Entropía algebraica de un poset

Alfonso Cubillos Delgado

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2017

Entropía algebraica de un poset

Alfonso Cubillos Delgado

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias - Matemáticas

Director:
Doctor Agustín Moreno Cañadas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2017

A Maria José, mi hija, la única persona que me motiva a seguir.

Agradecimientos

Agradezco al Doctor Agustín Moreno por su colaboración y paciencia en la realización de este trabajo.

Resumen

El propósito de este trabajo es definir la noción de entropía algebraica sobre un poset con el fin de probar algunos resultados clásicos de la teoría de representaciones de posets. Para hacer esto, se definen los posets de representación tipo finito, manso y salvaje. La entropía algebraica de grupos abelianos y espacios vectoriales también son estudiadas. Finalmente, se introduce la noción de entropía algebraica de un poset como herramienta para probar el teorema de Drozd concerniente a la clasificación de posets.

Algoritmo de diferenciación
Categoría de representaciones
Entropía de un grupo abeliano
Entropía de un espacio vectorial
Entropía de un poset
Poset
Posets tipo finito, manso y salvaje
Representación
Representación indescomponible

Abstract

The purpose of this work is to define the notion of algebraic entropy of a poset in order to prove some classical results in the theory of representations of posets. To do that, we describe posets of finite, tame and wild representation type. Algebraic entropy of abelian groups and vector spaces are also studied. Finally, we introduce the notion of algebraic entropy of a poset as a tool to prove the theorem of Drozd regarding the classifications of posets.

Algorithm of differentiation
Category of representations
Entropy of abelian group
Entropy of vectorial space
Entropy of poset
Poset
Posets finite, tame and wild representation type
Representation
Indescomposable representation

Contenido

Introducción

La teoría de representaciones de conjuntos parcialmente ordenados (posets, por sus siglas en inglés) fue inicialmente desarrollada por Nazarova y Roiter en la década del setenta para estudiar representaciones de álgebras de dimensión finita [11]. Posteriormente, se obtuvieron criterios para tipo representación finito [7], manso [12], [13] y crecimiento finito [14].

La principal herramienta para la investigación de la teoría de representaciones de posets son los algoritmos de diferenciación, los cuales son funtores de la categoría inicial a la categoría derivada. Estos fueron utilizados para probar los criterios de tipo representación finito por Kleiner en 1972, de tipo representación manso por Nazarova en 1975, y de tipo representación crecimiento finito por Zavadskij en 1981. Los dos primeros criterios fueron probados utilizando el algoritmo de diferenciación con respecto a un punto maximal, y el tercer criterio se estableció usando el algoritmo de diferenciación con respecto a una pareja conveniente de puntos, el cual fue introducido por Zavadskij en 1977.

La entropía algebraica fue inicialmente introducida por Adler, Konheim y McAndrew [1] para una función continua $f : X \to X$ sobre un espacio topológico compacto X. A partir de esto, Weiss reconsidera la definición de entropía dada por Adler y define la entropía algebraica sobre grupos de endomorfismos [18], demostrando las propiedades básicas, cuyo resultado principal es el de establecer una igualdad entre la entropía del anillo de endomorfismo de un grupo abeliano dado y la entropía topologica de su correspondiente función adjunta.

Posteriormente en 1979, Peters [16] proporciona una definición diferente de la entropía de automorfismos de un grupo abeliano discreto G obteniendo propiedades similares a los probados por Weiss, y generalizando el resultado principal de Weiss sobre grupos abelianos contables. La definición dada por Peters se puede adaptar fácilmente sobre endomorfismos de grupos abelianos. Así, la única diferencia entre la definición dada por Weiss y Peters radica en que el primero toma el supremo sobre todos los subgrupos finitos de una función dada y el segundo toma el supremo sobre todos los subconjuntos finitos.

Las implicaciones de considerar la definición de Weiss frente a la de Peters radica en que la de Weiss se vuelve trivial sobre grupos de torsión libre, mientras que la de Peters provee cuestiones adicionales en este caso.

A partir de la definición de entropía topológica se ha definido la entropía sobre diferentes estructuras, en particular sobre espacios vectoriales [5], probando propiedades análogas a las entropías de estructuras anteriormente mencionadas, obteniendo dos resultados fundamentales: el teorema de adición y el teorema de unicidad.

El objetivo principal de este trabajo es definir la entropía algebraica sobre un poset, con lo cual obtenemos resultados claves concernientes a la clasificación de posets y al algoritmo de diferenciación con respecto a una pareja conveniente de puntos. Para tal fin, vamos a desarrollar el trabajo de la siguiente forma.

En el capítulo 1 desarrollamos los fundamentos de la teoría de representaciones de posets, representaciones de tipo finito, manso y salvaje, problema matricial y el algoritmo de diferenciación con respecto una pareja conveniente de puntos.

El objetivo del capítulo 2 es definir la entropía algebraica sobre grupos abelianos y espacios vectoriales, así como plantear las propiedades elementales de la entropía sobre las estructuras anteriormente mencionadas. Finalmente, definiremos la entropía algebraica sobre un poset, aplicando la definición a resultados propios de la teoría de representaciones de posets.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos las nociones fundamentales de la teoría de posets finitos tomando, como principal referencia el trabajo de Moreno [10] y la teoría de representaciones de posets siguiendo los lineamientos de Arnold [2].

1.1. Representaciones de posets

1.1.1. Conjuntos parcialmente ordenados

Sean $\mathcal{P}$ un conjunto y $\leq$ una relación sobre $\mathcal{P}$. Decimos que la pareja $(\mathcal{P}, \leq)$ es un **conjunto parcialmente ordenado** o **poset** si las siguientes condiciones se tienen:

1. La relación $\leq$ es reflexiva.

2. La relación $\leq$ es antisimétrica.

3. La relación $\leq$ es transitiva.

De ahora en adelante nos referiremos al poset $(\mathcal{P}, \leq)$, haciendo referencia solamente al conjunto $\mathcal{P}$, siempre y cuando sea clara la relación de orden que se está manejando. Dados $i, j \in \mathcal{P}$, si $i < j$ y $i \neq j$, diremos que la relación entre i, j es **estricta**. Una relación $\leq$ sobre un conjunto $\mathcal{P}$ que es reflexiva y transitiva pero no necesariamente antisimétrica se llama un **pre-orden**.

Si en el poset $\mathcal{P}$ se cumple que $i \leq j$ o $j \leq i$, con i, j en $\mathcal{P}$, diremos que son elementos **comparables**. Un poset $\mathcal{P}$ es finito si, y solamente si, su conjunto subsecuente es finito de manera análoga $\mathcal{P}$ es infinito si, y solamente si, el conjunto subsecuente es infinito.

Sea $\mathcal{P}^{op}$ el poset donde $\mathrm{Ob}(\mathcal{P}^{op}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{P})$ y $x \leq y$ en $\mathcal{P}^{op}$ si, y sólo si, $y \leq x$ en $\mathcal{P}$. A $\mathcal{P}^{op}$ se le llamara **poset antiisomorfo** o **poset dual** de $\mathcal{P}$.

Si $(\mathcal{P}, \leq)$ es un poset finito entonces podemos representarlo gráficamente con un sistema de círculos, donde cada círculo es un elemento de $\mathcal{P}$ y líneas que los conectan, las cuales indican la relación que existe entre ellas (dada por $\leq$). Dicha representación debe cumplir lo siguiente:

1. A cada punto $i \in \mathcal{P}$, le asociamos un punto $p(i)$ del plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, representándolo con un círculo con centro en $p(i)$.

2. Sea $i < j$ con $i, j \in \mathcal{P}$. Si no existe $k \in \mathcal{P}$ tal que $i < k < j$ se le asigna un segmento de recta $l(i,j)$, conectando el círculo con centro en $p(i)$ con el círculo con centro en $p(j)$.

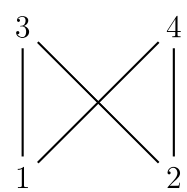
3. Además, las dos primeras condiciones deben cumplir lo siguiente:

   a) Si se tiene la condición (2), $p(i)$ debe estar por debajo de $p(j)$, es decir, la segunda coordenada de $p(i)$ es estrictamente menor que la segunda coordenada de $p(j)$.

   b) El círculo con centro en $p(k)$ no intercepta al segmento de recta $l(i,j)$ si $x \neq k$ y $y \neq k$.

Una representación gráfica que cumple las anteriores condiciones se llama **diagrama de Hasse** del poset $\mathcal{P}$.

Consideremos el poset $(\mathcal{P}, \leq)$ con $\mathcal{P} = \{1,2,3,4\}$ y $1 < 2, 1 < 4, 2 < 3, 2 < 4$. Su diagrama de Hasse asociado es



.

Sea $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}$. Un elemento $i \in \mathcal{P}$ es una **cota superior** de $\mathcal{S}$ si $s \leq i$, para todo $s \in \mathcal{S}$ De manera dual $i \in \mathcal{P}$ es una **cota inferior** de $\mathcal{S}$ si $i \leq s$, para todo $s \in \mathcal{S}$.

Decimos que i es la **mínima cota superior** (**máxima cota inferior**) de $\mathcal{S}$ si: i es una cota superior (cota inferior) de $\mathcal{S}$ e $i \leq j$ ($j \leq i$), para toda cota superior (cota inferior) j de $\mathcal{S}$ respectivamente.

Notaremos $\operatorname{Sup} \mathcal{S}$ e $\operatorname{Inf} \mathcal{S}$ a la mínima cota superior y a la máxima cota inferior de $\mathcal{S}$, también denominadas **supremo** e **ínfimo** de $\mathcal{S}$.

Definimos los elementos **primero**, **menor** o **mínimo** y **último**, **mayor** o **máximo** del poset $\mathcal{P}$, notados respectivamente $\perp$ y $\top$, tales que $\perp \leq i$ e $i \leq \top$, para todo $i \in \mathcal{P}$. Los elementos $\perp$ y $\top$ si existen son únicos.

Si $\mathcal{S} = \mathcal{P}$ y $\mathcal{P}$ tiene máximo entonces $\{\top\}$ es el conjunto de todas las cotas superiores de $\mathcal{P}$, de donde $\operatorname{Sup} \mathcal{P} = \top$. Por otra parte, si $\mathcal{P}$ no tiene máximo entonces el conjunto de cotas superiores de $\mathcal{P}$ es vacío, de donde $\operatorname{Sup} \mathcal{P}$ no existe. De manera análoga podemos razonar con el mínimo. Si $\mathcal{S} = \varnothing$ entonces cada $i \in \mathcal{P}$ cumple vacíamente que $s \leq i$, para todo $s \in \mathcal{S}$, por lo que $\mathcal{P}$ es el conjunto de todas las cotas superiores de vacío, de donde $\operatorname{Sup} \mathcal{S}$ existe si $\mathcal{P}$ tiene mínimo, con lo cual tendríamos que $\operatorname{Sup} \varnothing = \perp$. De manera dual $\operatorname{Inf} \varnothing = \top$, si $\mathcal{P}$ tiene máximo.

Sea $(\mathcal{P}, \leq)$ un poset. Un elemento $m \in \mathcal{P}$ es **maximal** (**minimal**) si, y sólo si, $i \leq m$ ($m \leq i$), para todo $i \in \mathcal{P}$ relacionado con m. Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$, notaremos $\max \mathcal{A}$ ($\min \mathcal{A}$) al conjunto de elementos maximales (minimales) de $\mathcal{A}$.

Dado un poset $\mathcal{P}$ y $a \in \mathcal{P}$, definimos el **cono superior** $a^{\triangledown}$ y el **cono inferior** $a_{\vartriangle}$ asociado a un punto a, de la siguiente manera respectivamente:

$$a^{\triangledown} = \{i \in \mathcal{P} \,/\, a \leq i\}, \qquad a_{\vartriangle} = \{i \in \mathcal{P} \,/\, i \leq a\}.$$

Los subconjuntos de $\mathcal{P}$, $a^{\triangledown} \backslash a$ y $a_{\vartriangle} \backslash a$ se llaman los **conos truncados superior e inferior, respectivamente, asociados al punto** $a \in \mathcal{P}$ y se notan respectivamente $a^{\blacktriangledown}$ y $a_{\blacktriangle}$. De donde tenemos las siguientes igualdades:

$$a^{\blacktriangledown} = a^{\triangledown} \backslash a = \{i \in \mathcal{P} \,/\, a < i\}, \qquad a_{\blacktriangle} = a_{\vartriangle} \backslash a = \{i \in \mathcal{P} \,/\, i < a\}.$$

Dado un poset $\mathcal{P}$ y $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$, denotamos $\mathcal{A}^{\triangledown}$ y $\mathcal{A}_{\vartriangle}$ a los subconjuntos de $\mathcal{P}$ tales que

$$\mathcal{A}^{\triangledown} = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} a^{\triangledown} \quad \text{y} \quad \mathcal{A}_{\vartriangle} = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} a_{\vartriangle}.$$

Si $\mathcal{A}^{\triangledown} = \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}_{\vartriangle} = \mathcal{A}$), entonces decimos que $\mathcal{A}$ es un **cono superior** (**cono inferior**).

Un poset $(\mathcal{C}, \leq)$ es una **cadena** o un **conjunto linealmente ordenado** si, y sólo si, para todo $i, j \in \mathcal{C}$ se tiene que $i \leq j$ o $j \leq i$, es decir, todo par de puntos son comparables. Un poset $\mathcal{P}$ es una **anticadena** si, y sólo si, para todo $i, j \in \mathcal{P}$ con $i \neq j$, se tiene que i y j son incomparables. De manera equivalente, un poset $\mathcal{P}$ es una anticadena, si $i \leq j$ en $\mathcal{P}$ solamente si, $i = j$. El cardinal máximo de las anticadenas de un poset $\mathcal{P}$ se llama el **ancho** del poset y se nota $w(\mathcal{P})$.

Un **subposet** de un poset $\mathcal{P}$ es un subconjunto $\mathcal{S}$ de $\mathcal{P}$ equipado con el orden de $\mathcal{P}$. De manera más específica, si $i, j \in \mathcal{S}$, entonces $i \leq j$ en $\mathcal{P}$ si, y sólo si, $i \leq j$ en $\mathcal{S}$.

1.1.2. Representaciones de posets

Sea k un cuerpo y $\mathcal{P}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ el conjunto de los números enteros positivos.

Definición 1.1. Sea $\mathcal{P}$ un poset finito. Una **representación** de $\mathcal{P}$ sobre un cuerpo k o un $\mathcal{P}-$**espacio** es un conjunto de $k-$*espacios* finito-dimensionales $U = (U_0; U_i : i \in \mathcal{P})$, tales que $U_i \subset U_0$, para todo $i \in \mathcal{P}$ y $U_i \subset U_j$, cuando $i \le j$ en $\mathcal{P}$.

Sean $U = (U_0; U_i : i \in \mathcal{P})$ y $V = (V_0; V_i : i \in \mathcal{P})$ dos representaciones de $\mathcal{P}$. Un morfismo $f : U \to V$ es una transformación k-lineal $f : U_0 \to V_0$ tal que $f(U_i) \subset V_i$ para todo $i \in \mathcal{P}$. La suma directa de U y V es $U \oplus V$ (que es la suma directa de espacios vectoriales) con $(U \oplus V)_0 = U_0 \oplus V_0$ y $(U \oplus V)_i = U_i \oplus V_i$, para todo $i \in \mathcal{P}$, es la representación $(U_0 \oplus V_0; \bigoplus_{i=1}^{n}(U_i \oplus V_i) : i \in \mathcal{P})$.

Una representación del poset $\mathcal{P}$ se dice **descomponible** si existe una descomposición $U_0 = V_0 \oplus W_0$ con $U_i = (V_0 \cap U_i) \oplus (W_0 \cap U_i)$, para cada $i \in \mathcal{P}$ y V_0 y W_0 no vacíos. A las representaciones $V = (V_0; V \cap U_i : i \in \mathcal{P})$ y $W = (W_0; W \cap U_i : i \in \mathcal{P})$ las llamaremos sumandos directos de U. Una representación es **indescomponible** si $0 = (0; 0, \ldots, 0)$ y U son los únicos sumandos directos de U. Ya que U_0 es de dimensión finita, ésta siempre se puede escribir como suma directa finita de representaciones indescomponibles.

A partir de la definición de morfismo de representaciones, tenemos que $(\operatorname{End} U, +, \circ)$ es un anillo; además $\operatorname{End} U$ es un subanillo del anillo $\operatorname{End} U_0$ de las transformaciones k-lineales. El cuerpo k es un subanillo de $\operatorname{End} U$, pues la multiplicación escalar sobre U_0 con un elemento de k es un morfismo de $\operatorname{End} U$. Decimos que $f \in \operatorname{End} U$ es **idempotente** si $f^2 = f$. Si f es idempotente entonces $1-f$ es idempotente; en efecto, $(1-f)^2 = 1-2f+f^2 = 1-2f+f = 1-f$.

Lema 1.2. *Una representación U de $\mathcal{P}$ es indescomponible si, y sólo si, 0 y 1 son los únicos idempotentes de* $\operatorname{End} U$.

