UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Diseño de un material didáctico concreto para la enseñanza de las propiedades de inverso de los racionales en la solución de ecuaciones lineales de una sola incógnita.

Andrés Darío Bedoya Castrillón

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Medellín, Colombia
2017

Diseño de un material didáctico concreto para la enseñanza de las propiedades de inverso de los racionales en la solución de ecuaciones lineales de una sola incógnita.

Andrés Darío Bedoya Castrillón

Trabajo final de maestría presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director :
Ph.D Carlos Mario Parra Londoño

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Medellín, Colombia
2017

Dedicatoria

A Judy, mi compañera indiscutible en todos estos años; por su paciencia a prueba de todo...

Agradecimientos

Son muchas personas con quienes tengo deuda de gratitud por la realización de este trabajo. Agradezco la oportunidad de contar con la Alma Mater, que me acogió, de la que extraído los elementos que hoy me dan forma; al Profesor Carlos Mario, quien me enseñó a leer y ahora a escribir; a mis compañeros de profesión quienes con su afecto y compañía hacen mas fácil esta experiencia y, finalmente, a todos los compañeros de estudio quienes, cuando lo necesité, me dieron su respaldo incondicional.

Resumen

El propósito de este trabajo se enmarca la enseñanza de la solucion de ecuaciones lineales en una sola incógnita usando elementos de la estructura de campo, particularmente las propiedades cancelativas con las operaciones estándar en los racionales. Para su cumplimiento, el objetivo del trabajo es la propuesta e implementacion de un elemento didáctico concreto, en este caso una lúdica formativa usando cartas. Los objetivos específicos del trabajo van dirigidos a identificar las propiedades de los racionales para la solución de ecuaciones y la proposición de sus similares en el material didáctico; con base en lo anterior se emprende la propuesta enseñanza-aprendizaje en la solución de ecuaciones lineales, empleando principios canónicos.

La intervención se hace en el marco de la investigación-acción educativa, conducente a proponer nuevas prácticas en la enseñanza del álgebra, como también hacer seguimiento del aprendizaje del estudiante en un entorno condicionado, justamente, por el material didáctico.

Abstract

The main purpose of this work can be framed in the methods for teaching the solution of linear equations in a single variable using elements of the field structure in Q, particularly the cancellation laws, fulfillment with the standard operations. For its implementation, the objective of the work is the proposal and implementation of a specific didactic element, in this case cards. The specific objectives of the work are directed towards the identify the properties of the rational required for the solution of linear equations and the proposal of similar propierties in the didactic material; on this basis, the teaching-learning proposal is undertaken in the solution of linear equations using canonical principles.

The intervention is made within the framework of the so called educative resarch action, leading to the proposal of new practices in the teaching of algebra, as well as monitoring the student's learning in an environment conditioned by, precisely, the didactic material.

Keywords: linear equation, didactic material, cancelative laws, inverse, algebra, variable

Contenido

Índice de contenido

Lista de tablas

Índice de tablas

Introducción

En este trabajo se diseña e implementa un elemento (o material) didáctico concreto para la solución de ecuaciones lineales de una única incógnita en el sistema de los racionales con las operaciones estándar. La idea de la realización de este trabajo surge de la observación, de que la visión que se tiene del álgebra y sus procesos en la solución de ecuaciones lineales en la educación *tradicional,* distorsionan la esencia misma del álgebra dificultando los procesos ulteriores de aprendizaje, que la requieren, a los cuales un estudiante de secundaria encontrará dificultades a causa de una preparación deficiente. Esta es una de las razones mas importantes, sin embargo, otro razón para este trabajo es que ejemplifica la noción de estructura y su alcance a través de una modelación concreta.

Este trabajo también espera motivar futuras intervenciones y elaboraciones dirigidas al carácter estructural de álgebra en otros niveles de aprendizaje, las cuales van desde la factorización hasta la resolución de ecuaciones trigonométricas, con el fin de contribuír al éxito académico del estudiante proyectado hacia carreras ténicas. Para lograr estos propósitos se inicia con una reflexión de las dificultades básicas que se presentan en el grado noveno de la I.E San Gabriel Arcangel, respecto a la solución de ecuaciones lineales; así mismo se selecciona el Aprendizaje Significativo Crítico como la teoría pedagógica que modelará la trasmisión del conocimiento y las relaciones entre los agentes docente-conocimiento-estudiante. Se pasa al Diseño de la Intervención en el marco de la *Investigación-acción educativa* y se traza el cronograma de actividades. Establecido lo anterior, se prosigue con el análisis de la intervención que incluye una descripción de la misma, plasmando las observaciones y datos recolectados en el trabajo de campo, seguidas de las conclusiones respecto a la intervención y las recomendaciones pertinentes. Por último se presentarán las referencias y los anexos que consisten de las guías que mediaron el procesos de enseñanza-aprendizaje.

1. Diseño Teórico

La sistematización el trabajo final de acuerdo a la plantilla que propone la coordinación académica del programa Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales permite en primera instancia reconocer el Tema, identificar y enunciar el Problema desde sus antecedentes, descripción y formulación, justificar su realización y establecer los Objetivos; General y Específicos,

1.1 Selección y delimitación del tema

En el grado noveno de la Institución Educativa San Gabriel Arcángel, se observan ciertas dificultades en el desarrollo de actividades aritméticas y, aún más, en las que son de carácter algebraico. Del desarrollo de los contenidos, se nota la dificultad para emplear estrategias para resolver ecuaciones de una incógnita.

Se pretende que los estudiantes adquieran las habilidades básicas que le permitan desarrollar autonomía en el aprendizaje, particularmente de las habilidades correspondientes al dominio de la estructura algebraica de las operaciones usuales sobre los racionales.

Se quiere lograr este propósito mediante recursos didácticos concretos, que concuerden con el enfoque de sistemas propuesto por los Lineamientos Curriculares.

En este sentido, lo que se quiere es el diseño de material didáctico concreto para la enseñanza de la propiedad cancelativa de los números racionales las operaciones usuales de suma y producto, en el grado noveno de la I.E San Gabriel Arcángel.

1.2 Planteamiento del Problema

1.2.1 Antecedentes

Más que enseñar estructuras algebraicas desde el formalismo, se considera más bien en este trabajo, una contribución a la propuesta dentro del aula del "enfoque de sistemas" según Vasco, el sistema simbólico (Lineamientos Curriculares): "una vez que se han identificado los sistemas concretos con los cuales el niño actúa y pasando por el sistema conceptual, se llega al sistema simbólico, al sistema de representación". Como el mismo Dr. Vasco Uribe lo menciona, los sistemas poseen estructura (Vasco, 1984). A pesar de las escasas referencias respecto a la generalización del Modelo van Hiele para la enseñanza de la geometría hacia otros campos de la matemática como el álgebra, es valioso considerar el aporte que hace van Hiele en cuanto a las propiedades que dominan una estructura (Jaramillo, J y Esteban, P; 2006). El mencionando modelo y el enfoque de sistemas coinciden en que hay un punto de partida (percepción o sistemas concretos) para el aprendizaje y que hay unos pasos (niveles de pensamiento o construcción del sistema conceptual, respectivamente) y unas metas (elaboración de demostraciones formales o elaboración del sistema simbólico). Hasta aquí las semejanzas, de hecho, los mencionados autores manifiestan en su artículo que el propio Pierre van Hiele, ha obtenido pocos éxitos (van Hiele 1987) en la generalización del método a otros campos.

Respecto a la noción de estructura de anillo sobre los racionales, los lineamientos mencionan la comprensión del concepto de operación, en los cuales destacan:

reconocimiento de las operaciones en situaciones concretas; reconocimiento de los modelos más usuales y prácticos de las operaciones; comprender las propiedades matemáticas de las operaciones y el efecto de cada operación y relaciones entre las operaciones (Lineamientos Curriculares). En esta última referencia es fácil notar que se está hablando de las propiedades de anillo sobre Q.

Una de las características de la resolución de una incógnita en una ecuación lineal, es el uso continuado de la propiedad de inverso tanto aditivo como multiplicativo. En principio, ciertas técnicas del uso del inverso aditivo como el de las “balanzas” para “equilibrar” la ecuación, no son del todo oportunas para el inverso multiplicativo. De hecho, Saenz, J (2014) en su tesis de maestría “Diseño de una unidad didáctica basada en métodos informales para la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita”, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, propone actividades didácticas que ayuden a afianzar, desde el aspecto concreto (como iniciaría el enfoque de sistemas), la comprensión del concepto de ecuación de primer grado con una incógnita en los estudiantes de octavo grado de cierta institución. Se tiene en particular el acercamiento a la noción de igualdad y el énfasis que le da en el desarrollo de su investigación. Esto motiva a establecer las pesquisas para, de la misma manera, hacer énfasis en propiedades más elaboradas, como la propiedad cancelativa de los grupos algebraicos, en particular, del anillo de los racionales, que usa fuertemente el concepto de igualdad.

1.2.2 Descripción del problema

En el grado noveno en particular puede notarse que los estudiantes, en su mayoría, tienen dificultad para manipular ecuaciones de una incógnita obtenidas de la modelación de un problema o como una propuesta de trabajo rutinaria. Presentan déficit en el manejo de las operaciones básicas de suma y producto, a saber:

- Dificultades para cálculos mentales básicos de suma y producto
- Dificultades para usar las propiedades de las operaciones

Se evidencia además que, en el aula, no hay manejo de la estructura de anillo algebraico de los números racionales con las operaciones de suma y producto; particularmente de las propiedades de inverso de estas operaciones vistas como grupos algebraicos y, por tanto, de la propiedad cancelativa de las mencionadas operaciones. Específicamente está ausente la noción de ($-a$) como el símbolo para el *inverso aditivo* de a (donde $a \in Q$) y de manera análoga ocurre con a^{-1}, $a \neq 0$.

Dentro del Proyecto Educativo Institucional no hay una propuesta curricular enmarcada en el aprendizaje significativo; como consecuencia directa, el aprendizaje es mayormente mecánico, por tanto, es clave la repetición por parte de los estudiantes. Al no darse acompañamiento por parte de tutores o familiares responsables, es probable que un estudiante no practique los ejercicios necesarios para afianzar el aprendizaje mecánico.

