

UNIVERSIDAD  
**NACIONAL**  
DE COLOMBIA

# Estimadores robustos de localización en Fase I basados en esquemas CUSUM

Felipe Calvo Cepeda

Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá  
Facultad de Ciencias — Departamento de Estadística  
Bogotá, Colombia  
2017

# Estimadores robustos de localización en Fase I basados en esquemas CUSUM

Felipe Calvo Cepeda

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:  
**Magíster en Ciencias - Estadística**

Director:

José Alberto Vargas Navas Ph.D.

Grupo de Investigación:

Control Estadístico de Procesos

Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá  
Facultad de Ciencias — Departamento de Estadística  
Bogotá, Colombia  
2017

Cuanto más aprendemos, más dudas tenemos, no porque sepamos menos sino porque empezamos a darnos cuenta de todo lo que ignoramos.

The more we learn, the more doubts we have, not because we know less but because we begin to realize everything we ignore.

# Agradecimientos

A mi familia: mi mamá Liliana, mi papá Elmer, mi hermana Nathaly, mi hermano Sergio, mis abuelas Lucila y Erenia (Q.E.P.D) y a mi abuelo José (Q.E.P.D), y a personas muy apreciadas para mí: Daniel Giraldo, Sebastián Gutierrez, Luis Alejandro Sandoval, Jerson Lizarazo, Stefano Rojas, Santiago García, Andrés Manrique y David Díaz, por sus consejos, paciencia y por estar siempre ahí para escucharme y apoyarme.

Quiero también agradecer a los docentes que me apoyaron durante el transcurso de los estudios de maestría y el desarrollo de esta tesis:

Al Profesor Jose Alberto Vargas Navas Ph.D., por aceptar dirigir este trabajo y orientarme con sus conocimientos y consejos durante el transcurso completo de los estudios de maestría.

Al Profesor Carlos Eduardo Moreno Mantilla Ph.D., por transmitirme parte de sus conocimientos en metodologías de investigación y por aconsejarme e inspirarme durante el curso de mis estudios de pregrado y de los estudios de maestría.

Al Profesor Jose Ismael Peña Reyes Ph.D., por apoyar mis proyectos de formación extracurricular y profesional desde la Decanatura de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia Sede Bogotá.

A los Profesores Ruben Darío Guevara Gonzalez Ph.D. y Carlos Arturo Panza Ospino M.Sc. por sus acertadas sugerencias y comentarios actuando como evaluadores del proyecto que orientó el desarrollo final de esta tesis.

## Resumen

En la práctica, la implementación de cartas de control en Fase II está basada en la estimación de los parámetros del proceso que se realiza sobre un conjunto histórico de datos recolectado de una característica de calidad de interés. Los datos en Fase I pueden contener observaciones no aceptables, lo cual afecta el monitoreo en línea en Fase II. Este trabajo presenta un método de estimación basado en el uso de cartas CUSUM en Fase I y lo compara con diferentes estimadores potencialmente relevantes dentro del proceso de estimación en Fase I. Se presenta un estudio en Fase I evaluado en términos de la precisión de las estimaciones obtenidas y de las proporciones de muestras correctamente identificadas como no aceptables. Adicionalmente se evalúa el impacto de los métodos de estimación estudiados en el desempeño de una carta de control CUSUM en Fase II.

**Palabras clave:** control estadístico de procesos, cartas de control CUSUM, estimación robusta..

## Abstract

In practice, the implementation of control charts in Phase II is based on parameters estimated from historical data on a quality characteristic. Phase I data could contain unacceptable data, which in turn could affect Phase II monitoring. This paper presents an estimation method based on the use of CUSUM control charts in Phase I and compares it with different potentially relevant estimators within the estimation process in Phase I. This paper presents a Phase I study evaluated in terms of the accuracy of the resulting estimates and the proportion of samples correctly identified as unacceptable. Additionally, the impact of the estimation methods is evaluated on the performance of a CUSUM control chart in Phase II.

**Keywords:** statistical process control (SPC), CUSUM control charts, robust estimation.

# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>IV</b>
<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>Lista de símbolos</b>	<b>VIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Cartas de control</b>	<b>3</b>
2.1. Carta CUSUM . . . . .	5
<b>3. Métodos de estimación en Fase I</b>	<b>8</b>
3.1. Estimadores puntuales . . . . .	8
3.1.1. Gran media . . . . .	9
3.1.2. Mediana de las medias . . . . .	9
3.1.3. Media del estimador de Hodges-Lehmann . . . . .	9
3.1.4. Media del estimador Trimean . . . . .	9
3.2. Método de punto de cambio . . . . .	10
3.3. Método de screening . . . . .	11
3.3.1. Estimadores robustos iniciales . . . . .	12
3.3.2. Valor de referencia ( $k$ ) e intervalo de decisión ( $h$ ) . . . . .	12
3.3.3. Fast Initial Response — FIR . . . . .	14
3.3.4. Diseño CUSUM . . . . .	14
<b>4. Estudio en Fase I</b>	<b>16</b>
4.1. Escenarios de datos . . . . .	16
4.2. Precisión de la estimación . . . . .	17
4.3. Probabilidad de detección en Fase 1 . . . . .	21
<b>5. Desempeño en Fase II</b>	<b>25</b>
5.1. Diseño de la carta CUSUM para Fase II . . . . .	25
5.2. Medidas de desempeño y procedimiento de simulación . . . . .	26
5.3. Resultados de la Fase II . . . . .	27

---

<b>6. Conclusiones y recomendaciones</b>	<b>32</b>
6.1. Conclusiones . . . . .	32
6.2. Recomendaciones y trabajo futuro . . . . .	33
<b>A. Anexo: Comparación del TAP y FAP en escenarios de cambios sostenidos con FIR=0 versus FIR=H/2</b>	<b>35</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>36</b>

# Lista de símbolos

## Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Unidad SI
$k$	Número de muestras	1
$n$	Tamaño de muestra	1
$K$	Valor de referencia de una carta CUSUM	1
$H$	Intervalo de decisión de una carta CUSUM	1
$S_H$	Suma acumulada superior de una carta CUSUM de dos lados	1
$S_L$	Suma acumulada inferior de una carta CUSUM de dos lados	1
$Z_k$	Valor estandarizado de la carta CUSUM para la k-ésima muestra	

## Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidad SI
$\mu$	Parámetro de localización de la distribución normal	1
$\sigma^2$	Parámetro de dispersión de la distribución normal	1
$\tau$	Punto de partición de subconjuntos en el método de punto de cambio	1
$\delta$	Magnitud de cambio en la contaminación de procesos normales	1

## Abreviaturas

Abreviatura	Término
SPC	Control estadístico de procesos
SPM	Monitoreo estadístico de procesos



---

<b>Abreviatura</b>	<b>Término</b>
LCS	Límite de control superior
LCI	Límite de control inferior
IC	Bajo control
RL	Longitud de corrida
ARL	Longitud promedio de corrida
FIR	Respuesta inicial rápida
FAP	Probabilidad de falsas alarmas
FAP	Tasa de falsas alarmas
TAP	Porcentaje de falsas alarmas
MSE	Error cuadrático medio

# 1. Introducción

La gestión de la calidad ha pasado a formar parte de las estrategias de negocio más importantes para las organizaciones, las cuales se encuentran cada vez más expuestas a dinámicas desafiantes impulsadas por el libre mercado, la globalización, la apertura económica y más recientemente por los retos emergentes de mejorar las relaciones industriales en búsqueda de un mundo sustentable.

Así mismo, los clientes tienen cada vez más un mayor acceso a tecnologías de información y comunicación que les permiten informarse sobre los productos que adquieren: materias primas, el proceso de fabricación, las propiedades y características que permiten satisfacer unas necesidades expresadas o implícitas, hasta el precio de otros productos sustitutos.

En consecuencia, la calidad se perfila como una ventaja competitiva que hay que asegurar de manera transversal en todos los procesos comprendidos en la cadena de valor de una organización. Las especificaciones que se diseñen (o que se exijan por una normativa legal) para un producto o servicio se deben alcanzar, reduciendo el número de defectos y la variabilidad en las características claves de la calidad.

El control estadístico de procesos (denotado en inglés por las siglas SPC, correspondientes a *statistical process control*) comprende una colección de técnicas y métodos utilizados extensivamente para monitorear y mejorar la calidad de procesos (Stoumbos et al. (2000)), tanto de bienes o productos manufacturados como a los asociados a sistemas transaccionales y de servicios. De estas técnicas, las cartas de control son las más importantes.

La primera carta de control fue desarrollada por Shewhart (1926), una carta sin memoria diseñada para monitorear la media de un proceso. Teniendo en cuenta que en aplicaciones prácticas del monitoreo estadístico de procesos (denotado en inglés por las siglas SPM, correspondientes a *statistical process monitoring*) se tiene como objetivo detectar cambios en el rendimiento de un proceso tan rápido como sea posible, Page (1954) propone la primera carta de control con memoria conocida como CUSUM (sumas acumuladas) que permite detectar “cambios pequeños o persistentes” en la media de un proceso, más rápido que una carta Shewhart (Vargas (2006)).

Otra carta con memoria usualmente utilizada en SPC es la carta de control de promedios

móviles con ponderación exponencial (EWMA) desarrollada por Roberts (1959), la cual al igual que la CUSUM, usan información pasada y actual para ser sensibles a pequeños y moderados cambios en los parámetros del proceso.

Es generalmente aceptado en la literatura que una carta de control es implementada en dos fases, Fase I y Fase II, dos pasos fundamentales para monitorear estadísticamente procesos haciendo uso de cartas de control (Woodall et al. (2004)). En la Fase I la mayor preocupación es evaluar la estabilidad del proceso y obtener estimaciones de sus parámetros considerando un escenario bajo control. En la Fase II se monitorea el proceso mediante datos obtenidos en tiempo real para detectar cambios en los parámetros bajo control tan rápido como sea posible. La probabilidad de determinar que un proceso es inestable es la medida de evaluación de los métodos para Fase I, en cambio, en la Fase II se utilizan longitudes promedio de corrida (denotado en inglés por las siglas ARL, correspondientes a *average run length*) con el propósito de comparar el rendimiento de varias cartas de control cuando se asume que se ha presentado un cambio en los parámetros del proceso.

Tal como destacan Jones-Farmer et al. (2014) uno de los mayores problemas en el desarrollo de la Fase I es la posibilidad de encontrar datos no aceptables en la medida que pueden generar un impacto en el rendimiento en Fase II. En este trabajo se estudiarán diferentes métodos para estimación de los parámetros de localización bajo esquemas CUSUM, evaluando su efectividad en Fase I y su impacto en Fase II en el rendimiento de una carta de control CUSUM dada la condición que en Fase I se pueden tener datos atípicos y cantidades reducidas de datos.

En particular, se evaluará la utilidad de la incorporación de los procedimientos de *screening* esquematizados por Zwetsloot et al. (2014) y Zwetsloot (2016) para estimar los parámetros del proceso en Fase I usando esquemas CUSUM.

En el capítulo 2 se presenta una breve descripción de qué son las cartas de control, con un apartado especial para los esquemas CUSUM que se abordarán a lo largo del trabajo. El capítulo 3 describe los métodos de estimación en Fase I que serán evaluados para el posterior estudio en Fase I presentado en el capítulo 4, el cual será conducido a través de simulaciones Monte Carlo. Con base en los resultados obtenidos del estudio en Fase I, en el capítulo 5 se evalúa nuevamente a través de simulaciones el desempeño de los esquemas CUSUM trabajados en Fase II. Finalmente, en el capítulo 6 se presentan algunas conclusiones y recomendaciones.

## 2. Cartas de control

Lograr cumplir o exceder las necesidades y expectativas del cliente en un producto requiere procesos estables. Sin embargo, en todos los procesos productivos existe cierta variabilidad inherente o natural (Montgomery (2009)). En SPC se suele hablar de causas de variabilidad **fortuitas** o naturales, producto del efecto acumulado de muchas causas pequeñas y en esencia inevitables; por otro lado, se habla de causas **asignables** cuando la variabilidad se evidencia en las características claves de la calidad, entre otras, errores del operador, mal manejo de materiales, materia prima defectuosa o manipulación inadecuada de maquinaria, herramientas, instrumentos o equipos tecnológicos,

Se dice entonces que un proceso que opera únicamente bajo causas fortuitas de variación se encuentra **bajo control estadístico**; si el proceso opera además en presencia de causas asignables se dice que está **fuera de control estadístico**.

Dado que el principal objetivo del control estadístico de procesos es la reducción de la variabilidad, es necesario disponer de herramientas que permitan detectar rápidamente la ocurrencia de causas asignables que eventualmente se presenten en un proceso. La principal herramienta para lograr este objetivo son las cartas de control.