Demostración. Si $U = (U; U_i : i \in \mathcal{P})$ es una representación del poset $\mathcal{P}$ y $f \in \operatorname{End} U$ un idempotente tal que $f \neq 0, 1$, entonces

$$U = (f(U_0); f(U_1), \ldots, f(U_n)) \oplus ((1-f)(U_0); (1-f)(U_1), \ldots, (1-f)(U_n))$$

es una suma directa de representaciones.
Para que la anterior condición sea cierta, dos condiciones se deben satisfacer. La primera condición es que $U_0 = f(U_0) \oplus (1-f)(U_0)$ es un espacio vectorial, lo cual se tiene ya que $u_0 = f(u_0) \oplus (1-f)(u_0)$, para cada elemento $u_0 \in U_0$ y $f(U_0) \cap (1-f)(U_0) = 0$, ya que si $x = f(u_0) = (1-f)(v_0) \in f(U_0) \cap (1-f)(U_0)$, entonces $x = f^2(u_0) = f(x) = f((1-f)(v_0) = (f-f^2)(v_0) = 0$. La segunda condición es para cada i, $f(U_i) = f(U_0) \cap U_i$ y $(1-f)(U_0) \cap U_i$. En efecto, por la idempotencia de f, se tiene que $f(U_i) \subseteq f(U_0) \cap U_i$ y si $x = f(u_0) \in f(U_0) \cap U_i$, entonces $x = f(u_0) = f^2(u_0) = f(x) \in f(U_i)$. Como $1-f$ también es idempotente $(1-f)(U_i) \subseteq$

$(1-f)(U_0)\cap U_i$ y si $x=(1-f)(u_0)=(1-f)^2(u_0)=(1-f)(u_0)\in(1-f)(U_0)$.
Si f no es 0 ni 1, entonces U es descomponible, de donde se deduce que si U es indescomponible entonces 0 y 1 son los únicos idempotentes en $\operatorname{End} U$.
Recíprocamente, supongamos que $U=V\oplus W$ es una suma directa de representaciones con V_0 y W_0 diferentes de cero, donde $U_0=V_0\oplus W_0$ con cada $U_i=(V_0\cap U_i)\oplus(W_0\cap U_i)$. Sea

$$f:U_0\to V_0,\quad (u_0,v_0)\mapsto v_0$$

el morfismo proyección. Entonces f es un morfismo de representaciones de U, porque $f(U_i)\subseteq V_0\cap U_i$ para cada i. Además por ser el morfismo proyección, f es idempotente, y f no es 0 ni 1, ya que, $\ker f=W_0\neq U_0$ y $\operatorname{Im} f=V_0\neq U_0$. De lo anterior se sigue que si 0 y 1 son los únicos idempotentes de $\operatorname{End} U$, entonces U debe ser indescomponible. □

Una representación de la forma $(U_0;U_i=0:i\in\mathcal{P})$ con $U_0\neq 0$ es llamada trivial. Las representaciones triviales podemos verlas como espacios vectoriales, de donde, dos representaciones triviales U y V son isomorfas si, y sólo si, U_0 y V_0 tienen la misma dimensión como espacios vectoriales. Sabemos que si U_0 es un espacio vectorial, $U_0\simeq k^n$ para algún $n\in\mathbb{N}$, luego una representación trivial $(U_0;U_i=0:i\in\mathcal{P})$ es una suma directa de representaciones indescomponibles triviales de la forma $(k;0,\dots,0)$, es decir,

$$(k^n;0,\dots,0)=(k;0,\dots,0)\oplus\cdots\oplus(k;0,\dots,0).$$

Por lo tanto, podemos concluir que bajo isomorfismos $(k;0,\dots,0)$ es la única representación trivial indescomponible.

Sea $U=(U_0;U_i:i\in\mathcal{P})$ un representación. Tenemos que $W_0=\sum_{i=1}^n U_i$ es el subespacio de U_0 generado por $U_1,\dots,U_n$. De lo anterior, W_0 es un sumando de U_0, de donde, $U_0=V_0\oplus W_0$. De donde, podemos expresar U como una suma directa de la representación trivial $(V_0;0,\dots,0)$ y la representación $(W_0;U_i:i\in\mathcal{P})$. En particular, si U no tiene representaciones triviales, entonces $U_0=\sum_{i=i}^n U_i$.
El conjunto de clases de isomorfismo de representaciones indescomponibles de $\mathcal{P}$ sobre un cuerpo k es notado por $\operatorname{Ind}(n,k)$.

Ejemplo 1.3. *Los elementos de* $\operatorname{Ind}(1,k)$ *son* $U=(k;k)$ *y* $U=(k;0)$. *En cada caso,* $\operatorname{End} U=k$.
Tenemos que la única representación trivial de S_1 es $(k;0)$. Si $(U;U_1)$ tiene sumandos no triviales, entonces $U=U_1$ es un k-espacio vectorial, digamos de dimensión m. Así, U es isomorfo a $(k;k)^m$, m copias de $(k;k)$, de donde U es indescomponible si, y sólo si, $m=1$. Si $U=(k;k)$ o $U=(k;0)$, entonces $k=\operatorname{End} U$ ya que $k\subseteq\operatorname{End} U$ y los k-endomorfismos de k son sólo la multiplicación por elementos de k. Pero 0 y 1 son los únicos idempotentes del cuerpo k, luego U es indescomponible.

Ejemplo 1.4. *Los elementos de* $\operatorname{Ind}(2,k)$ *son* $U = (k;0,0)$, $U = (k;k,0)$, $U = (k;0,k)$ *y* $U = (k;k,k)$. *Además, tenemos que* $\operatorname{End} U \simeq k$.
En efecto, la representación $(k;0,0)$ *es la única representación trivial indescomponible de* S_2. *Supongamos que* U *es una representación no trivial indescomponible de* S_2. *Entonces* $U = (U_0; U_1, U_2)$ *con* $U = U_1 + U_2$. *Primero asumamos que* $U_1 \cap U_2 = 0$ *entonces* $U = U_1 \oplus U_2$ *y* $U = (U_1; U_1, 0) \oplus (U_2; 0, U_2)$. *Ya que* U *es indescomponible entonces* U *es isomorfo a* $(k;k,0)$ *o* $(k;0,k)$.
Ahora asumamos que $U_1 \cap U_2 \neq 0$ *y escribamos* $U_0 = (U_1 \cap U_2) \oplus V$, *para algún subespacio vectorial* V *de* U_0. *Ya que* $U_1 \cap U_2 \subseteq U_i$ *y* $(U_i = U_1 \cap U_2) \oplus (U_i \cap V)$ *para* $i = 1, 2$. *Así,*

$$U = (U_0; U_1, U_2) = (U_1 \cap U_2; U_1 \cap U_2, U_1 \cap U_2) \oplus (V; U_1 \cap V, U_2 \cap V).$$

Como U *es indescomponible y* $U_1 \cap U_2 \neq 0$, *entonces debemos tener que* $V = 0$, *y* U *es isomorfo a* $(k;k,k)$. *Si* $U = (k;0,0)$, $U = (k;k,0)$, $U = (k;0,k)$ *o* $U = (k;k,k)$ *entonces* $k = \operatorname{End} U$, *ya que* $k \subseteq \operatorname{End} U$, *donde el morfismo está dado por la multiplicación de elementos de* k. *Como 0 y 1 son los únicos idempotentes del cuerpo* k *entonces* U *es indescomponible.*

Las tres primeras representaciones de S_2 dadas en el ejemplo anterior tienen por lo menos un subespacio igual a cero. Eliminando este subespacio cero de cada representación obtenemos las representaciones indescomponibles de S_1. Lo anterior lo podemos generalizar con la siguiente proposición:

Proposición 1.5. *Dados dos enteros positivos* m, n *tales que* $m \leq n$, *existe una correspondencia* $F : \operatorname{Rep}(\mathcal{P}_m, k) \to \operatorname{Rep}(\mathcal{P}_n, k)$, *tales que si* U *y* U' *son* k*-representaciones de* $\mathcal{P}_m$, *entonces* $\operatorname{End} U = \operatorname{End} F(U)$ *y* U *es isomorfo a* U' *si, y sólo si,* $F(U)$ *es isomorfo a* $F(U')$. *Además,* $F : \operatorname{Ind}(m,k) \to \operatorname{Ind}(n,k)$ *es una función inyectiva.*

Demostración. Consideremos la siguiente correspondencia

$$U = (U_0; U_1, \ldots, U_m) \mapsto F(U) = (U_0; U_1, \ldots, U_m, 0 \ldots, 0).$$

De la forma como está definida la correspondencia anterior, tenemos que $\operatorname{End} U = \operatorname{End} F(U)$; además, si U y U' son k-representaciones de S_m, entonces U es isomorfo a U' si, y sólo si, $F(U)$ es isomorfo a $F(U')$. Luego, por el lema 1.2. U es indescomponible si, y sólo si, $F(U)$ es indescomponible. Por lo tanto,

$$F : \operatorname{Ind}(m,k) \to \operatorname{Ind}(n,k)$$

es una función inyectiva bien definida. $\square$

Observación
Dado un k-espacio vectorial finito dimensional U, sea $(1+1)U = \{(x,x) \mid x \in U\}$, la imagen de la inyección de U en $U \oplus U$. Definimos $U \oplus 0 = \{(x,0) \mid x \in U\}$ y $0 \oplus U = \{(0,x) \mid x \in U\}$ como los espacios coordenados de $U \oplus U$. Entonces $(1+1)U$, $U \oplus 0$ y $0 \oplus U$ son subespacios de $U \oplus U$ y $(U \oplus U; U \oplus 0, 0 \oplus U, (1+1)U)$ es una k-representación de S_3.

Ejemplo 1.6. *Los elementos de* $\operatorname{Ind}(3,k)$ *son* $(k;0,0,0)$, $(k;k,0,0)$, $(k;0,k,0)$, $(k;0,0,k)$, $(k;k,k,0)$, $(k;0,k,k)$, $(k;k,0,k)$, $(k;k,k,k)$ *y* $(k\oplus k;k\oplus 0,0\oplus k,(1+1)k)$. *En cada caso, el anillo de endomorfismos es isomorfo a* k.

Se tiene que para cada una de las representaciones dadas $\operatorname{End}U = k$*, luego por el lema 1.2. son indescomponibles. Para las representaciones* $(k;0,0,0)$, $(k;k,0,0)$, $(k;0,k,0)$, $(k;0,0,k)$, $(k;k,k,0)$, $(k;0,k,k)$, $(k;k,0,k)$, $(k;k,k,k)$, $U_0 = k$*, se obtiene que* $\operatorname{End}U = k$*. Consideremos el último caso,* $(k\oplus k;k\oplus 0,0\oplus k,(1+1)k)$ *y* $f\in\operatorname{End}U$*. Ya que* f *preserva los dos espacios coordenadas,* $f=(f_1,f_2)$*, para cada* $f_i\in\operatorname{End}k$*, y además, preserva el encajamiento diagonal, cuando* $f_1=f_2\in k$*, se tiene que* $\operatorname{End}U = k$*, teniendo presente que* $k\subseteq\operatorname{End}U$ *via multiplicación por escalar.*

Veamos que en efecto la lista es completa. Por la proposición 1.5, $\operatorname{Ind}(2,k)$ *puede encajarse en* $\operatorname{Ind}(3,k)$ *y por el ejemplo anterior, tenemos que las 7 primeras representaciones son indescomponibles.*

Supongamos que $U=(U_0;U_1,U_2,U_3)$ *es una representación de* S_3 *con cada* $U_i\neq 0$*. Entonces* $U_0=U_1+U_2+U_3$*, ya que* U *es no trivial e indescomponible.*

Primero supongamos que $W=U_1\cap U_2\cap U_3\neq 0$*. Consideremos* $U_0=W\oplus V$*, para algún* V*, tal que* $U_i=W\oplus(V\cap U_i)$*, para cada* i*, ya que* $W\subseteq U_i$*. De donde*

$$U=(W;W,W,W)\oplus(V;V\cap U_1,V\cap U_2,V\cap U_3)$$

es una suma directa de representaciones. Ya que U *es indescomponible con* $W\neq 0$*, se debe tener que* $V=0$ *y* U *es isomorfo a* $(k;k,k,k)$.

Ahora, asumamos que $W=U_1\cap U_2\cap U_3=0$*. Entonces* $U_i\cap U_j=0$*, para* $i\neq j$*, con* $i,j=1,2,3$*. En efecto, supongamos que* $U_1\cap U_2\neq 0$*. Entonces* $U_0=(U_1\cap U_2)\oplus V$*, para algún* $V\supseteq U_3$*, de donde* $U_i=(U_1\cap U_2)\oplus(U_i\cap V)$ *para* $i=1,2$*, así,*

$$U=(U_0;U_1,U_2,U_3)=(U_1\cap U_2;U_1\cap U_2,U_1\cap U_2,0)\oplus(V;U_1\cap V,U_2\cap V,U_3).$$

Como U *es indescomponible con cada* $U_i\neq 0$*, debemos tener que* $V=0$ *y* $U_1\oplus U_2=U_0\supseteq U_3$.

Finalmente, supongamos que $U=(U_0;U_1,U_2,U_3)$ *es indescomponible,* $U_0=U_1\oplus U_2$*, donde cada* $U_i\neq 0$ *y* $U_i\cap U_3=0$*, con* $i=1,2$*. Para resolver el caso anteriormente dado, vamos a interpretarlo como un problema matricial.*

Sea $B_1=\{x_1,x_2,\ldots,x_r\}$ *una* k*-base para* U_1*,* $B_2=\{y_1,y_2,\ldots,y_s\}$ *una* k*-base de* U_2 *y* $B_3=\{z_1,z_2,\ldots,z_t\}$ *una* k*-base para* U_3*, un subespacio de* $U=U_1\oplus U_2$*. Para cada* i*, se tiene que*

$$z_i=\sum a_{ij}x_j+\sum b_{ij}y_j\quad \text{para algunos}\quad a_{ij},b_{ij}\in k.$$

Además, tenemos que U_3 *es un espacio columna de una* k*-matriz de tamaño* $t\times(r+s)$

$$M=(A\,|\,B),$$

donde $A=(a_{ij})$ *es una* k*-matriz de tamaño* $t\times r$ *y* $B=(b_{ij})$ *es una* k*-matriz de tamaño* $t\times s$*. Los elementos de* A *son descritos por los elementos de* B_1*, las columnas de* B *son*

descritas por los elementos de B_2 *y las filas de* M *son descritas por* B_3*. Las matrices* A *y* B *son llamadas* ***matrices bloque****.*
Es claro que M *depende de la elección de las bases de* U_i *pero no de* U*. Las siguientes operaciones de matrices invertibles sobre* M *no cambia a* U*:*

(a) Operaciones elementales de columna con A *(un cambio de base para* U_1*).*

(b) Operaciones elementales de columna con B *(un cambio de base para* U_2*).*

(c) Operaciones elementales de filas sobre M *(un cambio de base para* U_3*).*

Escribiremos $M \approx N$ *si la matriz* N *puede obtenerse de la matriz* M *por una secuencia de operaciones (a), (b), (c). Usando las operaciones (a) y (c), la matriz bloque* A *puede reducirse a la forma escalonada*

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde I *denota la matriz identidad. La matriz escalonada puede eventualmente ser de la forma* $\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}$ *porque la matriz bloque* A *no puede tener filas de ceros. De otra forma, debe existir alguna columna en* M *que tiene entradas diferentes de cero únicamente en las columnas indexadas por una base de* U_2*. Esta fila podría entonces denotar un elemento base de* U_3 *que es también un elemento de* $U_2 \cap U_3 = 0$*, una contradicción.*
Veamos que en efecto A *no puede tener una columna de ceros. Supongamos que la columna* j*-ésima de* A *son todos cero. Entonces* $U_1 = kx_j \oplus V_1$*, para algún* V_1*, con* $U_3 \subseteq V_1 \oplus U_2$*, y así*

$$U = (kx_j; kx_j, 0, 0) \oplus (V_1 \oplus U_2; V_1, U_2, U_3).$$

Ya que U *es indescomponible y* $kx_j \neq 0$*, entonces* U *es isomorfo a* $(k, k, 0, 0)$*, una contradicción, pues asumimos que cada* $U_i \neq 0$*, así podemos concluir que*

$$M \approx [I \mid B],$$

para algún B*, con* I *una matriz identidad de tamaño* $t \times t$ *y así* $t = r$*. Efectuando una operación elemental de columna* E *sobre [I | B], obtenemos*

$$M \approx [E \mid EB].$$

Sin embargo, usando (a)*,*

$$[E \mid EB] = [I = EE^{-1} \mid EB],$$

de donde $M \approx [I \mid EB]$*, para cualquier operación elemental de columna* E *sobre* M*.*
Ahora usemos (b) y (c) para reducir B *a la forma escalonada* I*, notando que* B *no puede tener filas o columnas cuyas entradas sean todas cero por los mismos argumentos dados para* A*, de donde podemos concluir que*

$$M \approx [I \mid I].$$

En particular, $t = r = s$ *y* U_3 *es isomorfo a*

$$\bigoplus\{k(x_j + y_j) \,|\, 1 \le j \le t\},$$

correspondiendo al espacio columna de $[I \mid I]$*. Así,* U *es isomorfo a*

$$\bigoplus\{kx_j \oplus ky_j; kx_j, ky_j, k(x_j + y_j)) \,|\, 1 \le j \le t\},$$

una suma directa de representaciones. Ya que U *es indescomponible,* U *debe ser isomorfo a* $(k \oplus k; k \oplus 0, 0 \oplus k, (1+1)k)$.

Con los anteriores ejemplos observamos que $\operatorname{Ind}(n,k)$ es finito y el anillo de endomorfismos es isomorfo a k para $n \le 3$. Para el caso $n > 3$ lo anterior no se tiene, como lo veremos en la siguiente proposición:

Proposición 1.7. *(a)* $\operatorname{Ind}(n,k)$ *es infinito para* $n > 3$.

(b) Para cada polinomio irreducible $g(x) \in k[x]$ *donde* $k[x]$ *denota el anillo de los polinomios con coeficientes en* k *y para cada entero* $e \ge 1$*, entonces existe una* k*-representación indescomponible* U *de* $\mathcal{P}_4$ *con* $\operatorname{End} U = k[x]/\langle g(x)^e\rangle$.

Demostración. Sea A una k-matriz de tamaño $m \times m$ y definamos

$$U_A = (k^m \oplus k^m; k^m \oplus 0, 0 \oplus k^m, (1+1)k^m, (1+A)k^m),$$

donde $(1+A)k^m = \{(x, Ax) \,|\, x \in k^m\}$, entonces U_A es una representación de S_4.
Dada B otra k-matriz de tamaño $m \times m$, U_A es isomorfo a U_B si, y sólo si, A y B son **similares**, es decir, existe una k-matriz invertible M tal que $MAM^{-1} = B$. En efecto, sea $f : U_A \to U_B$ un isomorfismo. Ya que f preserva los tres primeros subespacios, se sigue que $f = (h,h)$ con h un k-automorfismo de k^m. Además

$$f((1+A)k^m) = \{(h(x), h(Ax) \,|\, x \in k^m\} = \{(y, By) \,|\, y \in k^m\} = (1+B)k^m,$$

donde $f(Ax) = h(Ax) = Bh(x) = Bf(x)$, para cada $x \in k^m$. Sea M la matriz de h relativa a la base estándar de k^m. Obtenemos que M es una matriz tal que $MA = BM$. Recíprocamente, si la matriz M existe, obtenemos un isomorfismo de representaciones $f = (h,h)$ de U_A a U_B.
Sea $\operatorname{Mat}_m(k)$ el anillo de las k-matrices de tamaño $m \times m$. De lo anterior podemos concluir que $\operatorname{End} U_A = C(A) = \{M \,|\, M \in \operatorname{Mat}_m(k), MA = MA\}$.
Dada una k-matriz A de tamaño $m \times m$, definamos una estructura de $k[x]$-módulo sobre $V_A = k^m$ por $xy = Ay$, para cada $y \in V_A$. Como $k[x]$ es un dominio de ideales principales, V_A es un $k[x]$-módulo indescomponible si, y sólo si, V_A es isomorfo a $k[x]/\langle g^e(x)\rangle$, para algún polinomio irreducible $g(x) \in k[x]$ con $e \ge 1$ entero. En este caso, m tiene el grado de $g^e(x)$, y $g^e(x)$ es el polinomio mínimo de A.
Ahora, supongamos que V_A es un $k[x]$-módulo indescomponible. Como x actúa sobre V_A

por A, entonces $C(A)$ es isomorfo a $\operatorname{End}_{k[x]} k[x]/\langle g^e(x)\rangle$. Pero $k[x]/\langle g^e(x)\rangle$ es isomorfo a $\operatorname{End}_{k[x]} k[x]/\langle g^e(x)\rangle$ por medio de $b \mapsto$ **multiplicación por** b, de donde tenemos que $\operatorname{End} U_A$ es isomorfo a $k[x]/\langle g^e(x)\rangle$. Así, U_A es una representación indescomponible por el lema 1.2, pues 0 y 1 son los únicos idempotentes de $k[x]/\langle g^e(x)\rangle$.