De la lectura de los Lineamientos curriculares y los estándares de competencias para matemáticas, se concluye que no hay señalamiento directo a la noción de *estructura algebraica,* como sí a la noción de operación vista como concepto, es decir, como una idea que el estudiante debe tener de las relaciones entre los números. Así mismo, en los Estándares Básicos de Competencias para Matemáticas, se señala que el estudiante debe ser capaz de utilizar las propiedades de las operaciones para resolver problemas. Estas lecturas dan pie a malas interpretaciones por parte de docentes o directivos docentes, pues la ausencia de estándares dirigidos a estructuras algebraicas, no implica que estas nociones no deban estar dentro de los planes de área. Se sugiere que una lectura descuidada de los documentos que dirigen las prácticas didácticas impide el desarrollo de currículos y planes de área efectivos que integren los principios establecidos en los lineamientos curriculares, particularmente, la implementación de manera efectiva el enfoque de sistemas. Así, una revisión del plan de estudios de matemáticas para los diferentes grados de la Institución, revela que en el diseño del mismo no se incluye la noción de estructura algebraica, particularmente de la propiedad cancelativa. Esto deriva en que la manipulación de la estructura numérica sea aprehendida por pocos estudiantes que tienen talento natural o el acompañamiento externo necesario (familiares, tutores, amigos).

1.2.3 Formulación de la pregunta

Desde esta perspectiva y dado que se pretende diseñar material concreto ya sea virtual o tangible al que se le pueda asociar el concepto que se espera asimilen los estudiantes, se plantea el siguiente interrogante ¿Cómo diseñar recurso didáctico que se pueda asociar a las nociones necesarias para la resolución de ecuaciones de un sola incógnita usando la propiedad cancelativa de las estructura de anillo con las operaciones usuales entre los números racionales?

1.3 Justificación

Inicialmente se busca que los estudiantes adquieran la competencia deseada. Puede pensarse también que aportar a este problema, contribuirá a motivación de estudiantes y docentes en el estudio y enseñanza del álgebra, pues su carácter abstracto inicial, es una dificultad que el estudiante arrastra incluso hasta la universidad llegando a ser, tal vez, uno de los motivo de desvincularse de una carrera universitaria.

Este trabajo espera también contribuir a la discusión de la enseñanza de las matemáticas desde el enfoque de sistemas. Desde los lineamientos Curriculares mismos, se induce a su enriquecimiento, haciendo especial énfasis desde su presentación en que es una discusión abierta para docentes e investigadores.

Finalmente, el aporte quiere llegar a que, el estudiante, pueda comprender (en el sentido asignado por Perkins), el uso de las propiedades de la estructura algebraica de anillo sobre los racionales para resolver ecuaciones de una incógnita y poder así llegar a procesos de modelación mayores, refiriéndonos aquí, por ejemplo, a modelaciones trigonométricas o álgebras de funciones en el cálculo.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo General

Diseñar un elemento didáctico concreto para la enseñanza de la propiedad cancelativa en la estructura de anillo sobre los racionales con las operaciones suma y producto.

1.4.2 Objetivos Específicos

- Establecer objetos con propiedades visuales y táctiles que puedan ser asociados a los elementos de Q.
- Identificar las condiciones necesarias para establecer la relación entre los objetos didácticos y los elementos del anillo sobre Q.
- Diseñar condiciones que, aplicadas al conjunto de los objetos didácticos, emule la estructura de anillo y tenga la complejidad suficiente para permitir el planteamiento de algoritmos involucrados en la propiedad cancelativa.

1.5 Marco Referencial

1.5.1 Referente Antecedentes

Más que enseñar estructuras algebraicas desde el formalismo, se considera más bien en este trabajo, la culminación de la propuesta dentro del aula del “enfoque de sistemas” según Vasco: el sistema simbólico (Lineamientos Curriculares): una vez que se han identificado los sistemas concretos con los cuales el niño actúa y pasando por el sistema conceptual, se llega al sistema simbólico, al sistema de representación. Como el mismo Dr. Vasco Uribe lo menciona, los sistemas poseen estructura (Vasco, 1984). A pesar de haber poco trabajo respecto a la generalización del Modelo van Hiele para la enseñanza de la geometría hacia otros campos de la matemática como el álgebra, es valioso considerar el aporte que hace en cuanto a las propiedades que dominan una estructura (Jaramillo, J y Esteban, P; 2006). El mencionando modelo y el enfoque de sistemas coinciden en que hay un punto de partida (percepción o sistemas concretos) para el aprendizaje y que hay unos pasos (niveles de pensamiento o construcción del sistema conceptual, respectivamente) y unas metas (elaboración de demostraciones formales o elaboración del sistema simbólico). Hasta aquí las semejanzas; de hecho, los mencionados autores manifiestan en su artículo que, el propio Pierre van Hiele, ha obtenido pocos éxitos (van Hiele 1987) en la generalización del método.

Ahora situándonos en el programa educativo de los lineamientos curriculares con el enfoque de sistemas enriquecido con la noción de estructura propuesta por van Hiele, con el fin de comenzar a llenar el vacío que hay entorno a la enseñanza de las estructuras algebraicas formales.

Respecto a la noción de estructura de anillo sobre los racionales, los lineamientos mencionan la comprensión del concepto de operación, en los cuales destacan:

reconocimiento de las operaciones en situaciones concretas; reconocimiento de los modelos más usuales y prácticos de las operaciones; comprender las propiedades matemáticas de las operaciones y el efecto de cada operación y relaciones entre las operaciones (Lineamientos Curriculares). Es fácil notar que se está hablando de las propiedades de anillo sobre Q, desde el enfoque de sistemas por supuesto.

Una de las características de la resolución de una incógnita en una ecuación lineal es el uso continuado de la propiedad de inverso tanto aditivo como multiplicativo. En principio, ciertas técnicas del uso del inverso aditivo como el de las “balanzas” para “equilibrar” la ecuación, no son del todo oportunas para el inverso multiplicativo. De hecho, Saenz, J (2014) en su tesis de maestría “Diseño de una unidad didáctica basada en métodos informales para la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita” Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, propone actividades didácticas que ayuden a afianzar desde el aspecto concreto (como iniciaría el enfoque de sistemas), la comprensión del concepto de ecuación de primer grado con una incógnita en los estudiantes de octavo grado de cierta institución. Se tiene en particular el acercamiento a la noción de igualdad y el énfasis que le da en el desarrollo de su investigación. Esto motiva a establecer las pesquisas para, de la misma manera, hacer énfasis en propiedades más elaboradas, como la propiedad cancelativa de los grupos algebraicos, en particular, del anillo de los racionales, que usa fuertemente el concepto de igualdad.

1.5.2 Referente Teórico

El trabajo que se concibe consiste en la enseñanza de la aplicación de las propiedades de inverso aditivo y multiplicativo para la solución de ecuaciones lineales de los racionales usando material concreto. El material didáctico concreto que se propone representará los números racionales, las operaciones de suma y producto, incógnitas y la igualdad de tal manera que se puedan tomar para formar “manos” de cartas. Junto con esta caracterización del material, se introducirán reglas de juego que generarán un entorno propicio para la construcción de expresiones algebraicas, en particular ecuaciones lineales y, además, la representación de la estrategia de solución de ecuaciones lineales mediante la manipulación de estas tarjetas.

El sustento teórico para este trabajo será la propuesta de aprendizaje significativo crítico de M. A. Moreira, quien a su vez se basa en la teoría aprendizaje significativo de David Ausubel y la visión de enseñanza de N. Postman y C. Weingartner. Se parte de la idea de que si la escuela enseña conceptos, fuera de foco en la actualidad, a saber "verdad absoluta", "certeza", "entidades aisladas", "estados y cosas fijos", "causalidad simple", "diferencias dicotómicas, conocimiento transmitido", "información como algo necesario y bueno", "idolatría tecnológica", "consumidor consciente", "globalización de la economía como algo necesario e inevitable" y "el mercado da cuenta", la escuela producirá "personas pasivas, dogmáticas, intolerantes, autoritarias, inflexible y conservadoras que se resistirán a cualquier cambio para mantener intacta su ilusión" (Moreira,2005). Se propone además que los conceptos que deben construirse son los de relatividad, probabilidad, incertidumbre, función, causalidad múltiple, relaciones no simétricas, grados de diferencia e incongruencia. Es así que la salida que propone Moreira es una pedagogía crítica "como estrategia de supervivencia en la sociedad contemporánea" a la que justificadamente llama *aprendizaje significativo crítico*. La propuesta se consolida dentro de los principios programáticos del aprendizaje significativom, pero se consolidan en *principios*, que caracterizan al aprendizaje significativo crítico, que propician tanto la postura crítica como el aprendizaje significativo. Ellos son el principio de la interacción social y del cuestionamiento, el de la no centralización en el libro de texto, del aprendiz como perceptor, del conocimiento como lenguaje, de la conciencia semántica, del aprendizaje por error, del desaprendizaje, de la incertidumbre del conocimiento, y de la no utilización de la pizarra. A continuación se enumeran y describen dichos principios:

1.) *De la interacción social y del cuestionamiento*: El profesor y el alumno comparten significado luego de negociarlos. Esta negociación requiere un intercambio de preguntas entre estos actores en lugar de respuestas. Este tipo de relación posibilita que la enseñanza tienda a ser crítica y promotora del aprendizaje significativo, pues cuando el estudiante formula una pregunta relevante está haciendo uso de conocimientos previos, una de las condiciones necesarias para que se dé el aprendizaje significativo.

En este sentido, el material didáctico, requiere de la asignación de significados específicos tanto a las cartas como a las relaciones que se adjudican entre ellas; el establecimiento de estos significados comunes requiere de la interacción social y del cuestionamiento al material, logrando que el material se ajuste al mencionado principio.

2.) *De la no centralización en el libro de texto*: este principio cuestiona el libro de texto como fuente de conocimiento, en lugar de esto, se proponen diversos materiales que representan producción de conocimiento, desde ámbitos como “los artículos científicos, los cuentos, las poesías, las crónicas, las obras de arte” con preguntas relevantes que conlleven a “identificar el fenómeno de interés”, “las preguntas que dieron lugar a esas respuestas”, “los conceptos requeridos”, “el conocimiento producido”, “la metodología”, “la valoración del conocimiento” abogando por la selección cuidadosa y diversificada de materiales como facilitadora del aprendizaje significativo.

Claramente, la propuesta del material didáctico es una alternativa al libro de texto, con la cual se propicia un medio para establecer conceptos relevantes, en este caso número y operación, que además permite señalar concretamente las propiedades de los racionales para la solución de ecuaciones lineales.

3.) *Del aprendiz como perceptor*: Se consideran las percepciones como modelos mentales o representaciones internas del mundo. Se va a procurar que el profesor y el estudiante perciban de forma semejante los materiales educativos, es decir, que se reconozca que cada uno de estos actores va a percibir el material educativo como cada quien lo entienda, lo que justifica no enseñar respuestas correctas, verdades absolutas, dicotomías, simetrías, verdades absolutas o localizaciones exactas.