Las cartas de control son herramientas gráficas diseñadas para detectar cambios en el proceso de un estado bajo control a fuera de control. Una carta de control representa gráficamente la información de una (**cartas univariadas**) o varias (**cartas multivariadas**) características clave de calidad a través del tiempo dentro de determinados límites de control inherentes a la naturaleza del proceso. Cuando la estadística graficada excede un límite de control se produce una señal, lo cual puede indicar que el proceso pasó a un estado fuera de control.

Para realizar un proceso de monitoreo se recolectan prospectivamente una o varias observaciones en cada instante de tiempo sobre las cuales se realizan mediciones en las características claves de la calidad. En un producto manufacturado la calidad tiene dos dimensiones (Juran & Gryna (1993)): 1) características del producto y 2) carencia de deficiencias. Las *características del producto* son aspectos funcionales y estéticos que se diseñan para cumplir las necesidades o expectativas del cliente. Por su parte, la *carencia de defectos* hace referencia a que el producto hace lo que se supone debe hacer y que está exento de defectos y de condiciones fuera de lo tolerable.

La dimensión de calidad que comprende características del producto se puede asociar con **cartas de control por variables**, es decir, las características de calidad se pueden medir y expresar cuantitativamente y resulta por tanto conveniente describir la característica con una medida de tendencia central y una medida de dispersión. En contraste, la dimensión que comprende la filosofía de carencia de defectos se puede asociar con **cartas de control por atributos**, donde las características de calidad se representan de forma binaria, por ejemplo, “funciona o no funciona”, “conforme o disconforme”, “defectuoso o no defectuoso”.

Al considerar usar cartas de control otro elemento que debe ser considerado es la cantidad de cambio o variación que se desea detectar. Desde esta perspectiva, las cartas de control se pueden clasificar en cartas sin memoria o cartas con memoria. Las **cartas de control sin memoria**, también llamadas cartas tipo Shewhart, son útiles para detectar cambios grandes en los parámetros del proceso (localización y dispersión). Por otro lado, las **cartas de control con memoria** son diseñadas de tal manera que puedan detectar cambios pequeños o moderados en los parámetros al hacer uso de información pasada y actual del proceso, lo que las hace más *sensibles*.

En este trabajo se considerará el monitoreo de una característica continua de calidad del proceso que puede ser modelada como una variable aleatoria independiente y normalmente distribuida. Dado que la distribución normal está completamente determinada por su media y varianza, resulta conveniente considerar cartas de control tanto para la localización ( $\mu$ ) como para la dispersión ( $\sigma$ ) del proceso, y en consecuencia, el problema se puede abordar construyendo cartas de control para monitorear de forma separada o conjunta los parámetros de localización y dispersión.

En la práctica, la mayoría de cartas de control se diseñan con base en el supuesto de normalidad, el cual se asume en una o dos vías: 1) sobre la característica de calidad a monitorear, o 2) sobre la distribución del estadístico usado en la construcción de la carta, el cual es obtenido a partir de muestras independientes, permitiendo una aproximación a la normal de acuerdo al teorema del límite central. Sin embargo, existen muchas aplicaciones prácticas donde la no-normalidad es más frecuente (Janacek & Meikle (1997)).

En lo que respecta a la Fase I del control estadístico de procesos, otra cuestión que debe resolverse es el uso de estimadores robustos, en la medida que en las mediciones sobre un proceso es común encontrar *outliers* que pueden afectar directamente las estimaciones de los parámetros del proceso que son posteriormente utilizadas para el monitoreo en línea de la Fase II.

En general, se sugiere usar cartas de control con esquemas robustos de estimación de paráme-

tros debido a su utilidad practica, en especial cuando desde el diseño se desea lidiar con los supuestos usuales de normalidad y ambientes libres de *outliers* (Nazir, Riaz & Does (2015)). Numerosos autores han estudiado el uso de estimadores robustos para  $\mu$  y  $\sigma$  (por ejemplo Rocke (1989, 1992), Tatum (1997), Vargas N (2003), Davis & Adams (2005)) y su impacto en Fase II.

Siguiendo la recomendación de estudiar estimadores robustos formulada por Jensen et al. (2006) en su extensa revisión de literatura acerca de los efectos de la estimación de parámetros en el diseño y uso de cartas de control, y en especial de la pertinencia de evaluar estas estimaciones en el monitoreo en línea de la Fase II, este trabajo aborda esquemas robustos a varios patrones de *outliers* a partir de una carta CUSUM, incorporando además una adaptación del procedimiento de *screening* en Fase I formulado por Zwetsloot (2016) para cartas EWMA, el cual se presenta en el capítulo 3.

## 2.1. Carta CUSUM

Sea  $X$  una característica de calidad de interés. Sea  $X_{it}$  con  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $t = 1, 2, \dots, k$ , que denota los datos en Fase II que se asumen independientes e idénticamente distribuidos  $N(\mu, \sigma^2)$  con varianza  $\sigma^2$  constante, donde se tiene un valor objetivo dado  $\mu_0$  para  $\mu$ .

En una carta CUSUM se define por  $Z_i$  el valor estandarizado de  $X$  en el grupo  $i$ , es decir,  $\frac{X_i - \mu_0}{\sigma}$  donde  $\sigma$  es la desviación estándar de  $X_i$  o de  $\bar{X}_i$ , con lo cual se grafican las sumas acumuladas de estos valores contra el número total de muestras recolectadas Vargas (2006).

Para esta carta se calculan las dos sumas:

$$S_{H,t} = \sum_{j=1}^t (Z_j - k)$$

y

$$S_{L,t} = \sum_{j=1}^t (Z_j + k)$$

donde la constante  $k$  se conoce como *valor de referencia*. Estas sumas aumentan o disminuyen dependiendo de la magnitud de cada nuevo término y tan pronto como  $Z_j - k > 0$  y  $Z_j + k < 0$  caen o exceden el valor de cero, respectivamente, se empieza una nueva serie, y el procedimiento se detiene cuando las sumas alcanzan o exceden un valor  $h$  conocido como *intervalo de decisión*. Las dos estadísticas a graficar se definen como:

$$\begin{aligned} S_{H,n} &= \max [0, S_{H,n-1} + Z_n - k] \\ S_{L,n} &= \min [0, S_{L,n-1} + Z_n + k] \end{aligned}$$

donde  $n$  hace referencia al número del grupo. El valor inicial de ambas estadísticas es usualmente cero ( $S_{H,n} = S_{L,n} = 0$ ), sin embargo, autores como Lucas & Crosier (1982) propusieron iniciar las sumas en un valor cercano a  $\frac{h}{2}$  con el objetivo de identificar más rápidamente señales fuera de control.

La selección de los parámetros  $k$  y  $h$  usualmente se realiza buscando obtener un buen desempeño bajo control de la estadística ARL (*average run length*) en la Fase II. Sea  $H = h\sigma$  y  $K = k\sigma$  donde  $\sigma$  es la desviación estándar de la variable de estudio  $X$ . Valores de  $h = 4$ ,  $h = 5$  y  $k = 1/2$  generalmente configuran un esquema CUSUM para detectar cambios de  $1\sigma$  sobre la media del proceso con buenas propiedades sobre la estadística ARL (Montgomery (2009)).

En general, la selección de  $k$  se realiza de forma relativa a la magnitud de variación que se desea detectar, para lo cual se usa la relación  $k = \frac{1}{2}\sigma$ , donde  $\sigma$  es la magnitud de cambio en unidades de desviación estándar. Este esquema busca minimizar el valor de la estadística ARL fuera de control ( $ARL_1$ ) para detectar un cambio de tamaño  $\sigma$  para un ARL bajo control ( $ARL_0$ ) fijado. Una vez  $k$  es seleccionado, la selección del parámetro  $h$  se realiza de acuerdo al desempeño deseado sobre la estadística  $ARL_0$  cuando el proceso está bajo control.

En este trabajo se selecciona un  $ARL_0 \cong 370$  el cual corresponde al valor de la estadística  $ARL$  de las cartas tradicionales Shewhart, de tal manera que la probabilidad de que una muestra exceda un límite de control debido a causas aleatorias sea  $p = 0.0027$ . Esta selección se justifica además para aportar un criterio de comparabilidad con otras cartas, teniendo en cuenta que la estadística  $ARL$  es el criterio más usado para comparar y evaluar el rendimiento entre cartas de control (cuál carta detecta más rápidamente cambios en el proceso).

Fijando entonces un  $ARL_0 = 370$ , en los esquemas CUSUM se pueden fijar valores de  $k$  y  $h$  como se muestra en la tabla **2-1**.

**Tabla 2-1.:** Valores de  $k$  y sus correspondientes valores de  $h$  que proporcionan un  $ARL_0 = 370$  para un esquema CUSUM de dos lados (de Hawkins (1993))

<b>k</b>	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50
<b>h</b>	8.01	4.77	3.34	2.52	1.99	1.61

Si bien las cartas CUSUM fueron diseñadas para el monitoreo en línea correspondiente a Fase II, Jones-Farmer et al. (2014) destacan que la mayor parte de la literatura del control

estadístico de procesos se ha enfocado en la Fase II cuando debería existir mayor atención en la Fase I para detectar muestras y observaciones inaceptables, estimar parámetros y retroalimentar el proceso concibiéndolo desde un enfoque sistémico, de tal manera que se aprenda y se mejore permanentemente.

En esta misma línea, Jones-Farmer et al. (2014) también consideran que la investigación relacionada con los métodos para obtener una verdadera muestra bajo control en Fase I ha recibido menor atención en la literatura del control estadístico de procesos, lo cual sumado a los diferentes efectos del uso de parámetros estimados en el monitoreo en Fase II que destacan Jensen et al. (2006) puede influir en el desempeño de la carta. A saber, estos efectos se pueden condensar en tres preguntas para el investigador:

1. ¿Cuan bien (o mal) se puede desempeñar una carta al usar parámetros estimados en vez de parámetros conocidos?
2. ¿Qué tamaño de muestra se necesita en Fase I para un buen desempeño de la carta en Fase II?
3. ¿Cuánto se deberían ajustar los límites en Fase II para compensar los tamaños de muestra de la Fase I?

Tomando en consideración estas preocupaciones y haciendo uso de esquemas CUSUM, a lo largo de este trabajo se aborda la cuestión de obtener una verdadera muestra bajo control en Fase I usando diferentes tamaños de muestra, sujeto a la condición practica de disponer de cantidades limitadas de datos. Adicionalmente, se incluye el uso de estimadores robustos para analizar en conjunto todas las muestras de la Fase I de tal manera que la estimación de parámetros sea menos sensible a datos contaminados o *outliers*. Finalmente, se realiza un estudio prospectivo en Fase II para evaluar el desempeño de los parámetros estimados.

La cuestión relacionada con el ajuste de los límites de control en Fase II no se incluye, sin embargo, se constituye en una posibilidad para futuras investigaciones haciendo uso de los esquemas CUSUM que se estructuran en este trabajo.



## 3. Métodos de estimación en Fase I

En esta sección se describen los métodos de estimación para el parámetro de localización que se utilizan en la Fase I del estudio, de tal manera que de acuerdo al análisis exploratorio en Fase I sea posible identificar patrones atípicos en los datos que puedan ser tratados por investigadores y responsables del control estadístico de procesos en las compañías mediante la selección del mejor estimador (de acuerdo al tipo de patrón o cambio atípico) en Fase I del parámetro de localización, que posteriormente será empleado en el monitoreo en línea en Fase II.

Se consideran diferentes estimadores puntuales y un estimador de punto de cambio, este último especialmente útil para la detección de cambios sostenidos. También se presentan métodos de estimación usados frecuentemente en el control estadístico de procesos clásico en Fase I, de tal manera que sirvan como línea base para evaluar el desempeño de los esquemas CUSUM robustos que se esquematizan en el trabajo.

### 3.1. Estimadores puntuales

Sea  $X_{it}$  con  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $t = 1, 2, \dots, k$  una variable aleatoria que representa las observaciones en Fase I, asumiendo  $X_{it}$  independiente e idénticamente distribuida  $N(\mu, \sigma^2)$  con media  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma$  cuando el proceso está bajo control.

Sea  $X_{k,(v)}$ ,  $v = 1, 2, \dots, n$ , la  $v$ -ésima estadística de orden en la muestra  $k$ . A través de este trabajo se asumen  $k = 50$  muestras y dos tamaño de muestra  $n = 5, 10$ .

Considerando  $\mu$  como el parámetro de localización del proceso que será monitoreado a través de cartas de control y  $\hat{\mu}$  su estimador insesgado basado en  $k$  subgrupos de tamaño  $n$ , existen diferentes alternativas de estimación para  $\hat{\mu}$  de las cuales se considerarán las siguientes: gran media, mediana de las medias, medias del estimador de Hodges-Lehmann y medias del estimador *trimean*.

