UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MEDELLÍN

TESIS DE MAESTRÍA

Conexiones invariantes en espacios homogéneos de baja dimensión

Autor:
Luis Fernando JIMÉNEZ BUITRAGO

Directores:
Dr. David BLÁZQUEZ SANZ
Dr. Carlos A. MARÍN ARANGO

Tesis sometida para completar los requisitos para la obtención del grado de Magister en Ciencias - Matemática

en la

Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas

2 de Febrero de 2018

Agradecimientos

Quiero agradecer primero a mis tutores de tesis, los profesores Carlos Alberto Marín Arango y David Blázquez Sanz, porque más que mis tutores fueron mis amigos durante todo este periodo de aprendizaje. Gracias a su dedicación y disponibilidad a la hora de enseñar, pude culminar este proyecto que me abre las puertas a nuevos conocimientos.

Quiero agradecer también a mi abuela María Nelly Buitrago, a mis madres Marina, Magda y María Helena, a mis tíos Albeiro, Marino, Janeth, Marleny, Sandra, a mis hermanos Franck, Luisa Fernanda, Alex y Carlos, y a todos mis primos, con su apoyo tanto moral como material me han dado motivación para poder culminar esta etapa de mi vida.

A mis amigos y compañeros de la Universidad, Cesar Leandro Higuita, Carlos León, Julian Uribe, Alexander Muñoz, Jorge Moreno, Ricardo Arteaga, Juan Sebastian Jaramillo, Jordan Andrés Vázquez, Liliana Barrera, Miguel Antonio Cardona, Liliana Parra, Jeferson Ortiz, Juan Felipe Ruiz, Juan Pablo Restrepo y Patricia Higuita, entre otros, los cuales me brindaron un apoyo académico y también moral durante todos estos años de estudio.

Finalmente agradezco a los profesores que tuve durante todo mi periodo académico, ya que con los conocimientos brindados pude cumplir con esta labor académica, entre éstos quiero mencionar los siguientes que siempre me brindaron buenos consejos, Diego Alejandro Mejía, José Manuel Gómez, Carlos Vélez, Jorge Cossio, Camilo Arias Abad y José Manuel Jiménez.

Índice

Agradecimientos **iii**

Introducción **vii**

1 Fibrados vectoriales y conexiones tangentes **1**
1.1 Fibrados vectoriales . . . 1
1.2 Construcciones funtoriales . . . 6
1.3 El fibrado tangente . . . 8
1.4 Conexiones lineales o derivadas covariantes . . . 11
1.4.1 Curvatura . . . 13
1.4.2 Torsión . . . 13

2 Espacios homogéneos e infinitesimalmente homogéneos **15**
2.1 Algunos preliminares . . . 15
2.2 Grupos y Álgebras de Lie . . . 16
2.2.1 Grupos de Lie . . . 17
2.2.2 Álgebras de Lie . . . 18
2.3 Acciones de grupos . . . 21
2.4 Objetos invariantes por una acción . . . 26
2.5 Acciones de álgebras de Lie . . . 27
2.5.1 Acción infinitesimal inducida por la acción de un grupo . . . 28

3 Conexiones invariantes de los espacios infinitesimalmente homogéneos **31**
3.1 Acción de los difeomorfismos sobre las conexiones tangentes . . . 31
3.1.1 Imagen directa de una conexión tangente por un difeomorfismo . . 31
3.1.2 Derivada de Lie de una conexión tangente en la dirección de un campo . . . 32
3.2 Espacios infinitesimalmente homogéneos de dimension 2 . . . 33
3.3 Conexiones invariantes de los espacios infinitesimalmente homogéneos . 35
3.3.1 Resumen de resultados . . . 50

Introducción

Entendemos por espacio homogéneo una variedad dotada de una acción transitiva de un grupo de Lie. Como ejemplos de espacios homogéneos tenemos los espacios euclídeos, afines, proyectivos e hiperbólicos. Entender los espacios homogéneos nos permite entender mejor la geometría. Un espacio infinitesimalmente homogéneo es una variedad (o un gérmen de ella) dotada de una acción infinitesimal transitiva de un álgebra de Lie de dimensión finita. El tercer teorema de Lie [6] nos garantiza que todo espacio infinitesimalmente homogéneos es localmente isomorfo a un espacio homogéneo, de donde estudiar estructuras infinitesimalmente homogéneas es equivalente a estudiar estructuras homogéneas.