(a) Por la proposición 1.5, basta con demostrar el caso $n = 4$. Ya que $m \geq 1$ es arbitrario, entonces existen infinitas k-representaciones indescomponibles U_A de S_4 con A una k-matriz de tamaño $m \times m$. En particular, para $\lambda \in k$ y $m \geq 1$, existe una matriz $A(m, \lambda)$ con bloque de Jordan de tamaño $m \times m$, con polinomio mínimo $(x - \lambda)^m$, donde

$$A(m,\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

notemos que $V_{A(m,\lambda)}$ es $k[x]$-módulo indescomponible y $V_{A(m,\lambda)}$ y $V_{A(m',\lambda')}$ son similares si, y sólo si, $m = m'$ y $\lambda = \lambda'$. Por lo tanto, podemos concluir que el conjunto

$$\{U_A \,|\, A = A(m, \lambda, \, m \geq 1, \, \lambda \in k\}$$

es un subconjunto infinito de $\operatorname{Ind}(4, k)$.

(b) Supongamos que $g(x)$ es un polinomio irreducible de $k[x]/\langle g^e(x)\rangle$, el cual tiene dimensión m como k-espacio vectorial. Consideremos una base para V y sea A una k-matriz de tamaño $m \times m$ determinada por la multiplicación por x relativa a la base escogida. Por el argumento anterior, $\operatorname{End} U_A$ es isomorfo a $k[x]/\langle g^e(x)\rangle$, y así U_A es una representación indescomponible.

□

Aunque los elementos de $\operatorname{Ind}(4, k)$ son infinitos, ellos están completamente clasificados. Así, el anillo de endomorfismos de U en $\operatorname{Ind}(4, k)$ es isomorfo k o $k[x]/\langle g(x)^e\rangle$, para algún irreducible $g(x) \in k[x]$.

Para $n > 4$, tenemos que dado un cuerpo k, un anillo R es una k-álgebra si, $k = k1_R$ es un subanillo de $CR = \{x \in R \,|\, xy = yx \text{ para todo } y \in R\}$, donde CR es un subanillo de R el cual lo llamaremos el **centro** del anillo. Una k-álgebra R es un espacio k-vectorial. Así, diremos que una k-álgebra es *finito-dimensional* si R tiene k-dimensión finita.

Ejemplo 1.8. *Si $n \geq 5$ y R es una k-álgebra finito-dimensional, entonces existe una k-representación U de $\mathcal{P}_n$ con $\operatorname{End} U \simeq R$.*

1.2. Representaciones de posets y el problema matricial

Las propiedades fundamentales de la teoría de representaciones de posets se pueden expresar de manera conveniente en términos categóricos.

Una **categoría** es una clase $\mathcal{C}$ de objetos junto con una clase de morfismos $\mathrm{Hom}(A, B)$ para cada par de objetos A, B en $\mathcal{C}$ y una composición $\mathrm{Hom}(B, C) \times \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, C)$ con $(g, f) \mapsto gf$, para $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, tales que

1. la composición es asociativa y,
2. para cada $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, existe $1_A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ con $f1_A = f$ y $1_A g = g$, para $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ y $g \in \mathrm{Hom}(C, B)$ y $B, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

Decimos que un objeto T de una categoría $\mathcal{C}$ es terminal si dado cualquier objeto A en $\mathcal{C}$, existe un único morfismo de A a T. Si T es terminal en la categoría $\mathcal{C}^{op}$, decimos que T es un objeto inicial en la categória $\mathcal{C}$. Cuando T es inicial y terminal llamamos a T un cero objeto, en este caso denotamos a T por $\mathbf{0}$.
Un morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{C}$ es un cero morfismo si se factoriza a traves de un cero objeto, es decir,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & B \\ & \mathbf{0} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

así tenemos un morfismo $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{B}} : A \to B$.
De lo anterior, tenemos que la composición de un morfismo g con $\mathbf{0}$ es un cero morfismo, lo cual lo podemos ver claramente por medio del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & B \arrow[rr, "g"] & & C \\ & \mathbf{0} \arrow[ur] \arrow[urrr, dotted] & & & \end{tikzcd}$$

Definición 1.9. Consideremos dos flechas $f, g : A \rightrightarrows B$ en la categoría $\mathcal{C}$. Un **igualador** de f y g es un par (K, k) donde

(a) K es un objeto de $\mathcal{C}$,

(b) k es una flecha de $\mathcal{C}$ tal que $fk = gk$,

y tal que para todo par (M, m) donde

(a) M es un objeto de $\mathcal{C}$,

(b) m es una flecha de $\mathcal{C}$ tal que $fm = gm$, existe un único morfismo $n : M \to K$, tal que $m = kn$, como lo muestra el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ M \arrow[u, "n"] \arrow[ur, "m"'] & & \end{tikzcd}$$

Definición 1.10. En una categoría $\mathcal{C}$ con objeto cero, el **kernel** de un morfismo $f : A \to B$ es el igualador (cuando existe) de f con el morfismo $\mathbf{0} : A \to B$, de forma dual definimos el **cokernel**.

Definición 1.11. Una categoría $\mathcal{C}$ se dice que es preaditiva si $\mathrm{Hom}(A, B)$ tiene estructura de grupo abeliano y es bilineal: $f_1(g_1 + g_2) = f_1g_1 + f_1g_2$ y $(f_1 + f_2)g_1 = f_1g_1 + f_2g_1$, con $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(A, B)$ y $g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}(B, C)$.

Teorema 1.12. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) A posee objeto inicial,

(b) A posee objeto terminal,

(c) A posee objeto cero.

Observación. Una categoría preaditiva es autodual.

Demostración. Basta con demostrar que (a) implica (c), pues dualizando se obtienen las demás implicaciones y (c) implica (a) es inmediata. Supongamos que $\mathcal{C}$ tiene objeto inicial. El grupo abeliano $\mathrm{Hom}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ posee exactamente un elemento, a saber $1_{\mathbf{0}}$ la identidad del grupo. Dado un objeto A en $\mathcal{C}$, el grupo abeliano $\mathrm{Hom}(A, \mathbf{0})$ tiene por lo menos un elemento: el elemento cero del grupo. Si f es cualquier morfismo de $\mathrm{Hom}(A, \mathbf{0})$, tenemos que $f = 1_{\mathbf{0}}f$, de donde f debe ser el morfismo cero en $\mathrm{Hom}(A, \mathbf{0})$, así $\mathbf{0}$ es también objeto terminal.
Consideremos los grupos abelianos $\mathrm{Hom}(A, \mathbf{0})$ y $\mathrm{Hom}(\mathbf{0}, B)$, con $A, B \in \mathcal{C}$. Estos grupos se factorizan a través del elemento cero, así la composición de dos cero elementos $A \to \mathbf{0} \to B$ es un cero elemento de $\mathrm{Hom}(A, B)$. □

Observación. Sean $f, g : A \rightrightarrows B$ dos morfimos en una categoría preaditiva. Dado un morfismo $\phi : C \to A$, tal que $f\phi = g\phi$, es equivalente a tener que $(f - g)\phi = 0$. Luego el igualador $Ker(f, g)$ existe si, y sólo si, el kernel $Ker(f - g)$ existe. Además, como $Ker(f, g) = Ker(g, f)$, tenemos que la equivalencia anterior también se tiene sustituyendo $Ker(f - g)$ por $Ker(g - f)$.

Definición 1.13. Sea $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva. Decimos que un biproducto de A, B es un diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift right, "i_1"'] & C \arrow[l, shift right, "p_1"'] \arrow[r, shift left, "p_2"] & B \arrow[l, shift left, "i_2"] \end{tikzcd}$$

con morfismos p_1, p_1, i_1, i_2, que satisfacen las siguientes identidades

$$p_1 i_1 = 1_A, \qquad p_2 i_2 = 1_B, \qquad i_1 p_1 + i_2 p_2 = 0.$$

Teorema 1.14. *Sean A, B dos objetos en una categoría preaditiva $\mathcal{C}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) el producto de A, B existe,

(b) el coproducto de A, B existe,

(c) el biproducto de A, B existe.

Demostración. Por dualidad, es suficiente demostrar la equivalencia (a) y (c). Primero, supongamos que el producto de A, B existe. Consideremos el diagrama $A \xleftarrow{p_1} A \times B \xrightarrow{p_2} B$. La definición de este producto provee un único morfismo $i_1 : A \to A \times B$ tal que $p_1 i_1 = 1_A$ e $i_1 p_1 = 0$ y un único morfismo $i_2 : B \to A \times B$ tal que $p_2 i_2 = 1_B$ e $i_2 p_2 = 0$. Entonces

$$p_1(i_1 p_1 + i_2 p_2) = p_1 + 0 p_2 = p_1 \quad \mathbf{y} \quad p_2(i_1 p_1 + i_2 p_2) = p_2,$$

así $i_1 p_1 + i_2 p_2 : A \times B \to A \times B$ es el único morfismo con componentes p_1 y p_2, de donde debe ser el morfismo identidad $1_{A\times B}$. Así, a partir del producto de A y B, se puede construir el biproducto.

Recíprocamente, supongamos que existe el biproducto de A y B. Entonces

$$p_1 i_2 = p_1(i_1 p_1 + i_2 p_2) i_2 = 1_A p_1 i_2 + p_1 i_2 1_B = p_1 i_2 + p_1 i_2,$$

lo cual implica que $p_1 i_2 = 0$; simetricamente obtenemos que $p_2 i_1 = 0$.

Sea $A \xleftarrow{f_1} D \xrightarrow{f_2} B$ un diagrama arbitrario. Tenemos que $h = f_1 i_1 + f_2 i_2 : D \to C$ es un morfismo de D a C, tal que $p_i h = f_i$, $i = 1, 2$. Ahora supongamos $h' : D \to C$ con $p_i h' = f_i$, para $i = 1, 2$, entonces

$$h' = (i_1 p_1 + i_2 p_2) h' = i_1 p_1 h' + i_2 p_2 h' = i_1 f_1 + i_2 f_2,$$

de donde $h = h'$. Esto demuestra que el producto de A, B existe. □

Al biproducto de dos objetos A, B lo denotamos $A \oplus B$.

Definición 1.15. Una categoría que es preaditiva, que posee objeto cero y productos binarios, se llama una categoría aditiva.

Ejemplo 1.16. *La clase de espacios vectoriales finito-dimensionales sobre un cuerpo k es una categoría aditiva. Los morfismos son las transformaciones k-lineales. Además, $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ es la suma directa usual de espacios vectoriales con inyecciones $i_j : A_j \to A$ dada por $i_j(a_j) = (0, \ldots, 0, a_j, 0, \ldots, 0)$.*

Sea k un cuerpo y $\mathcal{P}$ un poset finito. Definimos $\operatorname{rep}(\mathcal{P},k)$ la categoría cuyos objetos son $U = (U; U_i : i \in \mathcal{P})$, donde U_0 es un k-espacio vectorial finito-dimensional, donde cada U_i es un subespacio vectorial de U_0 y si $i \prec j$, entonces U_i está contenido en U_j. Los morfismos en esta categoría son llamados **morfismos de representación**; son transformaciones k-lineales $f : U_0 \to U'_0$ con $f(U_i) \subseteq U'_i$, para cada $i \in \mathcal{P}$. Si $U \in \operatorname{rep}(\mathcal{P},k)$, entonces $\operatorname{End} U$ es una k-álgebra, ya que los endomorfismos de U conmutan con la multiplicación por elementos de k. Los objetos de $\operatorname{rep}(\mathcal{P},k)$ son precisamente k-representaciones de $\mathcal{P}_n$.
Sea R un anillo con identidad 1_R. Un elemento $r \in R$ es una unidad de R, si existe un elemento s tal que $rs = 1_R = sr$. El anillo R es local si $r + s$ no es una unidad para cada par de no unidades r y s de R.

Lema 1.17. *Supongamos que k es un cuerpo y $\mathcal{P}$ un poset finito.*

(a) La categoría $\operatorname{rep}(\mathcal{P},k)$ es una categoría aditiva. Además, si $U \in \operatorname{rep}(\mathcal{P},k)$ y e es un idempotente en $\operatorname{End} U$, entonces $U = e(U) \oplus (1-e)(U)$ en $\operatorname{rep}(\mathcal{P},k)$.

(b) Una representación $U \in \operatorname{rep}(\mathcal{P},k)$ es indescomponible si, y sólo si, $\operatorname{End} U$ es un anillo local.

Demostración. Véase [2], Lema 1.2.1. □

Supogamos que $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \operatorname{rep}(\mathcal{P},k)$ con cada $A_j = (A_{j0}; A_{js} : s \in \mathcal{P})$. Entonces $U = (U_0; U_s : s \in \mathcal{P}) = \bigoplus_j A_{j0}, A_{js} : s \in \mathcal{P} = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n$ es una suma directa en $\operatorname{rep}(\mathcal{P},k)$ con inyecciones

$$i_j : A_j \longrightarrow U \qquad a_{j0} \mapsto (0, \ldots, 0, a_{j0}, 0, \ldots, 0), \quad \textbf{para cada} \quad 1 \leq j \leq n.$$

Definimos

$$p_l : U_0 \longrightarrow A_{l0} \qquad (a_{10}, a_{20} \ldots, a_{n0}) \mapsto a_{l0}, \quad \textbf{para cada} \quad j.$$

Cada p_l es un morfismo representación tal que $p_l i_j = 0$ si $j \neq l$, $p_l i_j = 1_{A_j}$, $e_j = i_j p_j$ es un idempotente de $\operatorname{End} U$ y $1_U = e_1 + e_2 \cdots + e_n$, donde a los p_l los llamaremos **proyecciones** para la suma directa $U = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$.
De manera recíproca, si $U, A_1, A_2, \ldots A_n \in \operatorname{rep}(\mathcal{P},k)$ con morfismos $i_j : A_j \to U$ y $p_l : U \longrightarrow A_l$, para cada, $1 \leq l \leq n$, tal que $p_l i_j = 0$ si $j \neq l$, $p_j i_j = 1_{A_j}$, $e_j 0 i_j p_j$ es un idempotente de $\operatorname{End} U$ y $e_j = i_j p_j$ es un idempotente de $\operatorname{End} U$ y $1_U = e_1 + e_2 \cdots + e_n$, entonces U es isomorfo a $A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$.

Teorema 1.18. *Sea $\mathcal{P}$ un poset finito y k un cuerpo.*

(a) Cada $U \in \operatorname{rep}(\mathcal{P},k)$ es una suma directa de representaciones indescomponibles.

(b) Una representación de U en representaciones indescomponibles es única salvo isomorfismos y orden de los sumandos.

Demostración. Véase [2], Teorema 1.2.2. □

La importancia del teorema anterior es que todas las representaciones en $\operatorname{rep}(\mathcal{P}, k)$ pueden determinarse únicamente bajo isomorfismo por medio de cada uno de sus indescomponibles. Notaremos $\operatorname{Ind}(\mathcal{P}, k)$ el conjunto de clases de isomorfismos de indescomponibles en $\operatorname{rep}(\mathcal{P}, k)$. Si $\mathcal{P} = \mathcal{P}_n$, entonces $\operatorname{Ind}(\mathcal{P}, k) = \operatorname{Ind}(n, k)$, como lo definimos anteriormente.
El siguiente teorema demuestra que la clasificación de elementos no triviales de $\operatorname{Ind}(\mathcal{P}, k)$ puede interpretarse como un problema matricial, el cual estudiado de manera particular previamente. Definimos $\Delta(\mathcal{P}_n, k)$ la subcategoría completa de $\operatorname{rep}(\mathcal{P}_{n+1}, k)$ con objetos de la forma

$$U = (U_0 = \bigoplus_i U_i; U_i, U_* : i \in \mathcal{P}_n),$$

tal que $U_i \cap U_*$, para cada $i \in \mathcal{P}_n$.

Teorema 1.19. *Sea k un cuerpo.*

(a) Existe una correspondencia $H : \Delta(\mathcal{P}_n, k) \to \operatorname{rep}(\mathcal{P}_n, k)$ con $\operatorname{Hom}(U, U')$ isomorfo a $\operatorname{Hom}(H(U), H(U')$ para cada U, U' en $\Delta(\mathcal{P}_n, k)$. La imagen de H consiste de todas las representaciones de $\mathcal{P}_n$ con sumandos no triviales.

(b) La correspondencia de H induce una inyección $\operatorname{Ind}(\Delta(\mathcal{P}_n, k)) \to \operatorname{Ind}(\mathcal{P}_n, k)$ con representaciones indescomponibles no triviales como imagen.