Basado en una muestra aleatoria  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de tamaño  $n$ , estos estimadores puntuales del parámetro de localización se definen y caracterizan como se expone a continuación.

### 3.1.1. Gran media

Es el estimador más eficiente para el parámetro de localización con datos normalmente distribuidos y sin contaminación, por tanto su inclusión brindará una base de comparación, sin embargo, su desempeño se ve afectado cuando no hay normalidad o hay presencia de *outliers*. La gran media se define como:

$$\overline{\overline{X}} = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^k \overline{X}_t = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^k \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{it} \right)$$

### 3.1.2. Mediana de las medias

Es un estimador robusto propuesto por Rocke (1989). La mediana muestral  $\overline{M}$  se define como la estadística de orden intermedia en muestras impares o el promedio de las dos estadísticas de orden intermedias en muestras pares. La mediana es un estimador robusto y se ve menos afectado en presencia de datos no normales, si bien su eficiencia respecto a la media disminuye a medida que se tienen grandes volúmenes de datos (Dixon & Massey Jr (1969)). En este trabajo la mediana muestral se calcula sobre el conjunto de medias obtenido de cada tiempo  $t$  en el conjunto histórico de datos. Se define como:

$$M(\overline{X}) = \text{mediana}(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \dots, \overline{X}_k)$$

### 3.1.3. Media del estimador de Hodges-Lehmann

El estimador de Hodges-Lehmann se define como la mediana de los promedios en pareja, también conocidos como los promedios de Walsh, esto es,  $HL = \text{mediana}((X_j + X_k)/2, 1 \leq j \leq k \leq n)$ . Este estimador es muy robusto frente a la presencia de *outliers* en las muestras y es insesgado (Alloway & Raghavachari (1991)). Para el conjunto de datos de Fase I se define como:

$$\overline{HL} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k HL_i$$

### 3.1.4. Media del estimador Trimean

El estimador Trimean Se define como el promedio ponderado de la media muestral y dos cuartiles, esto es,  $TM = \frac{Q_1 + 2Q_2 + Q_3}{4}$ . Al igual que la mediana es un L-estimador robusto frente a la presencia de *outliers* y puede brindar una mejor evaluación del parámetro de localización (Tukey (1977)). Se define como:

$$\overline{TM} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k TM_i$$

### 3.2. Método de punto de cambio

El método de punto de cambio compara la log-verosimilitud de todas las observaciones bajo el supuesto que el proceso está bajo control estadístico, con la log-verosimilitud de todas las observaciones sí un cambio ocurre. Este método fue esquematizado por Sullivan & Woodall (1996) como una herramienta de análisis exploratorio y mostraron que tiene un mejor rendimiento que la carta Shewhart al momento de detectar cambios sostenidos.

Sea  $S_0 = (1, 2, \dots, k)$  un conjunto que puede ser separado a su vez en dos subconjuntos  $S_1 = (1, 2, \dots, \tau)$  y  $S_2 = (\tau + 1, \tau + 2, \dots, k)$ , con  $1 \leq \tau \leq k - 1$ . Denotando el número de elementos en el conjunto  $S_j$  por  $s_j$  se tiene  $s_0 = k$ ,  $s_1 = \tau$  y  $s_2 = k - \tau$ . Los estimadores máximo-verosímiles de la media y la varianza de observaciones en  $t \in S_j$  están dados por

$$\hat{\mu}_j = \frac{1}{n * s_j} \sum_{t \in S_j} \sum_{i=1}^n X_{it}$$

y

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n * s_j} \sum_{t \in S_j} \sum_{i=1}^n (X_{it} - \hat{\mu}_j)^2 \quad \text{para } j = 0, 1, 2.$$

Para probar la ocurrencia de un punto de cambio en el proceso luego de la muestra  $\tau$ , se calcula la estadística de la razón de verosimilitud (denotado en inglés por las siglas LRT, correspondientes a *likelihood ratio test*) como  $LRT(\tau) = nk \ln [\hat{\sigma}_0^2] - n\tau \ln [\hat{\sigma}_1^2] - n(k - \tau) \ln [\hat{\sigma}_2^2]$  y se grafica contra  $\tau$ , asignando un cambio a un estado fuera de control si el valor de la estadística excede el límite de control superior (denotado como  $LCS_{PC}$ ).

Dado que para valores de  $\tau$  cercanos a 1 o  $k - 1$  el valor esperado de la estadística  $LRT(\tau)$  es mayor que para un  $\tau$  intermedio, en este trabajo la carta se implementa como se muestra en Zwetsloot et al. (2014), estandarizando la estadística  $LRT(\tau)$  por su valor esperado  $E[LRT(\tau)]$ , el cual es estimado para cada  $\tau$  por medio de simulación. Estos valores esperados se presentan en el Anexo 1.

Se dice que hubo un cambio sostenido en el conjunto de datos de la Fase I si el valor estandarizado  $LRT'(\tau)$  excede a  $LCS_{PC}$ . Cada señal fuera de control indica entonces un posible cambio sostenido en el proceso. En el evento en que múltiples señales se detecten, Zwetsloot et al. (2014) sugieren estimar el punto de cambio  $\hat{\tau}$  igualando al punto  $\tau$  para el cual la estadística  $LRT'(\tau)$  es máxima. Si no hay señales fuera de control se fija  $\hat{\tau} = k$ .

En este estudio se toma el límite de control superior  $LCS_{PC} = 5.75$  estimado para  $k = 50$  muestras y  $n = 5, 10$  tamaños de muestra, obtenido por simulación fijando una probabilidad conjunta de falsas alarmas igual a 0.01 como se expone en Zwetsloot et al. (2014).

Dado que el propósito fundamental en Fase I es un entendimiento del proceso y la estimación de parámetros para monitoreo en línea en Fase II, el estimador de punto de cambio permite obtener un  $\hat{\tau}$  con el cual se puede identificar muestras fuera de control y así excluirlas de la estimación de parámetros del proceso. Sin embargo, para evitar la eliminación de grandes volúmenes de muestras del conjunto de datos de la Fase I, se aconseja utilizar una regla de decisión asumiendo que “la mayoría de datos en Fase I corresponden a observaciones en un proceso bajo control”, lo que en la práctica que si  $\hat{\tau} \leq k/2$  se eliminan las observaciones desde 1 hasta  $\hat{\tau}$  de la Fase I; análogamente, si  $\hat{\tau} > k/2$  se eliminan las muestras desde  $\hat{\tau} + 1$  hasta  $k$ . Con las muestras restantes se computa el estimador de punto de cambio calculando su gran media. Como se observa, por diseño este estimador es útil para detectar cambios únicos y puntuales sobre el proceso, por consiguiente, presenta la desventaja de perder precisión en caso que hayan múltiples cambios en el proceso durante la Fase I.

### 3.3. Método de screening

Este método de estimación está basado en la tesis doctoral de Zwetsloot (2016), en la cual se propone una serie de pasos para obtener un estimador robusto para el parámetro de localización de una característica de calidad que se asume normal e idénticamente distribuida, aun cuando se desconoce si los datos en Fase I están o no contaminados.

El método de *screening* propuesto por Zwetsloot (2016) comprende en esencia los siguientes pasos:

1. Calcular un estimador (inicial) robusto para los parámetros de localización y dispersión basado en todas las observaciones de la Fase I, los cuales se denotan por  $\hat{\mu}_I$  y  $\hat{\sigma}_I$  respectivamente. El subíndice “I” denota que el estimador se asocia a la Fase I del control estadístico por cartas.
2. Configurar una carta EWMA para Fase I.
3. Eliminar de la Fase I todas las muestras para las cuales la estadística EWMA correspondiente indique una señal fuera de control.
4. Usar un estimador eficiente para  $\hat{\mu}_0$ , la estimación final del parámetro de localización, basado en las muestras restantes, sobre las cuales se calcula la gran media.

Dado que en este trabajo se desea esquematizar un estimador de *screening* basado en cartas CUSUM, el procedimiento anterior se modifica de tal manera que la configuración del paso [2] sea sobre una carta CUSUM, lo que implica seleccionar cuidadosamente los parámetros  $h$  (intervalo de decisión),  $k$  (valor de referencia o tolerancia) y valores de arranque de las sumas acumuladas, los cuales determinan el funcionamiento de carta y sus propiedades estadísticas.

A continuación se examina con más detalle los parámetros de diseño del esquema CUSUM propuesto.

### 3.3.1. Estimadores robustos iniciales

La selección del estimador inicial  $\hat{\mu}_I$  para el parámetro de localización del paso [1] se debe realizar teniendo en cuenta que el uso de un estimador eficiente puede mejorar el rendimiento de la carta en Fase I bajo estabilidad en el proceso pero a la vez inflar los límites de control de la Fase I en caso de existir perturbaciones. De forma análoga, usar un estimador robusto puede no ser el más óptimo si hay estabilidad en el proceso pero a su vez permite obtener límites de control robustos al final de la Fase I si sí hay perturbaciones en los datos.

En este estudio a través del método de *screening* se evaluará el impacto del estimador más eficiente para la localización del proceso, es decir, la gran media  $\overline{\overline{X}}$ , el estimador robusto basado en la mediana de las medias  $M(\overline{X})$  siguiendo la propuesta original de Zwetsloot (2016) y además una versión recortada del estimador *trimean* al 20%, el cual Schoonhoven, Nazir, Riaz, Does et al. (2011) muestran que a pesar de no ser el estimador más eficiente bajo normalidad tiene un buen desempeño bajo perturbaciones difusas y localizadas.

En cuanto a la selección del estimador inicial para el parámetro de dispersión, se considera un único método para obtener  $\hat{\sigma}_I$  de tal manera que cualquier diferencia en el desempeño del esquema se deba a diferencias en la estimación de  $\mu$ , tal como lo sugiere Zwetsloot et al. (2014). En este trabajo se incorpora el estimador robusto de Tatum (1997), el cual pondera los residuales obtenidos como la diferencia entre las observaciones y la mediana de la  $k$ -ésima muestra, dando mayor peso a los residuales pequeños y menor peso a los residuales grandes. Este procedimiento garantiza que los *outliers* tengan un menor impacto en la estimación de  $\sigma$ . El procedimiento de estimación se describe en Tatum (1997) y se implementa como se muestra en Schoonhoven, Riaz & Does (2011), con constantes de normalización 1.068 para  $n = 5$  y 0.962 para  $n = 10$ .

### 3.3.2. Valor de referencia (k) e intervalo de decisión (h)

Hawkins & Olwell (2012) destacan que en la práctica la selección del parámetro  $k$  responde por un lado a circunstancias en las cuales, cuando el proceso sale de control, existe un nivel particular al cual es más probable que se mueva; de otro lado, la posibilidad más común es que el investigador o el responsable del control estadístico del proceso decida la magnitud del cambio que se quiere detectar más rápidamente. En la configuración del estudio en Fase I que se presenta en el capítulo 4, se fija  $k = 0.5$  para detectar más rápidamente cambios en la media del proceso equivalentes a  $\sigma = 1$  (en unidades estandarizadas).

En lo que concierne a la selección del parámetro  $h$ , su fijación en este caso no resulta directa. En la literatura de cartas CUSUM, el intervalo de decisión usualmente se fija luego de decidir el cambio que se desea detectar y el mínimo  $ARL_0$  tolerable en el proceso, es decir, dados  $k$  y un  $ARL$  se puede hallar  $h$ . Análogamente, diferentes combinaciones de  $h$  y  $k$  permiten calcular un  $ARL$ .

Sin embargo, en el uso de un método de screening basado en cartas de control en Fase 1, no tiene sentido hablar de un  $ARL$  para fijar  $h$  teniendo en cuenta que el diseño del esquema debe responder a las necesidades propias de la Fase 1, es decir, evaluar la estabilidad del proceso y obtener estimaciones de los parámetros asumiendo que las observaciones recolectadas reflejan un proceso bajo control estadístico.

Para solucionar este problema de diseño se sigue la propuesta de Chakraborti et al. (2008), la cual implica seleccionar un valor deseable de la tasa de falsas alarmas (denotado en inglés por las siglas FAR, correspondientes a *false alarm rate*) o un valor deseable de la probabilidad conjunta de falsas alarmas en las  $m$  muestras (denotado en inglés por las siglas FAP, correspondientes a *false alarm probability*) para aproximar los límites de control con base en el valor esperado  $E(\cdot)$  de la  $k$ -ésima muestra dado un proceso bajo control ( $IC$ ). Cuando las estadísticas que se grafican en la carta son independientes, se puede observar que

$$\begin{aligned} FAP &= \prod_{k=1}^k P(E_k|IC) = 1 - [P(E_k|IC)]^k \\ &= 1 - (1 - FAR)^k \end{aligned}$$

de tal manera que  $FAR = 1 - (1 - FAP)^{1/k}$ .

