beta(\sigma_{j+2}+\cdots+\sigma_q)=-\alpha_{j+1}$, si $\alpha_{j+1}\geq 0$ y $\beta>0$, entonces $\sigma_{j+2}+\cdots+\sigma_q=0$, pero, en la ecuación 2 del Teorema 10 σ_{j+2} está acotado inferiormente por un valor positivo, así, $0<\sigma_{j+2}$, una contradicción, luego $\alpha>0$ y de (P3.5.3)

$$a=\sum_{i=1}^{q}\sigma_i. \tag{4-6}$$

De las ecuaciones (4-4), (4-5) y (4-6) tenemos el problema $P3{,}5$ es equivalente a los problemas

$$P3{,}6 = \begin{cases} \text{máx } \bar{\sigma}_j; & 1 \leq j < k. \\ \text{Sujeto a} & \\ a - n_j\gamma_1 = \sum\limits_{i=1}^{q-n_j} \bar{\sigma}_i & \\ ||A||_F^2 - n_j\gamma_1^2 = \sum\limits_{i=1}^{q-n_j} \bar{\sigma}_i^2 & \\ \bar{\sigma}_1 \geq \bar{\sigma}_2 \geq \cdots \geq \bar{\sigma}_{q-n_j} \geq 0. & \end{cases}$$

$$P3{,}7 = \begin{cases} \text{máx } \bar{\sigma}_j; & k \leq j \leq q. \\ \text{Sujeto a} & \\ a - n_j\gamma_1 \leq \sum\limits_{i=1}^{q-n_j} \bar{\sigma}_i & \\ ||A||_F^2 - n_j\gamma_1^2 = \sum\limits_{i=1}^{q-n_j} \bar{\sigma}_i^2 & \\ \bar{\sigma}_1 \geq \bar{\sigma}_2 \geq \cdots \geq \bar{\sigma}_{q-n_j} \geq 0. & \end{cases}$$

Por lo tanto, en el problema se reduce la cantidad de valores singulares con los que estamos trabajando a $q - n_j$, y éstos son reordenados de la siguiente manera:

$$\bar{\sigma}_1 = \sigma_1, \ldots, \bar{\sigma}_j = \sigma_j \qquad \text{y} \qquad \bar{\sigma}_{j+1} = \sigma_{i_*+1}, \ldots, \bar{\sigma}_{q-n_j} = \sigma_q.$$

Bajo este nuevo ordenamiento, si deseamos garantizar la positividad de ciertos valores singulares, debemos tomar $\hat{m}_1 = \frac{a-n_j\gamma_1}{q-n_j}$ y $\hat{s_1}^2 = \frac{||A||_F^2-n_j\gamma_1^2}{q-n_j} - \hat{m}_1{}^2$ y

$$
\begin{aligned}
\hat{m_1} - \hat{s_1}\left(\frac{j-1}{q-n_j-j+1}\right)^{1/2} &> 0\\
\hat{m_1}^2 &> \hat{s_1}^2\left(\frac{j-1}{q-n_j-j+1}\right)\\
\hat{m_1}^2 &> \left(\frac{||A||_F^2 - n_j\gamma_1^2}{q-n_j} - \hat{m}^2\right)\left(\frac{j-1}{q-n_j-j+1}\right)\\
\hat{m_1}^2\left(1+\frac{j-1}{q-n_j-j+1}\right) &> \left(\frac{||A||_F^2 - n_j\gamma_1^2}{q-n_j}\right)\left(\frac{j-1}{q-n_j-j+1}\right)\\
\hat{m_1}^2\left(\frac{q-n_j}{q-n_j-j+1}\right) &> \left(\frac{||A||_F^2 - n_j\gamma_1^2}{q-n_j}\right)\left(\frac{j-1}{q-n_j-j+1}\right)\\
\frac{(a-n_j\gamma_1)^2}{(q-n_j)^2}\left(\frac{q-n_j}{q-n_j-j+1}\right) &> \left(\frac{||A||_F^2 - n_j\gamma_1^2}{q-n_j}\right)\left(\frac{j-1}{q-n_j-j+1}\right)\\
(a-n_j\gamma_1)^2 &> \left(\frac{||A||_F^2 - n_j\gamma_1^2}{q-n_j}\right)(j-1)(q-n_j)\\
(a-n_j\gamma_1)^2 &> (||A||_F^2 - n_j\gamma_1^2)(j-1).
\end{aligned}
$$

$$
a - n_j\gamma_1 > \sqrt{j-1}(||A||_F^2 - n_j\gamma_1^2)^{1/2}. \tag{4-7}
$$

$P3{,}6$ es equivalente a resolver $P2$, y $P3{,}7$ equivale a resolver $P2{,}2$ bajo la hipótesis de la ecuación (4-7).

Así como a partir de una cota inferior activa de σ_{j+1} se determinó una cota superior de σ_j, ahora estudiaremos el caso contrario.

4.2.2. Cotas Inferiores

Supongamos que γ_2 es una cota superior activa de σ_{j-1}, con $1 < j \leq q$, $\sigma_{i_{**}}$ el valor singular con menor índice de modo que γ_2 es una cota superior activa de $\sigma_{i_{**}}$, $p_j = j - i_{**}$, y k un entero tal que $1 < k \leq q$ y $a \in \left(\sqrt{k-1}||A||_F, \sqrt{k}||A||_F\right]$.
Consideremos el problema

$$
P3{,}8 = \begin{cases}
\text{mín } \sigma_j\\
\text{Sujeto a}\\
a \leq \sum_{i=1}^{q}\sigma_i\\
b^2 \geq \sum_{i=1}^{q}\sigma_i^2\\
\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_q \geq 0\\
\sigma_{j-1} \leq \gamma_2.
\end{cases}
$$

Las condiciones de Karush − Kuhn − Tucker para $P3{,}8$ son

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1pos.j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma_q \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{q-1} \alpha_i \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1pos.i \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_* \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1pos.j-1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0. \tag{P3.8.1}$$

$$\alpha \geq 0; \alpha_* \geq 0; \alpha_i \geq 0, 1 \leq i < q; \beta \geq 0. \tag{P3.8.2}$$

$$\alpha \left(a - \sum_{i=1}^{q} \sigma_i \right) = 0; \beta \left(b^2 - \sum_{i=1}^{q} \sigma_i^2 \right) = 0; \alpha_i(\sigma_i - \sigma_{i+1}) = 0; \alpha_*(\gamma_2 - \sigma_{j-1}) = 0. \tag{P3.8.3}$$

La ecuación (P3.8.1) genera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
-\alpha + \beta\sigma_1 - \alpha_1 &= 0 \\
-\alpha + \beta\sigma_2 + \alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \\
&\vdots \\
-\alpha + \beta\sigma_{j-1} + \alpha_{j-2} - \alpha_{j-1} &= -\alpha_* \\
1 - \alpha + \beta\sigma_j + \alpha_{j-1} - \alpha_j &= 0 \\
-\alpha + \beta\sigma_{j+1} + \alpha_j - \alpha_{j+1} &= 0 \\
&\vdots \\
-\alpha + \beta\sigma_{q-1} + \alpha_{q-2} - \alpha_{q-1} &= 0 \\
-\alpha + \beta\sigma_q + \alpha_{q-1} &= 0.
\end{aligned}$$

Si $\alpha_* = 0$ la condición $\gamma_2 \geq \sigma_{j-1}$ no tendría ningún efecto sobre el problema $P3{,}6$, σ_{j-1} alcanzaría la cota máxima del Teorema 10 y γ_2 no sería una cota superior activa para σ_{j-1}; por lo tanto, necesariamente $\alpha_* > 0$ y en consecuencia

$$\sigma_{i_*} = \cdots = \sigma_{j-1} = \gamma_2. \tag{4-8}$$

Por otro lado, supongamos $\beta = 0$, si sumamos todas las ecuaciones del sistema anterior, tenemos que $1 - q\alpha = -\alpha_*$, lo que implica que $\alpha > 0$, y de la primera ecuación $-\alpha_1 = \alpha > 0$, y asi $\alpha_1 < 0$, una contradicción con (P3.8.2), por lo tanto $\beta > 0$ y

$$b^2 = \sum_{i=1}^{q} \sigma_i^2 \quad \text{ y de (2-1) } \quad b^2 = ||A||_F^2. \tag{4-9}$$