Demostración. Véase [2], Teorema 1.2.3. □

Corolario 1.20. *Si $U = (U_1 \oplus U_2; U_1, U_2, U_3) \in \operatorname{rep}(\mathcal{P}_3, k)$ es indescomponible con cada $U_i \neq 0$ y $U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = 0$, entonces U es isomorfo a $(k \oplus k; k \oplus 0, 0 \oplus k, (1+1)k)$.*

Demostración. Véase [2], Corolario 1.2.4. □

Del teorema 1.16, tenemos que las representaciones indescomponibles en $\operatorname{rep}(\mathcal{P}_n, k)$ son determinadas por las representaciones indescomponibles en $\Delta(\mathcal{P}_n, k)$. Cada representación U en $\Delta(\mathcal{P}_n, k)$ puede interpretarse como un matriz particionada M_U. Sea $U = (U_0; U_i, U_* : i \in \mathcal{P}_n) \in \Delta(\mathcal{P}_n, k)$ recordando que $U_0 = \bigoplus_i U_i$ y $U_i \cap U_* = 0$, para todo i. Escogiendo una base B_i, para cada U_i y una base para B de U_*. Escribiremos cada elemento de B como una combinación k-lineal de elementos de B_i y utilizaremos los coeficientes resultantes para representar U_* como un espacio columna de una k-matriz

$$M_U = [\cdots | A_i | \cdots],$$

donde A_i es una matriz bloque, para cada $i \in \mathcal{P}_n$. Las columnas de cada A_i son determinadas por B_i, y las columnas de M_U son determinadas por B, con la condición de que A_i-bloque es vacío si $U_i = 0$.
Por otra parte, la condición $U_i \cap U_* = 0$, para cada i, significa que cada columna M_U debe

tener entradas diferentes de cero en por lo menos dos de los bloques. Además, si U no tiene un sumando 1-dimensional, entonces cada columna de M_U debe ser cero.
La representación U queda sin cambios por las siguientes operaciones de matrices invertibles sobre M_U.

(a) Operaciones elementales de columna dentro de cada A_i, para todo $i \in \mathcal{P}_n$ (una base de cambio de U_i).

(b) Operaciones elementales de filas sobre M_U (un cambio de base U_*).

Si las representaciones $U, V \in \Delta(\mathcal{P}_n, k)$ son isomorfas, entonces M_U puede reducirse a M_V por una serie de operaciones matriciales (a) y (b). Esto se tiene del hecho que U y V son isomorfos si, y sólo si, existe un isomorfismo $f : U_0 \to V_0$ con $f(U_i) = V_i$, para cada i, de donde podemos ver la clasificación de indescomponibles en $\Delta(\mathcal{P}_n, k)$ bajo cantidades de isomorfismos como una solución del **problema matricial**, es decir, hallar las formas canónicas para las matrices M_U sujeta a las operaciones (a) y (b).
Consideremos el siguiente ejemplo para ilustrar cómo interpretar la representación de U_A de $\mathcal{P}_4$.
Una matriz A es **indescomponible** si el espacio vectorial V_A, es un $k[x]$-módulo indescomponible.

Ejemplo 1.21. *Sea A una k-matriz $n \times n$ indescomponible. Si $U = (U_0 = k^n \oplus k^n \oplus k^n \oplus k^n; U_1, U_2, U_3, U_4, U_*) \in \Delta(\mathcal{P}_n, k)$, donde U_i es el i-ésimo espacio coordenado de U_0, para $1 \leq i \leq 4$, y U_* es el espacio columna de la matriz*

$$M_U = \begin{bmatrix} I & I & I & 0 \\ I & A & 0 & I \end{bmatrix},$$

entonces H(U) es isomorfo a $(k^n \oplus k^n; k^n \oplus 0, 0 \oplus k^n, (1+1)k^n, (1+A)k^n) = U_A$.

Vamos a dar un construcción más general del problema matricial para $\operatorname{rep}(\mathcal{P}, k)$ para un poset arbitrario finito $\mathcal{P}$.
Sea $U = (U_0; U_i : i \in \mathcal{P}) \in \operatorname{rep}(\mathcal{P}, k)$ y supongamos que U tiene sumandos no triviales. Para cada $i \in \mathcal{P}$, $U_i = U_i^* \oplus \sum\{U_j : j \prec i\}$, para algún subespacio U_i^* de U_i, con U_i^* isomorfo a $U_i / \sum\{U_j : j \prec i\}$. En general tenemos que el subespacio U_i^* es único salvo isomorfismos. Ya que U tiene sumandos no triviales, $U_0 = \sum\{U_i : i \in \mathcal{P}\}$, de donde $U_0 = \sum\{U_i^* : i \in \mathcal{P}\}$ y $\sum\{U_i^* : j \prec i\}$, para cada $i \in \mathcal{P}$. Sea U^* el kernel de la transformación lineal $\sum\{U_i^* : i \in \mathcal{P}\} \to U_0$ inducido por la inclusión de cada U_i^* en U_0. Entonces $U_i^* \cap U_* = 0$, para todo i.
Para hallar la matriz asociada a U, colocamos una base B_i para cada U_i^* y una base B de U_*. Expresamos cada elemento de B como una combinación k-lineal de los elementos de las bases B_i y usamos los coeficientes resultantes para representar U_* como el espacio columna de una matriz

$$M_U = [\cdots | A_i | \cdots],$$

con una matriz bloque A_i, para cada $i \in \mathcal{P}$. Las columnas de A_i son determinadas por B_i, las columnas de M_U son determinadas por B, y el bloque A_i es vacío, si $U_i^* = 0$. Si $\mathcal{P} = \mathcal{P}_n$, entonces $U_i^* = U_i$, para cada i, por lo tanto la construcción coincide con la construcción previa de anticadenas.

El siguiente teorema demuestra cómo el anillo de endomorfismos de una representación U puede ser computada desde el anillo de endomorfismos R_U de la matriz particionada M_U. La anterior observación, junto con el teorema 1.14, nos da un proceso computacional para determinar si U es o no una representación indescomponible. Denotaremos por $\mathrm{rs}(M_U)$ el espacio columna de la matriz M_U.

Teorema 1.22. *Sea $\mathcal{P}$ un poset finito, k un cuerpo y $U = (U_0; U_i : i \in \mathcal{P}) \in \mathrm{rep}(\mathcal{P}, k)$ con sumandos no triviales. Para cada $i \in \mathcal{P}$, si un sumando U_i^* de U_i, con U_i^* isomorfo a $U_i / \sum\{U_j : j < i\}$, entonces $\mathrm{End}\, U$ es isomorfo al anillo R_U que consiste en todas los $f = \oplus\{f_i : i \in \mathcal{P}\} \in \Pi\{\mathrm{End}\, U_i^* : i \in \mathcal{P}\}$ con $f(\mathrm{rs}(M_U) \subseteq \mathrm{rs}(M_U)$.*

Demostración. Véase [2], Teorema 1.2.6. □

Las matrices indescomponibles pueden ser usadas para construir representaciones U, tales que sus indescomponibles se pueden determinar de manera explícita computando sus anillos de endomorfismos vía R_U.

Ejemplo 1.23. *Sea $\mathcal{P}$ el poset $(1 < 2, 3 < 4, 5 < 6)$. Dada una k-matriz A de tamaño $n \times n$, definimos $(U_0; U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6) \in \mathrm{rep}(\mathcal{P}, k)$ por*

$$\begin{aligned} U_0 =& k^n \oplus k^n \oplus k^n, \\ U_1 =& 0 \oplus 0 \oplus k^n \subseteq U_2 = (1 + A)k^n \oplus k^n, \\ U_3 =& (1+1)k^n \oplus 0 \subseteq U_4 = k^n \oplus k^n \oplus 0, \\ U_5 =& 0 \oplus (1+1)k^n \subseteq U_6 = k^n \oplus (1+1)k^n. \end{aligned}$$

Entonces

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & I & 0 & A & 0 & I \\ 0 & 0 & I & I & 0 & I \\ I & 0 & 0 & I & I & 0 \end{array}\right],$$

$\mathrm{End}\, U$ *es isomorfo a $C(A)$ y U es indescomponible si A es una matriz indescomponible.*

La matriz M_U es definida en términos de la elección de los U_i^*. Las siguientes operaciones de matrices invertibles sobre $M_U = [\cdots | A_i | \cdots]$ preserva U, recordando que las columnas de A_i son determinadas por una base de U_i^* y las columnas de M_U por una base de U_*.

(a) Operaciones elementales de columna dentro de cada A_i, para todo $i \in \mathcal{P}_n$ (una base de cambio de U_i^*).

(b) Operaciones elementales de filas sobre M_U (un cambio de base del subespacio U_*).

(c) Operaciones elementales de columna del bloque A_i a el bloque A_j, si $i < j$ en $\mathcal{P}$ (una elección diferente de un encajamiento de el subespacio U_i^* en U_i).

Dos representaciones U y V son isomorfas si M_U puede ser reducida a M_V por un serie de operaciones matriciales (a), (b) y (c). Este procedimiento es práctico sólo con posets que son relativamente sencillos.

Ejemplo 1.24. *Consideremos* $\mathcal{P} = \{1 < 2 < \cdots < n\}$ *como un poset. Los elementos de* $\operatorname{Ind}(\mathcal{P}, k)$ *son*

$$(k; 0, \ldots, 0), \quad (k; 0, \ldots, 0, k), \quad (k; 0, \ldots, 0, k, k), \ldots, (k; 0, k, \ldots, k), \quad (k; k, \ldots, k).$$

En cada caso, el anillo de endomorfismos es k.

1.3. Posets de tipo representación finito

Los posets finitos tienen sólo una clase finita de isomorfismos de k-representaciones indescomponibles. Esta descripción sólo depende del poset y es independiente del cuerpo k.
Un poset finito $\mathcal{P}$ es de **tipo representación finito** sobre el cuerpo k si $\operatorname{Ind}(\mathcal{P}, k)$ es finito y es de **tipo representación infinito** si $\operatorname{Ind}(\mathcal{P}, k)$ es infinito. Por ejemplo, $\mathcal{P}_n$ es de tipo representación finito para $n \leq 3$ (ejemplos 1.2, 1.3 y 1.4) y de tipo representación infinito para $n \geq 4$ (ejemplo 1.5). La parte (a) de la siguiente proposición extiende la correspondencia de F de la proposición 1.4 a un poset arbitrario $\mathcal{P}$ y la parte (b) es una correspondencia alternativa.

Proposición 1.25. *Supongamos que $\mathcal{S}$ es un subposet de un poset finito $\mathcal{P}$.*

(a) Existe una correspondencia $F^+ : \operatorname{rep}(\mathcal{S}, k) \to \operatorname{rep}(\mathcal{P}, k)$ *con* $\operatorname{Hom}(U, V) \simeq \operatorname{Hom}(F^+U, F^+V)$, *para todo* $U, V \in \operatorname{rep}(\mathcal{S}, k)$.

(b) Existe una correspondencia $F^- : \operatorname{rep}(\mathcal{S}, k) \to \operatorname{rep}(\mathcal{P}, k)$ *con* $\operatorname{Hom}(U, V) \simeq \operatorname{Hom}(F^-U, F^-V)$, *para todo* $U, V \in \operatorname{rep}(\mathcal{S}, k)$.

(c) Si $\mathcal{P}$ es de tipo representación finito, entonces $\mathcal{S}$ también lo es.

(d) Si $\mathcal{S}$ es de tipo representación infinito, entonces $\mathcal{P}$ también lo es.

Demostración. Véase [2], Proposición 1.3.1. □

El **ancho** de un poset $\mathcal{P}$ denotado por $w(\mathcal{P})$, es el número más grande de elementos incomparables dos a dos de $\mathcal{P}$.

Corolario 1.26. *Si $\mathcal{P}$ es un poset finito con $w(\mathcal{P}) \geq 4$ entonces* $\operatorname{rep}(\mathcal{P}, k)$ *tiene representación de tipo infinito.*

Lema 1.27. *Supongamos que $\mathcal{P}$ es un poset finito con $w(\mathcal{P}) = 1$.*

(a) Si $\mathcal{P}$ es una cadena y $\operatorname{rep}(\mathcal{P}, k)$ es de tipo representación finito. Los elementos de $\operatorname{Ind}(\mathcal{P}, k)$ son

$$(k; 0, \dots, 0), \quad (k; 0, \dots, 0, k), \quad (k; 0, \dots, 0, k, k), \dots, (k; 0, k, \dots, k), \quad (k; k, \dots, k).$$

(b) Si $U = (U; U_i : i \in \mathcal{P}), V = (V; V_i : i \in \mathcal{P}) \in \operatorname{rep}(\mathcal{P}, k)$ con $U_0 \subseteq V_0$ y $U_i = U_0 \cap V_i$, para todo $i \in \mathcal{P}$, entonces $V = W \oplus U$ para algún $W \in \operatorname{rep}(\mathcal{P}, k)$.

Demostración. Ya que $w(\mathcal{P}) = 1$, cualquier par de elementos de $\mathcal{P}$ son comparables. Así, $\mathcal{P}$ es un conjunto linealmente ordenado, de donde podemos suponer que $\mathcal{P} = \{1 < 2 < \cdots < n\}$.

(a) Sea $U = (U_0; U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots \subseteq U_m)$ una representación indescomponible de $\mathcal{P}$ y supongamos que $U_0 = U_m \oplus V_0$; entonces existe una suma directa de representaciones

$$U = (V_0; 0, \dots 0) \oplus (U_m; U_1, \dots, U_m).$$

Ya que U es indescomponible, se debe tener que $U_m = 0$ y U es isomorfo a $(k; 0, \dots, 0)$ o $V_0 = 0$ y $U = (U_m; U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots \subseteq U_{m-1} \subseteq U_m)$. Ahora supongamos que $U_m = U_{m-1} \oplus V_m$, con lo cual tenemos la siguiente representación indescomponible

$$U = (V_m; 0, \dots V_m) \oplus (U_m; U_1, \dots, U_{m-1}, U_{m-1}).$$

Ya que U es indescomponible, se debe tener que $U_{m-1} = 0$ y U es isomorfo a $(k; 0, \dots, k)$ o bien que $V_m = 0$ y $U = (U_{m-1}; U_1, \dots, U_{m-2}, U_{m-1}, U_{m-1})$. Siguiendo este proceso completamos la lista de indescomponibles dados.

(b) Sea

$$X = (V_0/U_0; (V_1 + U_0)/U_0, (V_2 + U_0)/U_0, \dots, (V_m + U_0)/U_0) \in \operatorname{rep}(\mathcal{P}, k).$$

Supongamos que X es indescomponible. Entonces X es isomorfo a alguna de las representaciones dadas en la parte (a), luego existe algún t y $x \in V_t \setminus U_0$ tal que $V_0/U_0 = k(x+U_0)$, $(V_i + U_0)/U_0$, para $i < t$ y $(V_i + U_0)/U_0 = k(x + U_0)$, para $i \geq t$. De aquí, $V_0 = kx \oplus U_0$ con $kx \subseteq V_i$ para $i \geq t$. Entonces $V_i = V_i \cap V_0 = kx \oplus (U_0 \cap V_i) = kx \cap U_i$, para cada $i \geq t$ y $V_i = U_0 \cap V_i = U_i$, para cada $i < t$, con lo cual

$$\begin{aligned} V =& (V_0; V_1, \dots, V_m) = (kx; 0, \dots, 0, kx, \dots, kx) \oplus (U_0; U_1, \dots, U_m) \\ V =& W \oplus U \end{aligned}$$

es una suma directa de representaciones.

□

Dado $U = (U; U_i : i \in \mathcal{P}) \in \operatorname{rep}(\mathcal{P}, k)$, definimos la **dimensión** de U como la k-dimensión de U_0.

Lema 1.28. *Si $\mathcal{P}$ es un poset finito con $w(\mathcal{P}) = 2$, entonces* $\operatorname{rep}(\mathcal{P}, k)$ *es de representación tipo finito. Además, cada indescomponible $U \in \operatorname{rep}(\mathcal{P}, k)$ tiene dimensión 1.*

Demostración. Sea a el mínimo elemento de $\mathcal{P}$ y una partición de $\mathcal{P}$ en tres conjuntos $\{a\}$, $B = \{i \in \mathcal{P} | i < a\}$ y $C = \{i \in \mathcal{P} | i \nsucceq a\}$. Ya que $w(\mathcal{P}) = 2$, C es una cadena y la minimalidad de a en $\mathcal{P}$ implica que cualesquiera dos elementos de C son comparables.
Procedamos ahora inductivamente sobre el cardinal de $|\mathcal{P}|$. Si $|\mathcal{P}| = 2$, entonces $\mathcal{P} = S_2$, como S_2 tiene tipo representación finito y cada representación indescomponible tiene dimensión 1. Ahora asumamos que $|\mathcal{P}| > 2$, $\operatorname{rep}(\mathcal{S}, k)$ tiene representación de tipo finito y cada indescomponible $U \in \operatorname{rep}(\mathcal{S}, k)$ tiene dimensión 1 para cada subposet propio $\mathcal{S}$ de $\mathcal{P}$. Sea $U = (U_0; U_i : i \in \mathcal{P})$ una representación indescompnible de $\mathcal{P}$.
Si $U_a = 0$, entonces $\mathcal{S} = B \cup C$ es un subposet propio de $\mathcal{P}$, y U esta en la imagen de $F^+ : \operatorname{rep}(\mathcal{S}, k) \to \operatorname{rep}(\mathcal{P}, k)$ por la proposición 1.23. Por la hipótesis de inducción, existen salvo isomorfismos, solamente un número finito $U \in \operatorname{Ind}(\mathcal{P}, k)$ con $U_a = 0$.
Ahora supongamos que $U = (U_0; U_i : i \in \mathcal{P})$ es indescomponible con $U_a \neq 0$. Entonces $W = (U_a; U_a \cap U_j : j \in C)$ y $U_C = (U_0; U_j : j \in C)$ pertenecen a $\operatorname{rep}(C, k)$. Ya que C es una cadena y $U_a \leq U_0$, se sigue del lema 1.25 que $U_C = W \oplus V$, para algún $V = (V_0; V_j : j \in C)$. De manera más precisa, consideremos $C = \{1 < 2 < 3 < \cdots < m\}$, así que

$$\begin{aligned} U_0 =& U_a \oplus V_0, \\ U_j =& (U_a \cap U_j) \oplus V_j, \text{ para } 1 \leq j \leq m, \\ V_1 \subseteq& V_2 \subseteq \cdots \subseteq V_m \subseteq V_0. \end{aligned}$$

Ahora verifiquemos que $U = X \oplus Y$, donde $X = (X_0; X_i : i \in \mathcal{P})$ esta definida por

$$X_0 = U_a, \ X_i = U_a, \text{ para } i \geq a, \quad \text{y} \quad X_i = U_a \cap U_i, \text{ para } i \in C,$$

y $Y = (Y_0; Y_i : i \in \mathcal{S})$ esta definida por

$$Y_0 = V_0, \ Y_a = 0, \ Y_i = V_0 \cap U_i, \text{ para } i > a, \quad \text{y} \quad Y_i = V_i, \text{ para } i \in C.$$

Notemos que $X, Y \in \operatorname{rep}(\mathcal{P}, k)$. De la descomposición de U_C tenemos que

$$\begin{aligned} U_0 =& U_a \oplus V_0 = X_0 \oplus Y_0, \\ U_i =& (U_a \cap U_i) \oplus V_i = X_i \oplus Y_i, \text{ para } i \in C, \\ U_a =& U_a \oplus 0 = X_a \oplus Y_a. \end{aligned}$$

Finalmente, supongamos que $i \geq a$. Entonces

$$U_i = U_a \oplus V_0 \cap U_i = X_i \oplus Y_i,$$

ya que $U_a \subseteq U_i \subseteq U_0$ y $U_0 = U_a \cup V_0$.
Como U es indescomponible y $U_a \neq 0$, entonces se debe tener que $U = X$. Por lo tanto U es la imagen de $F^- : \operatorname{rep}(C, k) \to \operatorname{rep}(\mathcal{S}, k)$ dada en la proposición 1. □

Podemos dar una versión más general del lema 1.25. Una **descomposición escindida** de un poset finito $\mathcal{P}$ es una partición de $\mathcal{P}$ en tres subconjuntos A, B, C, tal que C es una cadena o es vacío y $a \prec b$ para cada $a \in A$, $b \in B$. Por ejemplo, si A y B son posets finitos y $\mathcal{P}$ es la unión disyunta de A y B sujeto a $a \prec b$ para cada $a \in A$, $b \in B$, entonces la partición $A \cup B$ es una descomposición escindida de $\mathcal{P}$ con C vacío.