Las acciones infinitesimales de álgebras de Lie de dimensión finita en gérmenes de variedades de dimensión 2 y 3 compleja fueron clasificados en el siglo XIX por S. Lie en [6]. Posteriormente, Olver *et al.* [2] presentan la clasificación de acciones de álgebras de Lie de dimensión finita en gérmenes de variedades reales de dimensión 2. Atendiendo la anterior clasificación, es natural preguntarse cuál de estas variedades (gérmenes) infinitesimalmente homogéneas admiten una conexión invariante por la acción infinitesimal del álgebra?. Dar cuenta de este interrogante ha motivado la realización de este trabajo. En él, calculamos para cada una de estas acciones, el espacio (eventualmente vacío) de conexiones invariantes. Para este fin hemos elaborado tres capítulos.

En el primer capítulo se desarrollan los preliminares necesarios para el planteamiento del problema, más precisamente, se presenta la teoría básica de fibrados vectoriales, las conexiones lineales con énfasis en las conexiones tangentes.

El segundo capítulo está dedicado al estudio de las acciones de grupos y álgebras de Lie. Aquí aparecen las nociones de espacio homogéneo e infinitesimalmente homogéneo.

El capítulo 3 contiene los resultados de la investigación. Éste es dedicado al estudio de las acciones infinitesimales sobre las conexiones tangentes. Para tal fin, se introduce la noción de derivada de Lie de una conexión, concepto que puede interpretarse como un caso particular de una teoría mucho más general de la derivada de Lie, desarrollada por Kolár, Slovák y Michor en [4]. Una conexión es invariante por la acción infinitesimal de un álgebra, si y solo si la derivada de Lie de la conexión en la dirección de los campos generadores del álgebra es nula. Así apoyados en la clasificación dada en [2], y en este resultado, podemos encontrar el espacio afín de conexiones invariantes para cada acción. Nuestros resultados exhiben casos en los cuales estos espacios son: vacíos o de dimensión real finita 0,1 , 3, 4 o 8; o módulos libres de rango 1, 3 o 4 sobre el anillo de funciones en una variable.

Capítulo 1

Fibrados vectoriales y conexiones tangentes

1.1 Fibrados vectoriales

Intuitivamente, un fibrado vectorial E de rango k sobre una variedad M es obtenido asociando a cada punto $p \in M$ un espacio vectorial k-dimensional E_p de tal forma que, en un sentido a ser precisado, E_p depende de forma diferenciable de p. El ejemplo fundamental de fibrado vectorial sobre una variedad es su fibrado tangente, el cual como veremos se obtiene a partir del hecho que en cada punto de la variedad corresponde un espacio vectorial tangente a ésta en el punto, y cuya dimensión es precisamente la dimensión de la variedad. Sin más preámbulos, pasemos a la descripción de este concepto.

Sean E y M conjuntos, sea E_0 un espacio vectorial (real o complejo) finito-dimensional, y $\pi : E \to M$ una función sobreyectiva; para cada $p \in M$ denotamos por E_p el subconjunto $\pi^{-1}(p)$ de E y le llamaremos la *fibra* de E sobre p. Veremos cómo es posible que para cada $p \in M$, la fibra E_p admita una estructura de espacio vectorial de modo que E_0 y E_p tengan la misma dimensión; de modo que estas fibras así como su estructura de espacio vectorial dependan diferenciablemente en p. La idea es que para cada subconjunto U abierto de M (suficientemente pequeño), el subconjunto $\pi^{-1}(U)$ de E sobre U se puede representar como el producto cartesiano $U \times E_0$, de modo que la transición de una tal representación para otra debe ser diferenciable. La formulación más precisa es análoga al procedimiento que se adopta en la definición de variedad suave, y es descrita de forma sucinta a seguir.

Por *una carta de fibrado vectorial*, o simplemente *una carta de fibrado*, de E sobre M (relativa a π) entendemos una cuádrupla, $C = (U, \phi, \varphi, \tilde{U})$ consistente de

1. un subconjunto U de M;

2. un subconjunto abierto $\tilde{U}$ de $\mathbb{R}^n$;

3. una biyección
$$\varphi : U \to \tilde{U} : p \longmapsto \varphi(p) = \big(x^1(p), \ldots, x^n(p)\big)\,,$$

4. una biyección
$$\phi : \pi^{-1}(U) \to \tilde{U} \times E_0 : e \longmapsto \phi(e) = (\varphi(\,\pi(e)\,), \phi_2(e))\,,$$

en que $\phi_2 = \mathrm{pr}_2 \circ \phi$ y pr_2 denota la proyección canónica del producto cartesiano $\tilde{U} \times E_0$ sobre el factor E_0.