Ahora, sumando las ecuaciones desde $j+1$ hasta q obtenemos la ecuación $\alpha_j = -\beta(\sigma_{j+1} + \cdots + \sigma_q)$, pero como $\alpha_j \geq 0$ y $\beta > 0$, entonces $\sigma_{j+1} + \cdots + \sigma_q = 0$ y $\sigma_{j+1} = \cdots = \sigma_q = 0$, pero como $j+1 \leq k$, por el Teorema 10 σ_{j+1} está acotado por un valor positivo, es decir, $0 < \sigma_{j+1}$, una contradicción, luego $\alpha > 0$ y

$$a = \sum_{i=1}^{q} \sigma_i. \tag{4-10}$$

De las ecuaciones (4-8), (4-9) y (4-10) podemos observar la equivalencia del problema $P3{,}8$ con

$$P3{,}9 = \begin{cases} \text{mín } \bar{\sigma}_{i_*}; & 1 < j < k. \\ \text{Sujeto a} & \\ a - p_j\gamma_2 = \sum_{i=1}^{q-p_j} \bar{\sigma}_i & \\ ||A||_F^2 - p_j\gamma_2^2 = \sum_{i=1}^{q-p_j} \bar{\sigma}_i^2 & \\ \bar{\sigma}_1 \geq \bar{\sigma}_2 \geq \cdots \geq \bar{\sigma}_{q-p_j} \geq 0. & \end{cases}$$

$$P3{,}10 = \begin{cases} \text{mín } \bar{\sigma}_{i_*}; & k \leq j \leq q. \\ \text{Sujeto a} & \\ a - p_j\gamma_2 \leq \sum_{i=1}^{q-p_j} \bar{\sigma}_i & \\ ||A||_F^2 - p_j\gamma_2^2 = \sum_{i=1}^{q-p_j} \bar{\sigma}_i^2 & \\ \bar{\sigma}_1 \geq \bar{\sigma}_2 \geq \cdots \geq \bar{\sigma}_{q-p_j} \geq 0. & \end{cases}$$

Por lo tanto, en el problema se reduce la cantidad de valores singulares con los que estamos trabajando a $q - p_j$, y éstos son reordenados de la siguiente manera:

$$\bar{\sigma}_1 = \sigma_1, \ldots, \bar{\sigma}_{i_{**}-1} = \sigma_{i_{**}-1} \qquad \text{y} \qquad \bar{\sigma}_{i_{**}} = \sigma_j, \ldots, \bar{\sigma}_{q-p_j} = \sigma_q.$$

Bajo este nuevo ordenamiento, si deseamos garantizar la positividad de ciertos valores singulares, debemos tomar $\hat{m}_2 = \frac{a-p_j\gamma_2}{q-p_j}$ y $\hat{s_2}^2 = \frac{||A||_F^2 - p_j\gamma_2^2}{q-p_j} - \hat{m}_2{}^2$ y

$$\begin{aligned}
\hat{m}_2 - \hat{s}_2 \left(\frac{i_{**} - 1}{q - p_j - i_{**} + 1} \right)^{1/2} &> 0 \\
\hat{m}_2^2 &> \hat{s}_2^2 \left(\frac{j - p_j - 1}{q - p_j - (j - p_j) + 1} \right) \\
\hat{m}_2^2 &> \left(\frac{||A||_F^2 - p_j\gamma_2^2}{q - p_j} - \hat{m}_2^2 \right) \left(\frac{j - p_j - 1}{q - j + 1} \right) \\
\hat{m}_2^2 \left(1 + \frac{j - p_j - 1}{q - j + 1} \right) &> \left(\frac{||A||_F^2 - p_j\gamma_2^2}{q - p_j} \right) \left(\frac{j - p_j - 1}{q - j + 1} \right) \\
\frac{(a - p_j\gamma_2)^2}{(q - p_j)^2} \left(\frac{q - p_j}{q - j + 1} \right) &> \left(\frac{||A||_F^2 - p_j\gamma_2^2}{q - p_j} \right) \left(\frac{j - p_j - 1}{q - j + 1} \right) \\
(a - p_j\gamma_1)^2 &> \left(\frac{||A||_F^2 - p_j\gamma_2^2}{q - p_j} \right) (j - p_j - 1)(q - p_j) \\
(a - p_j\gamma_1)^2 &> (||A||_F^2 - p_j\gamma_2^2)(j - p_j - 1).
\end{aligned}$$

$$a - p_j\gamma_2 > \sqrt{j - p_j - 1}(||A||_F^2 - p_j\gamma_2^2)^{1/2}. \tag{4-11}$$

El problema $P3{,}9$ es equivalente a $P1$, y $P3{,}10$ es equivalente al problema del Teorema 10, con la condición obtenida en la ecuación (4-11).

4.2.3. Cotas Mejoradas

De acuerdo al desarrollo en [14], el siguiente Teorema determina las mejoras sobre las cotas que se han establecido para los valores singulares:

Teorema 12. *Sean $A \in M_{m,n}$ con valores singulares ordenados de forma decreciente $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$, $q = min\{m, n\}$, γ_1 una cota inferior activa para el valor singular σ_{j+1}, i_* el índice más grande para el cuál γ_1 es una cota inferior activa de σ_{i_*}, $n_j = i_* - j$ la cantidad de valores singulares entre σ_{j+1} y σ_{i_*}; γ_2 una cota superior activa del valor singular σ_{j-1}, i_{**} el indice más pequeño para el cual γ_2 es cota superior activa de $\sigma_{i_{**}}$, $p_j = j - i_{**}$ la cantidad de valores singulares desde σ_{j-1} hasta $\sigma_{i_{**}}$ y k un entero $1 < k \leq q$ tal que $a \in \left(\sqrt{k-1}||A||_F, \sqrt{k}||A||_F\right]$. Si*

1. a) $1 \leq j \leq k$, *y* $a - n_j\gamma_1 > \sqrt{j-1}\,(||A||_F^2 - n_j\gamma_1^2)^{1/2}$; *ó*

   b) $k < j < q$.

2. a) $1 < j \leq k$, *y* $a - p_j\gamma_2 > \sqrt{j - p_j - 1}\,(||A||_F^2 - p_j\gamma_2^2)^{1/2}$; *ó*

   b) $k < j \leq q$.

3.

$$\hat{m}_1 = \frac{a - n_j\gamma_1}{q - n_j}. \qquad \hat{m}_2 = \frac{a - p_j\gamma_2}{q - p_j}.$$

$$\hat{s_1}^2 = \frac{||A||_F^2 - n_j\gamma_1^2}{q - n_j} - \hat{m_1}^2. \qquad \hat{s_2}^2 = \frac{||A||_F^2 - p_j\gamma_2^2}{q - p_j} - \hat{m_2}^2.$$

Entonces

$$\hat{m}_2 - \hat{s}_2 \left(\frac{j - p_j - 1}{q - j + 1}\right)^{1/2} \leq \sigma_j \leq \hat{m}_1 + \hat{s}_1 \left(\frac{q - n_j - j}{j}\right)^{1/2}. \tag{4-12}$$

Demostración. Por la equivalencia del problema $P3{,}9$ con $P1$, el índice del valor singular σ_j en el problema $P3{,}9$ es $i_{**} = j - pj$, la cantidad de valores singulares luego de reducir el problema es $q - p_j$, por lo tanto, de la ecuación (3-5), la cota inferior mejorada de σ_j es

$$\begin{aligned}\hat{m}_2 - \hat{s}_2 \left(\frac{i_{**} - 1}{q - p_j - i_{**} + 1}\right)^{1/2} &= \hat{m}_2 - \hat{s}_2 \left(\frac{j - p_j - 1}{q - p_j - (j - p_j) + 1}\right)^{1/2} \\ &= \hat{m}_2 - \hat{s}_2 \left(\frac{j - p_j - 1}{q - j + 1}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Por la equivalencia del problema $P3{,}10$ con el problema del Teorema 10 y tomando la cantidad de valores singulares como $q - n_j$, la cota superior mejorada del valor singular σ_j es

$$\hat{m}_1 + \hat{s}_1 \left(\frac{q - n_j - j}{j}\right)^{1/2}.$$

□

5. Aplicaciones de las Cotas de Valores Propios y Valores Singulares

5.1. Ejemplo: Matriz Hermitiana

5.1.1. Valores Propios

Consideremos la siguiente matriz hermitiana:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2-i & -3i & 5+2i & 1 \\ 2+i & 0 & 1-i & -i & 2+3i \\ 3i & 1+i & 0 & -4+i & -9i \\ 5-2i & i & -4-i & 1 & 0 \\ 1 & 2-3i & 9i & 0 & -2 \end{bmatrix}. \tag{5-1}$$

Primeras Cotas

Cota Inferior	Valor Propio	Cota Superior
4.4570926	11.160095	16.62837
- 3.6570926	6.2246546	10.337807
- 6.2252044	1.1939423	7.0252044
- 9.5378066	- 4.55746	4.4570926
- 15.82837	- 12.021232	- 3.6570926

Cotas Mejoradas

Por medio de software, en este caso Scilab, se pueden calcular las mejoras de las cotas superiores e inferiores mediante el código A.1.1 que se encuentra en el capitulo de anexos.