El contenido de estudio propuesto, esto es, la aplicación de propiedades de inverso en la solución de ecuaciones lineales con una sola incógnita, puede ser de difícil acceso por su abstracción, por su fundamentación; es por eso que se cree que el material propuesto contribuye a generar una percepción del estudiante desde material concreto, a la vez que actúa como mediador para la comunicación entre las percepciones del docente y el estudiante.

4.) *Del conocimiento como lenguaje*: Una disciplina es una manera de conocer el mundo, por tanto genera unos símbolos para codificar el conocimiento generado por ella. La propuesta de Moreira es que entonces la enseñanza de una disciplina consiste, justamente, en la enseñanza del lenguaje que la representa. Luego, para que se dé el aprendizaje significativo, debe darse una comprensión del lenguaje; y si se quiere que, además sea crítico, debe reconocerse que éste lenguaje codifica "una nueva forma de ver el mundo".

Se tiene que el material didáctico genera un ambiente propicio para identificar las nociones de los racionales en la solución de ecuaciones lineales desde perspectivas concretas, facilitando así la comunicación de las palabras clave en el desarrollo de estrategias en la solución de ecuaciones, es decir, el material facilita la codificación de los elementos necesarios en la solución de una ecuación estableciendo las pautas para la comunicación verbal y escrita.

5.) *De la conciencia semántica*: hace referencia a que los significados son atribuidos por las personas y por ende viven en ellas, y que además los significados no son las cosas que codifican. También establece grados de abstracción entre palabras y referentes verificables asignándoles las categorías de connotativo o subjetivo y de denotativo o social. Así, lo que busca es compartir significados denotativos en relación al tema de enseñanza.

Para la propuesta de trabajo se espera construír un material que requiere asignación de significados, tanto del material en sí como a las relaciones que se establecen en él mismo, lo cual conlleva a denotar los conceptos de número, operación, variable o incógnita así como también la noción de solución de una ecuación para establecer las pautas de solución de una ecuación.

6.) *Del aprendizaje por error*: Se reconoce el error como "el mecanismo humano por excelencia" para construír conocimiento. La principal virtud de esta visión es que cuando comprendemos algo hacemos un modelo mental de dicho objeto, la característica principal es su recursividad, su "capacidad de autocorrección que resulta del error" al adaptar el modelo cuando no se ajusta a las circusntancias.

El material didáctico promueve la adquisición de un modelo mental de la solución de ecuaciones. Este material, al tener reglas de uso, promueve el error como estímulo para completar el modelo de solución mediado por las tarjetas en un proceso individual.

7.) *Del desaprendizaje*: este principio establece dos perspectivas para el desaprendizaje: desde el punto de vista Ausbeliano del aprendizaje subordinado se hace necesario cuando "el conocimiento previo impide captar los significados del nuevo conocimiento"; la otra es cuando deben valorarse los viejos conceptos y estrategias y decidir cuales son relevantes para un momento de cambio asumiendo el carácter de "olvido selectivo" (obliteración).

La propuesta de material didáctico tiene en cuenta la alta probabilidad de que los conocimientos previos que se puedan tener de la aritmética no sean suficientes para emprender el trabajo simbólico necesario en la solución de ecuaciones; además quiere contribuír a un aprendizaje de la noción de operación y sus propiedades, siendo necesario quizás, desaprender el viejo concepto que se tenga ya sea de número o de operación o de ambos. Es decir, el material propicia el reajuste de estos conceptos por parte del estudiante en un contexto controlado por él mismo.

8.) *De la incertidumbre del conocimiento*: como elementos fuertes de la construcción de una visión del mundo con el lenguaje humano, se consideran las preguntas, definiciones, y metáforas. Por lo tanto, al ser éstas creaciones, formulaciones y usos de los seres humanos, las construcciones que se hagan con ellas tienen cierto grado de incertidumbre.

La intervención propuesta, espera ser una metáfora de las acciones que ocurren en el proceso de la solución de una ecuación lineal, usando una estrategia axiomática, es decir, usando los axiomas de inverso de los racionales.

9.) *De la no utilización de la pizarra*: La idea central es que el tablero, representante tradicional del aprendizaje mecánico, deje su lugar a otras actividades que pongan al estudiante en el centro del proceso enseñanza-aprendizaje por medio de otras estrategias en el aula, como las actividades colaborativas y cooperativas, seminarios, proyectos, investigaciones, discusiones y paneles.

El material didáctico pasa a ocupar el lugar del tablero, actuando como eje de la enseñanza-aprendizaje al hacer que el estudiante participe del proceso de construcción del saber necesario para solucionar ecuaciones lineales.

1.5.3 Referente Conceptual-Disciplinar

La solución de una ecuación lineal de una incógnita consiste en la construcción de un valor que se le asigna a la variable y verifica un predicado, a saber, la igualdad. La construcción de este valor, llamado solución, se logra mediante una sucesión de pasos consistentes en la aplicación sucesiva de los axiomas de campo (entre los que se cuenta la noción de inverso de un número), a una expresión determinada de la ecuación. Este proceso que se acaba de mencionar, es una estrategia en la solución de ecuaciones lineales y puede considerarse como fundacional para ilustrar otras estrategias de solución de ecuaciones en otros contextos, por ejemplo, ecuaciones cuadráticas, ecuaciones trigonométricas, etc. contextos que requerirán de una estructura que permita modificar dichas ecuaciones y construír una solución, como es el caso de las ecuaciones lineales de una variable en los racionales. Métodos semejantes se emplean para resolver sistemas de ecuaciones lineales, lo cuál nos lleva a todo el desarrollo del álgebra lineal, cuyo papel en la modelación de problemas es indiscutible. A nivel de la educación media se tiene el estudio de la trigonometría y las ecuaciones de funciones, uso de funciones inversas, entre otras, para el cálculo. En la trigonometría se tiene como uno de los temas centrales la verificación de identidades, el cual hace uso extensivo de las propiedades estructurales del campo de las funciones trigonométricas. Cabe mencionar que en el álgebra de las funciones trigonométricas no solo se tiene la noción de inverso aditivo y multiplicativo, sino también un nuevo inverso respecto de la operación composición de funciones, el cuál tendrá propiedades que permiten un tratamiento similar al de inverso multiplicativo, lo que le da más valor al trabajo que se propone. Además, la solución de ecuaciones de funciones también tienen ésta característica, es decir, las funciones junto con las operaciones de suma y producto definidas debidamente, también poseen estrategias de solución que incluyen propiedades similares a las aplicadas para la solución de las ecuaciones lineales. Ya a nivel universitario, el estudio y solución de ecuaciones diferenciales también emplea éstas estrategias del uso de propiedades estructurales para la solución de ecuaciones en dominios debidamente restringidos. Estas estrategias también se emplean en sistemas de varias ecuaciones, con su debida generalización; cada estructura algebraica, por mas complejo que sea el sistema sobre el cuál se aplica, presenta un uso similar de las propiedades que se quiere ilustrar en este trabajo.

Desde la enseñanza de la matemática este tema es clave porque, a partir de allí, se emprenden diferentes estudios que dependen de la capacidad del estudiante para emplear estrategias en la solución de ecuaciones en general. Además, este material concreto pretende fortalecer *la ejercitación de procedimientos*, ya que, claramente, propicia un ambiente tangible para el uso de los axiomas involucrados en la solución de ecuaciones; espera contribuir al fortalecimiento de *el razonamiento*, por cuanto la estrategia de solución, vista de este modo, facilita la justificación a partir de axiomas de la solución de ecuaciones y, así mismo, contribuye a *la comunicación* en la matemática, pues la misma concreción del material y su relación con el procedimiento para la solución de una ecuación, facilitan la descripción del proceso de manera escrita o verbal, comunicando así razonamientos conducentes a la solución de ecuaciones. De los cinco procesos generales mencionados en los Lineamientos Curriculares, se resaltan estos tres como aporte directo de la propuesta, lo que además

redundaría en la adquisición de otros aspectos disciplinares que exijan razonamientos procedimentales, como la solución de ecuaciones y demostraciones sencillas.

Distintas disciplinas como química, física, economía, estadística, etc. emplean el lenguaje de la matemática para modelar situaciones y plantear soluciones, así como también comunicar resultados con sus respectivas interpretaciones. Uno de los modelos matemáticos más sencillos es el modelo lineal de una sola incógnita, lo cuál le da valor a la enseñanza de la solución de ecuaciones desde esta perspectiva, pretendiendo que el aprendiz, al asimilar este conocimiento, se le facilite la adquisición de conceptos no matemáticos propios de las disciplinas que sean descritos con modelos lineales de una incógnita, llegando rápidamente a las interpretaciones propias de la disciplina en lo concerniente al resultado encontrado con la estrategia planteada. De aquí que se considere importante la enseñanza de este tema en particular desde la perspectiva de disciplinas diferentes a la matemática en sí.

Teniendo presente el modelo 3UV que establece tres maneras de percibir una variable, a saber, como *número general (*expresión numérica*), incógnita* y *relación funcional*, la propuesta de trabajo da un acercamiento a la noción de incógnita "liberada de su significación geométrica" (Lineamientos curriculares), que se constituye en uno de los "núcleos conceptuales matemáticos" sobre los cuales se pretende iniciar el desarrollo del *pensamiento variacional*. Este es un reconocimiento que se hace del álgebra desde los lineamientos curriculares, poniendo como objeto final de estudio la variación en su "sentido de dependencia entre variables que se dan en los contextos de la vida cotidiana y científicos" (Lineamientos Curriculares). Finalmente, estos Lineamientos, dan especial relevancia, dentro del pensamiento variacional, a la noción de proporcionalidad, la cual al modelar una situación, conlleva al planteamiento de una ecuación que se puede manipular con métodos similares a los facilitados por los racionales para la manipulación de ecuaciones.

1.5.4 Marco Legal

NORMA	TEXTO	CONTEXTO
Ley 115 de 1994, art.	La adquisición y generación de los conocimientos científicos y técnicos más avanzados, humanísticos, históricos, sociales, geográficos y estéticos, mediante la apropiación de hábitos intelectuales adecuados para el desarrollo del saber.	La propuesta de intervención, entre otras cosas propicia elementos necesarios para la mencionada adquisición de conocimientos.
Ley 115 1994, art. 22, literal c)	El desarrollo de las capacidades para el razonamiento lógico, mediante el dominio de los sistemas numéricos, geométricos, métricos, lógicos, analíticos, de conjuntos de operaciones y relaciones, así como para su utilización en la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, de la tecnología y los de la vida cotidiana. Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.	La intervención tiene como objetivo un aspecto algebraico el cual se refleja en sistemas numéricos, razonamiento lógico, conjuntos de operaciones así como solución de problemas.