Chakraborti et al. (2008) muestra que cuando el número  $k$  de subgrupos disponible en Fase I es grande, la correlación entre las estadísticas que se grafican se acerca a cero, lo que permite por medio de simulación estimar el intervalo de decisión  $h$  a partir del cálculo del percentil 100  $\left[1 - \left(1 - (1 - FAP_0)^{1/k}\right) / 2\right]$  de la distribución marginal bajo control de la estadística CUSUM.

Siguiendo la tesis doctoral de Zwetsloot (2016) que inspira este trabajo, se fija una tasa de falsas alarmas del 1% para cada una de las  $k = 50$  muestras de tamaños  $n = 5, 10$  que se consideran a lo largo del estudio.

La tabla **3-1** muestra los estimadores considerados en el estudio en Fase I y sus valores respectivos de  $h$ , los cuales son obtenidos por medio de 200,000 simulaciones Monte Carlo.

### 3.3.3. Fast Initial Response — FIR

Lucas & Crosier (1982) proponen iniciar las sumas acumuladas de la carta CUSUM en un valor distinto a cero (típicamente  $h/2$ ) con el objetivo de identificar más rápidamente señales fuera de control al inicio del proceso. Incrementar la “sensibilidad” del esquema al inicio del proceso es deseable si la media ya se encuentra desviada al momento de iniciar la carta CUSUM.

Hawkins & Olwell (2012) destacan que la motivación intuitiva de utilizar el procedimiento FIR radica en acelerar la detección de señales si el proceso ya se encuentra fuera de control al iniciar las sumas acumuladas. Si el proceso no está fuera de control, las sumas acumuladas prontamente caerán a cero, luego de lo cual la carta se comportará como la carta CUSUM convencional con inicio en cero.

En méritos de lo expuesto, y asumiendo que luego de la detección de una señal en Fase I el proceso puede seguir fuera de control, el esquema propuesto incorpora el procedimiento FIR en dos momentos:

- a. Al inicio del proceso, es decir,  $S_{H,0} = S_{L,0} = h/2$ .
- b. Luego de la detección de una señal en la  $k$ -ésima muestra de la Fase 1, es decir,  $S_{H,k+1} = S_{L,k+1} = h/2$ .

Cómo se mostrará más adelante, resetear las estadísticas CUSUM a  $h/2$  (y no a cero) luego que el esquema da una señal en Fase I, posibilita una mayor detección de muestras fuera de control sin incrementar sustancialmente el número de falsas alarmas totales.

### 3.3.4. Diseño CUSUM

Una vez definidos los parámetros  $k$  y  $h$  se obtienen las estimaciones iniciales del paso [1] del procedimiento de *screening*, con lo cual se configura una carta CUSUM para Fase I con el valor estandarizado para la  $k$ -ésima muestra

$$Z_k = \frac{\bar{X}_k - \hat{\mu}_I}{\hat{\sigma}_I / \sqrt{n}},$$

las estadísticas

$$\begin{aligned} S_{H,k} &= \max [0, S_{H,k-1} + Z_k - k] \\ S_{L,k} &= \min [0, S_{L,k-1} + Z_k + k] \end{aligned}$$

con valores de inicio  $S_{H,k} = S_{L,k} = h/2$  y límites de control  $LCS = h$  y  $LCI = -h$ .

Si alguna de las sumas  $S_{H,k}$  o  $S_{L,k}$  alcanzan o exceden el intervalo de decisión  $h$ , la muestra correspondiente se identifica como no aceptable y se elimina de la Fase I. Este procedimiento permite obtener una estimación eficiente y robusta a varios patrones de *outliers* para el parámetro de localización final de la Fase I. Este estimador final se construye calculando la gran media para las muestras restantes, es decir, las que se identifican como aceptables,

$$S\hat{\mu}_0 = \frac{1}{k^*} \sum_{t=1}^k \bar{X}_k \times I(-h < S_{L,k} \mid S_{H,k} < h)$$

donde  $I(\cdot)$  es la función indicadora,  $k^*$  denota el número de muestras restantes, y  $S$  denota que el estimador está basado en control por cartas en Fase I.

Todos los estimadores que se evaluarán se encuentran resumidos en la tabla **3-1**.

**Tabla 3-1.:** Estimadores propuestos para el parámetro de localización en Fase I

Estimador	Descripción	h	
		n=5	n=10
$\bar{\bar{X}}$	Gran media	n.a.	n.a.
$M(\bar{X})$	Mediana de las medias	n.a.	n.a.
$\overline{HL}$	Media del estimador de Hodges-Lehmann	n.a.	n.a.
$\overline{TM}$	Media del estimador Trimean	n.a.	n.a.
CP	Estimador del punto de cambio	n.a.	n.a.
$S\bar{\bar{X}}$	Estimador de screening en Fase I con $\hat{\mu}_I = \bar{\bar{X}}$	2.690	2.676
$SM(\bar{X})$	Estimador de screening en Fase I con $\hat{\mu}_I = M(\bar{X})$	2.734	2.718
$S\overline{TM}_{20}$	Estimador de screening en Fase I con $\hat{\mu}_I = \overline{TM}_{20}$	2.713	2.697

(n.a.: no aplica)



## 4. Estudio en Fase I

En esta sección se evalúa la efectividad de los estimadores presentados en la tabla **3-1** en un estudio en Fase I, a través del cual se obtienen estimaciones precisas de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ . La precisión de las estimaciones obtenidas a través de los métodos propuestos se evalúa en términos del error cuadrático medio (denotado en inglés por las siglas MSE, correspondientes a *mean squared error*).

El análisis exploratorio propio de la Fase I permite además examinar el conjunto de datos para aprender del proceso en cuanto permite encontrar posibles cambios en los parámetros del proceso, *outliers* y muestras fuera de control estadístico, que puedan ser tratadas por investigadores y responsables del control estadístico de procesos en las compañías mediante la selección del mejor estimador en Fase I del parámetro de localización, que posteriormente será empleado en el monitoreo en línea en Fase II.

En la sección 4.1 se describen los escenarios de datos contaminados para el estudio en la Fase I, y en las secciones 4.2 y 4.3 los resultados obtenidos en términos del MSE y medidas de calidad de detección de señales, respectivamente.

### 4.1. Escenarios de datos

Se asume que los datos estables y bajo control de la Fase I siguen una distribución normal  $N(\mu, \sigma^2)$ . Uno de los requerimientos de la Fase I consiste en obtener una estimación del parámetro de localización  $\mu$ , aun cuando puedan existir datos o muestras contaminadas. En este trabajo se asume además que las observaciones contaminadas siguen una distribución normal  $N(\mu + \delta_I \sigma, \sigma^2)$ , donde  $\delta_I$  es una constante. Si bien las cartas tipo Shewhart son útiles para detectar grandes cambios puntuales, la utilidad del uso de esquemas con memoria tales como el CUSUM reside en la facilidad de detectar cambios sostenidos que se presentan en muestras consecutivas antes de generarse una señal. En este estudio se consideran ambos escenarios, tanto de causas asignables a cambios dispersos (denotados en inglés por el término “*scattered*”) como a cambios sostenidos (denotados en inglés por el término “*sustained*”). Como medida de comparabilidad de los resultados de este estudio con el esquema original propuesto por Zwetsloot et al. (2014), y sin pérdida de generalidad, los escenarios de datos descritos a continuación se fijan en estado estable con  $\mu = 0$  y  $\sigma = 1$ .

1. **Modelo de cambios localizados:** en este escenario todas las observaciones en una muestra tienen una probabilidad del 90 % de ser obtenidas de una distribución  $N(0, 1)$  y una probabilidad del 10 % de ser obtenidas de una distribución  $N(\delta_I, 1)$ .
2. **Modelo de cambios difusos:** en este escenario cada observación, independientemente de la muestra a la cual pertenezca, tiene una probabilidad del 90 % de ser obtenida de una distribución  $N(0, 1)$  y una probabilidad del 10 % de ser obtenida de una distribución  $N(\delta_I, 1)$ .
3. **Modelo de cambio puntual:** en este escenario las primeras 45 muestras se obtienen a partir de una distribución  $N(0, 1)$  y las últimas 5 a partir de una distribución  $N(\delta_I, 1)$ .
4. **Modelo de múltiples cambios puntuales:** En este escenario, en cada instante de tiempo, la muestra tiene una probabilidad  $p$  de ser la primera de cinco muestras consecutivas obtenidas de una distribución  $N(\delta_I, 1)$ . Luego de cualquier cambio consecutivo puntual, cada muestra vuelve a tener de nuevo una probabilidad  $p$  de ser el inicio de un nuevo grupo de cambio consecutivo. Dado que el conjunto de datos en Fase I consiste de 50 muestras, si el cambio se presenta en muestras subsiguientes a la 46, todas las restantes (no necesariamente 5) son obtenidas de una distribución  $N(\delta_I, 1)$ . Para mantener la tasa de datos contaminados en un 10 %, se fija  $p = 0.023$ .

El rendimiento de los estimadores propuestos en cada escenario es evaluado para valores de  $\delta_I = 0, 0.2, 0.4, \dots, 2$ .

## 4.2. Precisión de la estimación

Para determinar la precisión de los estimadores propuestos para el parámetro de localización, se determina el error cuadrático medio (MSE por sus siglas en inglés) para cada método de estimación en cada uno de los escenarios de datos considerados. El MSE se calcula como

$$MSE = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \left( \frac{\hat{\mu}_r - \mu}{\sigma} \right)^2 = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R (\hat{\mu}_r)^2$$

donde  $\hat{\mu}_r$  es el valor del estimador en la  $r$ -ésima simulación corrida y  $R$  es el número total de simulaciones en el estudio Monte Carlo. Las Figuras 1 a 4 muestran los resultados del cálculo del MSE para cada estimador en cada escenario y para cada tamaño de muestra, obtenidos a través de 10000 simulaciones.

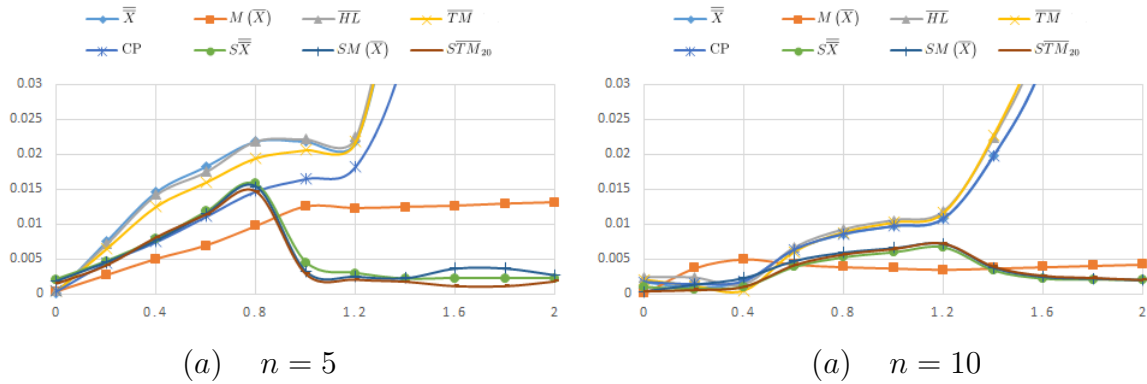


Figura 1: MSE de los estimadores del parámetro de localización en presencia de cambios localizados en los datos de la Fase I con  $k = 50$  muestras de tamaño  $n$ . (a)  $n=5$ ; (b)  $n=10$

El intercepto con el eje Y muestra el MSE cuando los datos son estables ( $\delta_I = 0$ ). Tal como se esperaba, la gran media muestra el MSE más bajo, superando ligeramente a los demás estimadores puestos en consideración excepto a la mediana de las medias cuya precisión es la más baja cuando hay estabilidad en el proceso.

Consideremos ahora los casos donde se encuentran contaminaciones en los datos de la Fase I ( $\delta_I > 0$ ). Se observa que el estimador  $\bar{\bar{X}}$  es el más sensible a todas las contaminaciones consideradas. Se observa también que el estimador  $s\bar{\bar{T}M}_{20}$  se ve menos afectado por las contaminaciones y su MSE es el menor, excepto cuando se presentan cambios puntuales localizados en toda una muestra donde el estimador  $M(\bar{X})$  tiene mayor precisión, así como en el modelo de cambios puntuales donde es superado ligeramente por el estimador CP.