Proposición 1.29. *Si un poset finito $\mathcal{P}$ tiene una descomposición escindida A, B, C, entonces cada $U \in \operatorname{Ind}(\mathcal{P}, k)$ esta en la imagen de $\operatorname{Ind}(A \cup C, k)$ o $\operatorname{Ind}(B \cup C, k)$. Como consecuencia del lema 1.25 existen, salvo isomorfismos, solamente finitos indescomponibles U con $U_a \neq 0$ y cada U tiene dimensión 1.*

Demostración. Véase [2], Proposición 1.3.5. □

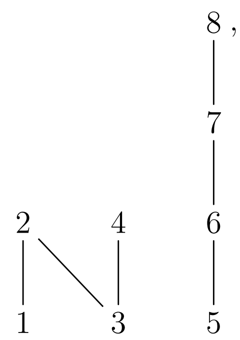
El único caso que nos queda por describir de tipo representación finito es para los posets de ancho 3.
Vamos a introducir una notación estándar para posets. Una cadena con n elementos es denota por (n). Si $T_1, \ldots, T_m$ son posets, entonces la unión disyunta de los T_i es escrita como $(T_1, \ldots, T_m)$. Por ejemplo, $\mathcal{P}_5$ en la nueva notación tomaría la forma $(1,1,1,1,1)$ y $(2,2,2)$ se puede representar como $\{1 \prec 2, 3 \prec 4, 5 \prec 6\}$. Notemos por N el poset $\{1 \prec 2, 3 \prec 2, 3 \prec 4\}$.
El siguiente teorema demuestra que $\operatorname{rep}(\mathcal{P}, k)$ es una categoría de tipo representación finito que no depende del cuerpo k.

Teorema 1.30 (Kleiner)**.** *Sea $\mathcal{P}$ un poset finito.* $\operatorname{rep}(\mathcal{P}, k)$ *es de tipo representación finito si, y sólo si, $\mathcal{P}$ no contiene como subposet completo cualquiera de los siguientes subposets:*

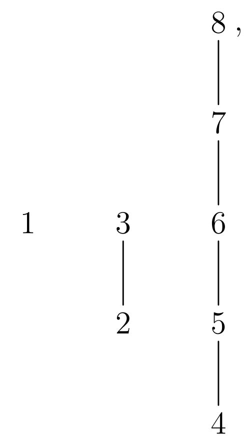
$$K_1 = (1,1,1,1): \quad 1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad 4\,,$$

$$K_2 = (2,2,2): \quad \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ \vert & \vert & \vert \\ 2 & 4 & 6 \end{array}\,, \qquad K_3 = (1,3,3): \quad \begin{array}{ccc} & 4 & 7 \\ & \vert & \vert \\ & 3 & 6 \\ & \vert & \vert \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\,,$$

$K_4 = (N, 4):$



$K_5 = (1, 2, 5):$



los cuales los llamaremos ***posets críticos****.*

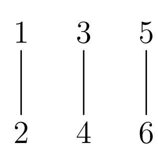
Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathcal{P}$ es uno de los siguientes posets $\mathcal{P}_4$, $(2,2,2)$, $(1,3,3)$, $(1,2,5)$ o $(N,4)$.

Considerando la lista de las representaciones de cada poset crítico $\mathcal{P}$, demostraremos que $\mathrm{rep}(\mathcal{P}, k)$ tiene tipo representación infinito. Para ello vamos a probar que A es una k-matriz $n \times n$ indescomponible, entonces existe una representación $U \in \mathrm{rep}(\mathcal{P}, k)$ con $\dim U \geq n$ y $\mathrm{End}\, U = C(A)$, donde $C(A)$ es el centralizador de A. Ya que los bloques de las matrices de Jordan proveen ejemplos de matrices indescomponibles de tamaño $n \times n$, entonces las representaciones de rango indescomponible en $\mathrm{rep}(\mathcal{P}, k)$ son no acotadas. Lo anterior demuestra que $\mathrm{rep}(\mathcal{P}, k)$ tiene tipo representación infinito.

(I) $K_1 = \mathcal{P}_4$, $U = (U_0; U_1, U_2, U_3, U_4)$

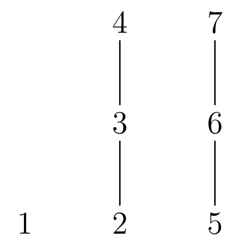
$$U_0 = k^n \oplus k^n,\ U_1 = k^n \oplus 0,\ U_2 = 0 \oplus k^n,\ U_3 = (1+1)k^n,\ U_4 = (1+A)k^n.$$

(II) $K_2 = (2, 2, 2):$



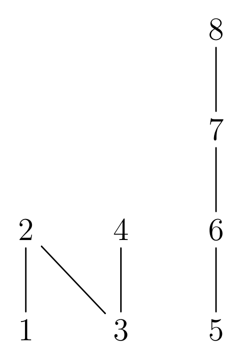
$$\begin{aligned}
U &= (U_0; U_1 \subseteq U_2, U_3 \subseteq U_4, U_5 \subseteq U_6)\\
U_0 &= k^n \oplus k^n \oplus k^n,\\
U_1 &= 0 \oplus 0 \oplus k^n, & U_2 &= (1+A)k^n \oplus k^n,\\
U_3 &= (1+1)k^n \oplus 0, & U_4 &= k^n \oplus k^n \oplus 0,\\
U_5 &= 0 \oplus (1+1)k^n, & U_6 &= k^n \oplus (1+1)k^n.
\end{aligned}$$

(III) $K_3 = (1, 3, 3)$:



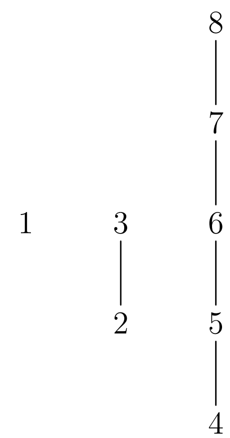
$$
\begin{aligned}
U =& (U_0; U_1, U_2 \subseteq U_3 \subseteq U_4, U_5 \subseteq U_6 \subseteq U_7)\\
U_0 =& k^n \oplus k^n \oplus k^n \oplus k^n,\\
U_1 =& (1+1)k^n \oplus (1+1)k^n,\\
U_2 =& 0 \oplus (1+1)k^n \oplus 0, \qquad U_3 = 0 \oplus k^n \oplus k^n \oplus 0, \qquad U_3 = 0 \oplus k^n \oplus k^n \oplus k^n,\\
U_5 =& k^n \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0, \qquad U_6 = k^n \oplus 0 \oplus 0 \oplus k^n, \qquad U_7 = k^n \oplus (1+A)k^n \oplus k^n.
\end{aligned}
$$

(IV) $K_4 = (N, 4)$:



$$
\begin{aligned}
U =& (U_0; U_2 \subseteq U_1 \supseteq U_4 \subseteq U_3, U_5 \subseteq U_6 \subseteq U_7 \subseteq U_8)\\
U_0 =& k^n \oplus k^n \oplus k^n \oplus k^n \oplus k^n,\\
U_2 =& (1+1)k^n \oplus (1+1)k^n \oplus 0, \qquad U_1 = k^n \oplus k^n \oplus k^n \oplus k^n \oplus 0,\\
U_4 =& 0 \oplus (1+1)k^n \oplus 0 \oplus 0, \qquad U_3 = 0 \oplus k^n \oplus k^n \oplus (1+1)k^n,\\
U_5 =& 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus k^n, \qquad U_6 = k^n \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus k^n,\\
U_7 =& k^n \oplus 0 \oplus 0 \oplus k^n \oplus k^n, \qquad U_8 = k^n \oplus (1+A)k^n \oplus k^n \oplus k^n.
\end{aligned}
$$

(v) $K_5 = (1,2,5)$:



$$\begin{aligned}
U =& (U_0; U_1, U_2 \subseteq U_3, U_4 \subseteq U_5 \subseteq U_6 \subseteq U_7 \subseteq U_8)\\
U_0 =& k^n \oplus k^n \oplus k^n \oplus k^n \oplus k^n \oplus k^n,\\
U_1 =& (0+1+1+0+0+0)k^n + (0+0+1+0+0+1)k^n + (0+0+0+1+1+0)k^n,\\
U_2 =& (1+1)k^n \oplus (1+1)k^n \oplus 0 \oplus 0, \qquad U_3 = k^n \oplus k^n \oplus k^n \oplus k^n \oplus 0 \oplus 0,\\
U_4 =& 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus k^n, \qquad U_5 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus k^n \oplus k^n,\\
U_6 =& k^n \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus k^n \oplus k^n, \qquad U_7 = k^n \oplus 0 \oplus 0 \oplus k^n \oplus k^n \oplus k^n,\\
U_8 =& k^n \oplus (1+A)k^n \oplus k^n \oplus k^n \oplus k^n.
\end{aligned}$$

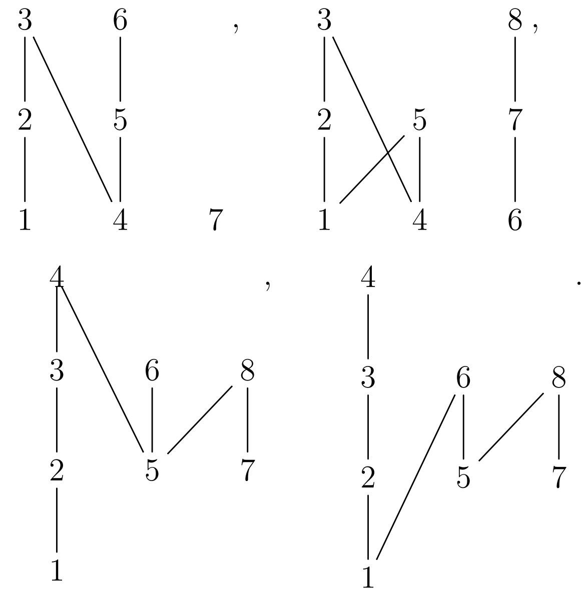
($\Leftarrow$) Supongamos que $\mathcal{P}$ es de tipo representación infinito. Entonces $w(\mathcal{P}) \geq 3$. Además, cualquier poset $\mathcal{P}$ que contiene S_4 como subposet es de tipo representación infinito.

$\square$

De la proposición 1.22. tenemos que los elementos de $\operatorname{Ind}(\mathcal{P},k)$ incluyen aquellos elementos de $\operatorname{Ind}(\mathcal{S},k)$, para cada subposet propio $\mathcal{S}$ de $\mathcal{P}$. La proposición 1.26 ilustra que para cierto poset finito $\mathcal{P}$, todos los elementos de $\operatorname{Ind}(\mathcal{P},k)$ son de está forma. Las anteriores observaciones nos motiva a generar la noción de representaciones sinceras y posets.
Dado $U = (U; U_i : i \in \mathcal{P}) \in \operatorname{rep}(\mathcal{P},k)$, definimos $\operatorname{cdn} U = (u_0; u_i : i \in \mathcal{P})$ donde $\dim_k U_0 = u_0$ y $\dim_k U_i/U_i^{\#} = u_i$, donde $U_i^{\#}$ es el subespacio de U_i generado por $\{U_j : j < i,\ i,j \in \mathcal{P}\}$. Diremos que U es una representación **sincera** si cada $u_i \neq 0$. Si U no es sincera, digamos, $u_i = 0$ para algún elemento i minimal, entonces $\mathcal{S} = \mathcal{P} \setminus \{i\}$ es un subposet propio de $\mathcal{P}$ con U en la imagen de $F^+ : \operatorname{rep}(\mathcal{S},k) \to \operatorname{rep}(\mathcal{P},k)$. Además, si $\operatorname{rep}(\mathcal{P},k)$ es de tipo representación finito entonces $\operatorname{rep}(\mathcal{S},k)$ también lo es.
Un poset finito $\mathcal{P}$ es **sincero** si existe una representación indescomponible sincera U en $\operatorname{rep}(\mathcal{P},k)$.

Teorema 1.31. *Un poset finito $\mathcal{P}$ de tipo representación finito es sincero si, y sólo si, $\mathcal{P}$ es uno de los siguientes posets (1), (1,1), (1,1,1), (1,1,2), (1,2,2), (1,2,3), (1,2,4),* $(N,2)$,

$(N, 3)$,



Demostración. Véase [17], Teorema 10.2. □

Veamos algunos ejemplos de representaciones consideradas en el Teorema 1.29.

Ejemplo 1.32. *(a) Si* $\mathcal{P} = (1,1,2)$*, entonces el único elemento sincero de* $\operatorname{Ind}(\mathcal{P}, k)$ *es*

$$(k \oplus k; k \oplus 0, (1+1)k, 0 \oplus k, k \oplus k).$$

(b) Si $\mathcal{P} = (1,2,2)$*, entonces los elementos sinceros de* $\operatorname{Ind}(\mathcal{P}, k)$ *son*

I. $(k \oplus k \oplus k; (1+1+1)k, k \oplus 0 \oplus 0, k \oplus k \oplus 0, 0 \oplus 0 \oplus k, 0 \oplus k \oplus k)$,

II. $(k \oplus k \oplus k; (1+0+1)k, (1+1+0)k, k \oplus 0 \oplus 0, k \oplus k \oplus 0, 0 \oplus 0 \oplus k, 0 \oplus k \oplus k)$,

III. $(k \oplus k; (1+1)k, k \oplus 0, k \oplus k, 0 \oplus k, k \oplus k)$.

Corolario 1.33. *Si* $\mathcal{P}$ *es un poset finito,* k *es un cuerpo y* $\operatorname{rep}\mathcal{P}, k$ *es de tipo representación finito, entonces cada indescomponible* $U \in \operatorname{rep}(\mathcal{P}, k)$ *tiene rango menor que o igual a 6 y* $\operatorname{End} U = k$.

Todas las representaciones dadas para posets críticos pueden ser construidas a partir de la representación fundamental U_A de $\mathcal{P}_4$. Esta construcción utiliza el algoritmo de diferenciación de Zavadskij de un poset finito con respecto a un par conveniente de puntos de $\mathcal{P}$.
Un par de elementos (a, b) en $\mathcal{P}$ es llamado **conveniente** si a no es menor que o igual a b y el subposet $\mathcal{P}_a^b = \mathcal{P} \setminus (a^\triangledown \cup b_\vartriangle)$ es vacío o una cadena $\mathcal{C} = \{c_1 \prec c_2 \prec \cdots \prec c_m\}$ con $a^\triangledown$ el cono superior de a y $b_\vartriangle$ el cono inferior de b. Definimos dos copias de $\mathcal{C}$,

$$\mathcal{C}^- = \{c_1^- \prec c_2^- \prec \cdots \prec c_m^-\} \quad \text{y} \quad \mathcal{C}^+ = \{c_1^+ \prec c_2^+ \prec \cdots \prec c_m^+\}.$$

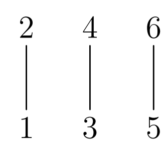
Si $\mathcal{P}_a^b$ es no vacío. De lo contrario $\mathcal{C}^-$ y $\mathcal{C}^+$ serán vacíos. La **derivada** de $\mathcal{P}$ con respecto a un par conveniente de puntos (a,b), $\mathcal{P}' = \partial_{(a,b)}\mathcal{P}$ es la unión disyunta de los posets $a^{\triangledown} \cup b_{\vartriangle} \cap \mathcal{C}^- \cap \mathcal{C}^+$ con los ordenes adicionales dados por

1. Si $x, y \in a^{\triangledown} \cup b_{\vartriangle}$, entonces $x \leq y$ en $\mathcal{P}'$ si, y sólo si, $x \leq y$ en $\mathcal{P}$.
2. $c_i^- \prec c_i^+$, para todo i.
3. Si $x \in b_{\vartriangle} \setminus \{b\}$, entonces $x \prec c_i^-$ en $\mathcal{P}'$ si, y sólo si, $x \prec c_i^-$ en $\mathcal{P}$.
4. Si $x \in a^{\triangledown} \setminus \{a\}$, entonces $x \succ c_i^+$ en $\mathcal{P}'$ si, y sólo si, $x \succ c_i^+$ en $\mathcal{P}$.
5. $a \prec b$, $a \prec c_1^+$ y $c_m^- \prec b$.
6. Si todas las relaciones anteriores resultan en $x \prec y$ y $y \prec x$, para algún $x, y \in \mathcal{P}'$, entonces $x = y$.

Los siguientes ejemplos demuestran, en términos de derivación, una relación entre los cinco posets críticos $(1,1,1,1)$, $(2,2,2)$, $(1,3,3)$, $(N,4)$ y $(1,2,5)$.