Lineamientos Curriculares Matemáticas	Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos: Proponer el inicio y desarrollo del pensamiento variacional como uno de los logros para alcanzar en la educación básica.	El trabajo va dirigido a la noción de variable vista como incógnita, con lo cual concuerda con las orientaciones de la norma, así como a la introducción de sistemas algebraicos.
Estándares Básicos por Competencias en Matemáticas	El pensamiento variacional […] se inicia con el estudio de regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente. El estudiante resuelve problemas […] usando propiedades y relaciones entre los números reales.	En este sentido el material didáctico va dirigido a la observación de estas regularidades para ser entendidas como propiedades. La propuesta se desenvolverá en el ámbito de las propiedades y relaciones entre los números racionales, que en este sentido es subcampo del sistema numérico de los reales.

Tabla 1: Normograma

1.6 Marco Espacial

Este trabajo se desarrollará en la I.E San Gabriel Arcángel; ubicada en el barrio Guasimalito al nororiente del municipio de Bello. Este barrio se ubica en limites de Bello con Copacabana. La Institución cuenta con 354 estudiantes en los tres niveles educativos. La planta física de la Institución colinda con la Fundación Gente Unida, que funciona como "hogar de paso" para jóvenes. Casi la mitad de la población de la institución esta conformada por infantes y adolescentes de esta comunidad cuyo referenciación demográfica es inexistente en los documentos institucionales hasta la fecha. El barrio de influencia de la institución está ubicado en los estratos 1 y 2. De los estudiantes del barrio que no pertenecen al hogar de paso, se estima, según documentos institucionales, que el 68% de la población subsiste con menos de un salario mínimo, el 23% con un salario mínimo y el 9% con mas de dos salarios mínimos.

En los últimos 5 años, el barrio Guasimalito pasó de ser zona semirrural a convertirse en zona urbana, así es que cuenta con amplias zonas verdes; por esta razón la visión institucional es que "Para el año 2018 la Institución Educativa SAN GABRIEL ARCÁNGEL del Municipio de Bello, será reconocida como la institución líder en la formación de jóvenes integrales con competencias en lo AMBIENTAL" y entre los alcances de su misión está "desarrollar competencias básicas y específicas que les facilite a los educandos emprender procesos académicos". La propuesta de intervención quiere fortalecer el proceso misional de la institución enfocándose, justamente, en las competencias esenciales para adquisición de conocimientos en los aspectos variacional y algebraico.

2. Capítulo II. Diseño metodológico: Investigación aplicada

2.1 Enfoque

La investigación-acción educativa es una metodología de investigación que busca apoyar la *reflexión docente* en torno al aula, entendida esta como el espacio donde se da el proceso enseñanza-aprendizaje con sus actores principales, a saber, docentes y estudiantes. Apoya el proceso de reflexión docente al propiciar una estrategia de sistematización de situaciones en el aula que deban mejorarse, esto es, sistematizar problemáticas en el contexto del proceso de enseñanza-aprendizaje, propiciando la implementación de propuestas con miras a cambiar la situación problema identificada. La investigación-acción reconoce que las dificultades surgen de la interacción en el entorno social del aula y “analiza las situaciones humanas y las situaciones sociales experimentadas por los profesores” (Elliot, 1990).

La investigación-acción se concibe como proceso cíclico de exploración de propuestas, acciones establecidas y valoración de resultados de estas acciones, acerca de las prácticas con miras a la intervención social (Bausela, 2004); en el ámbito educativo, esta investigación-acción facilita la valoración de las propuestas educativas, pues es el docente quien explora su propia práctica y los principios que la orientan. Por tal razón es el más indicado para proponer y emprender acciones conducentes a la mejora de situaciones concretas, teniendo presente el diálogo con los actores del aula. Esta posibilidad de cambiar las prácticas, se entiende ahora como un proceso social que se emprende colectivamente, en vez de un mecanismo por el cual el docente mejore sus prácticas individuales. Entre sus méritos se cuenta el hecho de la actitud crítica y favorecimiento del cambio y transformación del entorno; propicia la interacción social pues impulsa la conciencia de los individuos en estos procesos, así como a nivel individual estimula el aprendizaje activo y la construcción del saber como también contribuye al desarrollo de las destrezas individuales y adquisición de habilidades de observación y análisis (ídem). La investigación-acción se implementa siguiendo unas fases o ciclos, que pueden variar ligeramente según el autor, constituidos por la fase de diagnostico, la de planificación y diseño, la fase de acción, observación, y reflexión-evaluación. Es esta implementación la que se pretende realizar en esta propuesta de intervención, con el fin de mejorar y comprender lo que acontece socialmente en la enseñanza aprendizaje de los elementos básicos del álgebra, para el caso, en la resolución de ecuaciones lineales usando propiedades específicas (Bausela, 2004).

2.2 Método

La forma en que se desarrollará la propuesta se implementa por el método para la investigación-acción en cinco fases. El método marca las pautas para el desarrollo de los antecedentes, el diseño y la evaluación de la propuesta.

Diagnóstico:

Una vez establecidos tanto el Problema, la Pregunta y el Marco Teórico, las actividades estarán dirigidas a la revisión de los Lineamientos Curriculares y los Estándares por competencias para matemática en torno al contexto para la enseñanza de las ecuaciones lineales. Seguidamente se inicia la indagación en repositorios institucionales para conocer las propuestas que existan respecto al mencionado contenido. Así mismo, se da inicio a la revisión de recursos bibliográficos externos, generando los antecedentes en el ámbito externo. La actividad final para esta fase es la revisión de bibliografía para definir la teoría pedagógica que sustentará la intervención.

Diseño:

En esta fase se define como propuesta de material didáctico las cartas como eje del proceso enseñanza-aprendizaje de los aspectos algebraicos necesarios para la solución de ecuaciones lineales. Así mismo se establecen las condiciones necesarias en las propiedades algebraicas para la solución de ecuaciones y ser asociadas al material didáctico. Y por último, partiendo del objetivo anterior, se diseñan las relaciones en tre las cartas para emular la estructura de campo.

Intervención:

En esta fase se implementa la propuesta de trabajo en el aula empleando el material didáctico en la enseñanza del manejo de propiedades algebraicas en la solución de ecuaciones lineales. Se dará paso al uso del material y a la evaluación con el mismo, propiciando el ambiente adecuado para que la manipulación y la observación del material didáctico establezca la correspondencia con la manipulación de expresiones algebraicas. A su vez, se recogen los datos que facilitarán el análisis de la propuesta.

Evaluación:

Esta será la fase de observación sobre la propuesta. Inicialmente se diseñarán y construirán evaluaciones acerca de su desempeño. Así mismo se diseñará y construirá una evaluación final de la intervención.

Conclusión:

En esta fase final se analizan los resultados obtenidos durante la fase de evaluación de la propuesta, generando las respectivas conclusiones y recomendaciones.

2.3 Instrumento de recolección de información y. análisis de la información.

La propuesta de intervención estará generando información para su posterior análisis. Para ello se proponen como fuentes primarias el uso de evaluaciones, talleres y diario de campo de forma escrita.

Los talleres escritos, dirigidos a los estudiantes, buscan no solo orientar la implementación de la intervención sino también delimitar el campo de percepción del estudiante, propiciando el tiempo y el espacio para el seguimiento del material didáctico concreto. De esta fuente se recolectará información respecto al material didáctico y a la interacción entre el material y el estudiante.

Con las evaluaciones escritas se busca recolectar información respecto al proceso de aprendizaje de las nociones necesarias para la solución de ecuaciones, así como de la efectividad para resolverlas. También se generará información respecto al uso del material.

Diario de campo tiene como propósito el registro las observaciones que se puedan presentar durante la intervención con los estudiantes, así como el registro corriente de la clase, de tal forma que la información consignada contribuya en el análisis de los resultados obtenidos. Este diario de campo irá enfocado tanto al desarrollo del contenido como al uso del material didáctico.

En lo tocante a las fuentes secundarias, para completar la interpretación de los datos emergentes, se emplearán recursos tradicionales que contengan aportes a la modelación de los datos con miras al cambio que se pueda proponer, en particular se consultarán revistas y libros electrónicos o impresos con información afín desde diversos ámbitos; de manera similar se consultarán bases de datos con el fin de, entre otros, acceder a repositorios institucionales para la revisión de producciones académicas en el ámbito requerido como investigaciones, tesis, artículos.

2.4 Población y Muestra

La población que se analizará será el único grado noveno de la I.E San Gabriel; ya que el grupo cuenta con 18 estudiantes, se considerará al grupo como muestra para el estudio de la propuesta.

2.5 Delimitación y Alcance

Una vez analizada la propuesta de intervención, se expondrá en la institución a la comunidad educativa presentando el proceso de sistematización de la propuesta y el seguimiento a la generación del conocimiento en los estudiantes, partiendo de las tablas que recogen los datos. Además espera presentarse una modificación al Plan de área de matemática grado noveno que incorporé al propuesta de las cartas en la enseñanza-aprendizaje de la solución de ecuaciones.

2.6 Cronograma

Fase	**Objetivos**	**Actividades**
Fase 1: Diagnóstico	-Formular el problema y la pregunta correspondientes al proceso de enseñanza-aprendizaje de la I.E. San Gabriel. -Establecer antecedentes en la solución de ecuaciones lineales. -Definir la Teoría pedagógica para intervención.	1.1 Lectura de Los lineamientos Curriculares y los Estándares por Competencias emitidos por el MEN dirigida a establecer el contexto para la enseñanza de la solución de ecuaciones lineales. 1.2 Revisión recursos bibliográficos para establecer los antecedentes respecto a la enseñanza de la solución de ecuaciones lineales en el repositorio institucional de la Universidad Nacional. 1.3 Revisión de recursos bibliógraficos para establecer los mencionados antecedentes en el ámbito externo. 1.4 Revisión bibliográfica para la teoría pedagógica

		de intervención.
Fase 2: Diseño	Diseño de material didáctico concreto para la solución de ecuaciones lineales de una incógnita empleando propiedades algebraicas.	2.1 Establecer las propiedades algebraicas necesarias del sistema numérico racional para la solución de ecuaciones. 2.2 Diseñar y material concreto las propiedades del mismo. 2.3 Diseñar actividades evaluativas.
Fase 3: Intervención en el aula	Implementación de la intervención de aula en el grado noveno de la I.E.	3.1 Desarrollar la estrategia propuesta para el proceso enseñanza-aprendizaje.
Fase 4: Evaluación	Evaluación de la estrategia pedagógica desde la perspectiva del material didáctico.	4.1 Diseño y construcción de evaluaciones durante la intervención. 4.2 Diseño y construcción de evaluación una vez terminada la propuesta.
Fase 5:	Determinar el alcance de la propuesta de acuerdo con	5.1 Análisis de los resultados de la de la

Conclusiones	los objetivos específicos	propuesta de intervención. 5.2 Partiendo de las conclusiones del análisis anterior, generar las recomendaciones para posteriores intervenciones

Tabla 2: Planificación de Actividades

Actividad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1.1	x	x														
1.2		x	x													
1.3			x	x												
1.4			x	x												
2.1				x	x											
2.2				x	x	x										
2.3						x										
3.1							x	x	x	x	x	x				
4.1							x		x	x	x	x	x			
4.2											x	x	x			
5.1													x	x	x	
5.2															x	x

Tabla 3: Cronograma de Actividades

3. Capítulo III. Sistematización de la Intervención

3.1 La intervención en el Aula

3.1.1 Caracterización del Elemento Didáctico

El material didáctico consiste en una baraja de *cartas* hechas en cartulina. Estas cartas o tarjetas representarán los elementos sintácticos de la estructura algebraica de campo en los racionales (en lo sucesivo *los racionales*), es decir, permitirán expresar los símbolos para: las operaciones suma y producto, los números racionales, los paréntesis, variables y la igualdad. Se llamará *proceso* a toda manipulación que se haga de las cartas, barajas, tarjetas, etc. Esta noción de proceso es a su vez el enlace con las propiedades algebraicas: realizar un proceso redunda en generar una expresión algebraica. Estos procesos se concretarán fisícamente dotando al conjunto de barajas, carta o tarjetas con unas *reglas* de manipulación.