La siguiente tabla contiene las cotas originales así como las mejoras obtenidas para las cotas superiores e inferiores.

Cota Inferior	C. I. Mejorada	Valor propio	C. S. Mejorada	Cota Superior
4.4570926	- -	11.160095	15.480457	16.62837
- 3.6570926	- 2.631791	6.2246546	10.213495	10.337807
- 6.2252044	- 6.0610112	1.1939423	6.7906652	7.0252044
- 9.5378066	- 9.5072873	- 4.55746	3.7432541	4.4570926
- 15.82837	- 15.291921	- 12.021232	- -	- 3.6570926

5.1.2. Valores Singulares

Consideremos la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} i & 1-i & 2+3i & 0 & -5i \\ 1 & -i & 2 & -3i & 4-i \\ 2i & -1+2i & 1 & 0 & 3 \\ -3 & 5-3i & 6i & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & i \\ 1-3i & 5+i & -2+3i & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5-2}$$

Primeras Cotas

Cota Inferior	**Valor Singular**	**Cota Superior**
6.8847658	12.023507	14.67117
2.3322075	7.7225153	10.844833
0.7701117	4.4670773	8.8881944
0	3.1749731	7.6974022
0	1.6621692	6.8847658

Cotas Mejoradas

Con la ayuda de un código similar (A.1.2) al utilizado con los valores propios, se genera la siguiente tabla donde se observan las mejoradas encontradas a las cotas de los valores singulares.

Cota Inferior	**C. I. Mejorada**	**Valor Singular**	**C. S. Mejorada**	**Cota Superior**
6.8847658	- -	12.023507	14.481626	14.629197
2.3972162	2.8857832	7.7225153	9.9208417	10.836035
0.8486641	1.8975352	4.4670773	7.2416028	8.8881944
0	0	3.1749731	5.7428588	7.6974022
0	0	1.6621692	- -	6.8847658

5.2. Ejemplo: Matriz Randómica

Comencemos por un código que genere una matriz randómica simétrica de tamaño 5:

```
n=5;
X=rand(n,n);
Y=triu(X);
Z=Y';
A=Y+Z
```

Éste generó la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}5844533 & 0{,}5015342 & 0{,}9184708 & 0{,}2806498 & 0{,}6856896 \\ 0{,}5015342 & 0{,}8737175 & 0{,}0437334 & 0{,}1280058 & 0{,}1531217 \\ 0{,}9184708 & 0{,}0437334 & 0{,}9637018 & 0{,}7783129 & 0{,}6970851 \\ 0{,}2806498 & 0{,}1280058 & 0{,}7783129 & 0{,}4238061 & 0{,}8415518 \\ 0{,}6856896 & 0{,}1531217 & 0{,}6970851 & 0{,}8415518 & 0{,}8124050 \end{bmatrix}.$$

5.2.1. Valores Propios

Usando el programa para generar cotas de valores propios, obtenemos la tabla:

Cota Inferior	C. I. Mejorada	Valor Propio	C. S. Mejorada	Cota Superior
1.3302991	- -	2.9256289	3.112746	3.1263462
0.1329344	0.1705689	0.9473470	2.1814837	2.198083
- 0.2460275	- 0.1543317	0.3274273	1.606689	1.7092609
- 0.7348496	- 0.5894583	- 0.0126138	1.1177853	1.3302991
- 1.6631127	- 1.5301355	- 0.5297057	- -	0.1329344

5.2.2. Valores Singulares

Generando una nueva matriz randómica, ahora trabajemos con la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}4226497 & 0{,}6283918 & 0{,}5608486 & 0{,}2320748 & 0{,}3076091 \\ 0{,}6283918 & 1{,}6994905 & 0{,}6623569 & 0{,}2312237 & 0{,}9329616 \\ 0{,}5608486 & 0{,}6623569 & 1{,}4527014 & 0{,}2164633 & 0{,}2146008 \\ 0{,}2320748 & 0{,}2312237 & 0{,}2164633 & 1{,}7667776 & 0{,}312642 \\ 0{,}3076091 & 0{,}9329616 & 0{,}2146008 & 0{,}312642 & 0{,}7232722 \end{bmatrix}.$$

Usando el programa para generar cotas de valores singulares, obtenemos la tabla:

Cota Inferior	C. I. Mejorada	Valor Singular	C. S. Mejorada	Cota Superior
1.6519197	- -	3.1231702	3.4126975	3.5101062
0.5751842	0.6477347	1.6255513	2.5355921	2.5999809
0.2036271	0.4979247	1.1065029	1.8970572	2.1326191
0	0	0.1298860	1.4377518	1.8469023
0	0	0.0797809	- -	1.6519197

5.3. Teoremas de Entrelazamiento

Estudiemos algunos teoremas de entrelazamiento de valores propios y singulares tratados en [15], y observemos experimentalmente que ocurre con las cotas de los valores propios y singulares.

Teorema 13. *Sean $A \in M_n$ una matriz Hermitiana, $y \in \mathbb{C}^n$ un vector, y $a \in \mathbb{R}$ un real. Sea $\hat{A} \in M_{n+1}$ la matriz Hermitiana obtenida como*

$$\hat{A} \equiv \left[\begin{array}{c|c} A & y \\ \hline y^* & a \end{array}\right]$$

Escríbanse los valores propios de A y $\hat{A}$ como $\{\lambda_i\}$ y $\{\hat{\lambda}_i\}$ respectivamente y asuma que están ordenado de forma creciente. Entonces

$$\hat{\lambda}_1 \leq \lambda_1 \leq \hat{\lambda}_2 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \hat{\lambda}_n \leq \lambda_n \leq \hat{\lambda}_{n+1}.$$

Nombremos $\hat{A}$ la matriz (5-1), ya conocemos sus valores propios y las cotas de estos valores propios. Tomemos $a = -2$, $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2+3i \\ -9i \\ 0 \end{bmatrix}$ y

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2-i & -3i & 5+2i \\ 2+i & 0 & 1-i & -i \\ 3i & 1+i & 0 & -4+i \\ 5-2i & i & -4-i & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculemos los valores pripios y sus cotas.

Cota Inferior	Valor Propio	Cota Superior
4.3166248	9.8254981	10.949874
- 2.3166248	1.7782609	6.7445626
- 4.7445626	- 1.8797975	4.3166248
- 8.9498744	- 5.7239616	- 2.3166248

Si comparamos las tablas tenemos:

Valores Propios	
Valores Propios $\hat{A}$	**Valores Propios A**
11.160095	9.8254981
6.2246546	1.7782609
1.1939423	- 1.8797975
- 4.55746	- 5.7239616
-12.021232	

Cotas Inferiores	
Cotas Inferiores V.P. $\hat{A}$	**Cotas Inferiores V.P. A**
4.4570926	4.3166248
- 3.6570926	- 2.3166248
- 6.2252044	- 4.7445626
- 9.5378066	- 8.9498744
- 15.82837	

Cotas Superiores	
Cotas Superiores V.P. $\hat{A}$	**Cotas Superiores A**
16.62837	10.949874
10.337807	6.7445626
7.0252044	4.3166248
4.4570926	- 2.3166248
- 3.6570926	

El ejemplo anterior nos deja ver que, en calidad del Teorema 13, los valores propios de las dos matrices tratadas si se entrelazan. Sin embargo, no siempre se tiene el hecho que sus cotas inferiores y superiores se entrelacen también.

Teorema 14. *Sean $A \in M_n$ una matriz Hermitiana, r un entero tal que $1 \leq r \leq n$, y A_r una submatriz principal de A (obtenida por extraer $n-r$ filas y sus correspondientes columnas de A). Para cada entero k tal que $1 \leq k \leq r$ se tiene que*

$$\lambda_k(A) \leq \lambda_k(A_r) \leq \lambda_{k+n-r}(A).$$

Utilicemos nuevamente la matriz (5-1), tomemos $r = 3$ y $A_r = \begin{bmatrix} 3 & 2-i & -3i \\ 2+i & 0 & 1-i \\ 3i & 1+i & 0 \end{bmatrix}$. Calculemos sus valores propios y las cotas de éstos.