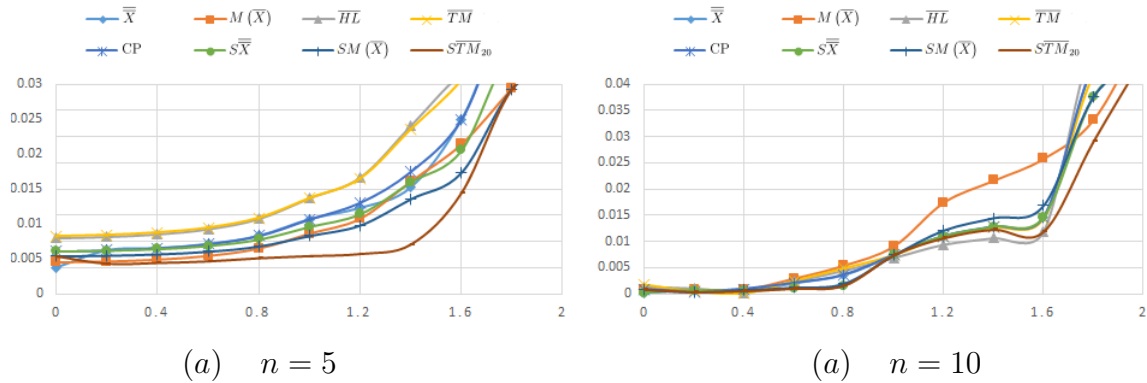


Figura 2: MSE de los estimadores del parámetro de localización en presencia de cambios difusos en los datos de la Fase I con  $k = 50$  muestras de tamaño  $n$ . (a)  $n=5$ ; (b)  $n=10$

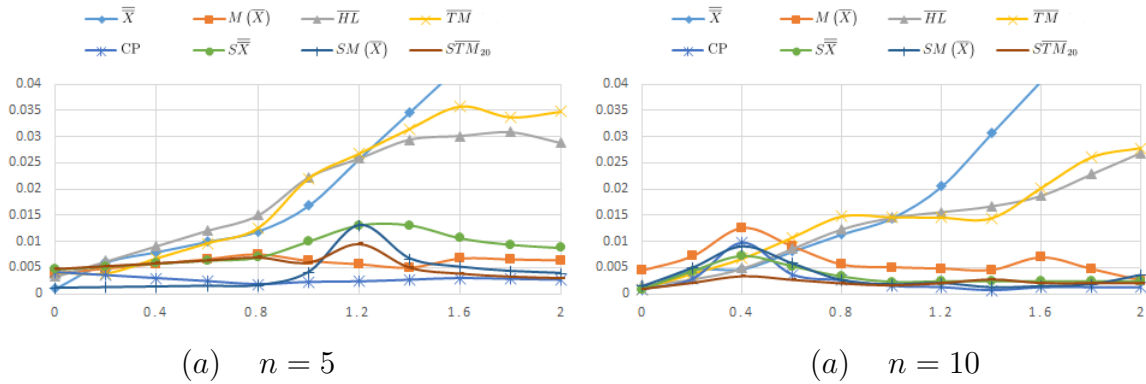


Figura 3: MSE de los estimadores del parámetro de localización en presencia de cambios puntuales en los datos de la Fase I con  $k = 50$  muestras de tamaño  $n$ . (a)  $n=5$ ; (b)  $n=10$

En general, todos los estimadores de screening son más robustos en los escenarios cuando hay cambios en la media del proceso que afectan a una muestra completa, es decir, en los modelos de cambios localizados, puntuales y de múltiples cambios puntuales. Bajo el modelo de datos de contaminaciones difusas (Figura 2), el estimador  $\bar{X}$  y los estimadores de screening son ligeramente más precisos que los demás estimadores considerados, aunque ninguno quita peso o elimina outliers dentro de una muestra. El estimador de punto de cambio tiene el MSE más bajo en el modelo de cambios puntuales (Figura 3) tal como se esperaba, sin embargo su precisión en las demás contaminaciones realizadas es la peor.

Dado que la esquematización del procedimiento de screening basado en cartas CUSUM se diseñó para detectar cambios en la media equivalentes a  $1\sigma$ , se observa que los estimadores que incluyen el procedimiento disminuyen los valores del MSE en las contaminaciones que afectan a una muestra completa cuando  $\delta_I = 1$  y en sus vecindades (Figuras 1, 3 y 4).

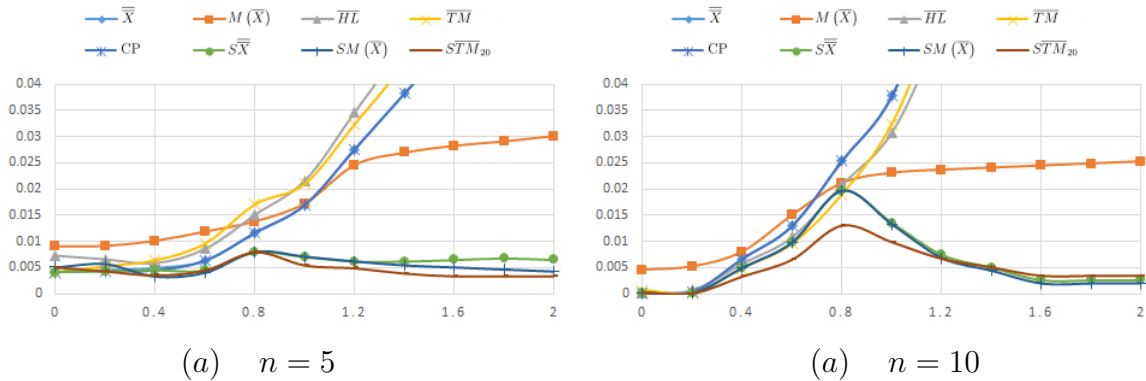


Figura 4: MSE de los estimadores del parámetro de localización en presencia de múltiples cambios puntuales en los datos de la Fase I con  $k = 50$  muestras de tamaño  $n$ . (a)  $n=5$ ; (b)  $n=10$

Se observa que el estimador  $\overline{STM}_{20}$  produce los valores más bajos del MSE cuando hay sucesiones de muestras no aceptables, propiamente dicho, en el modelo de múltiples cambios puntuales. Cuando el cambio en la media del proceso sucede en un único instante de tiempo, se observa que la precisión de todos los estimadores con procedimiento de screening y en particular del  $\overline{STM}_{20}$  se alejan muy poco de la alta precisión alcanzada por el estimador  $CP$ , e incluso la supera para cambios superiores a  $\delta_I > 0.8$  con un tamaño de muestra de  $n = 10$ .

En cuanto a la selección de  $\hat{\sigma}_I$  en el esquema CUSUM, hacer uso de un estimador muy eficiente como  $\overline{S\bar{X}}$  u otros menos eficientes como  $SM(\bar{X})$  o  $\overline{STM}_{20}$  resulta en valores de MSE muy cercanos a los producidos por el estimador más eficiente  $\overline{\bar{X}}$  bajo estabilidad en el proceso, con una diferencia conjunta en promedio de  $1 * 10^3$  unidades de desviación estándar. Dado que por construcción el procedimiento de screening con cartas CUSUM elimina las muestras no aceptables y luego hace uso del estimador eficiente  $\overline{\bar{X}}$  para estimar el parámetro de localización del proceso, se puede concluir que resulta útil construir cartas CUSUM para la Fase I seleccionando un estimador para la media menos eficiente pero con la capacidad de detectar muestras no aceptables y excluirlas del proceso de estimación final.

A excepción del estimador  $M(\bar{X})$ , se observa que en general los estimadores puntuales considerados en el estudio no tienen un buen rendimiento. A mayor variación  $\delta_I$  en la media del proceso mayores valores de MSE. Teniendo en cuenta de antemano no se conoce el tipo de contaminación que pueda existir en los datos en Fase 1, se recomienda construir una carta de control en Fase I basada en un estimador robusto como  $\overline{TM}_{20}$  en vez de estimadores puntuales que se vean afectados por la presencia de outliers o patrones no aceptables en las muestras históricas.

Se concluye además que los estimadores con procedimiento de screening basados en cartas CUSUM no funcionan adecuadamente en presencia de cambios difusos al igual que los estimadores con procedimiento de screening basados en cartas EWMA construidos por Zwetsloot et al. (2014), en la medida que ambos esquemas escanean posibles contaminaciones en muestras completas y no propiamente dentro de muestras, es decir, a nivel de observaciones individuales contaminadas en cualquier instante de tiempo. Propuestas encaminadas a robustecer el esquema deberán considerar un procedimiento de screening que permita identificar outliers individualmente. Trabajos como el de Schoonhoven, Nazir, Riaz, Does et al. (2011) para cartas  $\bar{X}$  o la implementación de cartas CUSUM-Shewhart pueden orientar futuras investigaciones para abordar esta cuestión.

Para realizar una comparación final entre los estimadores propuestos en cada uno de los escenarios de contaminación considerados, se calcula el error cuadrático medio relativo (RMSE por sus siglas en inglés) para cada uno de los estimadores. El RMSE de un estimador se

define como el incremento porcentual en el MSE de ese estimador relativo al estimador con el MSE más bajo. Se calcula el RMSE para todos los grados de contaminación  $\delta_I$  en cada escenario y para cada tamaño de muestra. La tabla **4-1** presenta el máximo RMSE de cada estimador. Se observa que en presencia de cambios localizados el estimador  $M(\bar{X})$  tiene el máximo RMSE más bajo, es decir, en promedio tiene el MSE que está más cerca al MSE óptimo en todas las magnitudes de contaminación. En presencia de cambios puntuales el estimador CP tiene el máximo RMSE de menor magnitud y por tanto se recomienda su uso si se sospecha que en el conjunto histórico de datos existe un incremento en la media (sin importar la magnitud del incremento) a partir de un único punto. Si se consideran todos los escenarios en conjunto (la última final de la tabla **4-1**) se encuentra que el estimador  $\overline{STM}_{20}$  se encuentra siempre dentro del 26.57% de la estimación óptima, independientemente del patrón de contaminación.

**Tabla 4-1.:** RMSE máximo, y, en negritas, el estimador con el máximo RMSE más bajo

Cambio	n	Estimadores en Fase I para $\mu$							
		$\bar{\bar{X}}$	$M(\bar{X})$	$\overline{HL}$	$\overline{TM}$	CP	$\overline{SX}$	$SM(\bar{X})$	$\overline{STM}_{20}$
Localizado	5	899.53	<b>11.91</b>	80.26	75.56	780.83	37.43	33.81	26.57
	10	1078.10	<b>11.20</b>	99.06	84.45	1078.10	40.39	15.03	15.03
Difuso	5	2.19	2.31	3.45	3.37	2.51	2.29	1.94	<b>1.39</b>
	10	<b>4.48</b>	8.06	5.45	7.24	8.24	4.66	7.16	5.10
Puntual	5	700.94	4.78	11.13	13.21	<b>4.02</b>	5.63	5.63	4.65
	10	1488.47	6.97	25.75	22.68	<b>2.91</b>	3.67	2.96	4.22
Múltiples puntuales	5	742.86	9.11	26.27	23.55	848.99	2.05	1.53	<b>1.22</b>
	10	1637.42	86.41	66.10	74.41	2046.77	3.54	3.54	<b>3.54</b>
Todos combinados		1637.42	86.41	99.06	84.45	2046.77	40.39	33.81	<b>26.57</b>

### 4.3. Probabilidad de detección en Fase 1

En la practica, los análisis de la Fase I sirven también como una herramienta para realizar un análisis exploratorio en el conjunto histórico de datos. Desde esa perspectiva, un análisis efectivo debe permitir identificar observaciones o muestras no aceptables sin arrojar falsas alarmas para observaciones aceptables, lo que es equivalente a decir que toda señal que arroje una carta de control debe corresponder a un cambio real en el proceso. En este subcapítulo se mide la efectividad del estudio en Fase I en términos del porcentaje de alarmas verdaderas (denotado en inglés por las siglas TAP, correspondientes a *true alarm percentage*) y el porcentaje de alarmas falsas (denotado en inglés por las siglas FAP, correspondientes a

*false alarm percentage*). Trabajos como los de Fraker et al. (2008), Frisén (2009), Chakraborti et al. (2008), Zwetsloot et al. (2014), Jones-Farmer et al. (2014) y Zwetsloot (2016) muestran medidas relacionadas. El TAP y el FAP se calculan como:

$$TAP = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \frac{(\#Alarmas\ Correctas)}{(\#Observaciones\ No\ Aceptables)} * 100\%$$

y

$$FAP = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \frac{(\#Falsas\ Alarmas)}{(\#Observaciones\ Aceptables)} * 100\%$$

donde  $R$  denota el número total de simulaciones.

Es importante precisar que este análisis solo puede ser realizado para los estimadores propuestos que tienen un procedimiento de screening para identificar muestras no aceptables en Fase I, es decir, los estimadores CP,  $S\bar{X}$ ,  $SM(\bar{X})$  y  $ST\bar{M}_{20}$ .