Notemos que una carta de fibrado de E sobre M puede ser considerada como una carta $(U, \varphi, \tilde{U})$ de M junto con una carta $(\pi^{-1}(U), \phi, \tilde{U} \times E_0)$ de E, de modo que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & \tilde{U} \times E_0 \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ U \arrow[r, "\varphi"'] & \tilde{U}. \end{tikzcd}$$

Atendiendo lo anterior, dos cartas $C_\alpha = (U_\alpha, \phi_\alpha, \varphi_\alpha, \tilde{U}_\alpha)$ y $C_\beta = (U_\beta, \phi_\beta, \varphi_\beta, \tilde{U}_\beta)$ de E sobre M se dicen *compatibles* si $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ o, cuando $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, los conjuntos $\varphi_\alpha\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$ y $\varphi_\beta\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$ son abiertos en $\mathbb{R}^n$; las aplicaciones

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha\left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \to \varphi_\beta\left(U_\alpha \cap U_\beta\right), \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta\left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \to \varphi_\alpha\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$$

son diferenciables; y las aplicaciones

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha\left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \times E_0 \to \varphi_\beta\left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \times E_0$$

y

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \varphi_\beta\left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \times E_0 \to \varphi_\alpha\left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \times E_0$$

pueden ser escritas en la forma

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(z, e) = \left(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(z), \tau_{\beta\,\alpha}(z) \cdot e\right)$$

y

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(z, e) = \Big(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(z), \tau_{\alpha\,\beta}(z) \cdot e\Big)$$

donde

$$\tau_{\beta\,\alpha} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \mathrm{GL}(E_0),\ \tau_{\alpha\,\beta} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \mathrm{GL}(E_0)$$

son aplicaciones diferenciables. Donde $\mathrm{GL}(E_0)$ denota el *grupo general lineal* de E_0, esto es, el grupo de todos los automorfismos lineales de E_0. Las aplicaciones $\tau_{\beta\,\alpha}$ y $\tau_{\alpha\,\beta}$ son llamadas las *funciones de transición* entre las dos cartas $C_\alpha = (U_\alpha, \phi_\alpha, \varphi_\alpha, \tilde{U}_\alpha)$ y $C_\beta = (U_\beta, \phi_\beta, \varphi_\beta, \tilde{U}_\beta)$.

Un conjunto de cartas de fibrado de E sobre M, $\mathcal{A} = \{C_\alpha : \alpha \in A\}$ se dice es un *atlas de fibrado vectorial* de E sobre M si los dominios U_α cubre a M, i.e., $M = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ y cualesquier dos cartas en $\mathcal{A}$ son compatibles.

Dos atlas de fibrado de E sobre M, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ se dicen *equivalentes* si su unión $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ también es un atlas de fibrado de E sobre M; esto es, si todas las cartas de fibrado en $\mathcal{A}$ son compatibles con todas las cartas de fibrado en $\mathcal{A}'$. Es bien sabido que esta relación es de equivalencia en el conjunto de los atlas de fibrado de E sobre M. La clase de equivalencia $[\mathcal{A}]$, del atlas de fibrado $\mathcal{A}$ por esta relación es llamada *estructura de fibrado vectorial, de E sobre M generada por $\mathcal{A}$.*

Dado un atlas de fibrado $\mathcal{A}$ para E sobre M, el atlas de fibrado constituido todas las cartas de fibrado de E sobre M que son compatibles con todas las cartas en $\mathcal{A}$ se llama *atlas maximal de fibrado vectorial* generado por $\mathcal{A}$. Este atlas contiene al atlas $\mathcal{A}$ y es maximal en este sentido; y representa la estructura $[\mathcal{A}]$ de E sobre M generada por $\mathcal{A}$.

Definición 1.1.1. Un *fibrado vectorial* (real o complejo) de rango r es una cuádrupla (E, M, π, E_0) en que E y M son conjuntos, $\pi : E \to M$ es una aplicación sobreyectiva y E_0 es un espacio vectorial r-dimensional (real o complejo), unido de una estructura de fibrado vectorial. Las cartas de fibrado del correspondiente atlas maximal se dicen *cartas admisibles de E sobre M* y cada atlas de fibrado contenido en dicho atlas maximal se dice un *atlas admisible de E sobre M*.

Dado un fibrado vectorial (E, M, π, E_0), al conjunto E se le conoce como *el espacio total*, a M como *el espacio base*, a π como *la proyección* y al espacio E_0 como *la fibra típica*.

Para cualquier fibrado vectorial (E, M, π, E_0) de rango r, *el espacio base M, así como el espacio total E son variedades suaves, la proyección π es una submersión sobreyectiva y toda fibra E_p posee una estructura de espacio vectorial r-dimensional, isomorfo a E_0.* A saber, observe que una atlas de fibrado $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha, \varphi_\alpha, \tilde{U}_\alpha) : \alpha \in A\}$ de E sobre M induce un atlas de cartas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha, \tilde{U}_\alpha)\}$ en M, así como un atlas de cartas $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \phi_\alpha, \tilde{U}_\alpha \times E_0)\}$ en E. También en estas cartas, la projección π es representada por la proyección $\mathrm{pr}_1 : \tilde{U}_\alpha \times E_0 \to \tilde{U}_\alpha$ que es una submersión sobreyectiva. Aquí $\tilde{U}_\alpha \times E_0$ es pensado con la estructura diferenciable producto de la estructura diferenciable usual en $\tilde{U}_\alpha$ como abierto de un espacio euclidiano y la estructura diferenciable de E_0 obtenida fijando cualesquier base. Además, para cada punto $p \in M$, la estructura de espacio vectorial de E_0 se puede transferir a la fibra E_p declarando que la biyección

