UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Probabilidad de ruina en tiempo infinito modelando la distribución de reclamos mediante un proceso Panjer

Ana María Beltrán Cortés

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Estadística
Bogotá, Colombia

2018

Probabilidad de ruina en tiempo infinito modelando la distribución de reclamos mediante un proceso Panjer

Ana María Beltrán Cortés

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magíster en Ciencias - Estadística

Director(a):
Ph.D. José Alfredo Jiménez Moscoso

Línea de Investigación:
Procesos estocásticos

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Estadística
Bogotá, Colombia

2018

Dedicatoria

A mi mami, a mi director y a mi, por tanta paciencia.

Resumen

En esta tesis se estudia la probabilidad de que las reservas de una compañía de seguros no sean suficientes para cubrir todas sus obligaciones cuando sobre el modelo de riesgo colectivo se supone que la frecuencia de las reclamaciones sigue un proceso no homogéneo de Panjer. Dicho proceso fue definido por Iseger et al. (1997) y estudiado por Jiménez M. and Arunachalam (2016).
Como resultado de la investigación aquí realizada se obtuvieron propiedades nuevas del proceso no homogéneo de Panjer y se verificó que cuando la severidad de las reclamaciones en el proceso de riesgo se distribuye exponencial, la probabilidad de ruina clásica es un caso particular de la expresión aquí obtenida.

Palabras clave: Proceso no homogéneo de Panjer, proceso de conteo, probabilidad de ruina, intensidades de transición, severidad exponencial.

Abstract

This thesis studies the probability that the reserves of an insurance company are not enough to cover all their obligations when the collective risk model assumes that the frequency of the claims follows an inhomogeneous Panjer process. This process was defined by Iseger et al. (1997) and studied by Jiménez M. and Arunachalam (2016).
As a result of the research carried out here, new properties of the inhomogeneous Panjer process were obtained and it was verified that when the severity of the claims in the risk process is exponentially distributed, the probability of classical ruin is a particular case of the expression obtained here.

Keywords: Inhomogeneous Panjer process, countinf process, ruin probability, transition intensities, Exponential claim amounts.

Contenido

Introducción

La teoría de procesos estocásticos es una herramienta matemática ampliamente estudiada por su versatilidad a la hora de describir el comportamiento de situaciones reales que cambian en el tiempo con cierto nivel de incertidumbre (probabilidad). En la rama de seguros, los procesos estocásticos fueron empleados por autores como Lundberg (1903) incluso antes de ser definidos y hoy en día siguen siendo un eslabón fundamental en el desarrollo de la teoría de riesgo.

La teoría de riesgo colectivo es una de las caracterizaciones más sencillas y poderosas dentro de la teoría estadística asociada a la dinámica de un portafolio, ya que permite describir el comportamiento de una cartera de seguros en términos de la frecuencia de reclamación y del monto o severidad de las reclamaciones efectuadas en un periodo de tiempo determinado. En la práctica, para determinar las distribuciones que mejor se ajustan para modelar la frecuencia y la severidad de las reclamaciones se emplean los datos históricos que posee la compañía; realizando pruebas de bondad de ajuste con diversas distribuciones hasta obtener aquellas que mejor describen el comportamiento del portafolio.

En el modelo clásico de riesgo se supone que la frecuencia de reclamación sigue un proceso Poisson de media λt y sobre este se calculan las probabilidades de solvencia, de no ruina y de ruina como medidas que describen el comportamiento del capital de la empresa en términos de sus ingresos y egresos. Sin embargo, el supuesto Poisson tiene limitaciones a la hora de aplicar los resultados teóricos a datos reales, pues, entre otras cosas, bajo este proceso se asume que todos los asegurados del portafolio tienen el mismo nivel de riesgo y que los eventos previos no afectan el comportamiento de la cartera en el tiempo presente.
Por lo anterior, es necesario estudiar otros procesos de conteo que incluyan en su dinámica estas características y así refinen el ajuste de datos reales.

En este trabajo se estudia un proceso estocástico de conteo basado en la recursión de Panjer (1981) y definido en Iseger et al. (1997): el proceso no homogéneo de Panjer, el cual permite generalizar algunos de los procesos de conteo clásicos más empleados en la literatura y en la práctica. Algunas de las propiedades de este proceso fueron dadas en Jiménez M. and Arunachalam (2016) y también se muestran en esta tesis.

El objetivo principal de la tesis es estudiar la probabilidad de ruina sobre el modelo de riesgo colectivo propuesto por Lundberg (1903) cuando las reclamaciones siguen un proceso no homogéneo de Panjer y ver que las expresiones clásicas de ruina sobre el modelo cuando las reclamaciones son de tipo Poisson, son caso particular de las obtenidas bajo el supuesto Panjer. También se caracteriza el proceso de Panjer en términos de procesos estocásticos clásicos y se presentan resultados nuevos que se obtuvieron durante el desarrollo de la investigación y que permiten relacionar las intensidades de transición con las distribuciones marginales del proceso.

Los resultados aquí obtenidos son relevantes en la medida en que se estudia con detalle el comportamiento de un proceso estocástico de conteo *inexplorado*, hecho que permite ponerlo en el ámbito académico y práctico como una alternativa diferente a las tradicionales para modelar la ocurrencia de sucesos de tipo discreto en un intervalo de tiempo finito. Además, al ser los procesos clásicos de conteo casos particulares del proceso no homogéneo de Panjer, los resultados que se obtienen en la teoría de riesgo sobre estos, se pueden generalizar empleando el modelo aquí estudiado.

La tesis tiene la siguiente estructura: en el capítulo 1 se hace una presentación general de los conceptos necesarios para entender la teoría de ruina: procesos de conteo, modelo clásico de riesgo y probabilidad de ruina en tiempo finito e infinito. Además se presenta la familia de distribuciones de Panjer que servirá para definir el proceso no homogéneo de Panjer.
En el segundo capítulo, luego de introducir el proceso no homogéneo de Panjer definido por Iseger et al. (1997) se presentan algunas de las propiedades que tiene y que fueron estudiadas previamente por Jiménez M. and Arunachalam (2016). También se caracteriza el proceso en términos de procesos estocásticos clásicos y se obtienen resultados nuevos sobre el comportamiento de las probabilidades marginales del proceso y las intensidades de transición que se presentan como proposiciones en las últimas secciones del capítulo.
En el tercer capítulo se revisan generalidades del modelo de riesgo cuando las reclamaciones siguen un proceso Panjer y se establecen los supuestos necesarios para calcular la probabilidad de ruina sobre este modelo. Finalmente se encuentra una aproximación para dicha probabilidad y se hacen los cálculos cuando la severidad se supone que sigue una distribución exponencial.
La investigación concluye mostrando que la expresión clásica para la probabilidad de ruina en el modelo clásico cuando las reclamaciones siguen un proceso Poisson es un caso particular de la obtenida cuando el proceso de conteo es el asociado a la recursión de Panjer. Por último, se plantean los nuevos problemas a abordar y las conclusiones de la tesis.

La aproximación obtenida para la probabilidad de ruina así como las propiedades nuevas del proceso no homogéneo de Panjer que se obtuvieron en este trabajo fueron aceptadas para ser socializadas a manera de póster en el ICAMI 2017.

1 Marco Teórico

La teoría de riesgo colectivo fue propuesta por Filip Lundberg (1903) en su tesis doctoral y retomada por Harald Cramér (1930). La teoría de riesgo colectivo considera dos problemas fundamentales: aproximar la distribución de la ganancia total en un portafolio y calcular la probabilidad de que la reserva de la compañía no sea suficiente para cubrir el pago de todas las pólizas: probabilidad de ruina.

En este capítulo se presentan los conceptos necesarios para entender la teoría de ruina sobre el proceso de riesgo colectivo. Para ello se presentan algunos procesos de conteo clásicos y se formaliza el concepto de probabilidad de ruina sobre el modelo clásico de riesgo para finalmente introducir algunos casos particulares sobre distribuciones de severidad conocidas. Además se presenta la familia de distribuciones de Panjer con miras a definir en el capítulo 2 el proceso estocástico que se empleará para modelar el proceso de reclamaciones en el capítulo 3.

1.1. La familia de distribuciones Panjer

En Panjer (1981) se presenta una familia de distribuciones de probabilidad de tipo discreto mediante una recursión.

Definición 1.1.1. *Una distribución de probabilidad de una variable aleatoria N que satisface la relación*

$$P(N=n)=\begin{cases}\left(\alpha+\frac{\beta}{n}\right)P(N=n-1), & si\ n>k,\\ 0, & si\ n\leq k\end{cases} \tag{1-1}$$

donde $k\in\mathbb{Z}$, $\alpha<1$ y $\alpha+\beta\geq 0$, se dice que pertenece a la familia de distribuciones Panjer de clase k y se denota $\mathcal{P}(\alpha,\beta,k)$.

Tomando $k=0$ en (1-1) se obtiene la expresión para la familia Panjer de clase 0:

$$P(N=n)=\begin{cases}\binom{r+n-1}{n}\alpha^n(1-\alpha)^r, & \text{si } \alpha+\beta>0,\\ -\frac{n^{-1}\alpha^n}{\ln(1-\alpha)}, & \text{si } \alpha+\beta=0\end{cases} \tag{1-2}$$

donde $r=\frac{\alpha+\beta}{\alpha}$.

1.1.1. Casos particulares

Para distintos valores de los parámetros α y β en (1-1), Jiménez M. (2013) presenta algunas distribuciones discretas bien conocidas las cuales se muestran en la tabla **1-1**.

Tabla 1-1: Valores de α y β para algunas distribuciones

Nombre de la distribución	$P(N=n)$	**Valores fijos**	
		α	β
Poisson	$\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$	0	λ
B. negativa	$\binom{r+n-1}{n}p^r q^n$	$1-p$	$(r-1)q$
Geométrica	pq^n; $0<p<1$	$1-p$	0
Binomial	$\binom{m}{n}p^n q^{m-n}$, $0<p<1$	$-\frac{p}{q}$	$(m+1)\frac{p}{q}$
Logarítmica	$\frac{q^n}{n\ln(1-q)^{-1}}$; $0<q<1$	q	$-q$

Si la distribución de una variable aleatoria N satisface la relación (1-1) y los parámetros α y β son tales que $\alpha+\beta>0$ entonces:

I) $E(N)=Var(N)$, cuando $\alpha=0$.

II) $E(N)<Var(N)$, cuando $0<\alpha<1$.

III) $E(N)>Var(N)$, cuando $\alpha<0$.

lo cual se puede usar como una regla empírica para determinar la distribución discreta que mejor modela el comportamiento de un conjunto de datos.

1.2. Procesos de conteo

Definición 1.2.1. *Un proceso estocástico* $\{N(t), t\geq 0\}$ *es un proceso de conteo si* $N(t)$ *representa la cantidad total de* eventos *que ocurren hasta el tiempo* t*, es decir, en el intervalo* $(0,t]$*. Por lo tanto, un proceso de conteo* $N(t)$ *debe satisfacer:*

I) $N(0)=0$

II) $N(t)\geq 0$

III) $N(t)$ *es un número natural para todo* t

IV) *Si* $s\leq t$ *entonces* $N(s)\leq N(t)$

V) *Para* $s<t$, $N(t)-N(s)$ *es el número de* eventos *que ocurren en el intervalo* $(s,t]$.

1.2.1. Processo Poisson

El proceso de conteo más empleado es el que se obtiene a partir de la bien conocida distribución Poisson: el proceso Poisson. A continuación se presenta la definición de dicho proceso que da Ross (1996).

Definición 1.2.2. *El proceso de conteo* $\{N(t),\ t \geq 0\}$ *se dice que es un proceso Poisson de parámetro (o tasa)* λ, $(\lambda > 0)$, *si:*

I) $N(0) = 0$.

II) *El proceso tiene incrementos independientes.*

III) *El número de eventos en cualquier intervalo de longitud* t *tiene una distribución Poisson de media* λt. *Esto es, para todo* $t \geq 0$ *y* $s \geq 0$

$$P(N(t+s) - N(s) = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{1-3}$$

Nótese que de la expresión dada en (1-3) se tiene que el proceso tiene incrementos estacionarios.

Además, el proceso Poisson $N(t)$ satisface las siguientes propiedades: (las demostraciones se pueden consultar en Rincón (2012))

- Es un proceso de Markov; es decir,

  $$P(N(t_n) = x_n \mid N(t_1) = x_1, \ldots, N(t_{n-1}) = x_{n-1}) = P(N(t_n) = x_n \mid N(t_{n-1}) = x_{n-1}) \tag{1-4}$$

  para cualesquiera n tiempos $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$ y cualesquiera estados $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$.

- Para un t fijo, la variable aleatoria $N(t)$ sigue una distribución Poisson de parámetro λt:

  $$P_n(t) = P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} \tag{1-5}$$

  donde $P_n(t)$ representa la probabilidad de tener n ocurrencias del evento en el intervalo $(0, t]$.

- Si s y t son tales que $0 < s < t$, y si k y n son enteros que cumplen $0 \leq k \leq n$. Entonces

  $$P(N(s) = k \mid N(t) = n) = \binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}$$

- Para cualquier $t \geq 0$, y cuando $h \downarrow 0$,
    I) $P(N(t+h) - N(t) \geq 1) = \lambda h + o(h)$.
    II) $P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$

La última propiedad describe el comportamiento del proceso Poisson sobre el intervalo infinitesimal de la forma $(t, t+h]$. En un intervalo de tiempo pequeño solo pueden ocurrir dos situaciones: hay un reclamo o no lo hay, donde la probabilidad de que no lo haya es igual a $1 - \lambda h + o(h)$.

Se tiene además que $E[N(t)] = Var[N(t)] = \lambda t$; es decir, la variabilidad del proceso Poisson tiene un comportamiento semejante a su media y por ello es adecuado para modelar fenómenos cuya frecuencia de ocurrencia es equidispersa.