Cota Inferior	**Valor Propio**	**Cota Superior**
3.5166115	6	6.033223
- 1.5166115	-1	3.5166115
- 4.033223	-2	- 1.5166115

Valores Propios		
Valores Propios $\hat{A}$	**Valores Propios** A	**Valores Propios** A_r
11.160095		
6.2246546	9.8254981	
1.1939423	1.7782609	6
- 4.55746	- 1.8797975	-1
-12.021232	- 5.7239616	-2

Observemos que A_r puede ser visto a la luz del Teorema 13, sus valores propios se entrelazan con los de A del ejemplo anterior. Además si leemos la tabla de abajo hacia arriba, vemos que con $\hat{A}$ y A_r se cumple la relación $\lambda_k(A) \leq \lambda_k(A_r) \leq \lambda_{k+n-r}(A)$ para $k = 1, 2, 3$.

Revisemos la situación de sus cotas:

Cotas Inferiores	
Cotas Inferiores V.P. $\hat{A}$	**Cotas Inferiores V.P.** A
4.4570926	
- 3.6570926	
- 6.2252044	3.5166115
- 9.5378066	- 1.5166115
- 15.82837	- 4.033223

Cotas Superiores	
Cotas Superiores V.P. $\hat{A}$	**Cotas Superiores** A
16.62837	
10.337807	
7.0252044	6.033223
4.4570926	3.5166115
- 3.6570926	- 1.5166115

De las anteriores tablas observamos que para las cotas, no se mantienen los resultados que se cumplen para los valores propios.

Teorema 15. *Sea $A \in M_{m,n}$ una matriz dada y $\hat{A}$ la matriz obtenida al extraer una columna de A. Escríbanse los valores singulares de A y $\hat{A}$ como $\{\sigma_i\}$ y $\{\hat{\sigma}_i\}$ respectivamente ordenados de forma decreciente.*

1. *Si* $m \geq n$, *entonces* $\sigma_1 \geq \hat{\sigma_1} \geq \sigma_2 \geq \hat{\sigma_2} \geq \cdots \geq \hat{\sigma_{n-1}} \geq \sigma_n \geq 0$.

2. *Si* $m < n$, *entonces* $\sigma_1 \geq \hat{\sigma_1} \geq \sigma_2 \geq \hat{\sigma_2} \geq \cdots \geq \sigma_m \geq \hat{\sigma_m} \geq 0$.

Comencemos por tomar la matriz (5-2) y eliminando la segunda columna obtenemos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} i & 2+3i & 0 & -5i \\ 1 & 2 & -3i & 4-i \\ 2i & 1 & 0 & 3 \\ -3 & 6i & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & i \\ 1-3i & -2+3i & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculemos sus valores singulares y sus respectivas cotas

Cota Inferior	**Valor Propio**	**Cota Superior**
6.4807407	9.5442709	12.386262
2.2045793	7.2631092	9.158798
0.3412020	4.0914261	7.4833148
0	2.7229343	6.4807407

Comparemos estos valores singulares con los de la matriz original, asi como sus cotas:

Valores singulares	
Valores Singulares A	**Valores Singulares** $\hat{A}$
12.023507	9.5442709
7.7225153	7.2631092
4.4670773	4.0914261
3.1749731	2.7229343
1.6621692	

Cotas Inferiores	
Cotas Inferiores A	**Cotas Inferiores** $\hat{A}$
6.8847658	6.4807407
2.0387503	2.2045793
0.4174968	0.3412020
0	0
0	

Cotas Superiores	
Cotas Superiores $\hat{A}$	**Cotas Superiores A**
12.386262	14.844999
9.158798	10.873755
7.4833148	8.8881944
6.4807407	7.6974022
	6.8847658

Como se puede observar, de la misma manera como sucedió con los valores propios entrelazados, los valores singulares se entrelazan de acuerdo al Teorema 15, pero sus cotas no necesariamente se entrelazan.

5.4. Longitud de los Intervalos Entre Cotas

Dada una matriz $A \in M_n$, se determinaron en (3-8), (3-9) y (3-10) cotas inferiores y superiores para los valores propios. Se pretende estudiar en esta sección la longitud del intervalo entre la cota inferior y la cota superior de cada valor propio y la variación que se pueda dar con una perturbación en la diagonal de la matriz.

5.4.1. Cotas de la Matriz Original

Primeras Cotas

Haciendo la diferencia entre la cota superior y la cota inferior en la ecuación (3-8) tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{Tr(A)}{n} + s(n-1)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{Tr(A)}{n} + \frac{s}{(n-1)^{\frac{1}{2}}}\right) &= s(n-1)^{\frac{1}{2}} - \frac{s}{(n-1)^{\frac{1}{2}}} \\ &= s\frac{n-2}{\sqrt{n-1}}.\end{aligned}$$

Cotas Intermedias

Haciendo la diferencia entre la cota superior y la cota inferior en la ecuación (3-9) tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{Tr(A)}{n} + s\left(\frac{n-k}{k}\right)^{1/2} - \left(\frac{Tr(A)}{n} - s\left(\frac{k-1}{n-k+1}\right)^{1/2}\right) &= s\left(\frac{n-k}{k}\right)^{1/2} + s\left(\frac{k-1}{n-k+1}\right)^{1/2} \\ &= s\left(\left(\frac{n-k}{k}\right)^{1/2} + \left(\frac{k-1}{n-k+1}\right)^{1/2}\right).\end{aligned}$$

Ultimas Cotas

Haciendo la diferencia entre la cota superior y la cota inferior en la ecuación (3-10) tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{Tr(A)}{n} - \frac{s}{(n-1)^{\frac{1}{2}}} - \left(\frac{Tr(A)}{n} - s(n-1)^{\frac{1}{2}}\right) &= s(n-1)^{\frac{1}{2}} - \frac{s}{(n-1)^{\frac{1}{2}}} \\ &= s\left(\frac{n-2}{\sqrt{n-1}}\right).\end{aligned}$$

5.4.2. Cotas de la Matriz Perturbada

Tomando $A \in M_n$ las perturbaciones que vamos a considerar son de la forma $A - \gamma I$, donde γ es una cota activa de algún valor propio de A. Se esperaría que las cotas de los valores propios de $A - \gamma I$ generaran un intervalo mas pequeño, dado que se eligió γ como una cota activa, veremos en seguida que la espectativa no se cumple.

Inicialmente observemos que $Tr(A - \gamma I) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} - \gamma = Tr(A) - n\gamma$. Ahora, se deben considerar como se comportan $m = \frac{Tr(A-\gamma I)}{n}$ y $s^2 = \frac{1}{n}\left[Tr(A^2) - \frac{1}{n}(Tr(A))^2\right]$.

$$m_\gamma = \frac{Tr(A-\gamma I)}{n} = \frac{Tr(A) - n\gamma}{n} = \frac{Tr(A)}{n} - \gamma = m - \gamma. \tag{5-3}$$

$$\begin{aligned}s_\gamma^2 &= \frac{1}{n}\left[Tr((A-\gamma I)^2) - \frac{1}{n}(Tr(A-\gamma I))^2\right] \\ &= \frac{1}{n}\left[Tr((A^2 - 2\gamma A + \gamma^2 I)) - \frac{1}{n}(Tr(A) - n\gamma))^2\right] \\ &= \frac{1}{n}\left[Tr(A^2) - 2\gamma Tr(A) + n\gamma^2 - \frac{1}{n}((Tr(A))^2 - 2n\gamma Tr(A) - n^2\gamma^2)\right] \\ &= \frac{1}{n}\left[Tr(A^2) - 2\gamma Tr(A) + n\gamma^2 - \frac{(Tr(A))^2}{n} + 2\gamma Tr(A) + n\gamma^2)\right] \\ &= \frac{1}{n}\left[Tr(A^2) - \frac{(Tr(A))^2}{n}\right] = s^2.\end{aligned}$$

Con estos valores de m_γ y s_γ observemos las cotas de los valores propios de $A - \gamma I$ y la distancia entre ellos.