Se llamará *expresión* al conjunto de cartas formadas en la manos, Se llamará *expresión bien formada* a la construcción de manos de cartas que satisfagan las reglas propuestas en 6.1.3. Diremos además que una tarjeta *acompaña* a otra cuando son *consecutivas*. Con esto será suficiente para ilustrar nociones básicas de la estructura de campo de los racionales, particularmente la de construír soluciones de ecuaciones lineales de una incógnita. En lo sucesivo *ecuación* hace referencia a *ecuación lineal de una sola incógnita*.

3.1.2 La orientación en el Aula

El trabajo en el aula se orienta a partir de un material escrito llamado *guía-taller evaluativo*. Recibe este nombre pues en una primera parte se plantean los objetivos y competencias que esperan alcanzarse. Se proponen estas descripciones y motivaciones con algo de rigor en el lenguaje, pero en todo momento buscando que las lecturas de estos objetivos y competencias estén al alcance de la comprensión de los estudiantes. Seguidamente se presenta una acitvidad en relación a estos objetivos y competencias, así como un ejemplo de lo que se va a realizar. Hasta aquí cumple las funciones de *guía*. La guía-taller se lee de manera individual, luego de unos minutos para la lectura y la interpretación, se pasa a una discusión plenaria entre los estudiantes con el fin de compartir y discutir las interpretaciones que de la lectura hicieron para proceder a resolver el taller evaluativo. Se resalta que este proceso de comprensión lectora en ningun momento hace parte de las indagaciones de este trabajo, es decir, no se evaluó directamente.

La segunda parte de la guía-taller es, justamente, la resolución del taller. Este taller es para trabajo en grupos o individual; lo que se buscó para el desarrollo de los mismos es la observación directa de la manipulación que cada uno de los estudiantes hace del material y sus argumentaciones para hacerlas a partir de las reglas del material didáctico. Se logra un aporte por parte de los estudiantes al llevar el material al límite de su uso, dejando ver al observador las fortalezas y debilidades del mismo. Estos talleres introducen nociones relevantes para el desarrollo de estrategias en la solución de ecuaciones, que se van encadenando, hasta llegar a construír una estrategia para resolverlas. En todo momento las guía-taller serán de vital importancia para el proceso de enseñanza-aprendizaje propiciando el espacio, los tiempos, el lenguaje y las técnicas que se quieren transmitir.

3.1.3 Uso del Elemento Didáctico

resolver ecuaciones de la forma ax+b=c, con x variable. Una vez mas, este algoritmo sobre procesos permite construír la solución de una ecuación, es decir, el *valor para la variable que verifica la igualdad*, además, en esta ocasión quedan introducidas expresiones constituídas por tarjetas paréntesis, número y operación; a su vez, esta expresión bien formada da paso a una expresión lista para calcular que, una vez mas, se le pidió al estudiante efectuar y verificar con un dispositivo electrónico de ser necesario. Una vez mas, la guía-taller fue la mediadora entre todos los agentes involucrados en la correspondiente generación de conocimiento.El uso del material didáctico se basa en la lúdica de los juegos con barajas. A partir de esta lúdica, queremos que el estudiant capte una estructura en el material didáctico que busca emular la estructura de los racionales. Para este fin se consideró prioridad introducir una regla para el uso de las tarjetas operación: *las cartas con símbolo operacional siempre deben estar en medio de dos cartas número o de una carta número y otra variable*. Esta regla hace referencia al carácter binario de las operaciones. Se genera una guía-taller que ilustra el uso de la regla paso a paso. Se evidenció, durante la implementación de ésta estrategia para la solución de ecuaciones, la comunicación espontánea de *expresiones algebraicas* desde el lenguaje verbal y escrito usando como referenci la definición introducida de expresión bien formada.

El siguiente paso fue introducir la regla para la tarjeta *igualdad.* Se consideró la igualdad como un predicado: el predicado se verifica cuando relaciona dos expresiones iguales entre sí. Se reconoce que el formalismo podría suponer una dificultad para el estudiante, por tanto se asumió un símil netamente aritmético: dos expresiones son iguales si representan la misma cantidad. Aquí se entiende expresión como polinomio aritmético (sin variables y solo sumas y/o productos). Se inició la enseñanza del uso de la tarjeta igualdad enunciando la siguiente regla: *la tarjeta igualdad solo se ubica en medio de dos expresiones bien formadas que representan la mismo, si las expresiones no son iguales no se relacionan con la tarjeta igualdad.* Empleando ya en el aula una noción intuitiva de la igualdad utilizando, por supuesto una guía-taller en las condiciones que se mencionan mas arriba, se recolecta información respecto a esta actividad y simultáneamente se observa el uso de la tarjeta operación.

Una vez introducida la noción de igualdad entre expresiones bien formadas, es decir, una vez tenemos una correspondencia entre la tarjeta igualdad de nuestro material con la igualdad entre expresiones algebraicas introducimos la noción de elemento *neutro* (o *identidad)* e *inverso de un número respecto a una operación*. En esta parte de la intervención se consideró oportuno el uso de tarjetas distinguidas para los elementos *cero* y *uno* de los racionales; sin embargo el desarrollo de los acontecimientos en el aula volvió superflua esta iniciativa dada la facilidad para escribir los números en una tarjeta en vez de buscar las tarjetas *cero* o *uno*. La guía-taller va orientada a que el estudiante construya la noción de elemento neutro e inverso en las operaciones. Las actividades van encaminadas al uso extensivo de estas nociones mediante ecuaciones cuyas soluciones son los neutros o inversos de determinados números.

Esta guía facilitó la introducción de la noción *solución de una ecuación* como el valor que verifica una ecuación, asi como facilitó los *Procesos Generales de la Actividad Matemática*, contemplados en los estándares básicos, de comunicación y de razonamiento.

Luego de introducir las reglas de las tarjetas operación e igualdad, de introducir las nociones de ecuación y de elemento neutro e inverso, entonces la tarjeta variable y su uso es el paso obligado. La guía-taller para este apartado que se introduce presenta direntes ecuaciones de una sola variable con una sola tarjeta operación: es decir ya fuera que el coeficiente de la variable sea 1, ya sea que la constante sea cero, en cuyo caso, en las cartas se refleja como si apareciera una sola operación. Con esto en mente se propuso un algoritmo para solucionar ecuaciones lineales de una incógnita como se describe en esta guía-taller. La caracaterística principal de este algoritmo es introducir un nuevo *proceso con* *miras a* dotar de significado la manipulación tangible, *tomar una carta y voltearla,* de tal manera que lo que quede en frente sea, justamente, el reverso. Este gesto busca asociar el uso de la propiedad cancelativa con una manipulación tangible, y es la clave de uno de los objetivos especifícos a los cuales se quiere llegar en este trabajo: la enseñanza de los fundamentos algebraicos de la *propiedad cancelativa*. Según una mejora que debe hacerse a la regla de las operaciones (que estará indicada al final del trabajo y es mérito de un estudiante descubrir una falla en la regla), se entiende que entre dos tarjeta número o tarjeta núermo y tarjeta variable debe mediar una tarjeta operación; esta pauta implicará una toma de desición en el algoritmo, la cual consiste en determinar el inverso de un número inscrito en una tarjeta número.

Claramente este algoritmo se aplica a procesos, es decir, se aplica a la manipulación de las tarjetas, por tanto se va a producir una solución en términos de expresiones bien formadas, lo que conllevará, según la correspondencia establecida, a la construcción de la solución de la ecuación en los racionales. Se debe insistir en que este algoritmo da como resultado una ecuación entre tarjetas con la tarjeta variable de un *lado* de la igualdad y una expresión bien formada del otro, constituída por tarjetas operación y tarjetas número de tal manera que el estudiante pueda efectuar el cálculo sugerido por las tarjetas. Además se les propuso verificar estos resultados utilizando un dispositivo electrónico ya fuera calculadora o una aplicación de teléfono móvil. Simultáneamente se hace seguimiento de todas las nociones vistas hasta ahora.

Para finalizar la intervención se introdujo la noción de *jerarquía de las operaciones* y la de *los paréntesis*. No es un error que apenas hasta ahora aparezcan. La jerarquía de las operaciones es una consecuencia directa de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, la cuál requiere intensivamente de los paréntesis. De los paréntesis se les indicó a los estudiantes en la respectiva guía-taller, que servían para enfatizar las expresiones, “encerrándolas” o “enfatizándo” una “subexpresión bien formada” componente de la expresión inicial. Es la única mención que hace referencia a los paréntesis y, aún así, no se hace explicítamente[1]. De hecho, la idea de introducir la jerarquía de las operaciones quiere resaltar el uso tácito de los paréntesis a la hora de resolver polinomios aritméticos. Ahora se presenta un algoritmo que generaliza al anterior en el sentido de que ahora se plantea para resolver ecuaciones de la forma ax+b=c, con x variable. Una vez mas, este algoritmo sobre procesos permite construír la solución de una ecuación, es decir, el *valor para la variable que verifica la igualdad*, además, en esta ocasión quedan introducidas expresiones constituídas por tarjetas paréntesis, número y operación; a su vez, esta expresión bien formada da paso a una expresión lista para calcular que, una vez mas, se le pidió al estudiante efectuar y verificar con un dispositivo

[1] Por las caracaterísticas sintácticas y semánticas que pueden producir los paréntesis, es complejo establecer una regla sencilla para el uso de tarjetas paréntesis en el mazo de cartas que resemblan al campo algebraico. La mejor “regla”, conocida por quien escribe, para los paréntesis es una recursión definida para el uso de los paréntesis en la lógica boolena, que se presenta en la obra de Herbert B. Enderton “A mathematical introduction to logic, second edition, Chapter one, 1.3 A parsing algorithm”. este hecho indicaría que la propuesta para regla de los paréntesis incluiría una recursión, cosa que nos alejaría por completo de los objetivos del curso dada la robustes de esta recursión y la madurez del aprendiz.

electrónico de ser necesario. Una vez mas, la guía-taller fue la mediadora entre todos los agentes involucrados en la correspondiente generación de conocimiento.