1.2.2. Proceso Poisson no homogéneo

Si el parámetro λ del proceso Poisson $N(t)$ no es constante sino que es una función positiva y localmente integrable $\lambda(t)$ que depende del tiempo, entonces se dice que $N(t)$ es un proceso Poisson no homogéneo.

Definición 1.2.3 (Ross (1996))**.** *El proceso de conteo $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso no homogéneo de Poisson con función de intensidad $\lambda(t)$, $t \geq 0$ si*

I) $N(0) = 0$.

II) $\{N(t), t \geq 0\}$ *tiene incrementos independientes.*

III) $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$.

IV) $P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$.

Nótese que el proceso Poisson no homogéneo pierde la propiedad de incrementos estacionarios que tiene el proceso Poisson. Lo anterior se debe a que el comportamiento de la función de intensidad depende no solo de la longitud del intervalo considerado sino también de sus extremos.

Cox and Lewis (1966) se refiere al proceso Poisson no homogéneo como proceso tiempo-dependiente y define la probabilidad de que no haya ocurrencias del evento en el intervalo $(t, t+h]$ como

$$P(N(t+h) - N(t) = 0) = \exp\left\{ -\int_{t}^{t+h} \lambda(u)du \right\} \tag{1-6}$$

donde $\lambda(t)$ es la función de intensidad asociada al proceso.

1.2.3. Proceso Poisson Mixto

Definición 1.2.4 (McFadden (1965)). *Un proceso Poisson mixto $N(t)$ es un proceso Poisson con media Λ, donde Λ es una variable aleatoria no negativa que recibe el nombre de variable de estructura.*

Cuando la variable aleatoria Λ es continua, con función de densidad $f(\lambda)$, se tiene que

$$\begin{aligned} P_n(t) = P(N(t) = n) &= E[P(N(t) = n|\Lambda)] \\ &= \int_0^\infty P[N(t) = n|\Lambda = \lambda] f(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} f(\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (1\text{-}7)$$

1.2.3.1. Caso particular

Definición 1.2.5 (Proceso binomial negativo). *Si la variable de estructura Λ de un proceso Poisson mixto sigue una distribución Gamma entonces $N(t)$ recibe el nombre de proceso binomial negativo.*

1.2.4. Proceso Pólya

Definición 1.2.6 (Fisz (1980)). *Un proceso estocástico $\{N(t) : 0 \leq t < \infty\}$ cuyas distribuciones marginales $P_n(t)$ satisfacen:*

- $P_0(t) = \left(\dfrac{a}{a+t}\right)^v$
- $P_n(t) = \dfrac{v(v+1)\cdots(v+(n-1))}{n!} \left(\dfrac{t}{a+t}\right)^n P_0(t) = \dbinom{v+n-1}{n} \left(\dfrac{t}{a+t}\right)^n \left(\dfrac{a}{a+t}\right)^v$

con $a > 0$ es llamado un proceso Pólya.

Bharucha-Reid (1960) describe el proceso Pólya mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{dt} &= -\frac{v}{a+t} P_0(t) \\ \frac{dP_n(t)}{dt} &= \frac{v+(n-1)}{a+t} P_{n-1}(t) - \frac{v+n}{a+t} P_n(t) \end{aligned} \quad (1\text{-}8)$$

1.3. Otros procesos estocásticos

A continuación se refieren dos tipos de procesos estocásticos adicionales:

1.3.1. Proceso de Nacimiento

Si en un proceso de conteo $N(t)$ se supone que la probabilidad de que existan incrementos en un intervalo dado, depende del estado actual del sistema entonces se obtiene una nueva definición del proceso.

Definición 1.3.1 (Seal (1969)). *Si $N(t)$ es un proceso de conteo tal que sus probabilidades marginales $P_n(t)$ satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales:*

$$\begin{aligned} P_0'(t) &= -\lambda_0(t)P_0(t) \\ P_n'(t) &= \lambda_{n-1}(t)P_{n-1}(t) - \lambda_n(t)P_n(t) \quad \textit{para} \quad n \geq 1 \end{aligned} \tag{1-9}$$

con condiciones iniciales

$$P_0(0) = 1 \quad y \quad P_n(0) = 0 \quad \forall n \geq 1 \tag{1-10}$$

entonces $N(t)$ es un proceso de nacimiento puro con intensidades de transición $\lambda_n(t)$.

1.3.2. Proceso Poisson Compuesto

Definición 1.3.2 (Blanco et al. (2014)). *Un proceso estocástico $\{S(t), t \geq 0\}$ es un proceso Poisson compuesto si*

$$S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k, \qquad t \geq 0 \tag{1-11}$$

donde $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso Poisson y $\{X_k,\ k = 1, 2, \ldots\}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

1.4. Índice de dispersión

Dado un conjunto de datos de tipo discreto que dependen del tiempo, existe un test denominado índice de dispersión establecido por Cox and Lewis (1966) y dado por:

$$ID(t) = \frac{Var[N(t)]}{E[N(t)]} \tag{1-12}$$

el cual permite determinar el proceso estocástico que mejor se ajusta para modelar el comportamiento de dicho conjunto de datos.

De acuerdo al valor obtenido en (1-12) sobre los datos, es posible emplear el criterio así:

1. **Equidispersión**: si $ID(t) = 1$, es decir, si la varianza observada de los datos es similar a su media, se ajusta un proceso Poisson.
2. **Sobredispersión**: si $ID(t) > 1$, esto es, cuando la varianza observada de los datos excede su media, se sugiere usar un proceso binomial negativo.
3. **Subdispersión**: si $ID(t) < 1$ es porque la varianza observada de los datos es más pequeña que su media y por tanto deberá emplearse un proceso estocástico binomial.

Cuando los datos no dependen del tiempo y por tanto se busca ajustar una variable aleatoria y no un proceso estocástico, el test de dispersión coincide con la regla empírica propuesta anteriormente en los casos particulares de la familia Panjer.

1.5. Modelo clásico de riesgo

Lundberg (1903) propone un modelo de riesgo que no requiere considerar cada póliza en el portafolio. Por el contrario, la distribución del monto total depende únicamente de la distribución del número de reclamaciones en un periodo determinado y de la distribución del monto (severidad) de las reclamaciones efectuadas en ese periodo.

Sean $N(t)$ el número de reclamos que ocurren en el tiempo $(0, t]$ y X_k la variable aleatoria que representa el monto del k-ésimo reclamo. Se asume que las X_k son no-negativas, independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución acumulada (cdf), $F_X(x)$, transformada de Laplace, $\mathcal{L}(\cdot)$, y media finita, μ_X. Además, son independientes del proceso de frecuencia, $N(t)$. El proceso estocástico

$$S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k \tag{1-13}$$

describe el total de reclamos pagados por la compañía hasta el tiempo t. El proceso $N(t)$ es un proceso de conteo y la distribución asociada a la severidad debe ser preferiblemente de cola pesada.

El proceso $S(t)$ definido en (1-13) resulta ser un proceso estocástico compuesto y por tanto, si X es tal que tiene la misma distribución que las X_k, entonces se satisface (ver Panjer (2006)):

$$E[S(t)] = E[N(t)]E[X] = E[N(t)]\mu_X \tag{1-14}$$

$$\begin{aligned} Var[S(t)] &= E[N(t)]Var[X] + Var[N(t)](E[X])^2 \\ &= E[N(t)]\sigma_X^2 + Var[N(t)]\mu_X^2. \end{aligned} \tag{1-15}$$

En el modelo clásico de riesgo se asume que el proceso de conteo $N(t)$ es un proceso Poisson de media λt.

Bajo el supuesto de reclamaciones siguiendo un proceso Poisson se tiene que λ es constante y por tanto se está asumiendo que todos los asegurados en el portafolio tienen el mismo nivel de riesgo. Sin embargo, en muchas situaciones el portafolio de una compañía aseguradora está diversificado en el sentido en que el riesgo asociado a diferentes grupos de asegurados es significativamente distinto. Por ejemplo, en seguros de automóviles se desea hacer una diferencia entre conductores hombres y mujeres o entre conductores de distintas edades. En ese caso, se requiere que los reclamos sean modelados mediante un proceso Poisson en el que la intensidad varía de un grupo de clientes a otro.

Existe evidencia empírica de que si la volatilidad del proceso de riesgo se mide en términos del índice de dispersión dado en (1-12) entonces, empleando los datos de frecuencia de reclamación, se obtienen frecuentemente valores mayores que 1; es decir, $Var[N(t)] > E[N(t)]$. Lo anterior sugiere que es necesario considerar procesos de conteo sobredispersos como los de tipo binomial negativo.

1.6. Probabilidad de ruina

Sobre el modelo clásico de riesgo surge la *Probabilidad de Ruina* como una medida que indica la factibilidad de que las reservas que constituyen la compañía sean insuficientes para afrontar las pérdidas derivadas de sus contratos.

1.6.1. Modelo de tiempo continuo

Bowers et al. (1997) presenta la generalización del modelo de riesgo cuando el tiempo se considera continuo. Para $t \geq 0$, sea $U(t)$ el excedente del asegurador en el tiempo t. Se define el proceso de excedentes como:

$$U(t) = U(0) + P(t) - S(t) \tag{1-16}$$

donde,

- $\{P(t) \mid t \geq 0\}$ es el proceso de primas, que mide todas las primas recaudadas hasta el tiempo t (netas de gastos),
- $\{S(t) \mid t \geq 0\}$ es el proceso de "pérdidas", que mide todas las pérdidas pagadas hasta el tiempo t,
- $U(0) = \omega$ es el capital inicial en el tiempo $t = 0$.

Si se asume que las primas son recibidas continuamente a una tasa anual constante, $c > 0$ con ct definida como

$$ct = (1 + \theta)E[S(t)] \tag{1-17}$$

con θ el recargo relativo por seguridad, entonces (1-16) se puede escribir de la siguiente forma:

$$U(t) = \omega + ct - S(t) \qquad 0 \leq t < \infty \tag{1-18}$$

con $S(t)$ definido como en (1-13).

En el modelo (1-18) se ignora el interés y los factores distintos a las primas y a los reclamos que podrían afectar al excedente.

1.6.2. Evento de Ruina

Se entenderá por ruina el evento en el cual el excedente toma un valor negativo por primera vez.

Definición 1.6.1 (Probabilidad de solvencia)**.** *Sobre el modelo de tiempo continuo la probabilidad de solvencia se puede definir en dos casos dependiendo si el tiempo considerado es finito o no:*

1. *Horizonte infinito:*

$$\phi(\omega) := P\{U_t \geq 0,\ \forall t \geq 0 \mid U_0 = \omega\} \tag{1-19}$$

2. *Horizonte finito* $[0, \tilde{t}]$*:*

$$\phi(\omega, \tilde{t}) := P\{U_t \geq 0,\ \forall t \quad \textit{tal que } t \leq \tilde{t} \mid U_0 = \omega\} \tag{1-20}$$

El proceso de excedentes dado en (1-18) puede llegar a ser negativo en ciertos momentos. Cuando esto ocurra por primera vez, se dice que la ruina ha ocurrido.
Sea

$$T_\omega = \text{mín}\{t \mid U(t) < 0\} \tag{1-21}$$

el tiempo en que ocurre la ruina. En el caso en el que $U(t) > 0$, para todo t, la ruina nunca ocurre y se denota $T_\omega = \infty$.

1.6.3. Probabilidad de ruina antes del tiempo t

Denotando $\psi(\omega, t)$ la probabilidad de que $U(\cdot)$ tome un valor negativo antes del tiempo t, se tiene:

$$\psi(\omega, t) = P(T_\omega < t) \tag{1-22}$$

Definición 1.6.2 (Probabilidad de no ruina)**.** *La probabilidad del evento complementario definido en (1-22) se conoce como la probabilidad de no ruina:*

$$\phi(\omega, t) = 1 - \psi(\omega, t) = P\{U(\tau) > 0 \mid U(0) = \omega\} \quad 0 \leq \tau \leq t \tag{1-23}$$

1.6.4. Probabilidad de ruina eventual

La probabilidad de que $U(t)$ tome en alguna ocasión un valor negativo, se conoce como probabilidad de ruina eventual y es una cota superior para $\psi(\omega, t)$:

$$\psi(\omega) = \lim_{t \to \infty} \psi(\omega, t) \tag{1-24}$$

Hay que tener en cuenta que si $c > \mu_X$ entonces cualquier realización del proceso $U(t)$ tendrá una tendencia que crece sin cota para $t \to \infty$. Si el capital inicial de la compañía es infinito, entonces la probabilidad de ruina se define como cero:

$$\lim_{\omega \to \infty} \psi(\omega) = 0 \tag{1-25}$$

1.6.5. Coeficiente de ajuste para la probabilidad de ruina

La más sencilla y conocida de las aproximaciones para la probabilidad de ruina eventual fue propuesta por Lundberg y desarrollada por Cramér (1930):

$$\psi(\omega) \approx e^{-\tilde{R}\omega} \tag{1-26}$$

donde $\tilde{R}$ es el llamado **coeficiente de ajuste** (o coeficiente de Lundberg) y es la única raíz positiva de la ecuación:

$$\ln[M_X(r)] - cr = 0 \tag{1-27}$$

donde $M_X(r)$ es la función generadora de momentos de la variable aleatoria X que tiene la distribución común de las variables X_k (severidad del k-ésimo reclamo) y $c\tau$ se define como en (1-17).