$$\mathrm{pr}_2 \circ \phi_\alpha |_{E_p}: E_p \to \{p\} \times E_0$$

sea un isomorfismo lineal, en que $(U_\alpha, \phi_\alpha, \varphi_\alpha, \tilde{U}_\alpha)$ es una carta de fibrado de E sobre M con $p \in U_\alpha$. Esta estructura no depende de la carta de fibrado escogida; ya que las funciones de transición entre éstas son diferenciables y toman valores en el grupo general lineal de E_0.

Ejemplo 1.1.2. El ejemplo más sencillo de un fibrado vectorial sobre una variedad M es el *fibrado vectorial trivial;* cuyo espacio total $E = M \times E_0$ es dado por el producto cartesiano de M con un espacio vectorial finito-dimensional E_0; y la proyección $\pi = \mathrm{pr}_1 : M \times E_0 \to M$ obtenida por la proyección canónica del producto cartesiano $M \times E_0$ sobre el primer factor.

Ejemplo 1.1.3. Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial con fibra típica E_0. Si N es un conjunto abierto en M, haciendo $E |_N := \pi^{-1}(N)$ y $\pi_N := \pi |_{E|_N}: E |_N \to N$ se obtiene un fibrado vectorial llamado *la restricción de E en U*. En este caso, las cartas admisibles son obtenidas de las cartas admisibles $(U_\alpha, \phi_\alpha, \varphi_\alpha, \tilde{U}_\alpha)$ de E tales que $U_\alpha \cap N \neq \emptyset$ por restricción $U_N = U_\alpha \cap N$, $\phi_N = \phi_\alpha |_{\pi^{-1}(U_N)}$ y $\varphi_N = \varphi_\alpha |_{U_\alpha}$.

Definición 1.1.4. Sean $\pi_E : E \to M$ y $\pi_F : F \to N$ dos fibrados vectoriales con fibras típicas E_0 y F_0 respectivamente. Un *homomorfismo (o morfismo) de fibrados vectoriales* de E

en F vienen dado por un par $(f, \bar{f})$ constituido de aplicaciones diferenciables $f : E \to F$ y $\bar{f} : M \to N$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_E"'] & F \arrow[d, "\pi_F"] \\ M \arrow[r, "\bar{f}"'] & N \end{tikzcd}$$

conmuta y tal que para $p \in M$, la aplicación $f_p : E_p \to F_{\bar{f}(p)}$ es una transformación lineal.

Notemos que un homomorfismo de fibrados es una aplicación diferenciable $f : E \to F$ entre los espacios totales la cual *preserva las fibras y es lineal a lo largo de éstas*. En este caso, siendo π_E una función sobreyectiva, la aplicación $\bar{f}$ es determinada por f haciendo $\bar{f}\,(\pi_E(e)) = \pi_F((f(e))\,, e \in E$.

A partir de esta definición de homomorfismo de fibrados vectoriales, se siguen sin complicaciones las nociones de *isomorfismo de fibrados vectoriales* y de *automorfismo de un fibrado vectorial*.

Ejemplo 1.1.5. Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial con fibra típica E_0. Dada una carta admisible $(U, \phi, \varphi, \tilde{U})$, al componer el difeomorfismo $\phi : E\mid_U \to \tilde{U} \times E_0$ con $\varphi \times \mathrm{id}$ obtenemos un difeomorfismo $E\mid_U \to U \times E_0$, el cual es un isomorfismo de fibrados vectoriales. A saber, notamos que para cada $p \in U$ la restricción

$$(E\mid_U)_p \to \{\varphi(p)\} \times E_0$$

es un isomorfismo lineal. De este modo, los fibrados $E\mid_U$ y $U \times E_0$ son isomorfos.

Este ejemplo aclara el significado técnico de la afirmación *los fibrados vectoriales son localmente triviales*. El difeomorfismo $E\mid_U \to U \times E_0$ se dice es una *trivialización local* para E. El siguiente diagrama ilustra la situación

$$\begin{tikzcd} E\mid_U \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi_U"'] & \tilde{U} \times E_0 \arrow[r, "\varphi\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] & U \times E_0 \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ U \arrow[r, "\varphi"'] & \tilde{U} \arrow[r, "\varphi^{-1}"'] & U. \end{tikzcd}$$

Atendiendo lo anterior, es posible resumir afirmando que se podría adoptar desde el comienzo una definición de fibrado vectorial diferente, no obstante equivalente a la presentada.