3.1.4 Final de la Intervención

En este parte de la intervención el estudiante usa de manera constante las cartas y se observa constantemente la realización de procedimientos. Todos mostraron predisposición a la implementación del algoritmo con el estímulo de revisar las expresiones resultantes como solución con algún dispositivo electrónico. Lo mínimo que se requirió fue presentar una calculadora científica, o aplicación de teléfono móvil, pues se requería para introducir expresiones que incluían paréntesis. De manera similar se habituaron a hablar del valor de la variable (incógnita) refiriéndose al valor obtenido después del algoritmo, y tambien a sustituír en la ecuación inicial el valor obtenido para la variable. En algunos estudiantes se notó la contsrucción de argumentaciones, mostrándo asi el estímulo del *Proceso general del razonamiento,* pues al ser solicitados para realizar la solución de un ecuación usando las cartas, justifican cada uno los procedimientos realizados; esto a su vez, dada la naturaleza de este trabajo, esto implica justificar el uso de determinado axioma en la solución de una ecuación utilizando el *método algebraico de la aplicación sucesiva de axiomas* hasta construír la solución de la misma; incluso demuestran esta capacidad de manera escrita con la mayor pulcritud técnica como estética en su presentación.

3.2 Resultados y Análisis de la intervención

Las afirmaciones aquí consignadas se sustentan con base en los datos primarios, es decir, los datos recogidos en el espacio mismo de la intervención. Para el caso presente, consistieron en diario de campo, las guía-taller y las evaluaciones. En el diario de campo se consignaron las impresiones mas vivas en dos sentidos: en el comportamiento del material, es decir, en la manera que se usaba con la estructura inducida a partir de los axiomas de campo y el comportamiento de los estudiantes con este material así como su desempeño en el uso de las instrucciones de la guía.

Para sustentar lo anterior se organizan los resultados en tablas, las cuales recogen los resultados de diversos materiales educativos. Como se ha mencionado, este material busca motivar en los estudiantes respuestas argumentativas usando como eje de apoyo el material didáctico. Estas evaluaciones, a pesar de ser individuales, siguen observando el uso del material de manera directa. El material mostró la potencia sintáctica esperada al permitir expresar símbolos algebraicos; una prueba de esto es que al introducir a los estudiantes la primera regla de las tarjetas, un estudiante, en sesión plenaria, muestra combinaciones de tarjetas que en principio no violan la primera regla, pero demuestra que el enunciado de la misma es insuficiente. La modificación propuesta a partir de la crítica es el siguiente enunciado *primera regla: si hay mas de una tarjeta número en una expresión simpre mediará una tarjeta operación.* Esto también hizo notar, sin esperarlo, que el material, al prescindir por principio de un ambiente formal, estímula razonamientos y su comunicación por parte del aprendíz. En esta misma sesión se logró, gracias al material didáctico, enfatizar el carácter sintáctico de los símbolos para los números y las operaciones cuando se manipulan inscritos en la tarjetas. En la guía-taller 1 que se anexa, al estudiante se le exige en todo momento aplicar la regla de las tarjetas operación haciéndose observación directa y la evaluación de este proceso consisitía en realizar el mismo. La Guía-taller 2 consistió en presentar la regla para el uso de la tarjeta igualdad, mencionada arriba; al ser presentada en el contexto de los polinomios ariméticos, lo estudiantes resolvieron el taller con mucha mostrándo confianza en la evaluación de si dos polinomios aritméticos expresedos con tarjetas, satisfacían la condición para mediar entre ellos la tarjeta igualdad. Esta actividad demostró que el símbolo para la igualdad en la teoría algebraica y la tarjeta igualdad para el material se usaban de manera indistinguible por parte de los estudiantes renunciando rápidamente a decir “la tarjeta igualdad” simplemente por igualdad. De hecho, ésto fue ocurriendo con algunos de los procesos con las cartas: gradualmente se iban volviéndo indistinguibles entre sí los procesos con las cartas y sus contrapartes algebraicas. Ya fue mencionado que el uso de la tarjeta igualdad para conectar expresiones bien formadas crean situación propicia para plantear la noción de neutro, pues el neutro se presenta como la solución de una ecuación, a saber $a*x=a$ con * siendo la suma o el producto *.* De la misma manera se presenta la noción de inverso de un número. En esta parte se propone una primera evaluación respecto a las nociones básicas. La evalución aparte de los ejercicios propuestos recibió la indicación de uar el material concreto. La evaluación manifiesta que no hay un afianzamiento entre el aspecto sintáctico y semántico de la estructura algebraica parcialmente inducida en las cartas. Muestra además que el estudiante no ha afianzado las nociones propuestas. Una manera de entender ésta situación es que, así como lo algebraico va mas allá de los meros cálculos, también va mas allá de lo sintáctico dotando a sus expresiones con significados que deben ser interpretados, mismos que ni las guía-taller ni el material mostraron por sí mismos. Se toma nota, pues no sé anticipo dicha situación. Se sospecha que la modificación que debe hacerse para superar este fallo es introducir material dirigido a las tarjetas distinguidas *cero* y *uno* con el fin de nivelar los aspectos sintáctico y semántico de los símbolos.

CRITERIOS PARA LA EVALUACIÓN 1	% ESTUDIANTES
Falla al escribir explicítamente los elementos identidad de las operaciones.	27
Comunican de manera escrita la caracetrística del elemento identidad con repecto a la operación con claridad.	20
Falla al describir la característica del elemento identidad.	47
Reconocen expresiones coloquiales escritas que caracterizan al elemento identidad.	94
Establece diferencias entre el elemento identidad de la suma y del producto claramente	40
Muestra dificultades al intepretar afirmaciones sobre los elementos identidad	60
Determinan que cero no tiene inverso multiplicativo	54

Tabla 4: Primera evaluación

Los datos recogidos en la tabla anterior cierren el primer ciclo de la intervención. El paso a seguir es introducir la tarjeta variable como parte del material con su contraparte algebraica, los símbolos variables.

Tanto la tarjeta variable, como los símbolos para las variables en álgebra, fueron introducidos no solo sintácticamente, sino también dotados de un significado especial, que es justamente al que damos tradicionalemente: *un símbolo variable será una letra que representa un cantidad desconocida en una ecuación.* Se enfatiza que, para este trabajo, variable tiene entre otras, la acepción de *incógnita*. Para esta carta en particular no se presentó trabajo específico y se presentó como una idea pasiva en razón del papel que asumía en el trabajo: el objeto del material didáctico es encontrar una expresión bien formada que se igual a dicha variable. A esto se le llamará también solución de la ecuación. La Guía-taller 4 propuesta establece un algoritmo dirigido a construír el valor de una variable en una ecuación dada en un ambiente muy particular: resolver ecuaciones lineales de única variable y, en apariencia, una única operación. Esto facilitó la presentación de un algoritmo para la realización de dicho proceso el cual se describe a continuación:

> Algoritmo para construír la solución de una ecuación lineal de una incógnita y una sola operación:
>
> > Se tienen una expresión bien formada de cartas que representa una ecuación en una sola incógnita y una sola operación
>
> - Pasar la tarjeta operación *al otro lado de la tarjeta igualdad.*
> - Pasar la tarjeta número que acompaña a la variable *al otro lado de la tarjeta igualdad* , pero la giramos e inscribimos en el reverso de ella el inverso del número que inicialmente mostraba la tarjeta.

- Verificar que la expresión que acabamos de formar sea una expresión bien formada.

  Al otro lado de la igualdad queda establecida una operación entre tarjetas número, esta la podemos verificar en un dispositivo electrónico.

Los estudiantes mostrarón dificultades considerables en la lectura del algoritmo, para la interpretación de la misma se apoyaron en seguir paso a paso la lectura con el material concreto para identificar las instrucciones, lo que representa un aporte inesperado: apoyar los procesos de lectura. Esto debe ser tenido en cuenta como uno de los fuertes del material didáctico: propiciar el espacio para la lectura de algunas expresiones algebraicas. La lectura de dicho material se leyó de manera plenaria en por lo menos tres oportunidades para el efecto de garantizar que el contenido del algoritmo fuera claro para todos y se inicia de nuevo el proceso de reinterpretación de las instrucciones. Sin embargo, las apreciaciones en las dificultades mencionadas motivan reforzar la siguiente guía-taller la cual hace referencia al algoritmo para resolver ecuaciones lineales de una incógnita en la forma ax+b=c con x variable. La implementación de este algoritmo fue muy similar al de la anterior guía-taller, quedando de la siguiente:

Algoritmo para construír la solución de una ecuación lineal de una incógnita de la forma ax+b=c con x variable

Se tienen una expresión bien formada de cartas que representa una ecuación en una sola incógnita de la forma ax+b=c

- Pasar la tarjeta suma *al otro lado* de la tarjeta igualdad. Si no la hay, pase a la carta multiplicación y proceda como en el algoritmo anterior.

- Pasar la tarjeta número que quedó sin operación, pero girándola al reverso
- En la carta que acabada de girar escribimos el niverso del número en la operación que inicialmente acompañaba
- Verificar que la expresión acabada de formar cumple la regla de las operaciones
- Encerrar con paréntesis la expresión recién formada al lado contrario de la variable
- Pasar *al otro lado* de la tarjeta igualdad la tarjeta que acompaña a la variable al otro lado de la igualdad por fuera del paréntesis
- Pasar *al otro lado* de la tarjeta igualdad la tarjeta número que acompaña a la variable pero girándola al reverso
- En la tarjeta que acabamos de girar escribimos el inverso del número en la operación que lo acompaña.

Al otro lado de la igualdad queda establecida una operación entre tarjetas número, esta la podemos verificar en un dispositivo electrónico.

Este algoritmo se observó de igual manera al anterior. Mediante la manipulación de las cartas los estudiantes adquirieron habilidad para implementar el algoritmo en la resolución de ecuaciones. Las computaciones finales se realizaban con la calculadora o una aplicación que permitiera introducir paréntesis. Cuando se dió el afianzamiento, se propuso la evalución final, de la cuales recopilaron los datos que se mostraran a continuación.