Se cumple además que la expresión $e^{-\tilde{R}\omega}$ es una cota superior para la probabilidad de ruina en tiempo infinito (Cramér (1930)), esto es:

$$\psi(\omega) \leq e^{-\tilde{R}\omega} \tag{1-28}$$

Dado que no siempre es posible resolver de manera explícita la ecuación fundamental de Lundberg (1-27) entonces se plantean varias aproximaciones para el coeficiente de ajuste. Dos de ellas se encuentran en Jiménez M. and Moreno (2017):

1. **Solución por series de potencia**
   Empleando el desarrollo de Taylor para la función generadora de momentos de X, $M_X(r)$ se tiene que la ecuación de Lundberg se puede expresar como

   $$\mu r + \sigma^2 \frac{r^2}{2!} \approx cr \tag{1-29}$$

   donde $\mu = E[X]$ y $\sigma^2 = Var[X]$. De (1-29), el coeficiente de ajuste se puede aproximar mediante:

   $$\tilde{R} \approx 2\frac{c-\mu}{\sigma^2} \tag{1-30}$$

2. **Solución numérica**
   Aplicando el método de Newton-Raphson a la función

   $$f(r) = \ln[M_X(r)] - cr \tag{1-31}$$

   se obtiene

   $$r_{n+1} = r_n - \frac{\ln[M_X(r_n)] - cr_n}{M'_X(r_n) - cM_X(r_n)} M_X(r_n), \quad r_n \neq 0 \tag{1-32}$$

   De (1-32) se puede aproximar el valor de R tomando como valor inicial la cota superior dada en (1-30).

Sobre el modelo clásico de riesgo (1-13) es posible calcular el valor de $\tilde{R}$ al reemplazar las expresiones (1-14) y (1-15) en (1-30) obteniendo:

$$\tilde{R} \approx \frac{2\theta E[N(t)]E[X]}{E[N(t)]Var[X] + Var[N(t)](E[X])^2} \tag{1-33}$$

Dividiendo tanto el numerador como el denominador de (1-33) entre $E[N(t)]$ se tiene una expresión equivalente para $\tilde{R}$ en términos del índice de dispersión del proceso $N(t)$ definido en (1-12):

$$\tilde{R} \approx \frac{2\theta E[X]}{Var[X] + (E[X])^2 ID(t)} \tag{1-34}$$

Nótese que si $N(t)$ es un proceso Poisson de media λt entonces (1-34) toma la forma:

$$\tilde{R} \approx \frac{2\theta\mu_X}{E[X^2]} \tag{1-35}$$

donde la expresión $\theta\mu_X$ recibe el nombre de recargo por seguridad.

1.7. Probabilidad de ruina en horizonte infinito

1.7.1. Monto de reclamos constante

En Seal (1969) se estudia el caso en el que la suma de los reclamos totales en el modelo de riesgo es igual a b y se calcula la probabilidad de que el primer reclamo ocurra en el instante τ como el producto de las probabilidades de los eventos independientes:

1. Ningún reclamo ocurra en el intervalo $(0, \tau - d\tau)$ y
2. Un reclamo ocurra en el intervalo $(\tau - d\tau, \tau)$

Bajo el supuesto de que $N(t)$ sigue un proceso Poisson de parámetro λt se tiene que las probabilidades mencionadas en los eventos anteriores son $e^{-\lambda\tau}$ y $\lambda d\tau$ respectivamente. Así, la probabilidad de que el primer reclamo ocurra en el instante τ es

$$\lambda e^{-\lambda\tau} d\tau \tag{1-36}$$

lo cual indica que el tiempo que transcurre entre dos reclamos consecutivos, sigue una distribución exponencial.

Reescribiendo (1-17), la prima cobrada, queda $ct = (1+\theta)\lambda\mu_X t = (\lambda\mu_X + \alpha)t$ entonces la probabilidad de no ruina se establece como

$$\phi(\omega) = \begin{cases} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda\tau}\phi(\omega + c\tau - b)\lambda d\tau, & \text{si } \omega \geq 0 \\ 0 & \text{si } \omega < 0 \end{cases} \tag{1-37}$$

que empleando transformada de Laplace y algunas técnicas de integración conduce a:

$$\phi(\omega) = \phi(0)e^{\frac{\lambda}{c}\omega} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\omega}{b} \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\lambda}{c}e^{-\frac{\lambda}{c}b}\right)^k (\omega - kb)^k, \qquad \omega > 0 \tag{1-38}$$

En Seal (1969) también se obtiene

$$\phi(0) = \frac{c-b}{c} \tag{1-39}$$

1.7.2. Monto de reclamos aleatorio

Ahora se estudia la probabilidad de ruina en horizonte infinito sin el supuesto de que la suma de todos los reclamos es igual a una constante sino que depende de la distribución de la severidad de los siniestros. De manera análoga a como se definió la probabilidad de no ruina en (1-37), en este caso se tiene:

$$\phi(\omega) = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} \left(\int_0^{\omega + c\tau} \phi(\omega + c\tau - y) f_X(y) dy \right) \lambda d\tau \tag{1-40}$$

En Arfwedson (1950) y Arfwedson (1954) se halla una expresión para $\frac{\partial}{\partial\omega}\phi(\omega)$ y mediante transformadas de Laplace se establece que:

$$\phi(\omega) = c\phi(0)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{cr - \lambda + \lambda\mathcal{F}(r)}\right\} \tag{1-41}$$

donde $\mathcal{F}(r)$ denota la transformada de Laplace de la función de densidad de la severidad; esto es, $\mathcal{F}(r) = \mathcal{L}\{f_X(y)\}$ y $\mathcal{L}^{-1}(\cdot)$ representa el operador de la transformada inversa de Laplace.

El denominador de (1-41)

$$g(r) = cr - \lambda + \lambda\mathcal{F}(r) \tag{1-42}$$

se conoce como la *ecuación fundamental de Lundberg* y tiene al menos dos raíces no negativas, una de las cuales es $r = 0$.

Si 1-42 se evalúa en $-r$ se obtiene:

$$g(-r) = -cr - \lambda + \lambda\mathcal{F}(-r)$$

Como $\mathcal{F}(-r) = M_X(r)$ entonces:

$$g(-r) = \lambda\left(M_X(r) - 1\right) - cr \tag{1-43}$$

1.7.3. Casos particulares

Sobre el modelo clásico de ruina, es decir, asumiendo que $N(t)$ sigue un proceso Poisson de media λt, se establecen aproximaciones para la probabilidad de ruina en horizonte infinito para algunas distribuciones de severidad específicas. Las pruebas se pueden consultar en Čižek et al. (2005).

1.7.3.1. Ruina sin capital inicial

Cuando $\omega = 0$ la expresión para $\phi(\omega)$ es exacta y es igual a

$$\phi(0) = \frac{\theta}{1+\theta} \tag{1-44}$$

de donde la probabilidad de ruina en este caso es

$$\psi(0) = 1 - \phi(0) = \frac{1}{1+\theta} \tag{1-45}$$

Nótese que la fórmula depende únicamente del recargo relativo por seguridad θ sin importar la tasa media de reclamos λ ni la distribución de las severidades. Aquí la probabilidad de ruina es inversamente proporcional al recargo relativo, θ.

1.7.3.2. Severidad Exponencial

Suponiendo que $X_k \sim \exp(\gamma)$, la probabilidad de no ruina en el modelo clásico es de nuevo una expresión cerrada y viene dada por:

$$\phi(\omega) = 1 - \frac{1}{1+\theta} \exp\left\{ -\frac{\theta}{1+\theta}\gamma\omega \right\}. \tag{1-46}$$

Así, la probabilidad de ruina se calcula mediante:

$$\psi(\omega) = \frac{1}{1+\theta} \exp\left\{ -\frac{\theta}{1+\theta}\gamma\omega \right\} \tag{1-47}$$

1.7.3.3. Severidad Gamma

Grandell and Segerdahl (1971) muestran que la probabilidad de ruina cuando la severidad sigue una distribución Gamma de media 1 y $\eta \leq 1$ se puede calcular mediante:

$$\psi(\omega) = \frac{\theta(1 - R/\eta)e^{-R\omega}}{1 + (1+\theta)R - (1+\theta)(1 - R/\eta)} + \frac{\eta\theta \operatorname{sen}(\eta\pi)}{\pi} \cdot I \tag{1-48}$$

donde R es la solución no negativa más pequeña de la ecuación dada en (1-42) asociada a la distribución Gamma y el término

$$I = \int_0^\infty \frac{x^\eta e^{-(x+1)\omega\eta} dx}{\left[x^\eta \left(1 + \eta(1+\theta)(x+1)\right) - \cos(\eta\pi)\right]^2 + \operatorname{sen}^2(\eta\pi)} \tag{1-49}$$

De (1-48) se obtiene la aproximación de Cramér-Lundberg expuesta en Grandell and Segerdahl (1971):

$$\psi(\omega) \approx \frac{\theta(1 - R/\eta)e^{-R\omega}}{1 + (1+\theta)R - (1+\theta)(1 - R/\eta)} \tag{1-50}$$

2 Proceso no homogéneo de Panjer

En la segunda sección del capítulo anterior se presentaron algunos procesos de conteo que se pueden ajustar para modelar la frecuencia de reclamaciones $N(t)$ en el modelo clásico de riesgo (1-13). En este capítulo se presenta el proceso estocástico de Panjer como una alternativa para describir el comportamiento de la frecuencia de reclamaciones. Además, se establecen algunas propiedades asociadas a este.

2.1. Definición del proceso

Sea $N(t)$ el número de reclamos que ocurren en el intervalo de tiempo $(0, t]$ con $t > 0$ y $N(0) = 0$. La probabilidad de que ocurran exactamente n reclamos se denota por

$$P_n(t) = P[N(t) = n], \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2-1}$$

En Iseger et al. (1997), se presenta el proceso de conteo asociado a la recursión de Panjer como una alternativa para modelar el proceso del número de reclamos

$$P_n(t) = \left(\alpha(t) + \frac{\beta(t)}{n}\right) P_{n-1}(t), \quad \forall n > 0 \tag{2-2}$$

donde $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ son funciones de t con $\alpha(t) \leq 1$. Nótese que para $t = 1$ se obtiene la expresión dada en (1-1).

Con el objetivo de simplificar la notación, se escribirá α_t y β_t en lugar de $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ respectivamente.

2.1.1. Ejemplos

De la expresión recursiva (2-2) se obtiene una forma equivalente para determinar si un proceso estocástico $N(t)$ es un proceso no homogéneo de Panjer, a saber,

$$\frac{P_n(t)}{P_{n-1}(t)} = \alpha_t + \frac{\beta_t}{n} \tag{2-3}$$

Es decir, si al calcular el cociente $\frac{P_n(t)}{P_{n-1}(t)}$ se obtiene una expresión de la forma (2-3) entonces el proceso $N(t)$ es un proceso no homogéneo de Panjer.

Ejemplo 1 (Proceso binomial negativo clásico). *(Seal (1969)) Sea $N(t)$ un proceso binomial negativo clásico con*

$$P_n(t) = \binom{\gamma+n-1}{n}\left(\frac{\delta}{\delta+t}\right)^{\gamma}\left(\frac{t}{\delta+t}\right)^{n}$$

donde $\delta, \gamma > 0$.

Se considera el cociente:

$$\begin{aligned}\frac{P_n(t)}{P_{n-1}(t)} &= \frac{\binom{\gamma+n-1}{n}\left(\frac{\delta}{\delta+t}\right)^{\gamma}\left(\frac{t}{\delta+t}\right)^{n}}{\binom{\gamma+n-2}{n-1}\left(\frac{\delta}{\delta+t}\right)^{\gamma}\left(\frac{t}{\delta+t}\right)^{n-1}} = \frac{\frac{\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\gamma)}\left(\frac{\delta}{\delta+t}\right)^{\gamma}\left(\frac{t}{\delta+t}\right)^{n}}{\frac{\Gamma(\gamma+n-1)}{\Gamma(n)\Gamma(\gamma)}\left(\frac{\delta}{\delta+t}\right)^{\gamma}\left(\frac{t}{\delta+t}\right)^{n-1}} \\ &= \frac{\gamma+n-1}{n}\left(\frac{t}{\delta+t}\right) = \frac{t}{\delta+t} + \frac{t(\gamma-1)}{n(\delta+t)} \\ &= \alpha_t + \frac{\beta_t}{n}\end{aligned}$$

donde $\alpha_t = \frac{t}{\delta+t}$ y $\beta_t = \frac{t(\gamma-1)}{\delta+t}$. Como $\alpha_t \leq 1$ entonces se tiene que el proceso binomial negativo clásico es un proceso no homogéneo de Panjer.

Ejemplo 2 (Proceso Yule-Furry). *(Bharucha-Reid (1960)) Sea $N(t)$ un proceso de Yule-Furry tal que*

$$\begin{aligned}&P_0(t) = 0\\ &P_n(t) = e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1} \quad n \geq 1\end{aligned}$$

con $\lambda > 0$.

En este caso

$$\frac{P_n(t)}{P_{n-1}(t)} = \frac{e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}}{e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-2}} = 1 - e^{-\lambda t} = \alpha_t + \frac{\beta_t}{n}$$

donde $\alpha_t = 1 - e^{-\lambda t}$ y $\beta_t = 0$. Como $\alpha_t < 1$ entonces se tiene que el proceso de Yule-Furry es un proceso no homogéneo de Panjer.

Ejemplo 3 (Proceso Binomial Negativo Generalizado). *(Arbous and Kerrich (1951)) El proceso $N(t)$ es un proceso binomial negativo generalizado si*

$$P_n(t) = \binom{\gamma+n-1}{n} e^{-\theta\gamma t}(1-e^{-\theta t})^{n} \tag{2-4}$$

con $\gamma,\ \theta > 0$.

Considerando de nuevo el cociente:

$$\frac{P_n(t)}{P_{n-1}(t)} = \frac{\binom{\gamma+n-1}{n} e^{-\theta\gamma t}(1-e^{-\theta t})^n}{\binom{\gamma+n-2}{n-1} e^{-\theta\gamma t}(1-e^{-\theta t})^{n-1}}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{P_n(t)}{P_{n-1}(t)} &= \frac{\gamma+n-1}{n}\left(1-e^{-\theta t}\right)\\ &= \left(1+e^{-\theta t}\right) + \frac{\gamma-1}{n}\left(1-e^{-\theta t}\right)\\ &= \alpha_t + \frac{\beta_t}{n}\end{aligned}$$

con $\alpha_t = 1-e^{-\theta t}$ *y* $\beta_t = (\gamma-1)\left(1-e^{-\theta t}\right)$*. Es claro que* $\alpha_t \leq 1$ *y por tanto el* $N(t)$ *resulta ser un proceso no homogéneo de Panjer.*

Jiménez M. and Arunachalam (2016) presentan el proceso descrito en (2-2) como *Proceso no Homogéneo de Panjer* y calculan las expresiones para α_t y β_t que permiten obtener los procesos de conteo asociados a algunas de las distribuciones presentadas en la tabla **1-1**, dichas expresiones se encuentran en la tabla **2-1**.