En cada uno de los escenarios de contaminación considerados se observa que:

- a. Cuando hay cambios localizados (Tabla 4-2) el estimador  $ST\bar{M}_{20}$  muestra el mejor rendimiento porque tiene los valores de TAP más altos y los valores de FAP más bajos.
- b. Como era de esperarse, los estimadores propuestos detectan muy pocas observaciones no aceptables en presencia de cambios difusos (Tabla 4-2) en la medida que carecen de una forma efectiva de identificar outliers al interior de una muestra. Sin embargo se observa un hecho interesante en este escenario: los estimadores con procedimiento de screening basados en cartas CUSUM detectan más muestras aceptables que los estimadores propuestos por Zwetsloot et al. (2014) basados en cartas EWMA en las vecindades de cambios cercanos a  $\delta_I = 1$  en la medida que los límites de control establecidos para el esquema CUSUM fueron específicamente diseñados para detectar rápidamente cambios de 1 unidad de desviación estándar en el parámetro de localización del proceso.
- c. En presencia de cambios puntuales (Tabla 4-3) el estimador CP supera ampliamente el rendimiento de los estimadores propuestos en todos los cambios  $\delta_I$ , tanto en mayor detección de alarmas correctamente identificadas como en menor porcentaje de falsas alarmas.
- d. Al considerar el escenario con múltiples cambios sostenidos en distintos instantes de tiempo (Tabla 4-3), el estimador CP identifica correctamente muy pocas alarmas verdaderas y además arroja una mayor cantidad falsas alarmas respecto a los estimadores propuestos. Los estimadores  $ST\bar{M}_{20}$  y  $SM(\bar{X})$  muestran en este caso un mejor desempeño tanto en el TAP como en el FAP.

Adicionalmente, como se muestra en el Anexo A, la incorporación en el diseño de la carta CUSUM de un valor de  $FIR = h/2$  posibilita una mayor detección de muestras aceptables sin perjuicios significativo sobre el FAP.

**Tabla 4-2.:** Porcentaje de alarmas verdaderas (TAP) y porcentaje de falsas alarmas (FAP) en escenarios de cambios localizados y difusos

Cambio	n	$\hat{\mu}$	TAP										FAP														
			$\delta_I$										$\delta_I$														
			0.4	0.8	1	1.2	1.6	2	0	0.4	0.8	1	1.2	1.6	2												
Localizado													5	CP	0.35 %	0.90 %	2.16 %	2.90 %	5.44 %	8.48 %	0.17 %	0.31 %	0.54 %	0.96 %	1.10 %	1.88 %	2.83 %
		$S\bar{X}$	5.37 %	15.70 %	25.21 %	35.51 %	61.56 %	82.85 %	2.23 %	2.45 %	2.77 %	3.08 %	3.39 %	4.06 %	4.81 %												
		$SM(\bar{X})$	5.78 %	17.95 %	29.65 %	42.02 %	70.56 %	90.17 %	2.38 %	2.58 %	2.78 %	2.92 %	3.06 %	2.97 %	2.75 %												
		$STM_{20}$	6.21 %	19.73 %	31.94 %	44.89 %	73.01 %	91.63 %	2.30 %	2.53 %	2.68 %	2.83 %	2.99 %	2.86 %	2.63 %												
10	CP	0.71 %	3.24 %	5.61 %	8.29 %	13.74 %	18.40 %	0.30 %	0.43 %	1.28 %	2.16 %	3.30 %	5.44 %	8.03 %													
		$S\bar{X}$	8.66 %	32.39 %	49.19 %	67.47 %	92.28 %	99.28 %	2.21 %	2.53 %	3.29 %	3.79 %	4.20 %	5.46 %	7.08 %												
		$SM(\bar{X})$	9.42 %	38.40 %	57.90 %	76.82 %	96.83 %	99.88 %	2.37 %	2.65 %	3.02 %	3.07 %	2.85 %	2.66 %	2.60 %												
		$STM_{20}$	10.37 %	40.90 %	60.85 %	79.33 %	97.52 %	99.91 %	2.28 %	2.59 %	2.95 %	2.95 %	2.69 %	2.51 %	2.48 %												
Difuso													5	CP	0.22 %	0.20 %	0.24 %	0.22 %	0.17 %	0.19 %	0.23 %	0.19 %	0.18 %	0.21 %	0.23 %	0.17 %	0.14 %
		$S\bar{X}$	2.37 %	2.58 %	2.60 %	2.70 %	3.03 %	3.45 %	2.21 %	2.18 %	2.01 %	2.02 %	1.95 %	1.89 %	1.83 %												
		$SM(\bar{X})$	2.53 %	2.69 %	2.73 %	2.98 %	3.37 %	3.97 %	2.36 %	2.30 %	2.17 %	2.16 %	2.08 %	1.94 %	1.82 %												
		$STM_{20}$	2.59 %	3.21 %	3.45 %	4.06 %	5.31 %	7.17 %	2.26 %	2.25 %	2.04 %	2.04 %	1.91 %	1.75 %	1.58 %												
10	CP	0.19 %	0.19 %	0.23 %	0.19 %	0.31 %	0.21 %	0.22 %	0.19 %	0.19 %	0.21 %	0.19 %	0.34 %	0.19 %													
		$S\bar{X}$	2.30 %	2.34 %	2.29 %	2.32 %	2.47 %	2.73 %	2.21 %	2.09 %	2.13 %	2.10 %	2.11 %	2.20 %	2.35 %												
		$SM(\bar{X})$	2.45 %	2.44 %	2.44 %	2.50 %	2.69 %	2.99 %	2.37 %	2.25 %	2.32 %	2.21 %	2.27 %	2.27 %	2.33 %												
		$STM_{20}$	2.53 %	2.99 %	3.29 %	3.77 %	5.09 %	6.96 %	2.29 %	2.17 %	2.18 %	2.01 %	1.91 %	1.82 %	1.68 %												



**Tabla 4-3.:** Porcentaje de alarmas verdaderas (TAP) y porcentaje de falsas alarmas (FAP) en escenarios de cambios puntuales y múltiples cambios puntuales

Cambio	n	$\hat{\mu}$	TAP							FAP						
			0.4	0.8	1	1.2	1.6	2	0	0.4	0.8	1	1.2	1.6	2	
Puntual	5	CP	9.00 %	64.06 %	88.17 %	96.60 %	99.09 %	99.73 %	0.21 %	0.69 %	1.27 %	0.88 %	0.57 %	0.15 %	0.04 %	
		$S\bar{X}$	12.28 %	39.12 %	53.33 %	66.06 %	84.98 %	95.54 %	2.23 %	2.31 %	2.71 %	2.89 %	3.26 %	4.11 %	5.21 %	
		$SM(\bar{X})$	12.45 %	40.67 %	55.79 %	69.54 %	88.41 %	97.27 %	2.36 %	2.41 %	2.57 %	2.48 %	2.50 %	2.53 %	2.52 %	
		$STM_{20}$	13.44 %	42.72 %	57.98 %	71.16 %	89.32 %	97.71 %	2.27 %	2.30 %	2.40 %	2.30 %	2.31 %	2.33 %	2.34 %	
Múltiples puntuales	10	CP	26.22 %	95.13 %	98.70 %	99.37 %	99.90 %	99.99 %	0.25 %	1.02 %	0.71 %	0.28 %	0.11 %	0.02 %	0.00 %	
		$S\bar{X}$	21.90 %	62.08 %	77.94 %	88.57 %	98.26 %	99.91 %	2.20 %	2.40 %	3.10 %	3.61 %	4.36 %	6.02 %	8.06 %	
		$SM(\bar{X})$	22.36 %	65.05 %	81.56 %	91.49 %	99.13 %	99.97 %	2.36 %	2.42 %	2.52 %	2.44 %	2.55 %	2.51 %	2.50 %	
		$STM_{20}$	24.03 %	66.98 %	82.82 %	92.45 %	99.34 %	99.98 %	2.29 %	2.30 %	2.31 %	2.23 %	2.32 %	2.31 %	2.32 %	
Múltiples puntuales	5	CP	1.89 %	14.18 %	23.45 %	31.03 %	41.58 %	49.23 %	0.25 %	0.56 %	2.38 %	4.17 %	5.74 %	8.25 %	11.52 %	
		$S\bar{X}$	10.25 %	32.97 %	46.27 %	58.66 %	78.25 %	90.52 %	2.24 %	2.43 %	2.99 %	3.38 %	3.74 %	4.73 %	6.02 %	
		$SM(\bar{X})$	10.50 %	35.32 %	50.51 %	64.15 %	85.19 %	95.65 %	2.38 %	2.51 %	2.81 %	2.87 %	2.89 %	2.86 %	2.86 %	
		$STM_{20}$	12.25 %	39.39 %	54.19 %	67.46 %	87.14 %	96.17 %	2.30 %	2.40 %	2.55 %	2.58 %	2.60 %	2.57 %	2.68 %	
Múltiples puntuales	10	CP	5.91 %	29.38 %	39.46 %	46.06 %	54.06 %	57.66 %	0.22 %	1.43 %	5.69 %	8.06 %	10.50 %	14.05 %	15.49 %	
		$S\bar{X}$	19.00 %	55.01 %	69.91 %	82.31 %	94.96 %	99.16 %	2.23 %	2.61 %	3.57 %	4.26 %	5.00 %	6.85 %	8.78 %	
		$SM(\bar{X})$	19.84 %	60.28 %	76.45 %	88.91 %	98.25 %	99.90 %	2.39 %	2.66 %	2.83 %	2.90 %	2.83 %	2.91 %	2.88 %	
		$STM_{20}$	22.56 %	63.77 %	78.99 %	90.32 %	98.66 %	99.94 %	2.29 %	2.45 %	2.52 %	2.58 %	2.63 %	2.77 %	2.80 %	

## 5. Desempeño en Fase II

Los estimadores de la Fase I se utilizan para diseñar las cartas de control de la Fase II. En esta sección, se evalúan cartas de control CUSUM en Fase II que están basadas en parámetros estimados cuando los datos de la Fase I pueden estar o no contaminados.

Sea  $X$  una característica de calidad de interés. Las observaciones de la Fase II  $X_{it}$  con  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $t = 1, 2, \dots, k$  se asumen independientes e idénticamente distribuidos  $N(\mu, \sigma^2)$  si el proceso está bajo control. Los datos de la Fase II se modelan  $N(\mu + \delta_{II}\sigma, \sigma^2)$ , donde  $\delta_{II}$  es una constante y el subíndice “II” hace referencia a datos de la Fase II.

### 5.1. Diseño de la carta CUSUM para Fase II

La carta de control CUSUM para Fase II consta del valor estandarizado de  $X$  en la  $k$ -ésima muestra

$$Z_k = \frac{\bar{X}_k - \hat{\mu}_I}{\hat{\sigma}_I / \sqrt{n}},$$

y las estadísticas

$$\begin{aligned} S_{H,k} &= \max [0, S_{H,k-1} + Z_k - k] \\ S_{L,k} &= \min [0, S_{L,k-1} + Z_k + k] \end{aligned}$$

donde  $\hat{\mu}_I$  y  $\hat{\sigma}_I$  son las estimaciones de  $\mu$  y  $\sigma$  al final de la Fase I, los valores de inicio  $S_{H,k} = S_{L,k} = 0$ ,  $k = 0.5$  y los límites de control  $LCS = h$  y  $LCI = -h$ .

Se consideran 8 cartas de control CUSUM para Fase II, basadas cada una en los estimadores para el parámetro de localización presentados en el capítulo 3. La estimación de la desviación estándar en cada una de las cartas se deriva de una única manera con el propósito de lograr una comparación justa entre los estimadores  $\hat{\mu}$ . Se utiliza el estimador robusto de Tatum (1997) (ver sección 3.3.1)

Por otro lado, para la evaluación del desempeño de cada carta CUSUM se asume que la media del proceso al momento del inicio del monitoreo no ha cambiado, por lo que el procedimiento de *Fast Initial Response* no se incluye y en consecuencia los valores de arranque de las sumas acumuladas se fijan en cero. Adicionalmente, el valor de referencia se fija en

$k = 0.5$  y el intervalo de decisión en  $h = 5.00$  para  $n = 5$  y  $h = 5.078$  para  $n = 10$ , constantes óptimas recomendadas por Nazir, Abbas, Riaz & Does (2015) para detectar un cambio de  $\delta = 1$  (es decir, de  $1\sigma$ ). Como se observa, los valores del intervalo de decisión difieren de los de la Fase I, teniendo en cuenta que en este caso estos se determinan de tal manera que la carta de control tenga una longitud promedio de corrida de aproximadamente 370 cuando el proceso está bajo control.