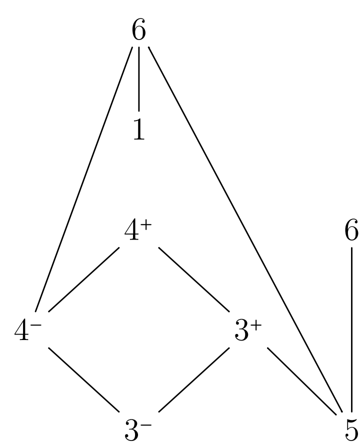
Ejemplo 1.34. *(a) Si $\mathcal{P}$ es*

$(2,2,2)$:



entonces $(5,2)$ es un par conveniente y

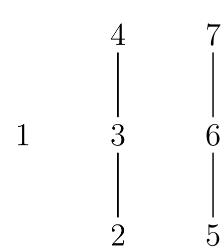
$\partial_{(5,2)}\mathcal{P} =$



es un poset que contiene a $\mathcal{P}_4 = \{4^-, 1, 3^+, 6\}$ como subposet.

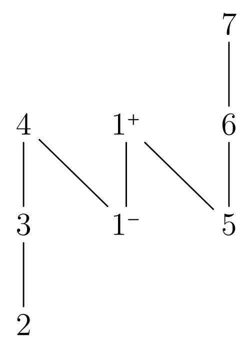
(b) Si $\mathcal{P}$ es

$(1,3,3)$:



entonces $(5,4)$ *es un par conveniente y*

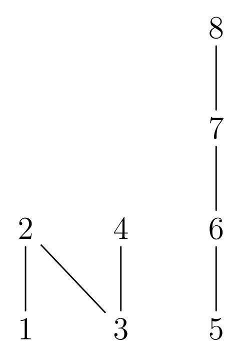
$\partial_{(5,4)}\mathcal{P} =$



contiene a $(2,2,2) = \{2 \prec 3, 1^- \prec 1^+, 6 \prec 7\}$ *como subposet.*

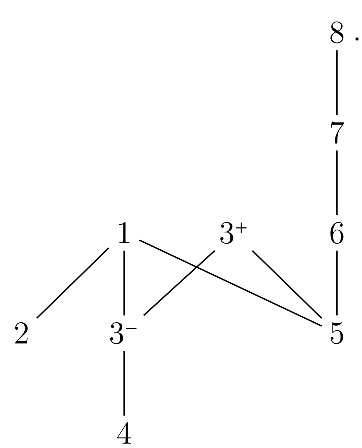
(c) Si $\mathcal{P}$ *es*

$(N,4):$



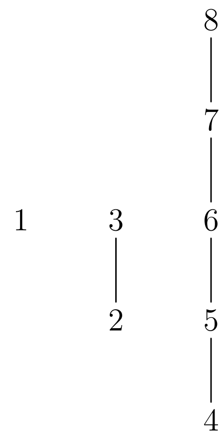
entonces $(5,1)$ *es conveniente y*

$\partial_{(5,1)}\mathcal{P} =$



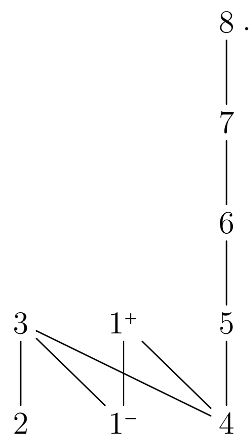
(d) Si $\mathcal{P}$ es

$(1,2,5):$



entonces $(4,3)$ *es conveniente y*

$\partial_{(4,3)}\mathcal{P} =$



Una derivada $\delta_{(a,b)}$ de un poset finito $\mathcal{P}$ con un par conveniente de puntos (a,b) induce una correspondencia $\delta_{(a,b)} : \operatorname{rep}(\mathcal{P},k) \to \operatorname{rep}(\mathcal{P}',k)$. Sea $\mathcal{P}$ un poset finito con un par conveniente de puntos (a,b) y $\mathcal{P}_a^b = \{c_1 \prec c_2 \prec \cdots \prec c_m\}$. Dado $(U; U_i : i \in \mathcal{P}) \in \operatorname{rep}(\mathcal{P},k)$, definimos $\delta_{(a,b)}U = W \in \operatorname{rep}(\mathcal{P}',k)$ como sigue: elijamos un subespacio V de $U_a = U_b$ con

$$U_a + U_b = V \oplus U_b$$

y sea $W = (W_0; W_i : i \in \mathcal{P}') \in \operatorname{rep}(\mathcal{P}',k)$, donde

$W_0 = U_0/V, \quad W_{c(j)^-} = ((U_b \cap U_{c(j)}) + V)/V$, para cada $j \leq n$,

$W_{c(j)^+} = (U_a + U_{c(j)})/V$, para cada $j \leq n$,

$W_t = (U_t + V)/V$, para cada $t \in a^{\triangledown} \cup b_{\vartriangle}$.

Teorema 1.35. *Supongamos que $\mathcal{P}$ es un poset finito con un par conveniente de puntos (a,b), $\mathcal{P}_a^b = \{c_1 \prec c_2 \prec \cdots \prec c_m\}$ y $\mathcal{P}' = \delta_{(a,b)}\mathcal{P}$.*

(a) La correspondencia $\delta_{(a,b)} : \operatorname{rep}(\mathcal{P},k) \to \operatorname{rep}(\mathcal{P}',k)$ *produce una correspondencia sobre* $\delta_{(a,b)} : \operatorname{Ind}(\mathcal{P},k) \to \operatorname{Ind}(\mathcal{P}',k)$.

(b) $|\operatorname{Ind}(\mathcal{P},k)| = |\operatorname{Ind}(\mathcal{P}',k)| + n + 1$. *En particular,* $\operatorname{rep}(\mathcal{P},k)$ *es de tipo representación finito si, y sólo si,* $\operatorname{rep}(\mathcal{P}',k)$ *es de tipo representación finito.*

Demostración. Véase [17], Teorema 9.10. □

En apariencia de la definición de la derivada de un poset es más complicada que el poset original. Pero del teorema 1.35.(b), tenemos que, si $\mathcal{P}$ es poset finito, entonces $\mathcal{P}$ es de tipo representación finito si, y sólo si, la aplicación reiterativa de la derivación eventualmente resulta en un poset de un sólo elemento.

Corolario 1.36. *Existe una inyección* $\operatorname{Ind}(\mathcal{P}_4,k) \mapsto \operatorname{Ind}((2,2,2),k) \mapsto \operatorname{Ind}((1,3,3),k) \mapsto \operatorname{Ind}((N,4),k) \mapsto \operatorname{Ind}((1,2,5),k)$.

Demostración. Véase [2], Corolario 1.3.12. □

Los siguientes resultados conciernen al algoritmo de diferenciación con respecto a un par conveniente de puntos [17], [19].

Teorema 1.37. *Si* M *es una* $k[t]$*-representación de un poset (es decir, es una serie de representaciones de* $\operatorname{rep}\mathcal{P}$*) entonces la representación derivada* M' *es una* $k[t]$*-representación de* $\mathcal{P}'$*, donde* $\mathcal{P}'$ *denota la derivada del poset a un punto maximal, minimal o un par conveniente de puntos. Además, la representación derivada de a lo más todas las representaciones indescomponibles en* $\operatorname{rep}\mathcal{P}$ *generada por una* $k[t]$*-representación es indescomponible en* $\operatorname{rep}\mathcal{P}'$ *también generada por una* $k[t]$*-representación.*

Teorema 1.38. *Sea* $\mathcal{P}$ *un poset con un par conveniente de puntos,* (a,b) *(es decir,* $\mathcal{P} = a^{\triangledown} + b_{\vartriangle} + C$*),* $U \in \operatorname{rep}\mathcal{P}$ *y* $U^{\downarrow}$ *es su representación derivada reducida. Entonces para* $\alpha = \dim U$*,* $\alpha^* = \operatorname{codim} U$ *(la dimensión de la representación dual),* $\beta = \dim U^{\downarrow}$*,* $\beta^* = \operatorname{codim} U^{\downarrow}$*, tenemos que:*

(a) $\alpha_0 - \beta_0 = \alpha_a - \beta_a = \alpha^*_b - \beta^*_b = m \geq 0, m = \dim_k(U_a + U_b/U_b)$.

(b) $\alpha_x = \beta_x$ *y* $\alpha^*_x = \beta^*_x$*, para cada* $x \in \mathcal{P} \setminus \{C + \{a,b\}\} = a^{\blacktriangledown} + b_{\blacktriangle}$.

(c) $\operatorname{codim} U_b \geq \sum_{i=1}^n \beta_{c_i^+}$, $\dim U_a \geq \sum_{i=1}^n \beta^*_{c_i^-}$.

(d) $\alpha_{c_i} = \beta_{c_i^-} + \beta_{c_i^+} + s_i$*,* $\alpha^*_{c_i} = \beta^*_{c_i^-} + \beta^*_{c_i^+} + s^*_i$*, donde* s_i *es el número de sumandos directos de tipo* $k(a,c_i)$ *de* U *y* s^*_i *es el número de sumandos directos de tipo* $k(b,c_i)$ *de* U^*.

(e) $\sum_i \beta_{c_i^+} \geq m$ *si* U *no tiene sumandos del tipo* $k(a)$ *y* $\sum_i \beta_{c_i^-} \geq m$*, si* U^* *no tiene sumandos del tipo* $k(b)$.

Para finalizar, probaremos que la representación para $\mathcal{P} = (2,2,2)$ puede construirse de una para $(1,3,3)$ y viceversa.

Ejemplo 1.39. *Sea* $\mathcal{P}$

$$(1,3,3): \quad \begin{array}{ccc} & 4 & 7 \\ & | & | \\ 1 & 3 & 6 \\ & | & | \\ & 2 & 5 \end{array}$$

con el par conveniente $(5,4)$ *y* $U \in \operatorname{rep}(\mathcal{P},k)$ *dado por*

$$\begin{aligned}
U =&(U_0; U_1, U_2 \subseteq U_3 \subseteq U_4, U_5 \subseteq U_6 \subseteq U_7),\\
U_0 =&k^n \oplus k^n \oplus k^n \oplus k^n,\\
U_1 =&(1+1)k^n \oplus (1+1)k^n,\\
U_2 =&0 \oplus (1+1)k^n \oplus 0, \qquad U_3 =0 \oplus k^n \oplus k^n \oplus 0, \quad U_4 =0 \oplus k^n \oplus k^n \oplus k^n,\\
U_5 =&k^n \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0, \qquad U_6 =k^n \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0, \quad U_7 =k^n \oplus (1+A)k^n \oplus k^n,
\end{aligned}$$

entonces $(2,2,2) \subseteq \delta_{(5,4)}\mathcal{P}$ *y* $\delta_{(5,4)}U$ *contiene a la representación*

$$\begin{aligned}
U =&(U_0; U_1 \subseteq U_2, U_3 \subseteq U_4, U_5 \subseteq U_6),\\
U_0 =&k^n \oplus k^n \oplus k^n,\\
U_1 =&0 \oplus 0 \oplus k^n, \qquad U_2 =(1+A)k^n \oplus k^n,\\
U_3 =&(1+1)k^n \oplus 0, \qquad U_4 =k^n \oplus k^n \oplus 0,\\
U_5 =&0 \oplus (1+1)k^n, \qquad U_6 =0 \oplus k^n \oplus k^n.
\end{aligned}$$

Notemos que $U_5 + U_4 = U_5 \oplus U_4$, *elijamos* $V = U_5$ *en la definición de* $\delta_{(5,4)}U$. *Entonces* $\delta_{(5,4)}U$ *esta determinado por*

$$\begin{aligned}
W_0 =&U_0/V = k^n \oplus k^n \oplus k^n, & W_{1^-} =&((U_4 \cap U_1) + V)/V = 0 \oplus (1+1)k^n,\\
W_{1^+} =&(U_5 + U_1)/V = k^n \oplus (1+1)k^n, & W_2 =&(U_2 + V)/V = (1+1)k^n \oplus 0,\\
W_3 =&(U_3 + V)/V = k^n \oplus k^n \oplus 0, & W_4 =&(U_4 + V)/V = k^n \oplus k^n \oplus k^n,\\
W_5 =&(U_5 + V)/V = 0 \oplus 0 \oplus 0, & W_6 =&(U_6 + V)/V = 0 \oplus 0 \oplus k^n,\\
W_7 =&(U_7 + V)/V = (1+A)k^n \oplus k^n.
\end{aligned}$$

Por el ejemplo 1.34.(b), $(2,2,2) = \{2 < 3, 1^- < 1^+, 6 < 7\}$ *es un subposet de* $\delta_{(5,4)}\mathcal{P}$. *Entonces* $(W_0; W_6 \subseteq W_7, \subseteq W_3, W_1^- \subseteq W_1^+)$ *es una representación de* $(2,2,2)$.

1.4. Posets de tipo representación manso y salvaje

Las representaciones de tipo infinito están divididas en dos grandes grupos. Coloquialmente, si $\mathrm{rep}(\mathcal{S},k)$ tiene una representación de tipo manso, entonces existe una potencial clasificación esquemática para los indescomponibles en $\mathrm{rep}(\mathcal{S},k)$. Por otra parte, si $\mathrm{rep}(\mathcal{S},k)$ tiene representación de tipo salvaje, entonces no es posible completar la clasificación de representaciones indescomponibles.

Las representaciones de posets finitos sobre cuerpos pueden ser generalizadas a un anillo arbitrario R. Asumimos en general que el anillo tiene unidad y que los R-módulos son R-módulos con identidad a izquierda a menos que se especifique lo contrario.

Dado un poset finito $\mathcal{S}$, definimos $\mathrm{rep}(\mathcal{S},k)$ como la categoría cuyos objetos $U=(U_0;U_i : i\in\mathcal{S})$, donde U_0 es un R-módulo libre finitamente generado, cada U_i es un R-sumando libre finitamente generado de U_0, y si $i\leq j$ en $\mathcal{S}$, entonces $U_i\subseteq U_j$. Los morfismos en está categoría, los llamaremos **morfismos de representaciones**, son homomorfismos de R-módulos $f:U_0\to U_0'$ con $f(U_i)\subseteq U_i'$, para cada $i\in\mathcal{S}$. Entonces $\mathrm{rep}(\mathcal{S},k)$ es una categoría aditiva, ya que los R-módulos con los R-homomorfismos forman una categoría aditiva.

Sea $k\langle x,y\rangle$ denota la k-álgebra de polinomios en las variables no conmutativas x y y con coeficientes en el cuerpo k, y sea $\mathrm{mod}\,k\langle x,y\rangle$ denota la categoría de $k\langle x,y\rangle$-módulos que tienen k-dimensión finita. El anillo de endomorfismos de $N\in\mathrm{rep}(\mathcal{S},k\langle x,y\rangle)$ es denotada por $\mathrm{End}_{k\langle x,y\rangle}N$. Con End_kN para el anillo de endomorfismos visto como una k-representación, donde se puede considerar la posibilidad de dimensión infinita.

La categoría $\mathrm{rep}(\mathcal{S},k)$ tiene **tipo representación manso**, si existe un $N\in\mathrm{rep}(\mathcal{S},k\langle x,y\rangle)$ tal que el funtor $F_N:\mathrm{mod}\langle x,y\rangle\to\mathrm{rep}(\mathcal{S},k)$ dado por $F_N(M)=W\otimes_{k\langle x,y\rangle}M$ preserva indescomponibles y refleja isomorfismos y $\mathrm{End}_{k\langle x,y\rangle}N=\mathrm{End}_kN$. La categoría $\mathrm{rep}(\mathcal{S},k)$ tiene representación de **tipo representación completamente manso** si F_N es un funtor completamente fiel, para algún N. Si $\mathrm{rep}(\mathcal{S},k)$ tiene representación de tipo representación completamente manso entonces $\mathrm{rep}(\mathcal{S},k)$ es de tipo representación manso, ya que un funtor completamente fiel preserva indescomponibles y refleja isomorfismos.

Ejemplo 1.40. *La categoría* $\mathrm{rep}(\mathcal{S}_5,k)$ *es de tipo representación completamente manso. Definamos* $N\in\mathrm{rep}\,(\mathcal{P}_4,k)$ *para* $R=k\,\langle x,y\rangle$ *por*

$$N=(R\oplus R;R\oplus 0,0\oplus R,(1+1)R,(1+x)R,(1+y)R.$$

Consideremos $\mathrm{End}_kN=\{r\in\mathrm{End}_kN\mid xr=rx,\,yr=ry\}$*, entonces* End_kN *es isomorfo a* $R=\mathrm{End}_RN$ *el anillo de endomorfismos de* R *visto como* R*-módulo. Si* $M\in\mathrm{mod}\,R$*, entonces*

$$\begin{aligned}N\otimes_R M=&((R\oplus R)\otimes_R M;(R\oplus 0)\otimes_R M,(0\oplus R)\otimes_R M,\\&(1+1)R\otimes_R M,(1+x)R\otimes_R M,(1+y)R\otimes_R M)\\=&(M\oplus M;M\oplus 0,0\oplus M,(1+1)M,(1+x)M,(1+y)M),\end{aligned}$$

de donde $N \otimes_R M \in \operatorname{rep}(\mathcal{P}, k)$, ya que M tiene k-dimensión finita.
Para $M, M' \in \operatorname{mod} k\langle x, y\rangle$, definimos

$$\phi : \operatorname{Hom}(M, M') \to \operatorname{Hom}(N \otimes_R M, N \otimes_R M') \qquad f \mapsto \phi(f) = 1 \otimes f$$

entonces ϕ es un monomorfismo de grupos. Además, ϕ es un epimorfismos, ya que un morfismo de representaciones $g : N \otimes_R M \to N \otimes_R M'$ es de la forma $g = (f, f)$, f un k-homomorfismo con $fx = xf$ y $fy = yf$. De donde, f es un R-homomorfismo de M a M' con $1 \otimes f = g$.
De lo anterior, tenemos que cada k-álgebra finito dimensional puede ser vista como un endomorfismo de anillos para algún $U \in \operatorname{rep}(\mathcal{S}_5, k)$. Como una consecuencia inmediata de la siguiente proposición:

Proposición 1.41. *Sea R una k-álgebra finito dimensional.*

(a) Existe un funtor completamente fiel $F : \operatorname{mod} R \to \operatorname{mod} k\langle x, y\rangle$.