Primeras Cotas

Las cotas para el primer valor propio son:

$$m - \gamma + \frac{s}{(n-1)^{\frac{1}{2}}} \leq \lambda_1 - \gamma \leq m - \gamma + s(n-1)^{\frac{1}{2}}.$$

Haciendo la diferencia entre la cota superior y la cota inferior tenemos:

$$\begin{aligned} m-\gamma+s(n-1)^{\frac{1}{2}}-\left(m-\gamma+\frac{s}{(n-1)^{\frac{1}{2}}}\right) &= s(n-1)^{\frac{1}{2}}-\frac{s}{(n-1)^{\frac{1}{2}}} \\ &= s\frac{n-2}{\sqrt{n-1}}. \end{aligned}$$

Cotas Intermedias

Las cotas para los valores propios intermedios son:

$$m-\gamma-s\left(\frac{k-1}{n-k+1}\right)^{1/2} \leq \lambda_k-\gamma \leq m-\gamma+s\left(\frac{n-k}{k}\right)^{1/2}.$$

Haciendo la diferencia entre la cota superior y la cota inferior tenemos:

$$\begin{aligned} m-\gamma+s\left(\frac{n-k}{k}\right)^{1/2}-\left(m-\gamma-s\left(\frac{k-1}{n-k+1}\right)^{1/2}\right) &= s\left(\frac{n-k}{k}\right)^{1/2}+s\left(\frac{k-1}{n-k+1}\right)^{1/2} \\ &= s\left(\left(\frac{n-k}{k}\right)^{1/2}+\left(\frac{k-1}{n-k+1}\right)^{1/2}\right). \end{aligned}$$

Ultimas Cotas

Las cotas del ultimo valor propio son:

$$m-\gamma-s(n-1)^{\frac{1}{2}} \leq \lambda_n-\gamma \leq m-\gamma-\frac{s}{(n-1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Haciendo la diferencia entre la cota superior y la cota inferior tenemos:

$$\begin{aligned} m-\gamma-\frac{s}{(n-1)^{\frac{1}{2}}}-\left(m-\gamma-s(n-1)^{\frac{1}{2}}\right) &= s(n-1)^{\frac{1}{2}}-\frac{s}{(n-1)^{\frac{1}{2}}} \\ &= s\left(\frac{n-2}{\sqrt{n-1}}\right). \end{aligned}$$

Se puede observar que la longitud de los intervalos no varia de la matriz perturbada respecto de la original, lo que se genera es un desplazamiento de los intervalos mencionados, pero la distancia entre las cotas se mantiene constante.

6. Problemas a Resolver

6.1. Utilizando $Tr(A^m)$ y $||A^m||_F$.

Por medio de un procedimiento análogo al utilizado en el Capítulo II para encontrar las cotas de las componentes de un vector de n componentes reales, se pueden generar otras cotas utilizando $Tr(A^m)$ y $||A^m||_F$, con $m \in \mathbb{Z}^+$: Supongamos un conjunto finito de reales cuyas potencias $m-$ésimas estén ordenados de forma decreciente $x_1^m \geq x_2^m \geq \cdots \geq x_n^m$, organizados en un vector $\mathbf{x}^T = [x_1^m, x_2^m, \cdots, x_n^m]$, $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^m$ su media, $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^m - \bar{x})^2$ su desviación estándar y $\bar{x}_{(k,l)} = \frac{1}{l-k+1}\sum_{j=k}^{l} x_j^m$. Consideremos el vector $e^T = (1, 1, \cdots, 1)$ de n componentes y junto con la matriz identidad de tamaño $n \times n$ construyamos la matriz $C = I_n - \frac{ee^T}{n}$,

$$C = \begin{bmatrix} \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & \frac{n-1}{n} \end{bmatrix}.$$

Tomemos los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, es decir, los e_j cuya componente $j-$ésima es 1 y sus demás componentes son 0, y construyamos el vector $\mathbf{w} = \sum_{j=k}^{l} \frac{e_j}{l-k+1}$ y al igual que en el Capítulo II obtenemos:

$$\mathbf{w}^T C\mathbf{x} = \bar{x}_{(k,l)} - \bar{x}. \tag{6-1}$$

$$\mathbf{w}^T C\mathbf{w} = (l-k+1)^{-1} - n^{-1}. \tag{6-2}$$

$$\mathbf{x}^T C\mathbf{x} = s^2 n. \tag{6-3}$$

De (6-1), (6-2) y (6-3), y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$|\bar{x}_{(k,l)} - \bar{x}| = |\mathbf{w}^T C \cdot C\mathbf{x}| \leq ((\mathbf{w}^T C(\mathbf{w}^T C)^T)((C\mathbf{x})^T C\mathbf{x}))^{\frac{1}{2}} = s\left(\frac{n-l+k-1}{l-k+1}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6-4}$$

Por lo tanto

$$\bar{x} - s\left(\frac{n-l+k-1}{l-k+1}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \bar{x}_{(k,l)} \leq \bar{x} + s\left(\frac{n-l+k-1}{l-k+1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Considerando los casos en que $l = n, l = k$ y $k = 1$, entonces

$$\bar{x} - s\left(\frac{k-1}{n-k+1}\right)^{1/2} \leq \bar{x}_{(k,n)} \leq x_k^m \leq \bar{x}_{(1,k)} \leq \bar{x} + s\left(\frac{n-k}{k}\right)^{1/2}. \tag{6-5}$$

En caso que m sea par,

$$\left(\bar{x} - s\sqrt{\frac{k-1}{n-k+1}}\right)^{1/m} \leq |x_k| \leq \left(\bar{x} + s\sqrt{\frac{n-k}{k}}\right)^{1/m}. \tag{6-6}$$

En caso que m sea impar,

$$\left(\bar{x} - s\sqrt{\frac{k-1}{n-k+1}}\right)^{1/m} \leq x_k \leq \left(\bar{x} + s\sqrt{\frac{n-k}{k}}\right)^{1/m}. \tag{6-7}$$

6.1.1. Caso de Valores Propios

Sean $A \in M_n$ Hermitiana y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sus valores propios, tales que $\lambda_1^m \geq \lambda_2^m \geq \cdots \geq \lambda_n^m$. A es unitariamente diagonalizable, es decir, existe una matriz unitaria $U \in M_n$ tal que $A = UDU^*$, donde D es una matriz diagonal que almacena los valores propios de A en su diagonal principal, la que notaremos $D = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$. Consideremos $A^m = UD^mU^*$ donde $D^m = diag\{\lambda_1^m, \lambda_2^m, \ldots, \lambda_n^m\}$. Podemos ver que A^m también es unitariamente diagonalizable y sus valores propios son las potencias $m-$ésimas de los valores propios de A. Del Teorema 6 tenemos que $Tr(A^m) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m$. Por su parte, de la Definición 9 tenemos que $||A||_F = \sqrt{Tr(AA^*)}$ y al ser A Hermitiana,

$$||A||_F^2 = Tr(A^2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2. \tag{6-8}$$

De acuerdo a la ecuación (6-8) podemos decir entonces que

$$||A^m||_F^2 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^m)^2. \tag{6-9}$$

Por lo tanto adecuando los elementos de las ecuaciónes (6-6) y (6-7), tenemos que, en general

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m = \frac{Tr(A^m)}{n}.$$

en caso que $m = 2p$ y dado que A^p también es Hermitiana [15]

$$\bar{x} = \frac{Tr(A^p(A^p)^*)}{n} = \frac{||A^p||_F^2}{n}.$$

por su parte

$$\begin{aligned}
s^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i^m - \bar{x})^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left((\lambda_i^m)^2 - 2\lambda_i^m\bar{x} + \bar{x}^2\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i^m)^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^m + n\bar{x}^2\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i^m)^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i^m)^2 - n\bar{x}^2\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(||A^m||_F^2 - \frac{(Tr(A^m))^2}{n}\right).
\end{aligned}$$

Reemplazando éstos en las ecuaciónes (6-6) y (6-7) tenemos en caso de ser m par,

$$\left(\frac{Tr(A^m)}{n} - s\sqrt{\frac{k-1}{n-k+1}}\right)^{1/m} \leq |\lambda_k| \leq \left(\frac{Tr(A^m)}{n} + s\sqrt{\frac{n-k}{k}}\right)^{1/m}. \tag{6-10}$$

en caso de m impar,

$$\left(\frac{Tr(A^m)}{n} - s\sqrt{\frac{k-1}{n-k+1}}\right)^{1/m} \leq \lambda_k \leq \left(\frac{Tr(A^m)}{n} + s\sqrt{\frac{n-k}{k}}\right)^{1/m}. \tag{6-11}$$

Consideremos solamente el caso en que m sea impar, ya que en éste se preserva el orden de los valores propios λ_i y sus potencias λ_i^m. Si $m = 2t+1$ con $t = 1, 2, \cdots$, se genera una sucesión de cotas inferiores y una sucesión de cotas superiores, a partir de la información de las potencias impares de la matriz original. El objetivo que se persigue en este caso, es que la sucesión de cotas inferiores sea creciente y la de cotas superiores sea decreciente, lo que implicaria que convergerían al valor propio que están acotando.