Tabla 2-1: Funciones de α_t y β_t para algunos procesos de conteo (Jiménez M. and Arunachalam (2016))

Nombre del proceso estocástico	$P_n(t)$	**Funciones**	
		α_t	β_t
Poisson	$\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$	0	λt
B. negativo	$\binom{\gamma+n-1}{n}\left(\frac{\delta}{\delta+t}\right)^{\gamma}\left(\frac{t}{\delta+t}\right)^{n}$	$\frac{t}{\delta+t}$	$\frac{t(\gamma-1)}{\delta+t}$
Geométrico	$\left(\frac{\delta}{\delta+t}\right)\left(\frac{t}{\delta+t}\right)^{n}$ y $\delta > 0$	$\frac{t}{\delta+t}$	0
Binomial	$\binom{m}{n}\left(\frac{t}{\delta}\right)^{n}\left(1-\frac{t}{\delta}\right)^{m-n}$, $t < \delta$	$\frac{t}{t-\delta}$	$\frac{(m+1)t}{\delta-t}$

donde δ es una constante tal que $\Theta(t) = \int_0^t \lambda(v)dv = \int_0^t \delta^{-1}dv$ es la función de intensidad del proceso.

2.2. Propiedades del proceso no homogéneo de Panjer

A continuación se listan algunas de las propiedades que se encuentran en Jiménez M. and Arunachalam (2016):

Teorema 2.2.1. *Sea $N(t)$ como en (2-2). Si $\alpha_t + \beta_t > 0$ entonces se definen*

$$\rho_t = \frac{\alpha_t + \beta_t}{\alpha_t} \qquad y \qquad \kappa_t = \frac{\alpha_t}{1-\alpha_t} \tag{2-5}$$

donde ρ_t y κ_t son funciones de t, entonces la función generadora de probabilidades de $N(t)$ está dada por

$$G_N(z;t) = E\left[z^{N(t)}\right] = \begin{cases} (1-\kappa_t(z-1))^{-\rho_t} & si\ \alpha_t \neq 0 \\ \exp\{\beta_t(z-1)\} & si\ \alpha_t = 0 \end{cases} \tag{2-6}$$

Demostración.
La prueba se puede ver en Jiménez M. and Arunachalam (2016). □

Si adicionalmente se define

$$\xi_t = \frac{\alpha_t + \beta_t}{1-\alpha_t} \tag{2-7}$$

entonces en (2-5) se tiene que $\rho_t = \xi_t/\kappa_t$. Nótese que si α_t tiende a cero entonces ξ_t tiende a β_t.

Suponiendo que en la función de intensidad $\Theta(t)$, se cumple que $\lambda(\upsilon) = \delta^{-1}$ en este caso, tanto κ_t como ξ_t son de tipo lineal en t y la función ρ_t es constante. A saber:

$$\xi_t = \xi t, \qquad \kappa_t = \kappa t \quad \text{y} \quad \rho_t = \rho \tag{2-8}$$

Bajo este supuesto, se tiene que:

Tabla 2-2: Valores para ξ, κ y ρ (Jiménez M. and Arunachalam (2016))

Nombre del proceso estocástico	Binomial Negativo	Geométrico	Binomial
ξ	$\gamma\delta^{-1}$	δ^{-1}	$m\delta^{-1}$
κ	δ^{-1}	δ^{-1}	$-\delta^{-1}$
ρ	γ	1	$-m$

Nótese que ρ y κ son no negativos siempre que $0 \leq \alpha_t \leq 1$.

Si los parámetros ρ_t y κ_t satisfacen (2-8) entonces de (2-6) se tiene:

$$P_0(t) = \begin{cases} (1+\kappa t)^{-\rho} & \text{si } \alpha_t \neq 0 \\ \exp\{-\beta_t\} & \text{si } \alpha_t = 0 \end{cases} \tag{2-9}$$

De manera equivalente, $P_0(t)$ se establece como:

$$P_0(t) = \exp\{-\varphi(t)\} \qquad \text{con} \qquad \varphi(t) = \int_0^t \frac{\rho\kappa}{1+\kappa v} dv. \tag{2-10}$$

Derivando sucesivamente (2-9) se obtiene una expresión general para la n-ésima derivada de $P_0(t)$:

$$\frac{d^n}{dt^n} P_0(t) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\rho+n)}{\Gamma(\rho)} \left(\dfrac{-\kappa}{1+\kappa t} \right)^n P_0(t) & \text{si } \alpha_t \neq 0 \\ (-\beta_t)^n P_0(t) & \text{si } \alpha_t = 0 \end{cases} \tag{2-11}$$

A partir de la función generadora de probabilidades definida en (2-6) se tiene la expresión general para calcular $P_n(t)$:

$$P_n(t) = \frac{G_N^{(n)}(0;t)}{n!} = \begin{cases} \dbinom{\rho+n-1}{n} \alpha_t^n P_0(t) & \text{si } \alpha_t \neq 0 \\ \dfrac{\beta_t^n}{n!} P_0(t) & \text{si } \alpha_t = 0 \end{cases} \tag{2-12}$$

Empleando (2-11) es posible reescribir $P_n(t)$ como:

$$P_n(t) = \frac{(-1)^n}{n!} t^n P_0^{(n)}(t) \qquad\qquad n \geq 0 \tag{2-13}$$

Teorema 2.2.2. *Sea $N(t)$ como en (2-2) con α_t y β_t tales que se cumple (2-8). Entonces $P_n(t)$ satisface la relación*

$$\frac{P_{n+1}(t)}{P_n(t)} = \frac{-t}{n+1} \frac{P_0^{(n+1)}(t)}{P_0^{(n)}(t)} = \frac{n+\rho}{n+1} \frac{\kappa t}{1+\kappa t} = \frac{\kappa(\rho+n)}{1+\kappa t} \frac{t}{n+1} \tag{2-14}$$

donde $P_0^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} P_0(t)$.

Demostración.

La prueba se puede consultar en Jiménez M. and Arunachalam (2016). □

Corolario 2.2.1. *Si $N(t)$ satisface (2-2) con α_t y β_t como en (2-8) y t es fijo entonces la media y la varianza de $N(t)$ están dadas por:*

$$E[N(t)] = \begin{cases} \rho\kappa t & si\ \alpha_t \neq 0 \\ \beta_t & si\ \alpha_t = 0 \end{cases} \tag{2-15}$$

y

$$Var[N(t)] = (1+\kappa t)E[N(t)] \tag{2-16}$$

Nótese que de (2-15) se tiene que si $\alpha_t \neq 0$ entonces:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[N(t)]}{t} = \rho\kappa. \tag{2-17}$$

De (2-15) y (2-16) es posible calcular el índice de dispersión definido en (1-12) para el proceso no homogéneo de Panjer:

$$ID(t) = \frac{(1+\kappa t)E[N(t)]}{E[N(t)]} = 1 + \kappa t \tag{2-18}$$

Como $ID(t) > 1$ (siempre que $0 \leq \alpha_t \leq 1$) entonces por el criterio mencionado en la sección 1.4, se tiene que el proceso no homogéneo de Panjer describe modelos sobredispersos y por tanto, es una opción adecuada para modelar la frecuencia de reclamaciones de un portafolio con distintos niveles de riesgo entre sus asegurados.

2.3. Proceso no homogéneo de Panjer en términos de procesos clásicos

En esta sección se caracteriza el proceso no homogéneo de Panjer en términos de los procesos estocásticos clásicos presentados en el capítulo 1.

2.3.1. Proceso no homogéneo de Panjer como proceso de nacimiento puro

Derivando la expresión (2-13) se tiene

$$P_n'(t) = \frac{n}{t}\left(\frac{(-1)^n}{n!} t^n P_0^{(n)}(t)\right) + \frac{(-1)^n}{n!} t^n P_0^{(n+1)}(t) \tag{2-19}$$

Por la primera igualdad de la expresión (2-14) se obtiene

$$\begin{aligned} P_n'(t) &= \frac{n}{t}P_n(t) + \frac{(-1)^n}{n!} t^n P_0^{(n)}(t)\left(\frac{-\kappa(\rho+n)}{1+\kappa t}\right) \\ &= \frac{n}{t}P_n(t) - \frac{\kappa(\rho+n)}{1+\kappa t}P_n(t) \end{aligned} \tag{2-20}$$

Despejando $P_n(t)$ de (2-14) y sustituyendo en (2-20) se llega a:

$$P_n'(t) = \frac{\kappa(\rho+n-1)}{1+\kappa t}P_{n-1}(t) - \frac{\kappa(\rho+n)}{1+\kappa t}P_n(t). \tag{2-21}$$

Como caso particular de (2-11) se tiene que

$$P_0'(t) = -\frac{\kappa\rho}{1+\kappa t}P_0(t). \tag{2-22}$$

Denotando

$$\lambda_n(t) = \frac{\kappa(\rho + n)}{1 + \kappa t}. \tag{2-23}$$

De (2-21), (2-22) y (2-23) se tiene que el proceso no homogéneo de Panjer satisface el sistema de ecuaciones diferenciales dado por:

$$\begin{aligned} P_0'(t) &= -\lambda_0(t)P_0(t) \\ P_n'(t) &= \lambda_{n-1}(t)P_{n-1}(t) - \lambda_n(t)P_n(t) \quad \text{para} \quad n \geq 1 \end{aligned} \tag{2-24}$$

con condiciones iniciales

$$P_0(0) = 1 \qquad \text{y} \qquad P_n(0) = 0 \quad \forall n \geq 1 \tag{2-25}$$

Lo anterior coincide con la definición de proceso estocástico de nacimiento puro dada en (1.3.1).

Así, si $N(t)$ satisface (2-2) entonces $N(t)$ es un proceso no homogéneo de nacimiento puro con intensidades de transición $\lambda_n(t)$.

Reemplazando los valores de la tabla (**2-2**) en (2-23) se obtienen las expresiones de las intensidades de transición $\lambda_n(t)$ para los procesos de conteo clásicos:

Tabla 2-3: Expresiones para $\lambda_n(t)$ en procesos de conteo clásicos

Proceso estocástico	Binomial Negativo	Geométrico	Binomial
$\lambda_n(t)$	$\dfrac{\gamma + n}{\delta + t}$	$\dfrac{1 + n}{\delta + t}$	$\dfrac{m - n}{\delta - t}$

2.3.2. Proceso no homogéneo de Panjer como proceso Poisson mixto

En Lundberg (1964) se establece un conjunto de equivalencias las cuales satisface el proceso no homogéneo de Panjer definido en (2-2) y se presentan a continuación:

Teorema 2.3.1. *Sea $N(t)$ un proceso no homogéneo de Panjer con intensidades de transición $\lambda_n(t)$ y distribución marginal $P_n(t)$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) *$\lambda_n(t)$ satisface la relación $\lambda_{n+1}(t) = \lambda_n(t) - \frac{\lambda_n'(t)}{\lambda_n(t)}$ para $n = 0, 1, \ldots$*

ii) *$\lambda_n(t)$ y $P_n(t)$ cumplen la relación $P_n(t) = \frac{t}{n}\lambda_{n-1}(t)P_{n-1}(t)$ para $n = 1, 2, \ldots$*

iii) *$N(t)$ es un proceso Poisson mixto.*

Demostración.

I) Derivando (2-23) se obtiene

$$\lambda_n'(t) = \frac{-\kappa^2(\rho+n)}{(1+\kappa t)^2} \tag{2-26}$$

de donde

$$\begin{aligned}\lambda_n(t) - \frac{\lambda_n'(t)}{\lambda_n(t)} &= \frac{\kappa(\rho+n)}{1+\kappa t} - \frac{\frac{-\kappa^2(\rho+n)}{(1+\kappa t)^2}}{\frac{\kappa(\rho+n)}{1+\kappa t}} \\ &= \frac{\kappa(\rho+n)}{1+\kappa t} + \frac{\kappa}{1+\kappa t} = \frac{\kappa(\rho+(n+1))}{1+\kappa t} = \lambda_{n+1}(t).\end{aligned} \tag{2-27}$$

II) De la última igualdad dada en (2-14) se tiene

$$\frac{P_n(t)}{P_{n-1}(t)} = \frac{\kappa(\rho+(n-1))}{1+\kappa t}\frac{t}{n}$$

y usando (2-23)

$$P_n(t) = \frac{t}{n}\lambda_{n-1}(t)P_{n-1}(t). \tag{2-28}$$

III) De acuerdo a la definición (1.2.4) es necesario expresar $P_n(t)$ como en (1-7) para una función de densidad $f(\lambda)$ asociada a la variable aleatoria Λ.
Asumiendo que Λ sigue una distribución gamma de parámetros ρ y $\dfrac{1}{\kappa}$, esto es, $\Lambda \sim Gamma(\rho, 1/\kappa)$ entonces (1-7) toma la forma:

$$P_n(t) = \int_0^\infty \frac{1}{n!}\, e^{-\lambda t}(\lambda t)^n \frac{1}{\kappa^\rho \Gamma(\rho)}\, \lambda^{\rho-1} e^{-\frac{1}{\kappa}\lambda} d\lambda = \frac{t^n}{n!}\frac{1}{\kappa^\rho\Gamma(\rho)} \int_0^\infty e^{-\lambda\left(t+\frac{1}{\kappa}\right)} \lambda^{n+\rho-1} d\lambda$$

Haciendo $u = \lambda\left(t+\frac{1}{\kappa}\right)$ se tiene $du = \left(t+\frac{1}{\kappa}\right)d\lambda$ y así,

$$\begin{aligned}P_n(t) &= \frac{t^n}{\kappa^\rho}\,\frac{1}{n!\Gamma(\rho)} \int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{t+1/\kappa}\right)^{n+\rho-1} \frac{1}{t+1/\kappa}du \\ &= \frac{t^n}{\kappa^\rho}\,\frac{1}{n!\Gamma(\rho)}\left(\frac{1}{t+1/\kappa}\right)^{n+\rho} \int_0^\infty e^{-u}u^{n+\rho-1}du \\ &= \frac{\Gamma(n+\rho)}{n!\Gamma(\rho)}\,\frac{t^n}{\kappa^\rho}\left(\frac{\kappa}{1+\kappa t}\right)^n\left(\frac{\kappa}{1+\kappa t}\right)^\rho \\ &= \binom{\rho+n-1}{n}\alpha_t^n P_0(t)\end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene de (2-5).