(b) Si $\operatorname{rep}(\mathcal{S}, k)$ es de tipo representación manso, entonces existe una inyección de $\operatorname{Ind}(\operatorname{mod} R)$ en $\operatorname{Ind}(S, k)$

Demostración. Sea $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una k-base para R con $x_1 = 1$ y sean A y B R-matrices de tamaño $(n+2) \times (n+2)$ tal que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Supongamos que M es un R-módulo con dimensión k-finita. Definamos $F(M) = M^{n+2}$, un $k\langle x, y\rangle$-módulo en $\operatorname{mod} k\langle x, y\rangle$ por medio de la multiplicación $xm = Am$ y $ym = Bm$, para cada $m \in M^{n+2}$. Si $f : M \to M'$ es un R-homomorfismo, definamos $F(f) = fI_{(n+2)\times(n+2)}$, tenemos que $F : \operatorname{Hom}_R(M, M') \to \operatorname{Hom}_{k\langle x,y\rangle}(f(M), F(M')$ es un monomorfismo de grupos. Ahora sea $g \in \operatorname{Hom}_{k\langle x,y\rangle}(f(M), F(M')$, tenemos que $g = (f, f, \dots, f)$ con $f \in \operatorname{Hom}_k(M, M')$ y $fx_i = x_i f$, para todo $1 \le i \le n$. Así $g = fI_{(n+2)\times(n+2)}$, de donde g es sobre. □

Corolario 1.42. *Sea $\mathcal{P}$ un poset finito y k un cuerpo. Si $\operatorname{rep}(\mathcal{P}, k)$ tiene una representación completamente salvaje, entonces $\operatorname{rep}(\mathcal{P}, k)$ es endosalvaje.*

Demostración. Sea R una k-álgebra de dimensión finita. Entonces $R \in \operatorname{mod} R$ con $\operatorname{End}_R(R) = R$. Por la proposición anterior, $F(R) = M \in \operatorname{mod} K\langle x, y\rangle$ con $\operatorname{End}_{k\langle x,y\rangle}(M) = R$, pues F es completamente fiel. Dado que $\operatorname{rep}(\mathcal{P}, k)$ tiene un tipo de representación completamente salvaje, $U = N \bigotimes_{k\langle x,y\rangle} M \in \operatorname{rep}(\mathcal{P}, k)$ con $\operatorname{End} U$ isomorfo a R.

□

Teorema 1.43. *Sea $\mathcal{P}$ un poset finito y k un cuerpo. Entonces* $\mathrm{rep}(\mathcal{P},k)$ *es de tipo representación manso si, y solamente si, $\mathcal{P}$ contiene $\mathcal{P}_5$, (1,1,1,2), (2,2,3), (1,3,4),* $(N,5)$ *o (1,2,6) como subposet.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Por la Proposición 1.3.1, si $\mathcal{S}$ es un subposet de S, entonces hay un funtor completamente fiel $F^{+}: \mathrm{rep}\ (\mathcal{S},k) \longrightarrow \mathrm{rep}\ (\mathcal{P},k)$. Dado que la composición de funtores completamente fiel es completamente fiel, basta con demostrar que si $\mathcal{S}$ es uno de $\mathcal{P}_5$, $(1,1,1,2)$, $(2,2,3)$, $(1,3,4)$, $(N,5)$ o $(1,2,6)$, entonces $\mathrm{rep}\ (\mathcal{S},k)$ tiene un tipo de representación completamente salvaje. En particular, $\mathrm{rep}\ (\mathcal{P},k)$ tendría entonces un tipo de representación salvaje.

El caso $\mathcal{S} = \mathcal{P}_5$ se presenta en el Ejemplo 1.36. A continuación se muestra una lista de representaciones $N_{\mathcal{S}} = (U_0; U_i \,|\, i \in \mathcal{S})$ con $F_{N_{\mathcal{S}}}: \mathrm{mod}\, k\langle x,y\rangle \longrightarrow \mathrm{rep}(\mathcal{P},k)$ un funtor completamente fiel. La prueba es un cálculo como el del Ejemplo 1.40. para demostrar que $\mathrm{End}_k N_{\mathcal{S}} = R = \mathrm{End}_R(R)$ y $\mathrm{Hom}_{k\langle x,y\rangle}(M,M') \simeq \mathrm{Hom}(N_{\mathcal{S}} \otimes_{K\langle x,y\rangle} M, N_{\mathcal{S}} \otimes_{k\langle x,y\rangle} M')$, para cualquier M, M' en mod $k\langle x,y\rangle$. Escribimos $R = k\langle x,y\rangle$.

($\Rightarrow$) Véase [17], Teorema 15.3.

$\square$

El siguiente teorema fue probado por Yu. A. Drozd en 1978 [6], Teorema 3.1.5.

Teorema 1.44. *Si k es un cuerpo algebraicamente cerrado y $\mathcal{P}$ es un poset finito, entonces $\mathcal{P}$ es de tipo representación finito, manso o salvaje y estos tipos son mutuamente exclusivos.*

Definamos $\mathrm{rep}(\mathcal{S},k)$ una categoría con objetos $U = (U_0; U_i : i \in \mathcal{S})$, donde U_0 es un k-espacio vectorial con dimensión contable, cada U_i es un subespacio de U_0, y si $i \leq j$ en $\mathcal{S}$, entonces $U_i \subseteq U_j$. Los morfismos es está categoría son transformaciones k-lineales $f: U_0 \to U_0'$ con $f(U_0) \subseteq U_0'$, para cada $i \in \mathcal{S}$. Entonces $\mathrm{rep}(\mathcal{S},k)$ es una subcategoría completa de $\mathrm{rep}(\mathcal{S},k)$ con objetos $U \in \mathrm{rep}(\mathcal{S},k)$ tal que U_0 tiene k-dimensión finita. Para un anillo R, $\mathrm{Mod}\, R$ denota la categoría de todos los R-módulos finitamente generados.
Una categoría $\mathrm{rep}(\mathcal{S},k)$ tiene **tipo representación fuertemente salvaje** si existe un $N \in \mathrm{rep}(\mathcal{S},k\langle x,y\rangle)$, tal que $\mathrm{End}_{k\langle x,y\rangle}N = \mathrm{End}_k N$ y el funtor $F_N : \mathrm{Mod}\, k\langle x,y\rangle \to \mathrm{rep}(\mathcal{S},k)$ preserva indescomponibles y refleja isomorfismos. De lo anterior tenemos que si $\mathrm{rep}(\mathcal{S},k)$ tiene tipo representación fuertemente salvaje, entonces tiene tipo representación salvaje, ya que $\mathrm{mod}\, k\langle x,y\rangle$ es una subcategoría completa de $\mathrm{Mod}\, k\langle x,y\rangle$.
Todas las variaciones de las definiciones de tipo representación salvaje son equivalentes para $\mathrm{rep}(\mathcal{S},k)$.

Proposición 1.45. *Sea $\mathcal{S}$ un poset finito y k un cuerpo. Las siguientes proposiciones son equivalentes.*

(a) $\mathrm{rep}(\mathcal{S},k)$ *tiene tipo representación completamente salvaje,*

(b) $\mathrm{rep}(\mathcal{S}, k)$ *tiene tipo representación salvaje,*

(c) $\mathrm{rep}(\mathcal{S}, k)$ *tiene tipo representación fuertemente salvaje.*

Demostración. Véase [2], Proposición 1.4.5. $\square$

Capítulo 2

Entropía algebraica

En este capítulo introduciremos la noción de ϕ-trayectoria de un subgrupo finito F de un grupo abeliano G para definir el concepto de entropía algebraica de G, donde $\phi \in \operatorname{End} G$. Así mismo consideramos un endomorfismo ϕ de un espacio vectorial y plateamos la definición de entropía algebraica en esta estructura. Nuestras principales referencias son [4] y [5].

2.1. Entropía algebraica para grupos abelianos

Definición 2.1. Sea G un grupo abeliano. Consideremos

$$\mathcal{F}(G) = \{F \leq G \mid |F| < \infty\},$$

la familia de subgrupos finitos de G.

Si $\phi \in \operatorname{End} G$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y $F \in \mathcal{F}(G)$, definimos

$$T_n(\phi, F) = F + \phi F + \phi^2 F + \cdots + \phi^{n-1} F$$

Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ tenemos que $T_{n+1}(\phi, F) = F + \phi F + \phi^2 F + \cdots + \phi^{n-1} F + \phi^n F$, de donde $T_{n+1}(\phi, F) = T_n(\phi, F) + \phi^n F$, luego aplicando el primer teorema de isomorfismo, tenemos que

$$\frac{T_{n+1}(\phi, F)}{T_n(\phi, F)} \simeq \frac{\phi^n F}{T_n(\phi, F) \cap \phi^n F}.$$

Al subgrupo de G,

$$T(\phi, F) = \sum_{n>0} T_n(\phi, F) = \sum_{n\geq 0} \phi^n F,$$

lo llamaremos la **ϕ-trayectoria** de F.

Observación 2.2. (a) La ϕ- trayectoria de un elemento $x \in G$ es la ϕ- trayectoria del grupo cíclico $x\mathbb{Z}$, lo notaremos $T(\phi, x)$.

(b) La ϕ- trayectoria de un grupo finito F es finita si, y sólo si, la ϕ- trayectoria de cada $x \in F$ es finita.

Para cada $n \geq 1$, consideremos $\tau_n = |T_n(\phi, F)|$, de la manera como está definido $T_n(\phi, F)$, tenemos que $T_n(\phi, F)$ es un subgrupo de $T_{n+1}(\phi, F)$, para todo $n \geq 1$, luego por el teorema de Lagrange $\tau_n | \tau_{n+1}$. Para todo $n \geq 1$, notemos el cociente entre τ_{n+1} y τ_n de la siguiente manera

$$\alpha_{n+1} = \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} = \left| \frac{T_{n+1}(\phi, F)}{T_n(\phi, F)} \right| = \left| \frac{\phi^n F}{T_n(\phi, F) \cap \phi^n F} \right|.$$

Lema 2.3. *Para cada $n > 1$, α_{n+1} divide a α_n en $\mathbb{N}$.*

Demostración. Tenemos que el grupo $\phi^n F / T_n(\phi, F) \cap \phi^n F$ es un cociente del grupo $B_n = \phi^n F / T_{n-1}(\phi, F) \cap \phi^n F$, pues $T_{n-1}(\phi, F) \cap \phi^n F$ está contenido en $T_n(\phi, F) \cap \phi^n F$, de donde α_{n+1} divide a $\beta_{n+1} = |B_n|$. Como $\phi T_n(\phi, F) = \phi(F + \phi F + \phi^2 F + \cdots + \phi^{n-2} F + \phi^{n-1} F) = \phi F + \phi^2 F + \phi^3 F + \cdots + \phi^{n-1} F + \phi^n F$, de donde $\phi T_n(\phi, F) = \phi T_{n-1}(\phi, F) + \phi F$, así tenemos que

$$B_n \simeq \frac{\phi T_{n+1}(\phi, F)}{\phi T_n(\phi, F)} \simeq \frac{T_n(\phi, F)}{T_{n-1}(\phi, F) + (T_n(\phi, F) \cap \ker \phi)}.$$

Ya que el último grupo es un cociente de $T_{n+1}(\phi, F) / T_n(\phi, F)$, luego β_{n+1} divide a α_n. Por lo tanto α_{n+1} divide a α_n. $\square$

Corolario 2.4. *La sucesión $0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ es estacionaria o $\tau_{n+1} = \tau_n \alpha$, para algún entero $\alpha > 1$, para todo n suficientemente grande. En particular $|T_n(\phi, F)| = a_0 \alpha^{n-k}$, para todo n suficientemente grande, donde a_0 y k solo dependen de F.*

Demostración. De la definición de α_{n+1}, la sucesión $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots$ es una función decreciente, además $\{\alpha_n\}$ es acotada por 1, pues cada α_n es el cardinal de un grupo cociente, así la sucesión converge para algún $\alpha \geq 1$. Si $\alpha = 1$, $\alpha_{n+1} = \alpha_n$, para n suficientemente grande, si $\alpha > 1$, $\alpha_n = \alpha$, para n suficientemente grande, de donde $\tau_{n+1} / \tau_n = \alpha$, es decir, $\tau_{n+1} = \tau_n \alpha$. Finalmente $\tau_{n+1} = \tau_n \alpha = \tau_{n-1} \alpha^2 = \tau_{n-2} \alpha^3 = \cdots = \tau_{n-k-1} \alpha^{n-k}$, por lo tanto $|T_n(\phi, F)| = a_0 \alpha^{n-k}$. $\square$

Sean $F \in \mathcal{F}(G)$ y $\phi \in \operatorname{End} G$. Para cada $n \geq 1$, definimos el número real

$$H_n(\phi, F) = \log |T_n(\phi, F)|.$$

Como $\{\tau_n\}$ es una sucesión creciente, entonces tenemos la siguiente sucesión creciente

$$0 < H_1(\phi, F) \leq H_2(\phi, F) \leq H_3(\phi, F) \leq \cdots$$

Luego definimos

$$H(\phi, F) = \lim_{n \to \infty} \frac{H_n(\phi, F)}{n}$$

Proposición 2.5. *Sean $F \in \mathcal{F}(G)$ y $\phi \in \operatorname{End} G$. Entonces* *(a) Si la ϕ-trayectoria de F es finita, $H(\phi, F) = 0$,*

(b) Si la ϕ-trayectoria de F es infinita $H(\phi, F) = \log \alpha$, donde $\alpha = \left|\frac{T_{n+1}(\phi,F)}{T_n(\phi,F)}\right|$, para n suficientemente grande.

Demostración. Véase [4], Proposición 1.3. □

Observación 2.6. Del hecho que $T_n(\phi, F) \leq F + T_n(\phi, \phi F)$ y $T_n(\phi, \phi F) \leq T_{n+1}(\phi, F)$, tenemos que $H(\phi, F) = H(\phi, \phi F)$.

Definimos la **entropía algebraica** del endomorfismo ϕ de G como

$$\operatorname{ent}\phi = \sup_{F\in\mathcal{F}(G)} H(\phi, F)$$

y la **entropía algebraica** del grupo G como

$$\operatorname{ent} G = \sup_{\phi\in\operatorname{End} G} \operatorname{ent}\phi$$

Lema 2.7. *Para todo subgrupo finito F de un grupo abeliano G. Si $G_F = T(\phi, F)$ es la ϕ-trayectoria de F entonces la entropía $\operatorname{ent}\phi = \sup_{F\in\mathcal{F}(G)} \operatorname{ent}\phi|_{G_F}$.*
Además, si la $\operatorname{ent}\phi$, entonces la $\operatorname{ent}\phi = H(\phi, F_0)$ para un subgrupo finito F_0 conveniente de G.

Demostración. Véase [4], Lema 1.4. □

Lema 2.8. *Sea $\phi \in \operatorname{End} G$, donde G es un grupo de torsión, H un subgrupo ϕ-invariante de G y $\overline{\phi} : G/H \to G/H$ el endomorfismo inducido. Si $\operatorname{ent}\overline{\phi} = 0$, entonces la entropía de $\operatorname{ent}\phi = \operatorname{ent}\phi|_H$.*

Demostración. Véase [4], Lema 1.5. □

Como consecuencia del lema 3.7 tenemos la siguiente proposición

Proposición 2.9. *Si un grupo G es igual al límite directo de subgrupos $\{G_i : i \in I\}$ ϕ-invariantes donde $\phi \in \operatorname{End} G$, entonces*

$$\operatorname{ent}\phi = \sup \operatorname{ent}\phi|_{G_i}$$

Además, si $\operatorname{ent}\phi < \infty$ entonces la $\operatorname{ent}\phi = \operatorname{ent}\phi|_{G_i}$ para algún $i \in I$.

Demostración. Véase [4], Porposición 1.6. □

Lo anterior es útil cuando el grupo de torsión G está dado como unión de sus subgrupos invariantes plenos $G[n!]$, de donde el anterior resultado puede tomar la forma

$$\operatorname{ent}\phi = \sup_n \operatorname{ent}\phi|_{G[n!]}$$

El siguiente resultado nos permite deshacernos de los subgrupos finitos ϕ-invariantes.

Proposición 2.10. *Sea G un grupo abeliano, $\phi \in \operatorname{End} G$ y K un subgrupo finito ϕ-invariante de G. Entonces $\operatorname{ent}\phi = \operatorname{ent}\overline{\phi}$ donde $\overline{\phi}$ es el endomorfismo inducido de G/K.*

Demostración. Véase [4], Proposición 1.7. □

Veamos algunos ejemplos de endomorfismos con cero, positiva e infinita entropía algebraica.

Ejemplo 2.11. *Dado un grupo arbitrario G, el endomorfismo inducido por la multiplicación por un entero n, tiene entropía algebraica cero, pues $nH \leq H$, para todo subgrupo H de G.*

Ejemplo 2.12. *(a) Sea K un grupo finito y $G = \bigoplus_{i\geq 1} K_i$, donde $K_i \cong K$, para todo i. Sea*

$$\sigma_K : G \to G, \quad (k_1, k_2, \dots) \mapsto (0, k_1, k_2, \dots), \quad \text{con } k_i \in K_i$$

el ***endomorfismo de desplazamiento de Bernoulli****.*
Calculemos la entropía de σ_K. Si $F = K_1$, entonces para cada $n \geq 1$, tenemos que $H_n(\sigma_K, F) = \log|\bigoplus_{i\leq n} K_i| = \log|K|^n = n\log|K|$, de donde $H(\sigma_K, F) = \log|K|$, así $\operatorname{ent}\sigma_K \geq \log K$. Por otra parte, por la forma como está definido G, tenemos que $T(\sigma_K, K_1) = G$, de aquí, $\operatorname{ent}\sigma_K = H(\sigma_K, K_1) = \log|K|$.

(b) El resultado anterior también se tiene en el caso cuando K es un grupo de torsión infinito si convenimos que $\log|K| = \infty$.

(c) Consideremos ahora el desplazamiento ***izquierdo*** *$\overleftarrow{\sigma_K}$ definido por $\overleftarrow{\sigma_K}(k_1, k_2, \dots) = (k_2, k_3, \dots)$ tenemos que su entropía siempre es cero, sin importar el tamaño de K, ya que todas las trayectorias de $\overleftarrow{\sigma_K}$ son finitas.*

Ejemplo 2.13. *Sea B el p-**grupo básico estándar**, $B = \bigoplus_{n\geq 1}\langle b_n\rangle$, donde $b_n = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, para todo n y sea $\sigma : B \to B$ el endomorfismo definido por $\sigma(b_n) = pb_{n+1}$, para todo n.*
Fijemos un entero positivo r. Para $n \geq 1$, se tiene que $H_n(\sigma, \langle b_n\rangle) = \log p^{rn} = n\log p^r$, de donde $H(\sigma, \langle b_n\rangle) = \log p^r$. De aquí, se sigue que $\operatorname{ent}\sigma \geq \sup_r \log p^r = \infty$.