Pregunta 1. *Sean $A \in M_n$ una matriz Hermitiana, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sus valores propios ordenados de manera decreciente y $I_m = \left(\frac{Tr(A^m)}{n} - s\sqrt{\frac{k-1}{n-k+1}}\right)^{1/m}$, una sucesión para un $k = 1, 2, \cdots, n$ fijo, tal que $s^2 = \frac{1}{n}\left(||A^m||_F^2 - \frac{(Tr(A^m))^2}{n}\right)$ y $m = 2t+1$ con $t = 1, 2, \cdots$. Si I_m es una sucesión creciente, entonces $\lim_{m\to\infty} I_m = \lambda_k$.*

Pregunta 2. *Sean $A \in M_n$ una matriz Hermitiana, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sus valores propios ordenados de manera decreciente y $S_m = \left(\frac{Tr(A^m)}{n} + s\sqrt{\frac{n-k}{k}}\right)^{1/m}$, una sucesión para un $k = 1, 2, \cdots, n$ fijo, tal que $s^2 = \frac{1}{n}\left(||A^m||_F^2 - \frac{(Tr(A^m))^2}{n}\right)$ y $m = 2t+1$ con $t = 1, 2, \cdots$. Si S_m es una sucesión decreciente, entonces $\lim_{m\to\infty} S_m = \lambda_k$.*

En caso de lograrse resolver y demostrar los problemas (1) y (2), considerando un ordenamiento adecuado de las potencias pares de los valores propios, se tendrían dos problemas análogos, utilizando las ecuaciones de las cotas en (6-10).

6.1.2. Ejemplo

Veamos algunas de las cotas obtenidas en el caso particular de

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}1367481 & 0{,}7263507 & 0{,}2320748 \\ 0{,}7263507 & 0{,}3970288 & 0{,}2312237 \\ 0{,}2320748 & 0{,}2312237 & 0{,}4329265 \end{bmatrix}. \tag{6-12}$$

Cotas Inferiores

Cota Inferior	$m = 3$	$m = 5$	$m = 7$	$m = 9$	$m = 11$	λ_i
0.8332952	1.0629806	1.130846	1.1591642	1.1745554	1.1842976	1.2287911
- 0.2512703	- 0.5066857	- 0.5646587	- 0.5883877	- 0.6015642	- 0.6100497	0.2939706
- 0.7935530	- 0.9266392	- 1.0021458	- 1.0537461	- 1.0883673	- 1.112179	- 0.6497243

Cotas Superiores

λ_i	$m = 3$	$m = 5$	$m = 7$	$m = 9$	$m = 11$	**Cota Superior**
1.2287912	1.231279	1.2288979	1.228797	1.2287915	1.2287912	1.3755779
0.2939706	1.0629806	1.1308461	1.1591642	1.1745554	1.1842977	0.8332952
- 0.6497244	- 0.5066858	- 0.5646587	- 0.5883877	- 0.6015642	- 0.6100498	- 0.2512703

En este ejemplo podemos observar que solo en el caso del primer valor propio se tiene una sucesión creciente de cotas inferiores y una decreciente de cotas superiores, mientras que las sucesiones de cotas para el segundo y tercer valor propio no se comportan como se esperaba que lo hicieran.

Se deberán estudiar entonces, qué condiciones se deben tener sobre las sucesiones o sobre las matrices para obtener las sucesiones que se determinan en los problemas (1) y (2).

6.1.3. Caso de Valores Singulares

Si los problemas (1) y (2) tuvieran solución, al menos para el primer valor propio, surge la inquietud de un problema para valores singulares:

Pregunta 3. *¿Las condiciones y soluciones de los problemas (1) y (2) pueden ser extendidas al caso de los valores singulares de una matriz $A \in M_{m,n}$?.*

6.2. Utilizando la matriz $A - \gamma I$

Supongamos $A \in M_n$, λ_i, $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ un valor propio de A, x_i su vector propio asociado, γ_1 es una cota inferior activa de λ_i y γ_2 es una cota superior activa de λ_i. Observemos las siguientes consideraciones

1. Partiendo de la ecuación $Ax_i = \lambda_i x$ consideremos la diferencia: $(A - \gamma I)x_i = Ax_i - \gamma I x_i = \lambda_i x_i - \gamma x_i = (\lambda_i - \gamma)x_i$. Por lo tanto $\lambda_i - \gamma$ es un valor propio de $A - \gamma I$. x_i, es un vector propio asociado a λ_i para A y a $\lambda_i - \gamma$ para $A - \gamma I$.

2. Los valores propios de $A - \gamma I$ son $\lambda_1 - \gamma, \lambda_2 - \gamma, \cdots, \lambda_n - \gamma$.

3. Si se calculan las cotas de los valores propios de la matriz $A - \gamma_1 I$ se pueden dar tres casos por cada valor propio de A:

   a) Si la cota inferior y la cota superior del valor propio $\lambda_j - \gamma_1$, $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ son ambas positivas, entonces $\lambda_j - \gamma_1 > 0$, por lo tanto γ_1 es una cota inferior de λ_j. Si se compara γ_1 con la cota inferior de λ_j y γ_1 resulta ser mayor que esta cota, entonces γ_1 es cota inferior activa para λ_j. Si se repite el procedimiento con todos los valores propios de A, entonces se obtiene el valor n_j del Teorema 4-12, se puede aplicar este mismo Teorema para encontrar una cota superior de λ_{i-1}.

   b) Si la cota inferior y la cota superior del valor propio $\lambda_j - \gamma_1$, $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ son ambas negativas, entonces $\lambda_j - \gamma_1 < 0$, por lo tanto γ_1 es una cota superior de λ_j. Si se compara γ_1 con la cota superior de λ_j y γ_1 resulta ser menor que esta cota, entonces γ_1 es cota superior activa para λ_j.

   c) Si la cota inferior es negativa y la cota superior es positiva no se puede determinar si γ_1 es cota superior o inferior de λ_j, sin embargo, es un indicador que γ_1 es cercano a λ_j.

4. Si se calculan las cotas de los valores propios de la matriz $A - \gamma_2 I$ se pueden dar tres casos por cada valor propio de A:

   a) Si la cota inferior y la cota superior del valor propio $\lambda_j - \gamma_2$, $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ son ambas positivas, entonces $\lambda_j - \gamma_2 > 0$, por lo tanto γ_2 es una cota inferior de λ_j. Si se compara γ_2 con la cota inferior de λ_j y γ_2 resulta ser mayor que esta cota, entonces γ_2 es cota inferior activa para λ_j.

b) Si la cota inferior y la cota superior del valor propio $\lambda_j - \gamma_2$, $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ son ambas negativas, entonces $\lambda_j - \gamma_2 < 0$, por lo tanto γ_2 es una cota superior de λ_j. Si se compara γ_2 con la cota inferior de λ_j y γ_2 resulta ser mayor que esta cota, entonces γ_2 es cota inferior activa para λ_j. Si se repite el procedimiento con todos los valores propios de A, entonces se obtiene el valor p_j del Teorema 4-12, se puede aplicar este mismo Teorema para encontrar una cota inferior de λ_{i+1}.

c) Si la cota inferior es negativa y la cota superior es positiva no se puede determinar si γ_2 es cota superior o inferior de λ_j, sin embargo, es un indicador que γ_2 es cercano a λ_j.

Pregunta 4. *Dada una matriz $A \in M_n$, se pueden encontrar las cotas de sus valores propios. Suponinendo γ una cota activa, se construye la matriz $A - \gamma I$ y se calculan las cotas de sus valores propios; si para algun valor propio la cota inferior es negativa y la cota superior es positiva, ¿que algoritmo permite determinar si la cota es inferior o superior?*

7. Conclusiones

1. Utilizando la norma de Frobenius, la traza y el tamaño de una matriz A, es posible determinar ciertas cotas para los valores propios y singulares, éstas pueden ser refinadas utilizando información adicional como una cota activa; sin embargo la localización de la cota activa γ reviste cierto grado de dificultad. Con ayuda de las cotas de la matriz $A-\gamma I$ es posible en algunos casos determinar si esta es inferior activa o superior activa, lo que podría aplicarse de forma reiterada para hacer una aproximación a los valores propios y singulares.

2. En los diferentes métodos utilizados en la búsqueda de una cota activa o un refinamiento de las cotas iniciales (como utilizar las potencias de la matriz inicial, Teoremas de Entrelazamiento o las matrices perturbadas) sólo se utilizó cierta información de la matriz (traza, norma de Frobenius, tamaño de la matriz), por lo que sería interesante estudiar estos métodos contando con información adicional de la matriz.