Definición 1.1.6. Un *fibrado vectorial* es una cuádrupla (E, M, π, E_0) compuesta de

1. una variedad suave E llamada el *espacio total*,

2. una variedad suave M llamada el *espacio base*,

3. una aplicación diferenciable y sobreyectiva $\pi : E \to M$ llamada la *proyección*,

4. un espacio vectorial E_0 llamado la *fibra típica*

y satisfaciendo que para cada $p \in M$, la *fibra* de E sobre p, $E_p = \pi^{-1}(p)$ es un espacio vectorial; además, existe un cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M y una familia de difeomorfismos

$$\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times E_0,$$

llamados *trivializaciones locales* tales que para cada $\alpha \in A$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\phi_\alpha"] \arrow[d, "\pi"'] & U_\alpha \times E_0 \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ U_\alpha \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & U_\alpha \end{tikzcd}$$

y verificando que para cada $\alpha, \beta \in A$ con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, la aplicación

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : (U_\beta \cap U_\alpha) \times E_0 \to (U_\beta \cap U_\alpha) \times E_0$$

es un difeormorfismo, el cual es lineal en el segundo argumento, es decir, para cada $p \in U_\beta \cap U_\alpha$ obtenemos un isomorfismo lineal de E_0. Esto define funciones suaves

$$\tau_{\beta\alpha} : U_\beta \cap U_\alpha \to \mathrm{GL}(E_0)$$

llamadas las *funciones de transición* conforme la expresión

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(z, e) = (z, \tau_{\beta\alpha}(z) \cdot e)\,.$$

Una familia $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ con las propiedades enunciadas en la definición anterior es llamada un *atlas de trivializaciones locales* de E, y se adopta de forma natural la terminología usual para los conceptos de atlas equivalentes, atlas maximal y de trivializaciones locales admisibles.

Notemos que es posible escribir el espacio total de un fibrado vectorial como la unión disjunta de sus fibras, esto hace evidente la definición de π,

$$E = \bigsqcup_{p \in M} E_p, \;\; \pi(e) = p, \;\; \text{para } \; e \in E_p.$$

Esta descomposición pueder ser vista como una foliación regular de E por espacios vectoriales E_p embebidos en E y todos isomorfos al espacio E_0.

Definición 1.1.7. Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial con fibra típica E_0. Una *sección* de E es una aplicación diferenciable $\varepsilon : M \to E$ que satisface $\pi \circ \varepsilon = \mathrm{id}_M$; i.e., $\varepsilon(p) \in E_p$ para cada $p \in M$. Más general, una *sección de E con dominio abierto $U \subseteq M$* es una aplicación diferenciable $\varepsilon : U \to E$ que satisface $\pi \circ \varepsilon = \mathrm{id}_U$; i.e., una sección de E con dominio abierto U es simplemente una sección del fibrado $E\mid_U$. Denotamos por $\Gamma(E\mid_U)$ al conjunto de todas la secciones de E definidas sobre el conjunto abierto $U \subseteq M$.

Si ε y ρ son secciones de E definidas sobre un abierto U y f es una función suave definida en U, es posible definir puntualmente operaciones, conforme a las expresiones:

1. $(\epsilon + \rho)(p) = \epsilon(p) + \rho(p)$,
2. $(f\epsilon)(p) = f(p) \cdot \epsilon(p)$;

para cada $p \in M$. Con estas operaciones, el conjunto $\Gamma(E\mid_U)$ forma un módulo sobre el anillo $C^\infty(U)$ constituido de las funciones diferenciables definidas sobre U.

Ejemplo 1.1.8. Cuando E es un fibrado vectorial trivial, $E = M \times E_0$, cualquier sección se puede escribir como $\epsilon(p) = (p, f(p))$; de este modo, se establece un isomorfismo lineal $\Gamma(M \times E_0) \cong C^\infty(M; E_0)$ entre las secciones de E y el anillo de funciones suaves en M a valores en E_0.

Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial de rango r y fibra típica E_0. Decimos que el conjunto de secciones $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r\} \subseteq \Gamma(E\mid_U)$ forma una *base de secciones* del fibrado $E\mid_U$, si para cada $p \in U$, el conjunto $\{\epsilon_1(p), \ldots, \epsilon_r(p)\}$ es una base para la fibra E_p. Cuando este es el caso, cualesquier sección $\varepsilon \in \Gamma(E\mid_U)$ admite una única expresión como combinación lineal

$$\varepsilon = f^1\epsilon_1 + \cdots + f^r\epsilon_r,$$

para ciertas funciones $f^1, \ldots, f^r \in C^\infty(U)$. Por lo tanto, $\Gamma(E\mid_U)$ es el $C^\infty(U)$-módulo libre generado por $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r$.