Esto implica que $N(t)$ es un proceso Poisson mixto donde la variable de estructura sigue una distribución gamma. Además, por la definición (1.2.5) también se cumple que el proceso no homogéneo de Panjer es un proceso binomial negativo.

Lo cual completa la prueba. □

La siguiente proposición también se encuentra en Lundberg (1964) y presenta la expresión general para calcular las probabilidades de transición de un proceso Poisson mixto:

Proposición 2.3.1. *Sea $N(t)$ un proceso Poisson mixto con distribución marginal $P_n(t)$. Entonces, para $0 \leq s < t,\ m \leq n$ se tiene:*

$$P_{m,n}(s,t) = P(N(t) = n \mid N(s) = m) = \binom{n}{m}\left(\frac{s}{t}\right)^m \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-m} \frac{P_n(t)}{P_m(s)} \qquad \text{(2-29)}$$

Demostración.
La prueba se puede encontrar en Lundberg (1964) o en Grandell (1997). □

Al reemplazar la expresión para $P_n(t)$ dada en (2-12), cuando $\alpha_t \neq 0$ se tiene en (2-29) que las probabilidades de transición para el proceso no homogéneo de Panjer son:

$$\begin{aligned}
P_{m,n}(s,t) &= P(N(t) = n \mid N(s) = m) \\
&= \binom{n}{m}\left(\frac{s}{t}\right)^m \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-m} \frac{P_n(t)}{P_m(s)} \\
&= \binom{n}{m}\left(\frac{s}{t}\right)^m \left(\frac{t-s}{t}\right)^{n-m} \left[\frac{\binom{\rho+n-1}{n}\left(\frac{\kappa t}{1+\kappa t}\right)^n \left(\frac{1}{1+\kappa t}\right)^\rho}{\binom{\rho+m-1}{m}\left(\frac{\kappa s}{1+\kappa s}\right)^m \left(\frac{1}{1+\kappa s}\right)^\rho}\right] \\
&= \binom{\rho+n-1}{n-m}\left(\frac{\kappa(t-s)}{1+\kappa t}\right)^{n-m}\left(\frac{1+\kappa s}{1+\kappa t}\right)^{m+\rho}. \qquad \text{(2-30)}
\end{aligned}$$

De (2-30) es fácil encontrar una expresión para las probabilidades conjuntas del proceso:

$$\frac{P(N(t) = n, N(s) = m)}{P(N(s) = m)} = \binom{n}{m}\left(\frac{s}{t}\right)^m \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-m} \frac{P_n(t)}{P_m(s)}.$$

De donde,

$$P(N(t) = n, N(s) = m) = \binom{n}{m}\left(\frac{s}{t}\right)^m \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-m} P_n(t) \qquad \text{(2-31)}$$

siendo $P_n(t)$ como en (2-12).

Haciendo $m = n$, $n = n+1$, $s = t$ y $t = t+h$ en (2-30) y tomando el límite cuando h tiende a 0 se tiene:

$$\lim_{h \to 0} \frac{P_{n,n+1}(t, t+h)}{h} = \lambda_n(t)$$

es decir, las intensidades de transición $\lambda_n(t)$ representan las probabilidades de transición instantánea del proceso $N(t)$.

McFadden (1965) establece un par de propiedades adicionales que también cumple el proceso no homogéneo de Panjer:

Proposición 2.3.2. *1. Si Λ es la variable de estructura del proceso, entonces*

$$E[\Lambda] = -P_0'(0) \tag{2-32}$$

2. Las intensidades de transición son tales que

$$\lambda_n(t) = -\frac{P_0^{(n+1)}(t)}{P_0^{(n)}(t)} \tag{2-33}$$

Demostración.

1. En el proceso no homogéneo de Panjer la variable de estructura Λ sigue una distribución gamma de parámetros ρ y $\frac{1}{\kappa}$; de donde, $E[\Lambda] = \rho\kappa$.
   Por otro lado,
   $$P_0'(t)\big|_{t=0} = -\rho\kappa(1+\kappa t)^{-\rho-1}\big|_{t=0} = -\rho\kappa. \tag{2-34}$$
   Y así, se cumple (2-32).

2. De la segunda y la última igualdad en (2-14) se tiene
   $$\frac{-t}{n+1}\frac{P_0^{(n+1)}(t)}{P_0^{(n)}(t)} = \frac{\kappa(\rho+n)}{1+\kappa t}\frac{t}{n+1}.$$
   De donde, empleando la notación propuesta en (2-23), la relación (2-33) es evidente.

□

La siguiente proposición (también dada en McFadden (1965)) permite determinar que el proceso no homogéneo de Panjer no tiene incrementos independientes:

Proposición 2.3.3. *Sea $N(t)$ un proceso Poisson mixto. Si $N(t)$ tiene incrementos independientes entonces sus intensidades de transición satisfacen:*

$$\lambda_0(t) = \lambda_1(t) \tag{2-35}$$

Demostración.

La prueba se puede encontrar en McFadden (1965). □

Por lo establecido en el Teorema (2.3.1) se sabe que el proceso no homogéneo de Panjer es un proceso Poisson mixto con $\lambda_0(t)$ y $\lambda_1(t)$ tales que:

$$\lambda_0(t) = \frac{\kappa\rho}{1+\kappa t} \neq \frac{\kappa(\rho+1)}{1+\kappa t} = \lambda_1(t). \tag{2-36}$$

de donde, por contrarrecíproca de la proposición anterior, se concluye que $N(t)$ no tiene incrementos independientes.

2.3.3. Proceso no homogéneo de Panjer como proceso Pólya

En (2-12) se estableció una expresión para $P_n(t)$ en términos de α_t y $P_0(t)$:

$$P_n(t) = \binom{\rho + n - 1}{n} \alpha_t^n P_0(t).$$

Dado que $P_0(t) = (1 + \kappa t)^{-\rho} = \left(\frac{1}{1+\kappa t}\right)^{\rho} = \left(\frac{\frac{1}{\kappa}}{\frac{1}{\kappa}+t}\right)^{\rho}$ siempre que $\alpha_t \neq 0$, y de la igualdad para κ_t dada en (2-5) se tiene en (2-12):

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \binom{\rho + n - 1}{n} \left(\frac{\kappa t}{1+\kappa t}\right)^n P_0(t) = \binom{\rho + n - 1}{n} \left(\frac{t}{\frac{1}{\kappa}+t}\right)^n P_0(t) \\ &= \binom{\rho + n - 1}{n} \left(\frac{t}{\frac{1}{\kappa}+t}\right)^n \left(\frac{\frac{1}{\kappa}}{\frac{1}{\kappa}+t}\right)^{\rho} \end{aligned} \tag{2-37}$$

Haciendo $a = \frac{1}{\kappa}$ y $\rho = v$ en (2-37) se tiene, de acuerdo a la definición (1.2.6), que el proceso no homogéneo de Panjer es también un proceso Pólya.

En Lundberg (1964) hay una caracterización del proceso Pólya en términos de una serie de equivalencias que el proceso no homogéneo de Panjer satisface. Dichas características se resumen en el siguiente teorema:

Teorema 2.3.2. *Sea $N(t)$ un proceso no homogéneo de Panjer con intensidades de transición $\lambda_n(t)$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

I) *$N(t)$ es un proceso Pólya o un proceso Poisson.*

II) *$\lambda_n(t)$ es, para cada t fijo, lineal en n.*

III) *$\lambda_n(t)$ es el producto de dos factores: uno que depende únicamente de n y el otro solo depende de t.*

IV) *Existe una transformación $A(t) = \frac{1}{\kappa}(e^{at} - 1)$ con $a \in \mathbb{R}^+$ tal que el proceso $N^A(t)$ definido como $N^A(t) = N(A(t))$ es un proceso de nacimiento homogéneo.*

Demostración.

I) Ver deducción de (2-37).

II) Por la definición de $\lambda_n(t)$ dada en (2-23) se tiene que para cada t fijo:

$$\lambda_n(t) = \frac{\kappa(\rho + n)}{1+\kappa t} = \frac{\kappa\rho}{1+\kappa t} + \frac{\kappa}{1+\kappa t} n \tag{2-38}$$

lo cual claramente es una función lineal de n.

Si se denotan $a(t) = \dfrac{\kappa\rho}{1+\kappa t}$ y $b(t) = \dfrac{\kappa}{1+\kappa t}$ entonces, (2-38) se puede reescribir como

$$\lambda_n(t) = a(t) + b(t)n \tag{2-39}$$

Usando (2-23) es claro que:

$$a(t) = \lambda_0(t) \qquad \text{y} \qquad b(t) = -\frac{\lambda_0'(t)}{\lambda_0(t)} = -\frac{d}{dt}\ln[\lambda_0(t)]. \tag{2-40}$$

Entonces, $\lambda_n(t)$ se puede expresar en términos de $\lambda_0(t)$ como:

$$\lambda_n(t) = \lambda_0(t) - \frac{\lambda_0'(t)}{\lambda_0(t)}n. \tag{2-41}$$

III) De (2-23) se tiene que

$$\lambda_n(t) = \kappa(\rho+n)\cdot\frac{1}{1+\kappa t}. \tag{2-42}$$

Esto es, $\lambda_n(t)$ se puede expresar como el producto de dos factores: uno que solo depende de n y otro que solo depende de t.

IV) Para ver que el proceso $N^A(t)$ asociado a $N(t)$ es de nacimiento homogéneo hay que probar que las intensidades de transición $\lambda_n^A(t)$ no dependen del tiempo t y que $P_n^A(t)$ satisface (2-24).
De acuerdo a Grandell (1997) se tiene

$$\lambda_n^A(t) = \lambda_n(A(t))A'(t) \tag{2-43}$$

Para el caso del proceso no homogéneo de Panjer, si se sustituye la transformación $A(t)$ en la expresión (2-23) entonces (2-43) queda:

$$\lambda_n^A(t) = \frac{\rho+n}{\frac{1}{\kappa}+\left(\frac{1}{\kappa}(e^{at}-1)\right)}\cdot\frac{a}{\kappa}e^{at} = a(\rho+n) \tag{2-44}$$

Luego, $\lambda_n^A(t)$ no depende de t y se denota como λ_n^A.

Ahora bien, como $N^A(t) = N(A(t))$ entonces de (2-12) cuando $\alpha_t \neq 0$ se tiene:

$$\begin{aligned}
P_n^A(t) &= \binom{\rho+n-1}{n}\left(\frac{\kappa\left(\frac{1}{\kappa}(e^{at}-1)\right)}{1+\kappa\left(\frac{1}{\kappa}(e^{at}-1)\right)}\right)^n\left(\frac{1}{1+\kappa\left(\frac{1}{\kappa}(e^{at}-1)\right)}\right)^\rho \\
&= \binom{\rho+n-1}{n}\left(1-\frac{1}{e^{at}}\right)^n\left(\frac{1}{e^{at}}\right)^\rho = \binom{\rho+n-1}{n}(e^{at}-1)^n e^{-a(\rho+n)t} \\
&= \binom{\rho+n-1}{n}e^{-a\rho t}\left(1-e^{-at}\right)^n
\end{aligned} \tag{2-45}$$

Nótese que la expresión (2-45) es equivalente a (2-4); es decir, el proceso homogéneo asociado al proceso no homogéneo de Panjer es el proceso binomial negativo generalizado.

Como caso particular de (2-45), cuando $n = 0$:

$$P_0^A(t) = e^{-a\rho t} \tag{2-46}$$

cuya derivada es

$$\frac{d}{dt}P_0^A(t) = -(a\rho)e^{-a\rho t} \tag{2-47}$$

De (2-44) es claro que $\lambda_0^A = a\rho$ y así (2-47) es equivalente a:

$$\frac{d}{dt}P_0^A(t) = -\lambda_0^A P_0^A(t) \tag{2-48}$$

Por otro lado, tomando logaritmo natural en (2-45) se tiene:

$$\ln(P_n^A(t)) = \ln\left[\binom{\rho+n-1}{n}\right] + n\ln(1-e^{-at}) - a\rho t \tag{2-49}$$

Derivando (2-49) respecto a t se obtiene:

$$\frac{1}{P_n^A(t)}\frac{d}{dt}P_n^A(t) = \frac{n}{1-e^{-at}}(ae^{-at}) - a\rho$$

De donde,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}P_n^A(t) &= \left(\frac{na}{1-e^{-at}}e^{-at} - a\rho\right)P_n^A(t) \\
&= \frac{na}{1-e^{-at}}e^{-at}P_n^A(t) + anP_n^A(t) - a(\rho+n)P_n^A(t) \\
&= na\binom{\rho+n-1}{n}(1-e^{-at})^{n-1}e^{-a\rho t} - a(\rho+n)P_n^A(t) \\
&= a(\rho+n-1)\binom{\rho+n-2}{n-1}(1-e^{-at})^{n-1}e^{-a\rho t} - a(\rho+n)P_n^A(t)
\end{aligned} \tag{2-50}$$

Así, empleando (2-44) se tiene que la expresión (2-50) es equivalente a:

$$\frac{d}{dt}P_n^A(t) = \lambda_{n-1}^A P_{n-1}^A(t) - \lambda_n^A P_n^A(t) \qquad n \geq 1 \tag{2-51}$$

Luego, de (2-48) y (2-51) se tiene que el proceso estocástico $P_n^A(t)$ asociado al proceso no homogéneo de Panjer satisface las ecuaciones diferenciales dadas en (2-24) con intensidades de transición independientes del tiempo λ_n^A, es decir, es un proceso de nacimiento puro homogéneo.