3. Al calcular las cotas de los valores propios de una matriz $A - \gamma I$, donde γ es una cota activa, se observa que las cotas superiores e inferiores guardan la misma distancia en relación a las respectivas cotas en la matriz original A. Con el objetivo de hacer esa distancia cada vez menor, buscando que cada intervalo entre la cota inferior y la superior quede encajado en el anterior, se debe buscar más información de la matriz que permita refinar el proceso, ya que la utilizada no generó las mejoras esperadas.

A. Anexo: Codigos Generados en Scilab

A.1. Cotas y Mejoramientos Para Valores Propios

A.1.1. Valores Propios de una Matriz Especifica A

```
n=5;
A=[3,2-%i,-3*%i,5+2*%i,1;2+%i,0,1-%i,-%i,2+3*%i;3*%i,1+%i,0,-4+%i,-9*%i;5-2*%i
    ,%i,-4-%i,1,0;1,2-3*%i,9*%i,0,-2];
B=A*A;
a=trace(A);
b=trace(B);
m=a/n;
s=sqrt((b/n)-m^2);
civp1=m+s/sqrt(n-1);
csvp1=m+s*sqrt(n-1);

CI=[civp1];
CS=[csvp1];

for k=2:n-1
   civpk=m-s*sqrt((k-1)/(n-k+1))
   csvpk=m+s*sqrt((n-k)/k)
   CI=[CI;civpk]
   CS=[CS;csvpk]
end
civpn=m-s*sqrt(n-1)
csvpn=m-s/sqrt(n-1)

CI=[CI;civpn]
CS=[CS;csvpn]

sA=spec(A)
ValOrd=gsort(sA,'g','d')

CIM=zeros(5,1)
CSM=zeros(5,1)

MF=[CI,CIM,ValOrd,CSM,CS]
```

```
//*****************************************************************
//COTAS SUPERIORES MEJORADAS

for i=1:n-2
    cijm1=MF(i+1,1)
    vpjm1=MF(i+1,3)
    cont1=0
    Vpru=[]
    for j=i+2:n
        Vpru=MF(j,3)
        c=Vpru-cijm1
        sc=csgn(c)
        cons=sc*norm(c)
        if cons>0
            cont1=cont1+1
        end
    end

    if cont1==0
       gammai=(cijm1+3*vpjm1)/4
    else
       gammai=(cijm1+3*MF(i+1+cont1,3))/4
    end

    nj2=cont1+1;
    ms1=(a-nj2*gammai)/(n-nj2);
    ss1=sqrt((b-nj2*gammai^2)/(n-nj2)-ms1^2);
    MF(i,4)=ms1+ss1*sqrt((n-nj2-i)/i);

end

cijm1=MF(n,1)
gammai=(cijm1+3*MF(n,3))/4
nj5=1;
ms4=(a-nj5*gammai)/(n-nj5);
MF(n-1,4)=ms4;

//*****************************************************************
//COTAS INFERIORES MEJORADAS
csjm1=MF(1,5)
gammai=(csjm1+3*MF(1,3))/4
nj5=1;
ms4=(a-nj5*gammai)/(n-nj5);
MF(2,2)=ms4;

for i=2:n-1
    csjm1=MF(i,5)
    vpjm1=MF(i,3)
```

```
        cont1=0
        Vpru=[]
        for j=1:i-1
            Vpru=MF(j,3)
            c=Vpru-csjm1
            sc=csgn(c)
            cons=sc*norm(c)
            if cons<0
                cont1=cont1+1
            end
        end
        if cont1==0
            gammai=(csjm1+3*vpjm1)/4
        else
            gammai=(csjm1+3*MF(i-cont1,3))/4
        end

        nj2=cont1+1;
        ms1=(a-nj2*gammai)/(n-nj2);
        ss1=sqrt((b-nj2*gammai^2)/(n-nj2)-ms1^2);
        MF(i+1,2)=ms1-ss1*sqrt((i-nj2)/(n-i));
end
MF
```

A.1.2. Valores Singulares de una Matriz Especifica A

```
A=[ %i,1-%i,2+3*%i,0,-5*%i;1,-%i,2,-3*%i ,4-%i ;2*%i ,-1+2*%i ,1 ,0 ,3;-3
    ,5-3*%i ,6*%i,-1 ,0;0 ,1 ,-2 ,3 ,%i ;1-3*%i ,5+%i ,-2+3*%i , 0 , 1 ] ;

B=A' ;
b=sqrt( trace(B*A) ) ; // norma de frobenius
q=min( size(A) ) ;
k=floor( ( q+1)/2) ;
a1=sqrt(k-1)*b ;
a2=sqrt( k )*b ;
a=real( ( a1+a2 )/2) ;
m=a/q ;
s=sqrt( ( b^2/q )-m^2) ;
//PRIMERAS COTAS
civs1=b/sqrt( q ) ;
csvs1=m+s*sqrt(q-1) ;
CI=[ civs1 ] ;
CS=[ csvs1 ] ;
for j=2:k-1
    civsj=m-s*sqrt( ( j-1)/(q-j+1) ) ;
    csvsj=m+s*sqrt( ( q-j )/j ) ;
    CI=[CI ; civsj ]
    CS=[CS; csvsj ]
```

```
end
civsk=m-s*sqrt( ( k-1)/(q-k+1) ) ;
csvsk=b/sqrt( k ) ;
CI=[CI ; civsk ]
CS=[CS; csvsk ]
for j=k+1:q
    csvsj=b/sqrt( j ) ;
    CI=[CI ; 0 ]
    CS=[CS; csvsj ]
end
sA=svd(A) ;
ValOrd=gsort( sA , 'g' , 'd' ) ;
CIM=zeros( 5 , 1 ) ;
CSM=zeros( 5 , 1 ) ;
MF=[CI ,CIM, ValOrd ,CSM,CS]
sum( svd(A) ) ;
//COTAS SUPERIORES MEJORADAS
for i =1:q-2
    cijm1=MF( i+1 ,1)
    vsjm1=MF( i+1 ,3)
    cont1=0
    Vpru=[ ]
    for j=i+2:q
        Vpru=MF( j , 3 )
        c=Vpru-cijm1
        sc=csgn( c )
        cons=sc*norm( c )
        if cons>0
        cont1=cont1+1
        end
    end
    if cont1==0
        gammai=( cijm1+3*vsjm1 )/4
    else
        gammai=( cijm1+3*MF( i+1+cont1 , 3 ) )/4
    end
    nj2=cont1+1;
    ms1=(a-(nj2*gammai))/(q-nj2) ;
    ss1=sqrt( ( b^2-nj2*gammai^2)/(q-nj2 )-ms1^2) ;
    MF( i , 4 )=ms1+ss1*sqrt( ( q-nj2-i )/i ) ;
end
cijm1=MF(q , 1 )
gammai=( cijm1+3*MF(q , 3 ) )/4
nj5=1;
ms4=(a-nj5*gammai )/(q-nj5 ) ;
MF(q-1 ,4)=ms4 ;
//??????????????????????????????????????????????????????????????????????
//COTAS INFERIORES MEJORADAS
```

```
csjm1=MF( 1 , 5 )
gammai=(csjm1+3*MF( 1 , 3 ) )/4
nj5=1;
ms4=(a-nj5*gammai )/(q-nj5 ) ;
MF( 2 , 2 )=ms4 ;
for i=2:k
    csjm1=MF( i , 5 )
    vpjm1=MF( i , 3 )
    cont1=0
    Vpru=[ ]
    for j=1:i-1
        Vpru=MF( j , 3 )
        c=Vpru-csjm1
        sc=csgn( c )
        cons=sc*norm( c )
        if cons<0
            cont1=cont1+1
        end
    end
    if cont1==0
        gammai=csjm1+3*vpjm1/4                    //
    else
        gammai=csjm1+3*MF( i-cont1 , 3 )/4        //
    end
    nj2=cont1+1;
    ms1=(a-nj2*gammai )/(q-nj2 ) ;
    ss1=sqrt( ( b^2-nj2*gammai^2)/(q-nj2 )-ms1^2) ;
    MF(i+1,2)=ms1-ss1*sqrt( ( i-nj2-1)/(q-i +1) ) ;
    sc1=csgn( MF(i+1,2) )
    cons1=sc1*norm( MF(i+1,2) )
    if cons1<0
       MF(i+1,2)=0
    end
end
//============ 2da par t e
for i=k+1:q
    csjm1=MF( i , 5 )
    vpjm1=MF( i , 3 )
    cont1=0
    Vpru=[ ]
    for j =1: i-1
        Vpru=MF( j , 3 )
        c=Vpru-csjm1
        sc=csgn( c )
        cons=sc*norm( c )
        if cons<0
            cont1=cont1+1
        end
```

```
    end
    if cont1==0
        gammai=csjm1+3*vpjm1/4
    else
        gammai=csjm1+3*MF( i-cont1 , 3 )/4
    end
    nj2=cont1;
    coinf1=a-nj2*gammai
    coinf2=sqrt( ( i-nj2-1)*(b^2-nj2*gammai^2) )
    if real( coinf1 )>real( coinf2 )
        ms1=(a-nj2*gammai )/(q-nj2 ) ;
        ss1=sqrt( ( b^2-nj2*gammai^2)/(q-nj2 )-ms1^2) ;
        MF( i +1 ,2)=ms1-ss1*sqrt(abs(( i-nj2-1)/(q-i+1))) ;
    else
        MF( i +1 ,2)=0
    end
end
MF=MF(1:5,:)
```