Ejemplo 1.1.9. Si $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times E_0$ es una trivialización local para E, sobre un abierto de coordenadas $x_1, \ldots, x_r$, para cada $p \in U$, el isomorfismo lineal $L_p := \phi\mid_{E_p} : E_p \to \{p\} \times E_0$ puede ser identificado con una base $\{\partial_1(p), \ldots, \partial_n(p)\}$ para E_p; obtenida por la imagen inversa bajo L_p de alguna base $\{e_1, \ldots, e_r\}$ para E_0. Esto produce un conjunto de secciones locales $\partial_1, \ldots, \partial_r \in \Gamma(E\mid_U)$ las cuales constituyen una base de secciones para $E\mid_U$. Es claro que la elección de una trivilialización local para E sobre U y de una base para E_0 es equivalente con la elección de una base local de secciones para E sobre U, [1, Proposición 1.19].

Notemos que la trivialización $\phi : E\mid_U \to U \times E_0$ nos permite realizar una identificación a nivel de secciones:

$$\Gamma(E\mid_U) \cong \Gamma(U \times E_0) \cong C^\infty(U; E_0).$$

Bajo esta identificación, la sección ∂_i se corresponde con la función $U \to E_0$ con valor constante e_i.

1.2 Construcciones funtoriales

A partir de un fibrado vectorial o de varios fibrados vectoriales, todos sobre la misma variedad M es posible construir nuevos fibrados vectoriales sobre M aplicando ciertas operaciones de álgebra (multi) lineal a las fibras; las cuales tienen carácter de funtores diferenciables. Por ejemplo, tomar el dual o construir el álgebra exterior de un espacio vectorial, realizar los productos, sumas directas de espacios vectoriales, se pueden aplicar a la(s) fibra(s) dando lugar a nuevos fibrados vectoriales sobre M. A seguir tratamos de forma sucinta algunos de los principales ejemplos.

Ejemplo 1.2.1. *Fibrado dual.* Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vetorial real. Su *fibrado dual* E puede definirse de la siguiente manera. Para cada punto $p \in M$, la fibra es el espacio vectorial $E_p^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E_p; \mathbb{R})$ de funciones lineales en E_p. Así el espacio total y la proyección son dados por:

$$E^* = \bigsqcup_{p \in M} E_p^*, \ \pi(e) = p, \ \text{para cada } \ e \in E_p^*.$$

Las trivializaciones locales para E^* están dadas por las aplicaciones

$$\left((\phi)^{-1}\right)^* : \pi^{-1}(U) \to U \times E_0,$$

obtenidas a partir de las trivializaciones locales $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times E_0$ de E; de modo que la restricción sobre la fibra E_p^* ,

$$\left((\phi)^{-1}\right)^* |_{E_p^*}: E_p^* \to \{p\} \times E_0^*$$

es la función dual de la inversa del isomorfismo lineal

$$\phi \, |_{E_p}: E_p \to \{p\} \times E_0.$$

Ejemplo 1.2.2. *Suma directa.* Sean $\pi_E : E \to M$ y $\pi_F : F \to M$ fibrados vetoriales reales sobre la variedad M con fibras típicas E_0 y F_0 respectivamente. El *fibrado suma directa* $E \oplus F$ de E y F puede definirse de la siguiente manera. Para cada punto $p \in M$, $(E \oplus F)_p = E_p \oplus F_p$. Así el espacio total y la proyección son dados por:

$$E \oplus F = \bigsqcup_{p \in M} E_p \oplus F_p, \ \pi(e) = p, \ \text{para cada } \ e \in E_p \oplus F_p.$$

Las trivializaciones locales para $E \oplus F$ están dadas por las aplicaciones

$$\phi_\alpha \oplus \lambda_\beta : \pi^{-1} \left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \to \left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \times \left(E_0 \times F_0\right),$$

obtenidas a partir del producto de las trivializaciones locales $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times E_0$, $\lambda_\beta : \pi^{-1}(U_\beta) \to U_\beta \times F_0$ de E y F respectivamente.

Ejemplo 1.2.3. *Producto tensorial.* Sean $\pi_E : E \to M$ y $\pi_F : F \to M$ fibrados vetoriales reales sobre la variedad M con fibras típicas E_0 y F_0 respectivamente. El *producto tensorial* $E \otimes F$ de E y F puede definirse de forma análoga al ejemplo anterior. Para cada punto $p \in M$, $(E \otimes F)_p = E_p \otimes F_p$. De esta manera el espacio total y la proyección son dados por:

$$E \otimes F = \bigsqcup_{p \in M} E_p \otimes F_p, \ \pi(e) = p, \ \text{para cada } \ e \in E_p \otimes F_p.$$

Las trivializaciones locales para $E \otimes F$ están dadas por las aplicaciones

$$\phi_\alpha \otimes \lambda_\beta : \pi^{-1} \left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \to \left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \times \left(E_0 \otimes F_0\right),$$

obtenidas a partir del producto de las trivializaciones locales $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times E_0$, $\lambda_\beta : \pi^{-1}(U_\beta) \to U_\beta \times F_0$ de E y F respectivamente.