□

2.4. Propiedades adicionales

En esta sección se establecen otras propiedades del proceso no homogéneo de Panjer.

2.4.1. Función generadora de probabilidades

Si ρ y κ satisfacen (2-8) entonces la función generadora de probabilidades definida en (2-6) es:

$$G_N(z;t) = E\left[z^{N(t)}\right] = \begin{cases} (1+\kappa t(1-z))^{-\rho} & \text{si } \alpha_t \neq 0 \\ \exp\{-\beta_t(1-z)\} & \text{si } \alpha_t = 0 \end{cases} \tag{2-52}$$

Empleando la definición de $P_0(t)$ dada en (2-9) se obtiene que (2-52) se puede escribir como:

$$G_N(z;t) = E\left[z^{N(t)}\right] = P_0(t(1-z)) \tag{2-53}$$

2.4.2. Expresiones para $\mathbf{P_n(t)}$ en términos de $\boldsymbol{\lambda_n(t)}$

A continuación se enuncian y demuestran una serie de resultados que permiten caracterizar el proceso no homogéneo de Panjer en términos de sus intensidades de transición.

Proposición 2.4.1. *Si $N(t)$ es un proceso no homogéneo de Panjer y sus intensidades de transición son $\lambda_n(t)$ dadas por (2-23) entonces*

$$\frac{P_n(t)}{P_{n-1}(t)} = \frac{t}{n}\lambda_{n-1}(t) \qquad n \geq 1 \tag{2-54}$$

Demostración.

De la última igualdad establecida en (2-14) se obtiene:

$$\frac{P_n(t)}{P_{n-1}(t)} = \frac{\kappa(\rho+(n-1))}{1+\kappa t}\frac{t}{n}$$

Reescribiendo la anterior expresión en términos de la definición de $\lambda_n(t)$ dada en (2-23) se llega a:

$$\frac{P_n(t)}{P_{n-1}(t)} = \frac{t}{n}\lambda_{n-1}(t)$$

lo cual es lo que se deseaba probar. □

Proposición 2.4.2. *Sea $N(t)$ un proceso no homogéneo de Panjer con intensidades de transición $\lambda_n(t)$, entonces*

$$P_n(t) = \binom{\rho+n-1}{n}(\kappa t)^n \exp\left\{-\int_0^t \lambda_n(v)dv\right\} \qquad para \qquad n \geq 0 \tag{2-55}$$

Demostración.

Para $n = 0$, de la primera ecuación en (2-24) se tiene:

$$P_0'(t) = -\lambda_0(t)P_0(t)$$

de donde,

$$\ln(P_0(t)) = \int_0^t -\lambda_0(v)dv \tag{2-56}$$

y así,

$$P_0(t) = \exp\left\{-\int_0^t \lambda_0(v)dv\right\}. \tag{2-57}$$

Nótese que (2-57) coincide con la expresión dada en (2-10).

Para $n > 0$, reescribiendo (2-12) cuando $\alpha_t \neq 0$:

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \binom{\rho+n-1}{n}\left(\frac{\kappa t}{1+\kappa t}\right)^n\left(\frac{1}{1+\kappa t}\right)^\rho \\ &= \binom{\rho+n-1}{n}(\kappa t)^n \exp\left\{-(\rho+n)\ln(1+\kappa t)\right\} \\ &= \binom{\rho+n-1}{n}(\kappa t)^n \exp\left\{-\int_0^t \lambda_n(v)dv\right\} \end{aligned} \tag{2-58}$$

Esto es, (2-55) se cumple para todo $n \geq 0$ y la prueba está completa. □

Observación 2.4.1. *Si en la expresión (2-57) se hace la sustitución $\rho = \xi_t/\kappa_t$ mencionada en (2-7) se obtiene:*

$$P_0(t) = (1+\kappa_t)^{-\xi_t/\kappa_t} \tag{2-59}$$

y tomando el límite cuando κ tiende a 0, es decir, cuando $\alpha_t \to 0$, se obtiene:

$$\lim_{\kappa\to 0}(1+\kappa t)^{-\xi_t/\kappa_t} = e^{-\xi t} \tag{2-60}$$

y esta expresión coincide con $P_0(t)$ de un proceso Poisson de media ξt.

Corolario 2.4.1. *Sea $N(t)$ un proceso no homogéneo de Panjer. Si $P_0(t, t+h)$ denota la probabilidad de que no ocurran reclamaciones en el intervalo $(t, t+h)$, es decir,*
$P_0(t, t+h) = P(N(t+h) - N(t) = 0)$ entonces

$$P_0(t+h) = P_0(t) \cdot P_0(t, t+h) \quad \textit{para} \quad t, h \geq 0. \tag{2-61}$$

Demostración.

Usando (2-57) en la expresión (1-6), para $N(t)$ se tiene:

$$P_0(t,t+h) = \exp\left\{-\int_t^{t+h} \lambda_0(v)dv\right\} = \exp\left\{-\left(\int_0^{t+h} \lambda_0(v)dv - \int_0^t \lambda_0(v)dv\right)\right\}$$

$$= \frac{\exp\left\{-\int_0^{t+h} \lambda_0(v)dv\right\}}{\exp\left\{-\int_0^{t} \lambda_0(v)dv\right\}} = \frac{P_0(t+h)}{P_0(t)} \tag{2-62}$$

Por lo tanto,

$$P_0(t+h) = P_0(t) \cdot P_0(t,t+h) \quad \text{para} \quad t,h \geq 0.$$

□

La relación dada en (2-61) implica que, para 0 ocurrencias, el proceso no homogéneo de Panjer tiene incrementos independientes.

El siguiente lema establece una propiedad de las intensidades de transición que se empleará más adelante en la demostración del teorema.

Lema 2.4.1. *Sea $N(t)$ un proceso no homogéneo de Panjer con intensidades de transición $\lambda_n(t)$. Entonces se satisface*

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{\lambda_j'(t)}{\lambda_j(t)} = \lambda_0(t) - \lambda_{m+1}(t) \quad \textit{para} \quad m \geq 0. \tag{2-63}$$

Demostración.

En (2-27) se estableció una relación entre las intensidades del proceso $N(t)$. Dicha relación se puede reescribir como:

$$\frac{\lambda_j'(t)}{\lambda_j(t)} = \lambda_j(t) - \lambda_{j+1}(t). \tag{2-64}$$

Así, (2-63) resulta ser la m-ésima suma parcial de una serie telescópica y por tanto,

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{\lambda_j'(t)}{\lambda_j(t)} = \lambda_0(t) - \lambda_{m+1}(t) \quad \text{para todo} \quad m \geq 0.$$

□

Teorema 2.4.1. *Sea $N(t)$ un proceso no homogéneo de Panjer con intensidades de transición $\lambda_n(t)$ y $P_0(t) = P(N(t) = 0)$. Entonces, la n-ésima derivada de $P_0(t)$ está dada por:*

$$\frac{d^n}{dt^n}(P_0(t)) = P_0^{(n)}(t) = (-1)^n \left(\prod_{j=0}^{n-1} \lambda_j(t) \right) P_0(t) \qquad n \geq 1. \tag{2-65}$$

Demostración.

La prueba se hace por inducción matemática sobre n. Para $n = 1$ se tiene:

$$P_0'(t) = (-1)^1 \left(\prod_{j=0}^{1-1} \lambda_j(t) \right) P_0(t) = -\lambda_0(t) P_0(t) \tag{2-66}$$

lo cual coincide con la primera ecuación dada en (2-24).

Hipótesis de inducción. Se supone que (2-65) se cumple para $n = m$, es decir,

$$P_0^{(m)}(t) = (-1)^m \left(\prod_{j=0}^{m-1} \lambda_j(t) \right) P_0(t)$$

Se prueba que se cumple para $n = m + 1$, como

$$P_0^{(m+1)}(t) = \frac{d}{dt} P_0^{(m)}(t)$$

entonces, por la hipótesis de inducción se tiene que:

$$\begin{aligned}
P_0^{(m+1)}(t) &= \frac{d}{dt} \left[(-1)^m \left(\prod_{j=0}^{m-1} \lambda_j(t) \right) P_0(t) \right] \\
&= (-1)^m \frac{d}{dt} \left(\prod_{j=0}^{m-1} \lambda_j(t) \right) P_0(t) + (-1)^m \left(\prod_{j=0}^{m-1} \lambda_j(t) \right) P_0'(t) \\
&= (-1)^m \left(\prod_{j=0}^{m-1} \lambda_j(t) \right) \left(\sum_{j=0}^{m-1} \frac{\lambda_j'(t)}{\lambda_j(t)} \right) P_0(t) - (-1)^m \left(\prod_{j=0}^{m-1} \lambda_j(t) \right) \lambda_0(t) P_0(t) \\
&= (-1)^{m+1} \left(\prod_{j=0}^{m-1} \lambda_j(t) \right) P_0(t) \left[\lambda_0(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\lambda_j'(t)}{\lambda_j(t)} \right]
\end{aligned}$$

Usando la expresión (2-63), esta última igualdad es equivalente a:

$$P_0^{(m+1)}(t) = (-1)^{m+1} \left(\prod_{j=0}^{m} \lambda_j(t) \right) P_0(t) \tag{2-67}$$

Así, por principio de inducción se tiene que (2-65) se cumple para todo $n \geq 1$ y la prueba queda concluida. □

Corolario 2.4.2. *Si $N(t)$ es un proceso no homogéneo de Panjer con intensidades de transición $\lambda_n(t)$ entonces*

$$P_n(t) = \frac{1}{n!}\left(\prod_{j=0}^{n-1} t\lambda_j(t)\right) P_0(t) \tag{2-68}$$

Demostración.

Reemplazando (2-65) en la expresión para $P_n(t)$ dada en (2-13) se obtiene el resultado. □

Corolario 2.4.3. *Sea $N(t)$ un proceso no homogéneo de Panjer con intensidades de transición $\lambda_n(t)$. Entonces, para todo $n \geq 0$, $P_n(t)$ satisface*

$$P_n(t) = \binom{\rho + n - 1}{n} \left(\frac{t}{\rho}\, \lambda_0(t)\right)^n P_0(t). \tag{2-69}$$

Demostración.

En (2-68) se tiene:

$$P_n(t) = \frac{t^n}{n!}\left(\prod_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda_j(t)}{\lambda_0(t)}\lambda_0(t)\right) P_0(t) \tag{2-70}$$

Por la definición de $\lambda_n(t)$ dada en (2-23), reemplazando en (2-70) se obtiene:

$$\begin{aligned}
P_n(t) &= \frac{1}{n!}\left(\frac{t}{\rho}\right)^n \left(\prod_{j=0}^{n-1}(\rho + j)\right)(\lambda_0(t))^n P_0(t) \\
&= \frac{1}{n!}\frac{\Gamma(\rho + n)}{\Gamma(\rho)}\left(\frac{t}{\rho}\right)^n (\lambda_0(t))^n P_0(t) \\
&= \binom{\rho + n - 1}{n}\left(\frac{t\lambda_0(t)}{\rho}\right)^n P_0(t)
\end{aligned}$$

Completando así la prueba del corolario. □

2.4.3. Aproximación para $\mathbf{P_0(t, t + h)}$

A continuación se presenta una expresión para calcular la probabilidad de que no ocurran eventos en el intervalo $(t, t + h)$, es decir, $P_0(t, t + h)$ en términos de la intensidad $\lambda_0(t)$.

Es claro que la función $P_0(t)$ definida en (2-9) es continua para $t \geq 0$ y además es analítica pues $P_0^{(n)}(t)$ existe para todo $n \geq 1$. Así, es posible expresar $P_0(t + h)$ como una serie de Taylor de la forma:

$$P_0(t + h) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^m}{m!} P_0^{(m)}(t) \tag{2-71}$$

Reemplazando en (2-71) la expresión para la $m-$ésima derivada de $P_0(t)$ obtenida en (2-65) se llega a:

$$P_0(t+h) = P_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h^m}{m!} \left[(-1)^m \left(\prod_{j=0}^{m-1} \lambda_j(t) \right) P_0(t) \right] \tag{2-72}$$

Como $P_0(t+h)$ satisface (2-61), entonces (2-72) es equivalente a:

$$P_0(t) \cdot P_0(t, t+h) = P_0(t) \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{h^m}{m!} \left(\prod_{j=0}^{m-1} \lambda_j(t) \right) \right] \tag{2-73}$$

Sea $n = m-1$ entonces:

$$\begin{aligned} P_0(t, t+h) &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \left(\prod_{j=0}^{n} \lambda_j(t) \right) \\ &= 1 - h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-h)^n}{(n+1)!} \left(\prod_{j=0}^{n} \lambda_j(t) \right) \end{aligned} \tag{2-74}$$

Expandiendo los primeros términos de (2-74) se tiene:

$$P_0(t, t+h) = 1 - h\lambda_0(t) + \left(\frac{1}{2} h^2 \lambda_0(t)\lambda_1(t) - \frac{1}{3!} h^3 \lambda_0(t)\lambda_1(t)\lambda_2(t) + \cdots \right) \tag{2-75}$$

Si se divide la expresión en paréntesis entre h y se toma el límite cuando $h \to 0$, dicho límite tiende a cero y así es posible escribir:

$$P_0(t, t+h) = 1 - h\lambda_0(t) + o(h) \tag{2-76}$$

De donde, si h se toma pequeño entonces:

$$P_0(t, t+h) \approx 1 - h\lambda_0(t) \tag{2-77}$$

Como $P_0(t, t+h) = P(N(t+h) - N(t) = 0)$ entonces

$$P(N(t+h) - N(t) > 0) = 1 - P_0(t, t+h)$$

Dado que el proceso no homogéneo de Panjer $N(t)$ es un proceso de nacimiento puro entonces se tiene que en un intervalo de tiempo infinitesimal solo pueden existir dos situaciones: hay un nacimiento o no lo hay. Así,

$$\begin{aligned} P(N(t+h) - N(t) > 0) &= P(N(t+h) - N(t) = 1) \\ &= P_1(t, t+h) \end{aligned}$$

Luego, de (2-77) se tiene:

$$P_1(t, t+h) \approx h\lambda_0(t) \tag{2-78}$$

siempre que h sea infinitesimal.