## 5.2. Medidas de desempeño y procedimiento de simulación

El desempeño de una carta de control en Fase II puede ser evaluado en términos de la distribución de probabilidad de una longitud de corrida (denotada en inglés por las siglas RL, correspondientes a *run length*), la cual es una variable aleatoria que representa el número de muestras monitoreadas antes que el estadístico que se representa gráficamente exceda los límites de control de la carta, por ejemplo, una señal que indique que el proceso salió de control. Como variable aleatoria el RL tiene una media, varianza y una distribución de probabilidad. Una medida de desempeño de una carta de control en Fase II se puede expresar en términos del valor esperado de RL, es decir la longitud promedio de corrida (ARL).

En la práctica, cuando una carta de control genera una señal el responsable o investigador del control del proceso se ve conducido a tomar una acción para evaluar la estabilidad del proceso y traerlo a control en caso que efectivamente haya existido un cambio en los parámetros del proceso. Dados los costos de muestrear, de las pérdidas asociadas a operar un proceso fuera de control, las tasas de producción, entre otros factores, cuando el proceso se encuentra estable es deseable tener un ARL alto y cuando la media del proceso cambia a  $\mu + \delta I I \sigma$  es deseable tener un ARL bajo.

Dado que el RL depende necesariamente de los parámetros del proceso y de la construcción misma de la carta de control, para evaluar el desempeño general de las cartas de CUSUM propuestas es necesario considerar la distribución no condicional del RL, es decir, promediar el desempeño de la carta en Fase II sobre la variabilidad propia de las estimaciones  $\hat{\mu}$  y  $\hat{\sigma}$  de los parámetros del proceso en vez de fijar valores predeterminados para  $\mu$  y  $\sigma$ .

Teniendo en cuenta las consideraciones presentadas, para evaluar el desempeño de las cartas CUSUM propuestas para la Fase II partiendo de datos que pueden estar contaminados en Fase I y de los estimadores presentados, el ARL para cada carta se estima sobre la distribución no condicional del RL por medio de simulación. Estos valores se obtienen por medio del siguiente procedimiento:

- i) Se generan  $k = 50$  muestras de tamaños  $n = 5, 10$  de cada uno de los escenarios de datos utilizados para evaluar el MSE, con  $\delta_I = 1$ .
- ii) Se calculan  $\hat{\mu}$  y  $\hat{\sigma}$  a partir de los datos.
- iii) Se inicia una carta de control CUSUM generando observaciones en cada instante de tiempo  $t$  de una distribución  $N(\delta_{II}, 1)$  hasta que las sumas acumuladas excedan el intervalo de decisión. El RL correspondiente se iguala a  $t$ .

Los cálculos se realizan para  $\delta_{II} = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  y el procedimiento completo se repite en  $R = 10000$  simulaciones. El ARL se calcula promediando sobre los 10000 RL y los resultados se presentan en la tabla 5-1.

### 5.3. Resultados de la Fase II

Consideremos en primer lugar el escenario en que el conjunto histórico de datos de la Fase I está bajo control. Se observa que para datos aceptables el desempeño de la carta es similar con todos los estimadores en la medida que tienen valores similares de ARL bajo control y fuera de control, con la excepción de la carta basada en el estimador puntual  $M(\bar{X})$  cuyo desempeño es muy inferior. En este mismo sentido, los otros dos estimadores robustos puntuales  $\overline{HL}$  y  $\overline{TM}$  tienen un desempeño ligeramente menor al del resto de estimadores considerados. Estos resultados confirman que el uso de un estimador robusto puntual para el parámetro de localización en Fase I no es aconsejable por cuanto deja de usar información valiosa que afecta la estimación del parámetro  $\mu$  y su uso subsiguiente en la carta en Fase II. El uso de estimadores robustos puntuales en Fase I es solamente aconsejable en presencia de outliers o muestras consideradas no aceptables.

Cuando hay contaminaciones locales en las muestras, la carta CUSUM basada en el estimador  $\overline{X}$  es menos efectiva en la medida que se ve afectada por el efecto de la presencia de outliers en la estimación de parámetros de la Fase I y su posterior rendimiento en Fase II. En este escenario los estimadores propuestos basados en el procedimiento de screening tienen el mejor desempeño, y en particular el estimador  $\overline{STM}_{20}$  cuyo  $ARL_0$  no solamente es el mayor sino que es más sensible a detectar pequeños cambios en el proceso en Fase II (reflejados en un menor  $ARL_1$  para cada  $\delta$ ). En cuanto a los estimadores robustos puntuales, en este escenario se observa para ambos tamaños de muestra un desempeño diferenciado: los estimadores  $\overline{HL}$  y  $\overline{TM}$  no son tan efectivos como el estimador  $M(\bar{X})$ , el primero porque está basado en el principio de recortar observaciones dentro de las muestras y el segundo porque recorta mayor cantidad de promedios muestrales.

**Tabla 5-1.:** ARL promedio para las cartas de control CUSUM en Fase II basada en estimadores alternativos con  $k = 50$  y  $n = 5, 10$

Fase I		ARL						
Escenario	n	$\mu$	Bajo control	Datos de Fase II fuera de control				
			$\delta_{II} = 0$	$\delta_{II} = 0.1$	$\delta_{II} = 0.2$	$\delta_{II} = 0.3$	$\delta_{II} = 0.4$	
Bajo control	5	$\bar{\bar{X}}$	368	232	73	26	13	
		$M(\bar{X})$	336	238	84	29	15	
		$\overline{HL}$	366	232	74	26	14	
		$\overline{TM}$	362	227	73	26	14	
		CP	372	227	70	26	14	
		$\overline{S\bar{X}}$	381	226	68	26	14	
		$SM(\bar{X})$	380	221	71	25	14	
		$\overline{STM}_{20}$	383	225	70	25	13	
	10	$\bar{\bar{X}}$	383	146	30	12	8	
		$M(\bar{X})$	344	158	34	13	8	
		$\overline{HL}$	380	143	31	13	8	
		$\overline{TM}$	367	143	32	12	8	
		CP	368	148	30	12	8	
		$\overline{S\bar{X}}$	377	144	30	12	8	
		$SM(\bar{X})$	372	147	31	12	8	
$\overline{STM}_{20}$		380	141	29	12	8		
Localizado ( $\delta_I = 1$ )	5	$\bar{\bar{X}}$	226	349	234	81	29	
		$M(\bar{X})$	281	316	175	60	22	
		$\overline{HL}$	224	324	231	83	29	
		$\overline{TM}$	215	334	229	86	30	
		CP	230	344	226	79	29	
		$\overline{S\bar{X}}$	271	331	181	61	23	
		$SM(\bar{X})$	293	327	171	56	22	
		$\overline{STM}_{20}$	306	335	144	48	20	

(Continúa en la siguiente página)

Tabla 5-1 – Continuación

Fase I		ARL					
		Bajo control	Datos de Fase II fuera de control				
Escenario	n	$\mu$	$\delta_{II} = 0$	$\delta_{II} = 0.1$	$\delta_{II} = 0.2$	$\delta_{II} = 0.3$	$\delta_{II} = 0.4$
	10	$\overline{\overline{X}}$	159	336	154	39	13
		$M(\overline{X})$	279	262	77	20	10
		$\overline{HL}$	164	316	161	39	14
		$\overline{TM}$	165	331	160	41	14
		CP	175	314	160	39	14
		$\overline{\overline{S\overline{X}}}$	274	278	81	22	10
		$SM(\overline{X})$	308	236	62	17	9
		$\overline{STM}_{20}$	330	230	51	16	9
		Difuso ( $\delta_I = 1$ )	5	$\overline{\overline{X}}$	323	552	324
$M(\overline{X})$	324			504	319	115	35
$\overline{HL}$	323			539	316	96	31
$\overline{TM}$	337			546	313	92	29
CP	324			551	318	93	29
$\overline{\overline{S\overline{X}}}$	320			545	311	88	30
$SM(\overline{X})$	338			551	313	94	30
$\overline{STM}_{20}$	357			556	293	81	27
	10			$\overline{\overline{X}}$	191	570	210
		$M(\overline{X})$	227	496	222	43	14
		$\overline{HL}$	218	541	200	36	13
		$\overline{TM}$	229	535	181	34	13
		CP	191	550	210	37	14
		$\overline{\overline{S\overline{X}}}$	210	554	200	35	13
		$SM(\overline{X})$	210	537	199	36	13
		$\overline{STM}_{20}$	226	549	172	31	13

(Continúa en la siguiente página)

Tabla 5-1 – Continuación

Fase I		ARL					
Escenario	n	$\mu$	Bajo control	Datos de Fase II fuera de control			
			$\delta_{II} = 0$	$\delta_{II} = 0.1$	$\delta_{II} = 0.2$	$\delta_{II} = 0.3$	$\delta_{II} = 0.4$
Cambios puntuales ( $\delta_I = 1$ )	5	$\bar{\bar{X}}$	226	371	223	70	26
		$M(\bar{X})$	290	296	164	56	22
		$\overline{HL}$	225	380	221	71	27
		$\overline{TM}$	218	354	226	76	27
		CP	352	276	104	34	16
		$\overline{S\bar{X}}$	322	319	139	44	19
		$SM(\bar{X})$	336	300	123	41	18
		$\overline{STM}_{20}$	349	301	111	35	16
	10	$\bar{\bar{X}}$	141	378	147	30	12
		$M(\bar{X})$	287	263	67	19	10
		$\overline{HL}$	141	370	151	31	13
		$\overline{TM}$	151	371	151	31	13
		CP	348	212	41	14	8
		$\overline{S\bar{X}}$	322	238	50	15	9
$SM(\bar{X})$		337	202	42	14	8	
$\overline{STM}_{20}$		361	190	38	14	8	
Múltiples puntuales ( $\delta_I = 1$ )	5	$\bar{\bar{X}}$	210	279	219	117	53
		$M(\bar{X})$	248	270	181	79	35
		$\overline{HL}$	207	273	226	120	53
		$\overline{TM}$	206	284	220	122	53
		CP	238	254	183	98	48
		$\overline{S\bar{X}}$	278	293	163	75	30
		$SM(\bar{X})$	287	276	150	62	28
		$\overline{STM}_{20}$	310	291	132	51	21

(Continúa en la siguiente página)

Tabla 5-1 – Continuación

Fase I			ARL					
Escenario	n	$\mu$	Bajo control	Datos de Fase II fuera de control				
			$\delta_{II} = 0$	$\delta_{II} = 0.1$	$\delta_{II} = 0.2$	$\delta_{II} = 0.3$	$\delta_{II} = 0.4$	
	10	$\overline{\overline{X}}$	171	234	169	77	28	
		$M(\overline{X})$	251	244	95	32	13	
		$\overline{HL}$	168	227	175	76	26	
		$\overline{TM}$	162	227	168	74	29	
		CP	230	205	104	51	30	
		$\overline{\overline{SX}}$	286	241	81	27	11	
		$SM(\overline{X})$	320	207	57	19	9	
		$\overline{STM}_{20}$	344	198	49	16	9	

En lo que respecta al modelo de cambios difusos se observa que ningún estimador tiene un buen desempeño en la medida que todos carecen de un procedimiento para identificar y eliminar del proceso de estimación de la Fase I observaciones individuales que puedan estar contaminadas.

En presencia de un modelo con cambios puntuales, se observa que el estimador CP tiene el mejor desempeño superando ligeramente al estimador  $\overline{STM}_{20}$ , los cuales junto con el estimador  $SM(\overline{X})$  son más sensibles para detectar cambios sostenidos en la media del proceso a partir de un instante de tiempo dado.

Finalmente, en presencia de múltiples cambios puntuales, el estimador de punto de cambio no tiene un buen desempeño no solamente porque su  $ALR_0$  es relativamente bajo sino porque su  $ARL_1$  en cada variación  $\delta_{II}$  es superada. En este caso, el mejor rendimiento es logrado por los estimadores  $SM(\overline{X})$  y  $\overline{STM}_{20}$  basados en el uso en Fase I de cartas CUSUM.

En resumen, el tipo de contaminación presente en el conjunto de datos disponible en Fase I y el método de estimación utilizado afectan el desempeño de la carta CUSUM en Fase II. Se recomienda el uso de cartas con esquemas tipo Shewhart en presencia de cambios dispersos, de cartas con esquemas basados en métodos de punto de cambio si se sospecha que hubo un cambio puntual en el proceso, y de incorporar el uso de cartas CUSUM con procedimiento de screening en Fase I basados en el estimador  $\overline{TM}_{20}$  en presencia de múltiples cambios puntuales o cuando se desconoce el tipo, longitud y la magnitud de posibles contaminaciones.