CRITERIOS PARA LA EVALUACIÓN FINAL	% ESTUDIANTES
Selecciona afirmaciones verdaderas acerca de los inversos aditivo y multiplicativo de un número dado.	8
Selecciona algunas afirmaciones correctas acerca del inverso aditivo o multiplicativo de un número.	92

Tabla 5: Evaluación final

Lo primero que se observa en esta tabla es que el número de estudiantes que exitosamente señalan todas las afirmaciones verdaderas es considerablemente pequeño, en contraste con el resto, donde el factor de aleatoriedad en la respuesta puede ser mayor. Se infiere que, para estar en el primer grupo tanti capacidad de interpretación en la lectura como de dominio de la noción de inverso de un número respecto a una operación. Esto sugiere que debe mejorarse el proceso en una guía-taller que ilustre mas extensivamente la noción de inverso. Debe notarse que en los criterios establecidos en la tabla 2 no se está evaluando el uso del material ni el material mismo.

En la siguiente tabla se muestra que, aún sin mención explícita alguna, los estudiantes usan de manera efectiva los paréntesis respecto a la evaluación de operaciones.

CRITERIOS PARA LA EVALUCIÓN FINAL	% ESTUDIANTES
Aplica correctamente la jerarquía de las operaciones	100
Reconoce la relación entre el uso de los paréntesis y la jeraquía de las operaciones	8
Reconoce los paréntesis como un elemento para la formación de expresiones algebraicas, pero no reconoce su relación con la jerarquía de las operaciones.	70
Sin respuesta	22

Tabla 6: jerarquía de las operaciones

De la siguiente tabla se puede concluír que casi el 75% de los estudiantes ejecutó el algoritmo con destreza, lo cual es alentador, pues se sabe que el proceso con las cartas nos lleva rapidamente a las expresiones algebraicas como se comunican usualmente. Que en la tabla 4, el 25% de los estudiantes comprenda exactamente dónde falló el algoritmo y dé las razones del porqué, supera el descalabro que supuso la falta de comprensión de la noción de inverso en la primera evaluación. El dominio del material por parte del estudiante para llegar a este resultado fue determinante, pues con el material y las indicaciones dadas, fue él mismo quien construyó su propio conocimiento.

CRiTERIO DE EVALUACION FINAL	**% ESTUDIANTES**
Reconoce cuando el procedimiento para resolver una ecuación lineal es correcto o no a partir de material señalando explicítamente donde falla	23
Reconoce que un procedimiento no es correcto e identifica el error reiniciando todo el proceso hasta encontrar el error	54
Responde que el proceso no es correcto pero no señala el error	23

Tabla 7: Evaluación de aplicación de procesos

CRITERIOS DE EVALUACION FINAL	%
Reconoce que el cero no tiene inverso en el producto	62
No reconoce que el cero no tiene inverso en el producto.	38

Tabla 8: Evaluación de inverso

El análisis anterior no pretende ni puede considerarse exhaustivo en referencias a los factores de evaluación de este trabajo, ni tampoco los datos recolectados ser todos los que pudieron ser evidenciados durante la implementación de la intervención.

3.3 Conclusiones y Recomendaciones

3.3.1 Conclusiones

La elección del material didáctico resultó acertado pues puso de relieve el aspecto sintáctico de los elementos de la estructura algebraica de los racionales al consisitir de objetos independientes entre sí que permiten caracterizar estos elementos que en principio no sean explícitos a la reflexión de los estudiantes. Ésto facilitó el tratamiento simbólico de las expresiones en el material consignadas.

Las condiciones de la estructura de campo que se identificaron como claves para esta propuesta fueron las siguientes: la estructura de campo algebraico en los racionales con las operaciones estándar se presta para manipulaciones de acuerdo a reglas sintácticas constituyendo un ambiente donde se dan ciertos intercambios de posición con los objetos simbólicos que satisfacen unas condiciones iniciales, llamadas axiomas; también se consideró dentro las condiciones el concepto de número en su acepción simbólica como los símbolos variables; también se tuvo presente la importancia del símbolo igualdad visto como un predicado entre expresiones algebraicas así como el papel sintáctico de los paréntesis.

Las reglas de uso de las tarjetas están al alcance de la comprensión de los estudiantes y, en efecto, estas reglas no incluyen explicítamente la asociatividad y la propiedad distributiva entre otras, aunque alcanzan a semejar aspectos básicos de los procesos algebraicos en la resolución de ecuaciones. Por tanto, sí se logra identificar las condiciones necesarias para establecer la relación entre el material didáctico y la estructura algebraica de campo, en particular, a la propiedad cancelativa de las operaciones.

3.3.2 Recomendaciones

La primera mejora va dirigida a las reglas de uso definidas para la generación de procesos con los cuales se cumple el objetivo de resolver ecuaciones lineales. Particularmente la regla de las tarjetas operación es convinene modificarla de tal manera que se ajuste mejor a la definición de operación binaria y no parezca una regla que hace parte de los axiomas de campo. Así mismo, las guía-taller deben ser mejoradas tanto en presentación como en contenido. En cuanto a la presentación de las guías, podría plantearse una unidad completa, un formato en el cual se le presente al estudiante todo el contenido presentado en las guías para que sea él quien decida el ritmo de su aprendizaje. Otro aporte que debe tenerse en cuenta es la introducción de la noción de *expresión numérica,* que consistiría expresiones bien formadas que combinan tarjetas número, operación y variables con el fin de ampliar el alcance del material didáctico en el uso de la tarjeta igualdad y por supuesto en los algoritmos para la resolución de ecuaciones.

Otro camino interesante que deja ésta intervención es explorar la posibildad de transmitir la totalidad de los axiomas de campo y la implemantación de estos en la solución de ecuaciones lineales. Para esto sería necesario producir diagnósticos en torno a la asociatividad de las operaciones y particularmente del axioma que realaciona las dos operaciones, la distribución del producto con respecto de la suma.

También puede tenerse en cuenta la capacidad que pueda tener el material para la enseñanza del caso de factorización por asociación de términos; esto se debe particularmente a que la factorización es otra de las virtudes de los racionales con si estructura algebraica. Finalmente, por la interacción del estudiante con el material, evidenciado ya que este ofrece un ambiente propicio para la generación de argumentos, podría fortalecerse esta intervención en el sentido de incentivar las habilidades argumentativas. Para esto el material no solo debe resaltar el conocimiento especifíco para la resolución de ecuaciones , sino también el *proceso general* de la comunicación, con el fin de que entienda lo que esta ocurriendo con el material y que construya construya los argumentos y los exprese de manera verbal o escrita.

Referencias

Ausubel, David P. (2000). Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva. Ediciones Paidos Iberica S.A

Bausela, E. (2004). La docencia a través de la investigación-acción. Revista Iberoamericana de Educación.

Blythe, T. (1999). La enseñanza para la comprensión: una guía para el docente. Ediciones Paidos

Elliot. J. (1990). La investigación-acción en educación. Ediciones Morata Morata. Madrid

Jaramillo, C y Esteban, P. (2006). Enseñanza aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de van Hiele. *Revista Educación y Pedagogía.* Volumen 18, pag.109-118

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Serie Lineamientos Curriculares. Santa Fe de Bogotá.

Moreira, M. (2005) . Aprendizaje Significativo Crítico. Indivisa. Boletín de estudios e Investigación. Núm 6, pag 83-102

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos por Competencias de Matemáticas.

Saenz, J. (2014). Diseño *de unidad didáctica basada en métodos informales para la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.* Universidad Nacional de Colombia. Santa Fe de Bogota. *Enseñanza de las ciencias.* Volumen 14,

Trigueros, M., Ursini, S., Reyes, A., Quintero, R. Diseño de un cuestionario de diagnostico acerca del manejo del concepto de variable en algebra. *Enseñanza de las ciencias.* Volumen 14(3). pag 351-363

Vasco Uribe, Carlos (1984) Un nuevo enfoque para la Didáctica de las matemáticas. Volumen I. Bogotá: División de Materiales Impresos y Audiovisuales, Ministerio de Educación Nacional.

A. Anexo: Guía-Taller Operaciones

MATEMÁTICA GRADO 9
Docente Andrés Bedoya
Semana 5, Periodo 4
I.E. San Gabriel Arcangel.

Acerca de las operaciones básicas

En éste apartado aprenderemos acerca de una caracterítica fundamental de las operaciones a través de las tarjetas. Esto nos lleva a:

Uso de las tarjetas operación: Una tarjeta operación siempre debe estar en medio de dos tarjetas número. Ésta es una de las expresiones básicas que manejaremos en éste tema.

Objetivo: Reconocer el carácter binario de las operaciones suma y producto.

Criterio de evaluación:

- reconocer cuando las tarjetas operación representan una expresión "correcta"
- Usar de manera efectiva las tarjetas.

Actividad:

1. Aplicando la regla anteriormente mencionada construir 10 expresiones que satisfagan las siguientes condiciones:

- que contengan una tarjeta operación
- que contengnan dos tarjetas operación
- que contengan ters tarjetas operación

Escribirlas además en el cuaderno

2. Determine si las siguientes manos de tarjetas, como están organizadas, cumplen la regla de las operaciones; en caso contrario, trate de arrerglarlas si es posible, o diga porque no es posible hacerlo:

- número, número, operación.
- número, operación, número, operación.
- operación, operación, número, número, número.
- operación, número, operación, número, número, operación, operación, número.

B. Anexo: Guía-Taller neutro e inverso

MATEMÁTICA 9°
Docente Andrés Bedoya
Semana 6, Periodo 4

Taller 3: uso de tarjetas en la resolución de ecuaciones lineales de una sola incógnita.

Hasta el momento hemos introducido el uso de las tarjetas operación y de la tarjeta igualdad como si fueran parte de una baraja. Ahora, profundizaremos en su uso, con el fin de dinamizar las actividades que estamos desarrollando buscando la comprensión de la estructura del sistema numérico racional.

Objetivo: Reconocer el cero, 0, y el uno, 1, como los elementos identidad o neutro de las operaciones suma y producto respectivamente.

Continuar la construcción del lenguaje empleado en la resolución de ecuaciones.

Competencias:

ACTIVIDAD

Construir una nueva carta que tendrá una letra inscrita en ella; ésta letra será llamada **variable o incógnita**.

Llamaremos **ecuación** a una expresión, de las construidas hasta ahora, en la cual hay variables y media una igualdad.

También llamaremos ecuación a las expresiones formadas con tarjetas y cumplan la condición mencionada anteriormente.

Durante la actividad siguiente se pide mostrar las expresiones a continuación por medio de tarjetas. Sus soluciones seraán consignadas en el cuaderno.