3 Probabilidad de ruina en horizonte infinito

En este capítulo se presenta una alternativa para calcular la probabilidad de ruina en horizonte infinito cuando en el proceso de riesgo (1-13) se supone que el proceso de reclamaciones $N(t)$ se puede modelar mediante un proceso no homogéneo de Panjer tal como se definió en el capítulo anterior.

3.1. El modelo de riesgo con reclamaciones siguiendo un proceso no homogéneo de Panjer

Sea $S(t)$ como en (1-13) el proceso de reclamos pagados hasta el tiempo t donde $N(t)$ es un proceso no homogéneo de Panjer tal que $P_n(t)$ satisface (2-2) y sus parámetros κ y ρ cumplen (2-8). A continuación se muestran algunas propiedades que tiene $S(t)$ definido como antes:

3.1.1. Media y varianza

Si $N(t)$ es un proceso no homogéneo de Panjer entonces reemplazando las expresiones para la media y la varianza de $N(t)$ dadas en (2-15) y (2-16) en las respectivas para $S(t)$ dadas en (1-14) y (1-15) se obtiene:

$$E[S(t)] = \begin{cases} \rho\kappa t \cdot \mu_X & \text{si } \alpha_t \neq 0 \\ \beta_t \cdot \mu_X & \text{si } \alpha_t = 0 \end{cases} \tag{3-1}$$

y

$$\begin{aligned} Var[S(t)] &= E[N(t)]\left(\sigma_X^2 + (1+\kappa t)\mu_X^2\right) \\ &= \begin{cases} \rho\kappa t \;\; (\sigma_X^2 + (1+\kappa t)\mu_X^2) & \text{si } \alpha_t \neq 0 \\ \beta_t \;\; (\sigma_X^2 + \mu_X^2) & \text{si } \alpha_t = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{3-2}$$

3.1.2. Tasa de recolección de primas

El proceso de excedentes definido en (1-18) es:

$$U(t) = \omega + ct - S(t) \qquad 0 \leq t < \infty \tag{3-3}$$

donde ω es el capital inicial de la compañía y $c > 0$ es la tasa anual constante de recolección de primas tal que ct se define como en (1-17).

Por lo obtenido en (3-1) se tiene que si $N(t)$ es un proceso no homogéneo de Panjer entonces ct es:

$$ct = \begin{cases} (1+\theta)\rho\kappa t \cdot \mu_X & \text{si } \alpha_t \neq 0 \\ (1+\theta)\beta_t \cdot \mu_X & \text{si } \alpha_t = 0 \end{cases} \tag{3-4}$$

donde θ es el recargo relativo por seguridad.

Nota 3.1.1. *Como el proceso no homogéneo de Panjer $N(t)$ es de nacimiento puro entonces cuando se emplea para modelar el proceso de reclamaciones en (1-13), los nacimientos se interpretan como reclamaciones dentro del portafolio asegurado.*

3.2. Probabilidad de ruina eventual

En la sección 1.6.5 se presentó la aproximación de Crámer-Lundberg para calcular la probabilidad de ruina eventual:

$$\psi(\omega) \approx e^{-\tilde{R}\omega}$$

donde $\tilde{R}$ es el llamado **coeficiente de ajuste** y es la única raíz positiva de la ecuación de Lundberg dada en (1-27).

En la aproximación por series de potencia de la solución de (1-27) se obtuvo la expresión (1-30) cuya realización sobre el modelo de riesgo (1-13) es:

$$\tilde{R} \approx \frac{2\theta E[X]}{Var[X] + (E[X])^2 ID(t)} \tag{3-5}$$

siendo $ID(t)$ el índice de dispersión del proceso de reclamaciones definido en (1-12).

Nótese que si $ID(t) = 1$, es decir, si el proceso de reclamaciones es un proceso Poisson entonces la expresión 3-5 coincide con la dada en 1-35.

3.3. Probabilidad de ruina en horizonte infinito

Al considerar el comportamiento de $S(t)$ en un intervalo de tiempo pequeño $(\tau, \tau + \mathrm{d}\tau)$ hay cuatro posibles escenarios (Cramér (1930)):

1. No ocurren reclamaciones en $(\tau, \tau + \mathrm{d}\tau)$,
2. Un reclamo ocurre en $(\tau, \tau + \mathrm{d}\tau)$ pero la severidad de este no causa la ruina,
3. Un reclamo ocurre en $(\tau, \tau + \mathrm{d}\tau)$ y su severidad causa la ruina,
4. Ocurren dos o más reclamos en $(\tau, \tau + \mathrm{d}\tau)$.

De acuerdo con McFadden (1965), se tiene que para el proceso no homogéneo de Panjer $N(t)$ las intensidades de transición $\lambda_n(\tau)$ definidas en (2-23) representan la probabilidad de tener un reclamo en el intervalo $(\tau, \tau + \mathrm{d}\tau)$ dado que se han registrado n reclamaciones en el intervalo $(0, \tau]$.

Se estudia el caso en el cual la reclamación ocurrida en $(\tau, \tau + \mathrm{d}\tau)$ es tal que su severidad causa la ruina. Para calcular la probabilidad de ruina es preciso saber la probabilidad de que ese primer reclamo ocurra en el instante $\tau + \mathrm{d}\tau$. Dicha probabilidad es igual al producto de las probabilidades de los eventos independientes:

1. No ocurre ningún reclamo que cause la ruina en el intervalo $(0, \tau]$ y
2. Ocurre un reclamo que causa la ruina en el intervalo $(\tau, \tau + \mathrm{d}\tau)$

Así, la probabilidad de que el primer reclamo que causa la ruina ocurra en el instante $\tau + \mathrm{d}\tau$ cuando el proceso $N(t)$ es no homogéneo de Panjer es igual a:

$$P_0(\tau)\lambda_0(\tau) \tag{3-6}$$

3.3.1. Monto de reclamos aleatorio

Cuando la suma de todos los reclamos depende de la variable aleatoria X, se tiene que la probabilidad de no ruina está dada por (1-40) cuya expresión bajo el supuesto de reclamaciones modeladas mediante un proceso no homogéneo de Panjer es:

$$\phi(\omega) = \int_0^\infty \left(\int_0^{\omega + c\tau} \phi(\omega + c\tau - y) f_X(y) dy \right) \lambda_0(\tau) P_0(\tau) d\tau \qquad \omega \geq 0 \tag{3-7}$$

Por la primera ecuación de (2-24) se tiene que (3-7) es equivalente a:

$$\phi(\omega) = -\int_0^\infty \left(\int_0^{\omega + c\tau} \phi(\omega + c\tau - y) f_X(y) dy \right) dP_0(\tau) \qquad \omega \geq 0 \tag{3-8}$$

Dado que el evento de ruina no se puede tener antes del instante en el que ocurre el primer reclamo entonces, notando como f a la función de densidad de la variable aleatoria X, $\phi(\omega)$ se puede calcular como un valor esperado de la forma:

$$\begin{aligned}\phi(\omega) &= E[\phi(\omega + cT - Y)] \\ &= \phi(\omega + c\mathrm{d}\tau)P_0(\tau, \tau + \mathrm{d}\tau) \\ &\quad + P_1(\tau, \tau + \mathrm{d}\tau)\int_0^{\omega + c\mathrm{d}\tau} \phi(\omega + c\mathrm{d}\tau - y)f(y)dy + o(\mathrm{d}\tau)\end{aligned} \tag{3-9}$$

Usando las aproximaciones obtenidas en (2-77) y (2-78) con $h = \mathrm{d}\tau$, la expresión (3-9) resulta ser:

$$\begin{aligned}\phi(\omega) \approx{}& \phi(\omega + c\mathrm{d}\tau)\left(1 - \lambda_0(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \\ &+ \lambda_0(\tau)\mathrm{d}\tau\int_0^{\omega + c\mathrm{d}\tau} \phi(\omega + c\mathrm{d}\tau - y)f(y)dy + o(\mathrm{d}\tau)\end{aligned} \tag{3-10}$$

Empleando los dos primeros términos de la expansión en serie de Taylor de la función $\phi(\omega + c\mathrm{d}\tau)$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\phi(\omega) \approx{}& \left[\phi(\omega) + c\phi'(\omega)\mathrm{d}\tau\right]\left(1 - \lambda_0(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \\ &+ \lambda_0(\tau)\mathrm{d}\tau\int_0^{\omega + c\mathrm{d}\tau} \phi(\omega + c\mathrm{d}\tau - y)f(y)dy + o(\mathrm{d}\tau)\end{aligned} \tag{3-11}$$

de donde,

$$\begin{aligned}\phi(\omega)\lambda_0(\tau)\mathrm{d}\tau \approx{}& c\phi'(\omega)\mathrm{d}\tau\left(1 - \lambda_0(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \\ &+ \lambda_0(\tau)\mathrm{d}\tau\int_0^{\omega + c\mathrm{d}\tau} \phi(\omega + c\mathrm{d}\tau - y)f(y)dy + o(\mathrm{d}\tau)\end{aligned} \tag{3-12}$$

dividiendo entre $\mathrm{d}\tau$ y tomando el límite cuando $\mathrm{d}\tau$ tiende a cero se obtiene:

$$\phi(\omega)\lambda_0(\tau) \approx c\phi'(\omega) + \lambda_0(\tau)\int_0^{\omega} \phi(\omega - y)f(y)dy \tag{3-13}$$

Ahora bien, derivando respecto a ω y luego resolviendo la integral por partes se tiene:

$$\begin{aligned}\lambda_0(\tau)\phi'(\omega) &\approx c\phi''(\omega) + \lambda_0(\tau)\phi(0)f(w) + \lambda_0(\tau)\int_0^{\omega} \phi_\omega(\omega - y)f(y)dy \\ &\approx c\phi''(\omega) + \lambda_0(\tau)\phi(0)f(w) - \lambda_0(\tau)\int_0^{\omega} f(y)\phi_y(\omega - y) \\ &\approx c\phi''(\omega) + \lambda_0(\tau)\phi(0)f(w) - \lambda_0(\tau)\left(\phi(\omega - y)f(y)|_0^{\omega} + \lambda_0(\tau)\int_0^{\omega} \phi(\omega - y)df(y)\right.\end{aligned}$$

De donde,

$$\lambda_0(\tau)\phi'(\omega) \approx c\phi''(\omega) + \lambda_0(\tau)\phi(\omega)f(0) + \lambda_0(\tau)\int_0^{\omega} \phi(\omega - y)df(y) \tag{3-14}$$

La expresión (3-14) establece la relación que debe satisfacer la probabilidad de no ruina $\phi(\omega)$ en el modelo de riesgo cuyas reclamaciones siguen un proceso no homogéneo de Panjer.

Para hallar el valor de la probabilidad de ruina $\psi(\omega)$ basta calcular

$$\psi(\omega) = 1 - \phi(\omega) \tag{3-15}$$

donde $\phi(\omega)$ es la solución de la ecuación (3-14).

3.3.2. Caso particular

A continuación se presentan los cálculos de la probabilidad de ruina empleando la expresión (3-15) cuando la severidad de las reclamaciones sigue una distribución exponencial. Finalmente se verifica que la expresión presentada en la sección 1.7.3 es un caso particular de la aquí obtenida.

3.3.2.1. Severidad Exponencial

Sea $X \sim \exp(\gamma)$ la variable aleatoria que tiene la distribución común de las X_k en (1-13). Entonces

$$f(y) = f_X(y) = \gamma e^{-\gamma y} \tag{3-16}$$

de donde

$$\frac{df(y)}{dy} = -\gamma^2 e^{-\gamma y} dy \tag{3-17}$$

y así, reemplazando en (3-14) se obtiene:

$$\begin{aligned} \lambda_0(\tau)\phi'(\omega) &\approx c\phi''(\omega) + \gamma\lambda_0(\tau)\phi(\omega) + \lambda_0(\tau)\int_0^{\omega} \phi(\omega - y)\left(-\gamma^2 e^{-\gamma y}\right) dy \\ &\approx c\phi''(\omega) + \gamma\lambda_0(\tau)\phi(\omega) - \gamma\left(\lambda_0(\tau)\int_0^{\omega} \phi(\omega - y)\gamma e^{-\gamma y} dy\right) \end{aligned} \tag{3-18}$$

La integral entre paréntesis se puede despejar de (3-13) y al reemplazarse en (3-18) se tiene que:

$$\lambda_0(\tau)\phi'(\omega) \approx c\phi''(\omega) + c\gamma\phi'(\omega) \tag{3-19}$$

La relación dada en (3-19) es una ecuación diferencial de segundo orden, la cual se reescribe como:

$$\phi''(\omega) + \left(\gamma - \frac{\lambda_0(\tau)}{c}\right)\phi'(\omega) = 0 \tag{3-20}$$

con $\gamma - \frac{\lambda_0(\tau)}{c} > 0$, cuya solución general está dada por:

$$\phi(\omega) = \frac{A}{\gamma - \frac{\lambda_0(\tau)}{c}} + B \exp\left\{-\left(\gamma - \frac{\lambda_0(\tau)}{c}\right)\omega\right\} \tag{3-21}$$

con A y B constantes reales.