# 6. Conclusiones y recomendaciones

## 6.1. Conclusiones

Se esquematiza un método de estimación basado en el uso de cartas CUSUM en Fase I que incorpora un procedimiento de screening para detectar cambios sostenidos en la media del proceso y se compara con métodos de estimación puntuales tradicionales y robustos, y con un método de punto de cambio para evaluar su desempeño en escenarios donde el conjunto histórico de datos de la Fase I puede presentar cambios dispersos (*“scattered”*) o cambios sostenidos (*“sustained”*). Se estudia la efectividad del análisis propio de la Fase I en términos de la precisión de las estimaciones del parámetro de localización, así como de las proporciones de muestras correctamente identificadas como no aceptables. Adicionalmente, se estudia el impacto de cuatro modelos de contaminación, dos dispersos y dos sostenidos, así como de diversos estimadores utilizados en Fase I, en el desempeño de una carta CUSUM en Fase II.

El estudio muestra que los tipos de contaminaciones que puedan estar presentes en el conjunto histórico de datos disponible en Fase I afecta directamente la precisión con la que se pueden realizar los análisis propios de la Fase I, así como el desempeño de las cartas de control resultantes para el monitoreo de la Fase II. En términos generales se observan claras diferencias entre los métodos de estimación incorporados en Fase I, de las cuales se pueden deducir las siguientes recomendaciones:

En primer lugar, se recomienda el uso de estimadores basados en métodos de punto de cambio o de estimadores basados en el uso de cartas de control con memoria en Fase I para derivar las estimaciones finales que se utilizan para poner en marcha cartas de control para Fase II. Estos métodos permiten conducir análisis en los que retrospectivamente se aprende de los datos, resultando en la incorporación de mayores cantidades de muestras bajo control para estimar los parámetros del proceso, mucho antes de poner en marcha cualquier carta de control para el monitoreo en línea propio de la Fase II.

En segundo lugar, se observa que los métodos de estimación considerados se desempeñan bien en un tipo específico de contaminación: en presencia de cambios dispersos se aconseja el uso de cartas tipo Shewhart, mientras que en presencia de cambios sostenidos se aconseja el uso de cartas con memoria. En este último caso, el uso de esquemas CUSUM en Fase I parece ser más apropiado que el uso de esquemas EWMA en escenarios donde de antemano

se puede inferir o establecer la magnitud más probable en que cambie la media del proceso. Los estimadores robustos basados en el uso de cartas CUSUM son particularmente más precisos que los estimadores basados en cartas EWMA propuestos por Zwetsloot et al. (2014) en los escenarios donde se presentan cambios en la media del proceso iguales o cercanos a  $2h$ , es decir, se puede diseñar una carta “a la medida” en Fase I que detecte magnitudes de cambio preestablecidas y elimine del proceso de estimación las muestras que reflejen cambios equivalentes, lo que permite aumentar la precisión de las estimaciones y el desempeño posterior de una carta de control en Fase II.

Como se observa en los estudios en Fase I y Fase II presentados, el desempeño de los esquemas CUSUM propuestos no solamente es bueno en presencia de múltiples cambios puntuales sino en cualquier otro tipo de contaminación de datos. Estos estimadores permiten obtener mejores estimaciones de la localización del proceso en presencia de cualquier tipo de anomalía o contaminación en Fase I.

Finalmente, se recomienda el uso de estimadores robustos basados en la incorporación de cartas de control en Fase I con un procedimiento de screening que permita eliminar muestras no aceptables y consecuentemente obtener estimaciones menos afectadas por la presencia de outliers, para luego usar en el monitoreo en línea en Fase II estimadores eficientes que garanticen un desempeño igualmente eficiente cuando el proceso se ha llevado a control estadístico.

## 6.2. Recomendaciones y trabajo futuro

- Incorporar en los esquemas CUSUM propuestos un procedimiento que permita identificar tanto outliers al interior de una muestra como muestras completas no aceptables. Trabajos como los de Koning & Does (2000), Schoonhoven, Nazir, Riaz, Does et al. (2011) o adaptar esquemas CUSUM-Shewhart (Lucas (1982)) pueden orientar futuras investigaciones sobre esta cuestión.
- Estudiar las propiedades estadísticas de los estimadores basados en esquemas CUSUM propuestos, de tal manera que el esquema se pueda adaptar para distintos tamaños de muestra, número de muestras y magnitudes de cambio que se deseen detectar. Trabajos como el de Hawkins & Olwell (2012) y Huang et al. (2016) pueden orientar estos estudios.
- Evaluar el desempeño de los esquemas CUSUM esquematizados en el monitoreo en línea de Fase II, de tal manera que el límite de control no esté determinado por un intervalo de decisión fijo sino por reglas de detección basadas en límites de alerta (Riaz et al. (2011)) o ajustes en tiempo real de los límites de control.

- Durante este trabajo se asume que la característica de calidad de interés sigue una distribución normal. Futuras investigaciones podrían abordar la cuestión de diseñar e implementar en Fase I cartas de control no paramétricas basadas en esquemas CUSUM.
- El análisis del desempeño de los esquemas propuestos en Fase I y Fase II se realizó fijando un único estimador para el parámetro de dispersión. Futuras investigaciones podrían extender el estudio del efecto en el desempeño de estos esquemas al considerar diferentes estimadores robustos para el parámetro de dispersión en escenarios de datos normales y normales contaminados.
- Estudiar comparativamente el desempeño de esquemas de control CUSUM, EWMA y EWMA-CUSUM que incorporen procedimientos de screening en escenarios de datos normales y normales contaminados. El estudio presentado en esta tesis junto con trabajos como el de Nazir, Abbas, Riaz & Does (2015) y Zwetsloot (2016) pueden orientar el diseño de este estudio comparativo.

# A. Anexo: Comparación del TAP y FAP en escenarios de cambios sostenidos con FIR=0 versus FIR=H/2

Como se mencionó en la sección 3.3.4, el diseño del esquema CUSUM en Fase I incorpora el procedimiento *Fast Initial Response* de Lucas & Crosier (1982) con un valor de  $H/2$ . A continuación se muestran los resultados obtenidos de  $R=5000$  simulaciones del el TAP y el FAP para  $\delta_I = 1$  (magnitud de cambio sobre la cual se diseña el esquema) y  $n = 5$  (menor tamaño de muestra considerado) para los estimadores propuestos que tienen un procedimiento de screening para identificar muestras no aceptables en Fase I.

**Tabla A-1.:** Estimadores propuestos para el parámetro de localización en Fase I

		TAP		FAP		
		$\delta I = 1$				
Cambio	n	$\hat{\mu}$	Con FIR=0	Con FIR=H/2	Con FIR=0	Con FIR=H/2
Puntual	5	CP	87.73 %	88.17 %	0.79 %	0.88 %
		$\overline{S\bar{X}}$	37.33 %	53.33 %	2.58 %	2.89 %
		$SM(\bar{X})$	38.27 %	55.79 %	2.25 %	2.48 %
		$\overline{STM}_{20}$	40.67 %	57.98 %	2.19 %	2.30 %
Múltiples puntuales	5	CP	21.39 %	23.45 %	3.84 %	4.17 %
		$\overline{S\bar{X}}$	34.60 %	46.27 %	3.19 %	3.38 %
		$SM(\bar{X})$	37.33 %	50.51 %	2.75 %	2.87 %
		$\overline{STM}_{20}$	40.33 %	54.19 %	2.20 %	2.58 %

# Bibliografía

- Alloway, J. & Raghavachari, M. (1991), 'Control chart based on the hodges-lehmann estimator', *Journal of quality Technology* **23**(4), 336–347.
- Chakraborti, S., Human, S. & Graham, M. (2008), 'Phase i statistical process control charts: an overview and some results', *Quality Engineering* **21**(1), 52–62.
- Davis, C. M. & Adams, B. M. (2005), 'Robust monitoring of contaminated data', *Journal of Quality Technology* **37**(2), 163.
- Dixon, W. J. & Massey Jr, F. J. (1969), 'Introduction to statistical analysis'.
- Fraker, S. E., Woodall, W. H. & Mousavi, S. (2008), 'Performance metrics for surveillance schemes', *Quality Engineering* **20**(4), 451–464.
- Frisén, M. (2009), 'Optimal sequential surveillance for finance, public health, and other areas', *Sequential Analysis* **28**(3), 310–337.
- Hawkins, D. M. (1993), 'Cumulative sum control charting: an underutilized spc tool', *Quality Engineering* **5**(3), 463–477.
- Hawkins, D. M. & Olwell, D. H. (2012), *Cumulative sum charts and charting for quality improvement*, Springer Science & Business Media.
- Huang, W., Shu, L., Cao, J. & Tsui, K.-L. (2016), 'Probability distribution of cusum charting statistics', *IIE Transactions* **48**(4), 324–332.
- Janacek, G. & Meikle, S. (1997), 'Control charts based on medians', *Journal of the Royal Statistical Society: Series D (The Statistician)* **46**(1), 19–31.
- Jensen, W. A., Jones-Farmer, L. A., Champ, C. W. & Woodall, W. H. (2006), 'Effects of parameter estimation on control chart properties: a literature review', *Journal of Quality Technology* **38**(4), 349.
- Jones-Farmer, L. A., Woodall, W. H., Steiner, S. H. & Champ, C. W. (2014), 'An overview of phase i analysis for process improvement and monitoring', *Journal of Quality Technology* **46**(3), 265.

- Juran, J. & Gryna, F. (1993), *Quality Planning and Analysis: From Product Development Through Use*, McGraw-Hill international editions, McGraw-Hill.  
**URL:** <https://books.google.com.co/books?id=w95TAAAAMAAJ>
- Koning, A. J. & Does, R. J. (2000), 'Cusum charts for preliminary analysis of individual observations', *Journal of Quality Technology* **32**(2), 122.
- Lucas, J. M. (1982), 'Combined shewhart-cusum quality control schemes', *Journal of quality technology* **14**, 51–59.
- Lucas, J. M. & Crosier, R. B. (1982), 'Fast initial response for cusum quality-control schemes: give your cusum a head start', *Technometrics* **24**(3), 199–205.
- Montgomery, D. C. (2009), *Statistical quality control*, Vol. 7, Wiley New York.
- Nazir, H. Z., Abbas, N., Riaz, M. & Does, R. J. (2015), 'A comparative study of memory-type control charts under normal and contaminated normal environments', *Quality and Reliability Engineering International*.
- Nazir, H. Z., Riaz, M. & Does, R. J. (2015), 'Robust cusum control charting for process dispersion', *Quality and Reliability Engineering International* **31**(3), 369–379.
- Page, E. S. (1954), 'Continuous inspection schemes', *Biometrika* **41**(1/2), 100–115.
- Riaz, M., Abbas, N. & Does, R. J. (2011), 'Improving the performance of cusum charts', *Quality and Reliability Engineering International* **27**(4), 415–424.
- Roberts, S. W. (1959), 'Control chart tests based on geometric moving averages', *Technometrics* **1**(3), 239–250.
- Rocke, D. M. (1989), 'Robust control charts', *Technometrics* **31**(2), 173–184.
- Rocke, D. M. (1992), 'X<sub>q</sub> and r<sub>q</sub> charts: Robust control charts', *The Statistician* pp. 97–104.
- Schoonhoven, M., Nazir, H. Z., Riaz, M., Does, R. J. et al. (2011), 'Robust location estimators for the x-bar control chart', *Journal of Quality technology* **43**(4), 363–379.
- Schoonhoven, M., Riaz, M. & Does, R. J. (2011), 'Design and analysis of control charts for standard deviation with estimated parameters', *Journal of Quality Technology* **43**(4), 307.
- Shewhart, W. A. (1926), 'Quality control charts', *Bell System Technical Journal* **5**(4), 593–603.
- Stoumbos, Z. G., Reynolds Jr, M. R., Ryan, T. P. & Woodall, W. H. (2000), 'The state of statistical process control as we proceed into the 21st century', *Journal of the American Statistical Association* **95**(451), 992–998.

- Sullivan, J. H. & Woodall, W. H. (1996), 'A control chart for preliminary analysis of individual observations', *Journal of Quality Technology* **28**(3), 265–278.
- Tatum, L. G. (1997), 'Robust estimation of the process standard deviation for control charts', *Technometrics* **39**(2), 127–141.
- Tukey, J. W. (1977), 'Exploratory data analysis'.
- Vargas N, J. A. (2003), 'Robust estimation in multivariate control charts for individual observations', *Journal of Quality Technology* **35**(4), 367–376.
- Vargas, N. J. A. (2006), *Control estadístico de calidad*, Universidad Nacional de Colombia.
- Woodall, W. H., Spitzner, D. J., Montgomery, D. C. & Gupta, S. (2004), 'Using control charts to monitor process and product quality profiles', *Journal of Quality Technology* **36**(3), 309–320.
- Zwetsloot, I. (2016), EWMA control charts in statistical process monitoring, PhD thesis, Amsterdam Business School Research Institute (ABS-RI).
- Zwetsloot, I. M., Schoonhoven, M. & Does, R. (2014), 'A robust estimator for location in phase i based on an ewma chart', *Journal of Quality Technology* **46**(4), 302.