1. En éste ejercicio, reemplace los signos de interrogación por una carta en blanco. A continuación, escriba en la carta cual debería ser el valor para que la expresión quede bien construida y la igualdad sea verdadera:
    - 2 + ¿? = 2
    - ¿? + 3 = 3
    - (-11) + ¿? = (-11)
    - $\frac{7}{5} + ¿? = \frac{7}{5}$
    - (-7) + ¿? = (-7)
    - $\frac{2}{3} + ¿? = \frac{2}{3}$
    - 3 x ¿? = 3
    - 4 x ¿? = 4
    - (-1) x ¿? = (-1)
    - 7 x ¿? = 7

En el siguiente ejercicio se pide reconocer que para cada operación hay una forma de construír el cero o el uno.

2. Use las cartas para representar la siguientes expresiones. Reemplace los signos de interrogación por tarjetas en blanco e inscriba en ellas el número correspondiente.

- 3+ ? =0
- ? + 10=0
- (-100) + ?=0
- (-2) + ?=0
- $\frac{3}{4} + ? = 0$
- $\frac{10}{7} + ? = 0$
- $(\frac{1}{2}) \cdot ? = 1$
- 3 x ?=1
- $\frac{7}{5} x ? = 1$
- 5 x ? = 1
- ? x (-10) = 1

C. Anexo: Evaluación Inicial

MATEMÁTICAS 9°
Docente Andrés Bedoya
Semana 6, Periodo 4

TALLER 5

Para dar las respuestas a las preguntas a continuación puede apoyarse en el uso de las tarjetas.

1. Escriba el elemento neutro de la suma y el neutro del producto.
¿Qué caracteriza al elemento neutro de la suma?¿Qué carácteriza al elemento neutro del prodcuto?

2. Escoja la opción que mas se ajuste a lo visto en clase:
Una caracteristica del elemento neutro es:
a). modificar la operación
b). modificar los elementos
c). dejar los elementos inmodificados
d). dejar un número como estaba

3. determine si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas de acuerdo a lo visto en clase.
a) El neutro de la multiplicación no modifica al ser sumado con otro número.
b) Cuando se multiplica un número con el el neutro de la suma, da como somo resultado 1
c) Cuando se multiplica un número con el neutro del producto, da como resultado el 0
d) Cuando se suma un número con el neutro de la suma da el mismo número
e) Cuando se suma el neutro de al suma consigo mismo da como resultado el neutro del producto
d) Cuando se suma un número con el neutro del producto, el resultado es el mismo número.

4. Sabemos que todo número multiplicado por cero da cero. Entonces se puede afirmar que:
(escoja una o varias opciones):
a) El cero no tiene inverso en la suma
b) El cero no tiene inverso en el producto
c) El inverso del cero en el producto es el 1.
d) El cero no tiene inverso en el producto.

5. Determine el inverso del cero con la operación suma.
6. Escriba el inverso de los siguientes números:

$3, (-3), \frac{14}{7}, \frac{-25}{32}, 1$

D. Anexo: Guía-Taller solución de ecuaciones una sola operación

MATEMATICA GRADO 9
Docente Andrés Bedoya
I.E San Gabriel

Solución de ecuaciones con una sola operación y una sola variable.

Objetivos:

1. Usar las tarjetas y las reglas vistas hasta el momento para resolver ecuaciones con una sola operación y una sola variable.
2. Establecer la jerarquía de las operaciones.

Competencias:

1. Reconoce el elemento inverso de la suma y del producto en la solución de ecuaciones de manera eficaz
2. Aplica la jerarquía de las operaciones correctamente

Actividad:
En este parte se utilizará la expresión "resuelva la ecuación" refiriéndose a encontrar un número que al ser reemplazado en la *variable*, la igualdad sea verdadera. Además usaremos las tarjetas para encontrar el resultado de la siguiente manera:

1. Pasamos la tarjeta operación al *otro lado* de la tarjeta igualdad.
2. Pasamos la tarjeta que acompaña a la variable al *otro lado* de la tarjeta igualdad, pero la giramos y escribimos en ella el inverso del número en la operación que Inicialmente lo acompañaba.
3. Verificamos que la expresión cumpla con las reglas vistas hasta ahora.
4. Al otro lado de la igualdad queda establecida una operación entre tarjetas número, ésta la podemos verificar en un dispositivo electrónico si tenemos dudas.

A continuación resuelva las siguientes ecuaciones usando el método establecido. Pueden formarse equipos para su solución. El tiempo establecido para la actividad es de 25 min.

1. (a) $37 + x = 121$
   (b) $76 + x = 345$
   (c) $(-1) + y = 3$
   (d) $3 \times x = 24$
   (e) $x \times 4 = 72$
   (f) $12 \times x = 360$

Una noción que aún no hemos revisado y es clave en las próximas actividades es la de *Jerarquía de las operaciones*. Ésta noción establece que, en una expresión donde interviene mas de una operación, primero se realizan las multiplicaciones y luego las sumas. Esto se aprecia claramente conociendo *las reglas para las tarjetas paréntesis*, reglas que no estableceremos explícitamente. Teniendo esto presente, dé el resultado en los siguientes ejercicios:

2. (a) $5 \times 6 + 8 =$
   (b) $67 \times 3 + 9 =$
   (c) $4 + 5 \times 8 =$
   (d) $120 + 45 \times 67 =$

Ya estamos cerca de terminar el proceso mediado por las tarjetas. Con lo que has realizado hoy y con las reglas vistas en clase ¿Cómo resolverías la ecuación $5 \times +9 = 32$?
Para la próxima clase ten lista una propuesta de solución para ésta ecuación que éste acorde a las condiciones propuestas.

1

E. Anexo: Guía-Taller solución de ecuaciones

MATEMATICA GRADO 9
Docente Andrés Bedoya
I.E San Gabriel Arcángel.

Solución de ecuaciones lineales en una sola variable.

Objetivo: Emplear las reglas de las tarjetas, las nociones de inverso de un número en una operación y la jerarquía de las operaciones para solucionar ecuaciones.

Competencias:

1. Aplica la jerarquía de las operaciones de manera correcta.
2. Reconoce la solución de ecuaciones lineales en una sola incógnita como un procedimiento sujeto a unas reglas iniciales.

Ésta es la etapa final para establecer un procedimiento estándar en la solución de ecuaciones lineales de una sola incógnita. Las tarjetas han sido la propuesta con la que se busca trasmitir las ideas mencionadas, sin embargo, son totalmente prescindibles. Una vez aclaremos ésto a través de la siguiente actividad, estaremos listos para pasar al siguiente nivel de abstracción: resolver ecuaciones con propiedades que no están sujetas a ningun objeto como las cartas, sino como atributos propios de los números racionales y las operaciones suma y producto, vistos como un *sistema numérico*.

Procedimiento en la solución de ecuaciones lineales con una sola incógnita
De manera similar a como resolvimos ecuaciones lineales de una sola variable y una única operación, resolvemos las ecuaciones linea.(Una ecuación lineal genral será aquella en la que aparezcan las dos operaciones básicas). Para ello procedemos así:

1. Pasamos la operación suma (si la hay)del lado donde está la variable al otro lado de la igualdad.
2. Pasamos la tarjeta número que queda sin operación, pero girándola al reverso.
3. En la carta que acabamos de girar escribimos el inverso del número en la operación que inicialmente lo acompañaba .
4. Verifique que la expresión recién formada cumpla con la regla de las operaciones.
5. Encerramos la expresión recién formada al otro lado de la variable con paréntesis.
6. Pasamos la operación que acompaña a la variable al otro lado de la igualdad por fuera del paréntesis.
7. Pasamos la tarjeta número que acompaña a la variable, pero girándola al reverso.
8. En la tarjeta que acabamos de girar escribimos el inverso del número en la operación que inicialmente lo acompañaba.
9. Al dejar la variable "sola", al otro al do de la igualdad se establece un valor que puede ser calculado en un dispositivo electrónico si tiene dudas.

Actividad: Para ésta actividad, dispone de 30 min. Emplee el procedimiento recién descrito en la solución de las siguintes ecuaciones.

1. $3 \times x + 90 = 180$
2. $\frac{1}{3} \times z + \frac{5}{4} = \frac{3}{20}$
3. $x + 45 = 18$
4. $5 \times y = 24$
5. $45 \times w + 45 = 45$
6. $(-23) \times x + (-34) = 345$
7. $(-\frac{4}{5}) \times x + 87 = -\frac{27}{3}$
8. $5 \times + \frac{3}{4} = -67$
9. $s + 456 = 29$

1

F. Anexo: Guía-Taller Evaluación Final.

MATEMATICAS GRADO 9
Docente Andrés Bedoya Semana 8, Periodo 4

EVALUACIÓN FINAL
objetivo: Identificar la eficacia del proceso enseñanza aprendizaje

1. Seleccione las afirmaciones correctas:
   (a) $\frac{-5}{4}$ es el inverso aditivo de $\frac{4}{5}$
   (b) $\frac{-5}{4}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{4}{5}$
   (c) $\frac{-5}{4}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{4}{5}$
   (d) $\frac{-5}{4}$ es el inverso aditivo de $\frac{-4}{5}$
   (e) cero es el inverso aditivo del cero
   (f) -1 es el inverso multiplicativo de -1
   (g) -1 es el inverso aditivo de 1
   (h) -1 es el inverso multiplicativo de -1
2. Se tienen las siguientes expresiones: $5 \times 2 + 3 = 10$ y $5 \times 2 + 3 = 13$. Determine cual es la expresión correcta y diga porqué.
3. A un estudiante se le pide resolver la ecuación $5 \times x + 5 = 20$. Al usar las cartas tiene $5 \times x = 20 + 5$. Si es correcto, halle la solución de la ecuación por medio de las cartas; de lo contrario explique porque no es válido el proceso hasta donde se ilustra.
4. Un estudiante tiene la ecuación $9 \times x + 5 = 18$. Al aplicar las cartas obtiene la siguientes expresiones.

$$\begin{gathered} x + 5 = 18 + 9 \\ x + 5 = (18 + 9) \\ x = (18 + 9) + -5 \\ x = 22 \end{gathered}$$

5. A un estudiante se le propone un reto con la siguiente expresión: $0 \times x + 0 = 0$ y hace:

$$\begin{gathered} 0 \times x = 0 + -0 \\ x = (0 + -0) \times \frac{1}{0} \end{gathered}$$

   Diga si el proceso es correcto desde el punto de vista del inverso y argumente su respuesta.
6. Aplique el procedimiento de las cartas para resolver $5 \times 2 + 3 = 10$; luego, repita el proceso sin aplicar la parte de los paréntesis. ¿Por qué empleamos el procedimiento usando paréntesis?

1