Otros ejemplos pueden ser obtenidos a partir de los anteriores por composición o iteración. Como lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.4. *Fibrado de homomorfismos.* Sean $\pi_E : E \to M$ y $\pi_F : F \to M$ fibrados vetoriales reales sobre la variedad M con fibras típicas E_0 y F_0 respectivamente. Es posible describir un fibrado cuyas secciones son los homomorfismos entre ellos. Para esto necesitamos atender la siguiente observación de álgebra lineal. Si V_1 y V_2 son dos espacios vectoriales reales entonces

$$V_1^* \otimes V_2 \cong \mathrm{Hom}(V_1; V_2).$$

En que un elemento $\psi = \sum_{j=1}^k \theta_j \otimes e_j \in V_1^* \otimes V_2$ se interpreta como aplicación lineal como sigue $\psi(v) := \sum_{j=1}^k \theta_j(v) e_j$. Luego, para los fibrados E y F sobre M simplemente definimos

$$\mathrm{Hom}(E; F) := E^* \otimes F.$$

1.3 El fibrado tangente

Sea M una variedad suave. Denotamos por TM la unión disjuntas de todos los espacios tangentes a M; más precisamente,

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM.$$

Es posible definir una aplicación $\pi : TM \to M$ de forma natural haciendo $\pi(v_p) = p$ siempre que $v_p \in T_pM$.

El conjunto TM es llamado *el fibrado tangente* de M; y es probablemente el ejemplo más importante de fibrado vectorial sobre M. En este apartado, atendiendo la Definición 1.1.6 vamos a ilustrar su construcción. Dado que los espacios tangentes ya están dotados de una estructura de espacio vectorial, nos resta es dotar a TM de una estructura diferenciable.

Notemos que si $U \subseteq M$ es un conjunto abierto, entonces $TM\ |_U = TU$. Además, cada función diferenciable $f : U \subseteq M \to \mathbb{R}$ permite definir una función

$$\dot{f} : TU \to \mathbb{R} : v_p \mapsto \dot{f}(v_p) := v_p f = \mathrm{d}f_p(v_p).$$

Sea $(U, \varphi, \tilde{U})$ una carta admisible en M, con funciones coordenadas $x_i : U \to \mathbb{R}$, $i : 1, \ldots, n$. Definamos una aplicación $T\varphi : \pi^{-1}(U) \to \tilde{U} \times \mathbb{R}^n$ haciendo

$$T\varphi\,(v_p) = (x_1(p), \ldots, x_n(p), \dot{x}_1(v_p), \ldots, \dot{x}_n(v_p)) = (\varphi(p), \mathrm{d}\varphi_p(v_p))\,,$$

para cada $p \in U$ y cada $v_p \in T_pM$. Como φ es un difeomorfismo, $\mathrm{d}\varphi_p : T_pM \to \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo, se ve fácilmente que $T\varphi$ es una aplicación biyectiva. Vamos a mostrar que el conjunto

$$\mathcal{A} = \{T\varphi : \varphi \text{ carta en } M\}$$

es un atlas diferenciable para TM. En primer lugar, como M puede ser cubierto por abiertos que son el dominio de las cartas admisibles, entonces TM puede ser cubierto por dominios de elementos de $\mathcal{A}$. Por otro lado, sean $(U, \varphi, \tilde{U})$ y $(V, \psi, \tilde{V})$ cartas en M; veamos que $T\varphi$ y $T\psi$ son compatibles. Notemos que

$$T\varphi\left(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)\right) = \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n,$$

$$T\psi\left(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)\right) = \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n;$$

son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^{2n}$, pues $\varphi(U \cap V)$, $\psi(U \cap V)$ son abiertos en $\mathbb{R}^n$. Además, si $(z, h) \in \tilde{U} \times \mathbb{R}^n$ entonces $(T\varphi)^{-1}(z, h) = v_p$ en que $p = \varphi^{-1}(z)$ y $v_p = \mathrm{d}\varphi_p^{-1} \cdot h$; luego si $p \in V$ tenemos

$$T\psi(v_p) = (\psi(p), \mathrm{d}\psi_p(v_p)) = \left(\psi\left(\varphi^{-1}(z)\right), \left[\mathrm{d}\psi_{(\varphi^{-1}(z))} \circ \mathrm{d}\varphi_{\varphi(p)^{-1}}\right] \cdot h\right).$$