Puesto que:

1. $\phi(\infty) = 1$ y
2. si $\omega = 0$ en (3-13) entonces

$$\phi(0)\lambda_0(\tau) = c\phi'(0) \tag{3-22}$$

Así, $A = \gamma - \frac{\lambda_0(\tau)}{c}$ y reemplazando (3-21) en (3-22) se obtiene:

$$\phi(\omega) = 1 - \frac{\lambda_0(\tau)}{c\gamma} \exp\left\{-\left(\gamma - \frac{\lambda_0(\tau)}{c}\right)\omega\right\} \tag{3-23}$$

Ahora bien, reemplazando la expresión para $\lambda_0(\tau)$ dada en (2-23) y la de c dada en (3-4) donde $\mu_X = 1/\gamma$ en (3-23) se llega a:

$$\begin{aligned}\phi(\omega) &= 1 - \frac{\frac{\rho\kappa}{1+\kappa\tau}}{\gamma(1+\theta)\rho\kappa\frac{1}{\gamma}} \exp\left\{-\left(\gamma - \frac{\frac{\rho\kappa}{1+\kappa\tau}}{(1+\theta)\rho\kappa\frac{1}{\gamma}}\right)\omega\right\} \\ &= 1 - \frac{1}{(1+\theta)(1+\kappa\tau)} \exp\left\{-\frac{(1+\theta)(1+\kappa\tau)-1}{(1+\theta)(1+\kappa\tau)}\gamma\omega\right\}\end{aligned} \tag{3-24}$$

Luego, de (3-15) se tiene que la probabilidad de ruina en horizonte infinito en el modelo de riesgo cuando las reclamaciones siguen un proceso no homogéneo de Panjer y las severidades se distribuyen exponencial de media $1/\gamma$ se establece mediante:

$$\psi(\omega) = \frac{1}{(1+\theta)(1+\kappa\tau)} \exp\left\{-\frac{(1+\theta)(1+\kappa\tau)-1}{(1+\theta)(1+\kappa\tau)}\gamma\omega\right\} \tag{3-25}$$

donde θ es el recargo relativo por seguridad y κ es como en (2-5).

Por la expresión para el índice de dispersión del proceso no homogéneo de Panjer obtenida en (2-18), se tiene que (3-25) se puede reescribir como:

$$\psi(\omega) = \frac{1}{(1+\theta)ID(\tau)} \exp\left\{-\frac{(1+\theta)ID(\tau)-1}{(1+\theta)ID(\tau)}\gamma\omega\right\} \tag{3-26}$$

Nótese que si $ID(\tau) = 1$, es decir, si las reclamaciones siguen un proceso Poisson clásico entonces (3-26) queda:

$$\psi(\omega) = \frac{1}{1+\theta} \exp\left\{-\frac{\theta}{1+\theta}\gamma\omega\right\} \tag{3-27}$$

Lo cual coincide con la expresión (1-46) presentada en el capítulo 1 y confirma que el proceso Poisson es un caso particular del proceso no homogéneo de Panjer.

3.4. Simulaciones

En esta sección se presentan algunos cálculos de la cota de Cramér-Lundberg sobre el modelo de riesgo en el que la frecuencia de las reclamaciones sigue un proceso no homogéneo de Panjer y las severidades se distribuyen de forma exponencial.

En el primer capítulo se presentó una cota para la probabilidad de ruina eventual que depende del coeficiente de Lundberg, $\tilde{R}$. Con base en la expresión para $\tilde{R}$ obtenida en (3-5), aquí se calcula la cota de Cramér-Lundberg para distintos valores de ω, γ, θ e $ID(t)$.

En las tablas (**3-1**) y (**3-2**) se encuentran los valores de $\tilde{R}$ para distintas magnitudes de γ, θ e $ID(t)$.

Tabla 3-1: Coeficiente de ajuste $\tilde{R}$ para $\theta = 0{,}1$.

γ	1	1	1	0, 5	0, 5	0,5	2	2	2
$ID(t)$	0,95	1	1,2	0,95	1	1,2	0,95	1	1,2
$\tilde{R}$	0,1026	0,1	0,0909	0,0513	0,05	0,0454	0,2051	0,2	0,1818

Tabla 3-2: Coeficiente de ajuste $\tilde{R}$ para $\theta = 0{,}2$.

γ	1	1	1	0, 5	0, 5	0,5	2	2	2
$ID(t)$	0,95	1	1,2	0,95	1	1,2	0,95	1	1,2
$\tilde{R}$	0,2051	0,2	0,1818	0,1026	0,1	0,0909	0,4102	0,4	0,3636

Nótese que la estimación del coeficiente de ajuste sobre el modelo propuesto tiene un comportamiento inversamente proporcional al valor del índice de dispersión.

La cota de Cramér-Lundberg está dada por:

$$\psi(\omega) \leq e^{-\tilde{R}\omega} \tag{3-28}$$

cuyos valores sobre el modelo de riesgo siguiendo un proceso Panjer con severidades distribuidas exponencialmente se presentan en las tablas (**3-3**), (**3-4**) y (**3-5**).

Tabla 3-3: Cota de Cramér-Lundberg para $\theta = 0{,}1$ y $\gamma = 1$

$e^{-\tilde{R}\omega}$					
$ID(t)$	0,95	1	1,1	1,2	1,5
ω \ $\tilde{R}$	0,1026	0,1	0,0952	0,0909	0,08
10	0,3586	0,3679	0,3858	0,4029	0,4493
20	0,1286	0,1353	0,1489	0,1623	0,2019
30	0,0461	0,0498	0,0574	0,0654	0,0907
40	0,0165	0,0183	0,0222	0,0263	0,0408
50	0,0059	0,0067	0,0085	0,0106	0,0183
60	0,0021	0,0025	0,0033	0,0043	0,0082
70	0,0008	0,0009	0,0013	0,0017	0,0037
80	0,0003	0,0003	0,0005	0,0007	0,0017
90	$9{,}798 \times 10^{-5}$	0,0001	0,0002	0,0003	0,0007
100	$3{,}513 \times 10^{-5}$	$4{,}54 \times 10^{-5}$	$7{,}31 \times 10^{-5}$	0,0001	0,0003

Tabla 3-4: Cota de Cramér-Lundberg para $\theta = 0{,}1$ y $\gamma = 2$

$e^{-\tilde{R}\omega}$					
$ID(t)$	0,95	1	1,1	1,2	1,5
ω \ $\tilde{R}$	0,2051	0,2	0,1905	0,1818	0,16
10	0,1286	0,1353	0,1488	0,1623	0,2019
20	0,0165	0,0183	0,0222	0,0263	0,0407
30	0,0021	0,0025	0,0033	0,0043	0,0082
40	0,0003	0,0003	0,0005	0,0007	0,0017
50	$3{,}513 \times 10^{-5}$	$4{,}539 \times 10^{-5}$	$7{,}309 \times 10^{-5}$	0,0001	0,0003
60	$4{,}517 \times 10^{-6}$	$6{,}144 \times 10^{-6}$	$1{,}088 \times 10^{-5}$	$1{,}829 \times 10^{-5}$	$6{,}773 \times 10^{-5}$
70	$5{,}807 \times 10^{-7}$	$8{,}315 \times 10^{-7}$	$1{,}619 \times 10^{-6}$	$2{,}969 \times 10^{-6}$	$1{,}367 \times 10^{-5}$
80	$7{,}467 \times 10^{-8}$	$1{,}125 \times 10^{-7}$	$2{,}411 \times 10^{-7}$	$4{,}819 \times 10^{-7}$	$2{,}761 \times 10^{-6}$
90	$9{,}599 \times 10^{-9}$	$1{,}523 \times 10^{-8}$	$3{,}589 \times 10^{-8}$	$7{,}823 \times 10^{-8}$	$5{,}574 \times 10^{-7}$
100	$1{,}234 \times 10^{-9}$	$2{,}061 \times 10^{-9}$	$5{,}342 \times 10^{-9}$	$1{,}269 \times 10^{-8}$	$1{,}125 \times 10^{-7}$

Tabla 3-5: Cota de Cramér-Lundberg para $\theta = 0{,}1$ y $\gamma = 0{,}5$

$e^{-\tilde{R}\omega}$					
$ID(t)$	0,95	1	1,1	1,2	1,5
ω \ $\tilde{R}$	0,0513	0,05	0,0476	0,0454	0,04
10	0,5988	0,6065	0,6211	0,6347	0,6703
20	0,3586	0,3679	0,3858	0,4029	0,4493
30	0,2147	0,2231	0,2397	0,2557	0,3012
40	0,1286	0,1353	0,1489	0,1623	0,2019
50	0,0770	0,0821	0,0925	0,1030	0,1353
60	0,0461	0,0498	0,0574	0,0654	0,0907
70	0,0276	0,0302	0,0357	0,0415	0,0608
80	0,0165	0,0183	0,0222	0,0263	0,0408
90	0,0099	0,0111	0,0138	0,0167	0,0273
100	0,0059	0,0067	0,0085	0,0106	0,0183

Nótese que para valores fijos de θ y ω, los procesos de reclamación sobredispersos ($ID(t) > 1$) tienen cotas más grandes en comparación con los subdispersos, es decir, si las reclamaciones tienen variabilidad superior a su media, la probabilidad de ruina aumenta. Al comparar las columnas de $ID(t) = 1$ con las de los casos sobredispersos, se evidencia el hecho de que el modelo clásico tiende a subestimar la probabilidad de ruina.

También es válido observar que a mayor valor de γ, en este caso menor media de severidad, menor es la cota superior para la probabilidad de ruina pues los siniestros no son en promedio tan costosos de cubrir.

4 Conclusiones

El proceso no homogéneo de Panjer al ser un proceso estocástico que cumple gran cantidad de propiedades, se convierte en uno de los procesos de conteo más versátiles y completos que se encuentran en la literatura. Además, al ser una generalización de los procesos de conteo clásicos es posible estudiar todas las aplicaciones que estos han tenido y expresarlas en términos del proceso de Panjer.

El índice de dispersión es una herramienta metodológica que permite inferir el tipo de proceso estocástico discreto que mejor describe el comportamiento de un conjunto real de observaciones. En este trabajo se mostró además que el índice de dispersión caracteriza de forma única al proceso no homogéneo de Panjer y facilita la obtención de los procesos de conteo clásicos.

Las intensidades de transición que representan al proceso no homogéneo de Panjer como un proceso de nacimiento puro, no solo describen la probabilidad de que el proceso se encuentre en determinado estado sino que además permiten caracterizar las probabilidades marginales del proceso y sus respectivas derivadas.

La teoría desarrollada en esta investigación constituye una base cimentada para realizar trabajos futuros sobre la probabilidad de ruina modificando algunos supuestos iniciales. Por ejemplo, si en el modelo de riesgo no se asume que la severidad y las reclamaciones se comportan de forma independiente sino que existe una correlación entre ellas o cuando la distribución de la severidad es distinta a la exponencial.

Bibliografía

A. G. Arbous and J. E. Kerrich. Accident statistics and the concept of accident-proneness. *Biometrics*, 7(4):340–432, 1951.

G. Arfwedson. Some problems in the collective theory of risk. *Scandinavian Actuarial Journal*, pages 1–38, 1950.

G. Arfwedson. Research in collective risk theory. *Scandinavian Actuarial Journal*, pages 191–223, 1954.

A. T. Bharucha-Reid. *Elements of the theory of Markov processes and their applications*. McGraw-Hill series in probability and statistics. McGraw-Hill, 1960.

L. Blanco, V. Arunachalam, and S. Dharmaraja. *Introduction to Probability and Stochastic Processes with Applications*. Wiley, 2014.

N. L. Bowers, H. U. Gerber, J. C. Hickman, D. A. Jones, and C. J. Nesbitt. *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries, 1997.

P. Čižek, W. Härdle, and R. Weron. *Statistical Tools for Finance and Insurance*. Springer, 2005.

D. R. Cox and P. A. W. Lewis. *The Statistical Analysis of Series of Events*. Chapman and Hall, 1966.

H. Cramér. *On the mathematical theory of risk*. Centraltryckeriet, 1930.

M. Fisz. *Probability Theory and Mathematical Statistics*. A Wiley publication in mathematical statistics. Krieger Publishing Company, 1980.

J. Grandell. *Mixed Poisson Processes*. Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability. Taylor & Francis, 1997.

J. Grandell and C. O. Segerdahl. A comparison of some approximations of ruin probabilities. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1971(3-4):143–158, 1971.

P. W. Iseger, R. Dekker, and M. A. J. Smith. Computing compound distributions faster! *Insurance: Mathematics and Economics*, 20:23–34, 1997.

J. A. Jiménez M. Una relación entre la distribución de hofmann y distribución de panjer. *Revista Integración*, 31:59–67, 2013.

J. A. Jiménez M. and V. Arunachalam. Evaluating operational risk by an inhomogeneous counting process based on panjer recursion. *Journal of Operational Risk*, 11:1–21, 2016.

J. A. Jiménez M. and L. G. Moreno. *Introducción a la teoría estadística del riesgo. Notas de clase*. Facultad de Ciencias. Universidad Nacional de Colombia, 2017.

F. Lundberg. *I. Approximerad framställning af sannolikhetsfunktionen: II. Återförsäkring af kollektivrisker. Akademisk afhandling*. Almqvist &Wiksells, 1903.

O. F. Lundberg. *On Random Processes and Their Application to Sickness and Accident Statistics*. Almqvist & Wiksells, 2 edition, 1964.

J. A. McFadden. The mixed poisson process. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A (1961-2002)*, 27(1):83–92, 1965.

H. H. Panjer. Recursive evaluation of a family of compound distributions. *ASTIN Bulletin*, 12(1):22–26, 1981.

H. H. Panjer. *Operational Risk: Modeling Analytics*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 2006.

L. Rincón. *Introducción a los procesos estocásticos*. Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2012.

S. M. Ross. *Stochastic processes*. Wiley series in probability and statistics: Probability and statistics. Wiley, 1996.

H. L. Seal. *Stochastic theory of a risk business*. Wiley Series in Applied Probability and Statistics Series. Wiley, 1969.