A.1.3. Matriz Randómica

El código para obtener una matriz simétrica randómica es el siguiente:

```
n=5;
X=rand(n,n);
Y=triu(X);
Z=Y';
A=Y+Z;
```

Para generar las cotas de este tipo de matrices se utilizan los códigos anteriormente mencionados.

A.2. Potencias de Matrices

```
n=3
X=rand(n,n)
Y=triu(X)
Z=Y'
A=Y+Z
sA=spec(A);

B=A*A;
a1=trace(A);
b1=trace(B);
m=a1/n;
s=sqrt((b1/n)-m^2);
ValOrd=gsort(sA,'g','d');
MF1=[ValOrd];
```

```
MF2=[ValOrd];

civp1=m+s/sqrt(n-1);
csvp1=m+s*sqrt(n-1);
CI=[civp1];
CS=[csvp1];

for k=2:n-1
    civpk=m-s*sqrt((k-1)/(n-k+1))
    csvpk=m+s*sqrt((n-k)/k)
    CI=[CI;civpk]
    CS=[CS;csvpk]
end

civpn=m-s*sqrt(n-1)
csvpn=m-s/sqrt(n-1)
CI=[CI;civpn]
CS=[CS;csvpn]
MF1=[MF1,CI]
MF2=[MF2,CS]

//POTENCIAS
for j=1:5
    t=2*j+1;
    B=A^t;
    C=B*B;
    b=trace(B);// traza de A^t
    c=trace(C);//norma f al cuadrado de A^t
    m=b/n;
    s=sqrt((c/n)-m^2);

    MF1(1,t)=(m+s/sqrt(n-1))^(1/t);
    MF2(1,t)=(m+s*sqrt(n-1))^(1/t);

    for k=2:n-1
        z1=m-(s*sqrt((k-1)/(n-k+1)))
        if z1<0
            MF1(k,t)=(-1)*(abs(z1))^(1/t)
        else
            MF1(k,t)=(abs(z1))^(1/t)
        end

        z3=m+s*sqrt((n-k)/k)
        if z3<0
        MF2(k,t)=(-1)*(abs(z3))^(1/t)
        else
        MF2(k,t)=(abs(z3))^(1/t)
        end
```

```
    end

    z2=m-s*sqrt(n-1)
    if z2<0
    MF1(n,t)=(-1)*(abs(z2))^(1/t)
    else
    MF1(n,t)=(abs(z2))^(1/t)
    end
    z4=m-s/sqrt(n-1)
    if z4<0
    MF2(n,t)=(-1)*(abs(z4))^(1/t);
    else
    MF2(n,t)=(abs(z4))^(1/t);
    end
end
MF1
MF2
```

A.3. Corrimientos de Intervalos (Matrices Perturbadas)

```
n=5;
X=rand(n,n);
Y=triu(X);
Z=Y';
A=Y+Z
B=A*A;
a=trace(A);
b=trace(B);
m=a/n;
s=sqrt((b/n)-m^2);
civp1=m+s/sqrt(n-1)
csvp1=m+s*sqrt(n-1)

CI=[civp1];
CS=[csvp1];

for k=2:n-1
    civpk=m-s*sqrt((k-1)/(n-k+1))
    csvpk=m+s*sqrt((n-k)/k)

    CI=[CI;civpk]
    CS=[CS;csvpk]
end
civpn=m-s*sqrt(n-1)
csvpn=m-s/sqrt(n-1)

CI=[CI;civpn]
CS=[CS;csvpn]
```

```
MF=[CI,CS]

for i=2:n
    gk=(MF(i,1)+MF(i,2))/2
    G=gk*eye(n,n)
    Ak=A-G
    Bk=Ak*Ak
    ak=trace(Ak);
    bk=trace(Bk);
    mk=ak/n;
    sk=sqrt((bk/n)-mk^2);
        //cotas para A-gamma*I

    //Primeras cotas
    civp1k=mk+sk/sqrt(n-1)
    csvp1k=mk+sk*sqrt(n-1)

    CIk=[civp1k];
    CSk=[csvp1k];

    //Cotas intermedias

    for l=2:n-1
        civplk=mk-sk*sqrt((l-1)/(n-l+1))
        csvplk=mk+sk*sqrt((n-l)/l)

        CIk=[CIk;civplk]
        CSk=[CSk;csvplk]
    end

    //cotas n-ésimas o últimas
    civpnk=mk-sk*sqrt(n-1)
    csvpnk=mk-sk/sqrt(n-1)

    CIk=[CIk;civpnk]
    CSk=[CSk;csvpnk]

    MFk=[CIk,CSk]

    //determina cotas inferiores activas
    nj=1;
    if MFk(i,1)>0

        for j=i+1:n-1
            if MFk(j,1)>0 & gk>MF(j,1)
                nj=nj+1
            end
```

```
        end
        if MFk(n,1)>0 & gk>MF(n,1)
                nj=nj+1
        end
    end

    //calcular la cota superior de lambda_j
    ms1=(a-nj*gk)/(n-nj);
    ss1=sqrt((b-nj*gk^2)/(n-nj)-ms1^2);

    //cota superior mejorada del valor propio i-1
    MF(i-1,3)=ms1+ss1*sqrt((n-nj-(i-1))/(i-1))
end
```

Bibliografía

[1] Samuelson P. A.: *How Deviant Can You Be?*, Journal of the American Statistical Association, Vol. 63, p.1522-1525 (1968).

[2] F. A. Graybill, *Introduction to Matrices with Applications in Statistics*, Wadsworth, Belmont, California, 1969.

[3] Arnold B. C. *Schwarz, Regression, and Extreme Deviance*, The American Statistician, Vol. 28, p.22-23, (1974).

[4] Wolkowicz H., Styan G. *Extensions of Samuelson´s Inequality*, The American Statistician, Vol. 33, No. 3, (1979).

[5] __________, __________: *Bounds for Eigenvalues Using Traces*. Linear Algebra and its Applications, 1980. V 29,p.471-506 .

[6] __________, __________l: *More Bounds for Eigenvalues Using Traces*. Linear Algebra and its Applications, 1980. V 31,p.1-17 .

[7] __________, __________l, and Merikoski J.K.: *Bounds for Ratios of Eigenvalues Using Traces*. Linear Algebra and its Applications, 1983. V 55,p.105-124.

[8] __________, Grone B., Johnson C., and Marques De Sa E.: *Improving Hadamard´s Inequality*. Linear and multilinear Algebra, 1984. V 16, p.305-322.

[9] __________, Merikoski J.K.: *Improving Eigenvalues Bounds Using Exra Bounds*. Linear Algebra and its Applications, 1985. V 68,p.93-113.

[10] Tarazaga P.: *Eigenvalue Estimates for Symmetric Matrices*. Linear Algebra and its Applications, 1990. V 135,p.171-179.

[11] __________: *More Estimates for Eigenvalue and Singular Values*. Linear Algebra and its Applications, 1991. V 149,p.97-110.

[12] __________, Sarria H., Merikoski J. K.: *Bounds for Singular Values Using Traces*. Linear Algebra and its Applications, 1994. V 210,p.227-254.

[13] Merikoski J. K., Kumar R.: *Upper Bounds for Singular Values*. Linear Algebra and its Applications, 2005. V 401,p.371-379.

[14] Sarria H., *Estimación de Valores Singulares*. Universidad de Puerto Rico, Recinto Universitario de Mayaguez, 1993.

[15] Horn R.A, Johnson C.: *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1992.

[16] Horn R.A, Johnson C.: *Topics in Matrix*. Cambridge University Press, 1992.