Proposición 2.14. *Sea $\phi : G \to G$ y $\psi : G' \to G'$ endomorfismos de grupos G y G' respectivamente, entonces*

(a) Si $\phi : G \to G$ y $\psi : G' \to G'$ son endomorfismos conjugados de grupos isomorfos G y G', es decir, existe un isomorfismo $\theta : G \to G'$, tal que $\theta\phi = \psi\theta$, entonces $\operatorname{ent}\phi = \operatorname{ent}\psi$.

(b) Para todo entero no negativo k, $\operatorname{ent}\phi^k = k \cdot \operatorname{ent}\phi$. Si ϕ es un automorfismo, $\operatorname{ent}\phi^k = |k| \cdot \operatorname{ent}\phi$, para todo entero k.

(c) Si $\phi \oplus \psi$ denota el endomorfismo de $G \oplus G'$, el cual es la suma directa de ϕ y ψ, entonces $\operatorname{ent}(\phi \oplus \psi) = \operatorname{ent}\phi + \operatorname{ent}\psi$.

(d) *Si* $t(G)$ *denota el subgrupo de torsión de* G*, entonces* $\operatorname{ent}\phi = \operatorname{ent}\phi|_{t(G)}$*. En particular,* $\operatorname{ent}\phi = 0$ *si* G *es un grupo libre de torsión.*

(e) *Si* $G = \bigoplus_p G_p$ *un grupo de torsión con* p*-componentes* G_p*, entonces* $\operatorname{ent}\phi = \sum_p \operatorname{ent}\phi_p$*, donde* ϕ_p *es la restricción de* ϕ_p *a* G_p *y la suma es tomada sobre todos los primos* p*.*

(f) *Si* G *es un grupo de torsión y* H *es un subgrupo* ϕ*-invariante de* G*, entonces* $\operatorname{ent}\phi \geq \operatorname{ent}\overline{\phi}$*, donde* $\overline{\phi} : G/H \to G/H$ *es el endomorfismo inducido.*

(g) *Si* H *es un subgrupo* ϕ*-invariante de* G *entonces* $\operatorname{ent}\phi \geq \operatorname{ent}\phi|_H$*.*

Demostración. Véase [18], Lema 1.1, Teorema 1.1, Proposición 1.2, Proposición 1.3, Proposición 1.4, Proposición 1.5. □

2.2. Entropía algebraica para espacios vectoriales

Sea $\phi : V \to V$ una transformación lineal de un espacio vectorial sobre un cuerpo k y un subespacio vectorial F de dimensión finita no nulo de V.

Definimos la **entropía algebraica de ϕ con respecto a F**, denotada por $H(\phi, F)$, es el comportamiento asintótico de las ϕ-trayectorias parciales de F, esto es,

$$H(\phi, F) = \lim_{n\to\infty} \frac{\dim(T_n(\phi, F))}{n}.$$

De la anterior definimos la **entropía algebraica de ϕ**, denotada por $\operatorname{ent}\phi$, es el supremo de las entropías algebraicas de ϕ con respecto a F, haciendo variar F sobre todos los subespacios vectoriales finitos de V, esto es,

$$\operatorname{ent}\phi = \sup_F H(\phi, F).$$

Veamos que la expresión anterior esta bien definida. Recordemos que una sucesión $\{a_n\}_n$ es subaditiva si $a_{n+m} \leq a_n + a_m$.

Proposición 2.15. *La sucesión* $\{\dim(T_n(\phi, F))\}_n$ *es subaditiva, entonces el límite*

$$H(\phi, F) = \lim_{n\to\infty} \frac{\dim(T_n(\phi, F))}{n}$$

existe y es igual a

$$\inf_{n\geq 0} \frac{\dim(T_n(\phi, F))}{n}.$$

Demostración. Véase [5], Proposición 2.8. □

Lema 2.16. *Para todo $n > 0$, sea*

$$\alpha_n = \dim\left(\frac{T_{n+1}(\phi, F)}{T_n(\phi, F)}\right)$$

la sucesión de enteros no negativos $\{\alpha_n\}_n$ es decreciente, y por lo tanto, estacionaria.

Demostración. Véase [5], Lema 2.9. □

Proposición 2.17. *Sea $\phi : V \to V$ una transformación lineal de un espacio vectorial V y F un subespacio finito dimensional de V. Entonces $H(\phi, F) = \alpha$, donde α es el valor de la sucesión estacionaria $\{\alpha_n\}_n$, para un n suficientemente grande. En particular, $H(\phi, F) = 0$ precisamente cuando la sucesión $\{\dim T_n(\phi, F)\}_n$ es estacionaria, equivalentemente cuando $\alpha_n = 0$, para un n suficientemente grande.*

Demostración. Véase [5], Proposición 2.10. □

Ejemplo 2.18. *(a) Sea k un cuerpo y $V = \bigoplus_{n\geq 0} kx_n$ un k-espacio vectorial con base contable $\{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots\}$. Sea*

$$\beta : V \longrightarrow V, \qquad x_n \mapsto x_{n+1}, \quad \textit{para cada} \quad n \geq 0,$$

***el desplazamiento derecho de Bernoulli**. Vamos a comparar el caos creado por β con respecto a otras transformaciones lineales de V.*
Si consideramos la transformación identidad 1_V claramente el caos formado par β es mayor que el caos creado por 1_V. Consideremos ahora la transformación lineal $\phi : V \to V$ dada por

$$x_0 \mapsto x_0,\ x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_1,\ x_3 \mapsto x_4 \mapsto x_5 \mapsto x_3,\ x_6 \mapsto x_7 \mapsto x_8 \mapsto x_9 \mapsto x_6$$

$$x_{10} \mapsto x_{11} \mapsto x_{12} \mapsto x_{13} \mapsto x_{14} \mapsto x_{10},\ x_{15} \mapsto x_{16} \mapsto x_{17} \mapsto x_{18} \mapsto x_{19} \mapsto x_{20} \mapsto x_{16}$$

Ya que para todo $x \in V$, existe un l tal que $\phi^l(x) = x$, podemos ver que para cualquier subespacio finito dimensional F de V, la ϕ-trayectoria de F es de dimensión finita, a diferencia de la β-trayectoria de kx_0 es todo el espacio V. Podemos concluir que β es más caótica que ϕ.

(b) Consideremos ahora la transformación lineal

$$\beta^2 : V \longrightarrow V, \qquad x_n \mapsto x_{n+2}, \quad \textit{para cada} \quad n \geq 0.$$

Tomemos el espacio finito dimensional $F = \bigoplus_{0\leq x\leq r} kx_i$ de V, para un r adecuado. Para todo $n \geq 0$, tenemos que

$$\dim(F + \beta F + \beta^2 F + \beta^3 F + \cdots + \beta^n F) = r + n$$

y

$$\dim(F + \beta^2 F + \beta^4 F + \beta^6 F + \cdots + \beta^{2n} F) = r + 2n,$$

de donde

$$H(\beta, F) = \lim_{n\to\infty} \frac{\dim(F + \beta F + \beta^2 F + \beta^3 F + \cdots + \beta^n F)}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{r+n}{n+1} = 1$$

y

$$H(\beta, F) = \lim_{n\to\infty} \frac{\dim(F + \beta^2 F + \beta^4 F + \beta^6 F + \cdots + \beta^{2n} F)}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{r+2n}{n+1} = 2.$$

Por lo tanto, podemos concluir que β^2 crea más caos que β.
Como r es arbitrario, $H(\beta, F) = 1$, de donde $\mathrm{ent}\,\beta = 1$. *Por otra parte, si consideramos β^2, se tiene que $V = T(\beta, x_1) \oplus T(\beta, x_2)$. Así,* $\mathrm{ent}\,(\beta^2|_{T_i}) = 1$, *para $i = 1, 2$ y* $\mathrm{ent}\,\beta^2 = \mathrm{ent}\,\beta^2|_{T_1} + \mathrm{ent}\,\beta^2|_{T_2}$. *Por lo tanto, la* $\mathrm{ent}\,\beta^2 = 2$.

(c) *Continuando con el anterior ejemplo, si consideramos ahora $W = \bigoplus_{n\geq 0}$ con $V_n = V$, para todo $n \geq 0$, y colocando $\beta(v_0, v_1, v_2, \dots) = (0, v_0, v_1, v_2 \dots)$, entonces* $\mathrm{ent}\,\beta = \mathrm{ent}\,V$.

(d) *Invirtiendo las flechas, podemos considerar el* ***desplazamiento izquierdo de Bernoulli***

$$\lambda : W \longrightarrow W, \qquad (v_0, v_1, v_2, \dots) \mapsto (v_1, v_2, v_3, \dots).$$

Para un subespacio finito dimensional F de W, tenemos que $\lambda^r(F) = 0$, para un entero positivo r conveniente, de donde $H(\lambda, F) = 0$, independientemente de F, así $\mathrm{ent}\,\lambda = 0$.

2.2.1. Propiedades elementales de la entropía algebraica

Proposición 2.19. *Sea $\phi : V \to V$ una transformación lineal y $\alpha : V \to W$ un isomorfismo entre espacios vectoriales. Entonces* $\mathrm{ent}\,\phi = \mathrm{ent}\,(\alpha\phi\alpha^{-1})$.

Demostración. Véase [5], Proposición 3.1. □

Lema 2.20. *Sea $\phi : V \to V$ una transformación lineal y W un espacio ϕ-invariante de V. Entonces* $\mathrm{ent}\,\phi \geq \mathrm{ent}\,(\phi|_W) + \mathrm{ent}\,\overline{\phi}$, *donde $\overline{\phi} : V/W \to V/W$ es la transformación lineal inducida por ϕ.*

Demostración. Véase [5], Lema 3.2. □

Proposición 2.21. *Sea $\phi : V \to V$ una transformación lineal. Si ϕ es el límite directo de subespacios ϕ-invariantes V_σ, entonces* $\mathrm{ent}\,\phi = \sup_\sigma \mathrm{ent}\,(\phi|_{V_\sigma})$.

Demostración. Véase [5], Proposición 3.3. □

Proposición 2.22. *Sea $\phi : V \to V$ una transformación lineal. Entonces* $\mathrm{ent}\,\phi^k = k \cdot \mathrm{ent}\,\phi$, *para todo $k \geq 0$. Si ϕ es un automorfismo, entonces* $\mathrm{ent}\,\phi = \mathrm{ent}\,\phi^{-1}$; *en particular* $\mathrm{ent}\,\phi = |k|\mathrm{ent}\,\phi$, *para todo entero k.*

Demostración. Véase [5], Proposición 3.4. □

Lema 2.23. *Si* $V = V_1 \oplus V_2$ *para ciertos subespacios* V_1, V_2 *de* V *y* $\phi = \phi_1 \oplus \phi_2 : V \to V$, *para algunas transformaciones lineares* $\phi_i : V_i \to V_i$, *entonces* $\operatorname{ent}\phi = \operatorname{ent}\phi_1 + \operatorname{ent}\phi_2$

Demostración. Véase [5], Lema 3.5. □

2.3. Entropía algebraica de un poset

En esta sección construiremos la definición de entropía algebraica de un poset $\mathcal{P}$ [3], utilizando conceptos análogos a los presentados en la construcción de entropía de un grupo abeliano y un espacio vectorial.

Definición 2.24. Sea $\mathcal{F} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una colección de representaciones indescomponibles de un poset finito $\mathcal{P}$, $M = \sum_{\alpha \in I} U_\alpha$ y $M_{\mathcal{F}} = \{V \in \operatorname{rep}(\mathcal{P}, k) \,/\, V = \sum_{t \in J \subseteq I} U_t\}$, entonces si $\phi \in \operatorname{End} M$ la ϕ-trayectoria de $V \in M_{\mathcal{F}}$ denotada por $T(\phi, V)$ la definimos de la siguiente manera

$$T(\phi, V) = \sum_{n>0} T_n(\phi, V),$$

donde

$$T_n(\phi, V) = V + \phi V + \phi^2 V + \cdots + \phi^{n-1} V.$$

Consideremos lo siguiente

$$(d_n, V) = \dim T_n(\phi, V),$$

$$L_n(\phi, V) = \log(\mu(d_n, V)),$$

$$L(\phi, V) = -\lim_{n \to \infty} \frac{L_n(\phi, V)}{n}, \quad \text{la entropía de } \phi \text{ con respecto a } V.$$

La **entropía de un endomorfismo** $\phi : M \to M \in \operatorname{rep}\mathcal{P}$ de un poset finito $\mathcal{P}$, lo definimos de la siguiente forma

$$\operatorname{ent}(\mathcal{P}, \phi) = \sup_{V \in M_{\mathcal{F}}} L(\phi, V).$$

La **entropía** $\operatorname{ent}\mathcal{P}$ **de un poset finito** $\mathcal{P}$ es

$$\operatorname{ent}\mathcal{P} = \sup_{\phi \in \operatorname{End} M} \operatorname{ent}(\mathcal{P}, \phi), \quad \text{donde } M \in \operatorname{rep}\mathcal{P}.$$

Teorema 2.25. *Si* $\mathcal{P}$ *es un poset finito, entonces* $\operatorname{ent}\mathcal{P}$ *es 0 o* ∞.

Demostración. Si $\mathcal{P}$ es de representación de crecimiento de tipo finito entonces $\sup_d \mu(d) = 1$, por lo tanto $\operatorname{ent}\mathcal{P} = 0$, si $\mathcal{P}$ es de representación de crecimiento de tipo infinito entonces $0 < \mu(d) < \infty$, para cada dimensión d, así $\operatorname{ent}\mathcal{P} = 0$. Por otra parte, si $\mathcal{P}$ es de representación de tipo salvaje entonces $\mathcal{P}$ es de representación de tipo infinita y $\mu(d) = 0$, para cada dimensión d. Así, $\operatorname{ent}\mathcal{P} = \infty$. □

Corolario 2.26. $\operatorname{ent}\mathcal{P} = 0$ *si, y sólo si,* $\mathcal{P}$ *es de tipo representación manso.*

Demostración. Si $\mathcal{P}$ es salvaje, entonces $\operatorname{ent}\mathcal{P} = \infty$. Por otra parte, si $\mathcal{P}$ es de tipo representación manso, entonces utilizando argumentos análogos al teorema 3.2 podemos concluir que $\operatorname{ent}\mathcal{P} = 0$. □

Corolario 2.27. *Si* $\mathcal{P}$ *es un poset con un par conveniente de puntos* (a, b) *entonces* $\operatorname{ent}\mathcal{P} = \operatorname{ent}\mathcal{P}'_{(a,b)}$.

Demostración. El teorema se deduce de 1.33, 1.35. y 1.36. □

Conclusiones y recomendaciones

Conclusiones

En el desarrollo de este trabajo, se estudió la noción de entropía algebraica sobre un poset finito, concepto similar a lo descrito en [4] y [5], con lo cual se obtiene que la medida de entropía está relacionada con la clasificación de posets de representación tipo finito y manso, además se logra determinar que la entropía algebraica es invariante bajo la diferenciación de un posetcon respecto a dos puntos convenientes.

Recomendaciones

Durante la realización de este trabajo surgieron algunas cuestiones que podrían considerarse en trabajos futuros.

- Construir una definición de entropía algebraica de un poset de tal forma que logre clasificar con respecto a su valor el tipo de representación de un poset (finito, manso o salvaje).
- Determinar el comportamiento de la entropía algebraica bajo acción de diferentes algoritmos de diferenciación.
- Definir la noción de entropía algebraica en posets con estructuras adicionales.

Bibliografía

[1] R. L. Adler, A. G. Konheim, M. H. McAndrew *Topological Entropy.* Trans. Amer. Math. Soc. 114 309-319, 1965.

[2] D. Arnold, *Abelian groups and Representations of Finite Partially Ordered Sets.* Springer. Canadian Mathematical Society. 2000.

[3] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 2. Categories and Structures.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1994.

[4] D. Dikrajan, B. Goldsmith, L. Salce, P. Zanardo, *Algebraic entropy for Abelian groups .* Dublin Institute of Technology. School of Mathematics. 2009.

[5] A. Giordano, L. Salce, *A soft introduction to algebraic entropy.* Springer. Arabian Journal of Mathematics. 2010.

[6] M. Hazewinkel, N. Gubareni, V. Kirichenko, *Algebras, Rings and Modules. Volume 2.* Springer. Mathematics and its applications. 2007.

[7] M.M. Kleiner *Partially ordered sets of finite type.* Zap. Nauchn. Semin. LOMI 28 (1972), 32-41 (in russian); English transl., J. Sov. Math. 3 (1975), No. 5,607-615.

[8] S. Maclane, *Categories for the Working Mathematician.* Graduate Texts in Mathematics 5. Springer-Verlag, New York, 1971.

[9] A. Moreno, A. M. Sora, M. A. Osorio, *Entropy of a poset.* Far East Journal of Mathematical Science (FJMS), Volume 89, Number 2, 2014, 191-215.

[10] A. Moreno, *Descripción categórica de algunos algoritmos de diferenciación.* Tesis de doctorado 2013. Universidad Nacional de Colombia.

[11] L.A. Nazarova, A.V. Roiter *Partially ordered sets of infinite type,* Izv. AN SSSR, Ser. Mat. 39 (1975), No 5, 963-991 (in russian); English transl., Math. USSR Izvestia 9 (1975), 911-938.

[12] L.A. Nazarova, A.V. Roiter *Representation of partially ordered sets* Zap. Nauchn. Semin. LOMI 28 (1972), 5-13 (in russian); English transl., J. Sov. Math. 3 (1975), 585-606.

[13] L.A. Nazarova, A.G. Zavadskij *Partially ordered sets of tame type,* Akad. Nauk Ukrain. SSR Inst. Mat., Kiev (1977), 122-143 (Russian).

[14] L.A. Nazarova, A.G. Zavadskij *Partially ordered sets of finite growth,* Function Anal. i Prilozhen., 19 (1982), no.2 72-73 (in russian); English tranl., Functional. Anal. Appl., 16 (1982), 135-137.

[15] J. Peters, *Entropy of Discrete Abelian Groups.* Adv. Math. 33 (1979), 1-13.

[16] J. Peters, *Entropy of automotphism on LCA groups.* Pacific J. Math. 96(2) (1981), 475-488.

[17] D. Simson, *Linear Representations of Partially Ordered Sets and Vector Space Categories*, Gordon and Breach, London, 1992.

[18] M. D. Weiss, *Algebraic and another entropies of group endomorphism.* Math. Systems Theory. 8 (1974/75), no 3, 243-248.

[19] A.G. Zavadskij *On two point differentiation and its generalization,* Algebraic Structures and their Representations, AMS, Contemporary Math. Ser. 376 (2005).