En consecuencia, si $\alpha = \psi \circ \varphi^{-1}$ denota la función de cambio de coordendas de φ para ψ, entonces la función de cambio de coordenadas de $T\varphi$ para $T\psi$ es dada por:

$$T\psi \circ (T\varphi)^{-1} : \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \ni (z, h) \longmapsto (\alpha(z), \mathrm{d}\alpha_z \cdot h) \in \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n.$$

Como α es un difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^n$, se sigue que el cambio de coordenadas $T\psi \circ (T\varphi)^{-1}$ es diferenciables. Del mismo modo, la aplicación inversa $T\psi \circ (T\varphi)^{-1}$ es diferenciable. Esto muestra que $\mathcal{A}$ es un atlas diferenciable en TM.

Finalmente veamos que la topología inducida por $\mathcal{A}$ en TM es Hausdorff y verifica el segundo axioma de enumerabilidad. Inicialmente notemos que con esta topología la proyección π es continua. Ya que calesquier abierto $U \subseteq M$ se puede escribir de la forma $U = \cup_{i \in I} U_i$, donde cada U_i es el dominio de alguna carta en M. Luego $\pi^{-1}(U) = \cup_{i \in I} \pi^{-1}(U_i)$ es abierto en TM. Si $p = \pi(v) \neq \pi(w) = q$, entonces como M es Hausdorff, existen abiertos disjuntos $U, V \subseteq M$ tales que $p \in U$, $q \in V$. Luego los abiertos $\pi^{-1}(U)$ y $\pi^{-1}(V)$ son disjuntos en TM y contienen a v y w respectivamente. Si $p = q$, basta tomar una carta $(U, \varphi, \tilde{U})$ en M de modo que $p \in U$. Como $\mathrm{d}\varphi_p(v) \neq \mathrm{d}\varphi_p(w)$, existen abiertos disjuntos $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ con $\mathrm{d}\varphi_p(v) \in A$ y $\mathrm{d}\varphi_p(w) \in B$. Luego $(T\varphi)^{-1}(\tilde{U} \times A)$ y $(T\varphi)^{-1}(\tilde{U} \times B)$ son abiertos disjuntos en TM y contienen a v y w respectivamente. Veamos por último que TM es segundo contable. Como M es segundo contable, el atlas maximal que define la estructura diferenciable de M contiene un atlas enumerable $\{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$. En consecuencia $\{T\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$ es un atlas enumerable para TM.

Notemos que la estructura diferenciable inducida por $\mathcal{A}$ en TM hace que para cualquier abierto coordenado $U \subseteq M$, la aplicación inducida $\pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ sea un difeomorfismo lineal en las fibras. Ademas, para cada $f \in C^\infty(U)$, la función $\dot{f} \in C^\infty(TU)$, [1, Teorema 1.20].

Las secciones del fibrado tangente se llaman *campos vectoriales*. El módulo $\Gamma(U)$ de los campos vectoriales sobre un abierto $U \subseteq M$ se denota por $\mathfrak{X}(U)$. Hemos notado que dado un abierto coordenado $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$, se tiene una trivialización $T\varphi : TU\mid_U \to U \times \mathbb{R}^n$ de modo que para cada $p \in U$, la restricción sobre la fibra es el isomorfismo lineal

$$T\varphi\mid_{T_pM} = \mathrm{d}\varphi_p : T_pM \to \mathbb{R}^n.$$

Es usual denotar por $\{\frac{\partial}{\partial x_1}\mid_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\mid_p\}$ la base para T_pM obtenida por imagen inversa de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ bajo el isomorfismo anterior. Así, en el abierto coordenado $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ para M tenemos una base de secciones locales $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ para $TM\mid_U$. En consecuencia, cualquier campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(U)$ se puede escribir de forma única como combinación lineal

$$X = f_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_n\frac{\partial}{\partial x_n},$$

para funciones $f_1, \ldots, f_n \in C^\infty(U)$.

Las construcciones functoriales realizadas con fibrados vectoriales en particular pueden ser aplicadas al fibrado tangente de una variedad M.

- El dual del fibrado tangente TM de M, es el *fibrado cotangente* de M, denotado por T^*M. Las secciones de T^*M son llamadas *formas diferenciales de grado* 1 o simplemente 1-*formas* sobre M. El espacio de las 1-formas sobre M es denotado por $\mathfrak{X}^*(M)$ o por $\Omega^1(M)$.

- El producto tensorial de la p-ésima potencia tensorial de TM con la q-ésima potencia tensorial de T^*M es conocido como el *fibrado de los tensores de tipo* (p,q) o fibrado de los *tensores p veces contravariantes y q covariantes sobre M*, denotado por $T^p_q(M)$. En particular,

$$T^0_0(M) = M \times \mathbb{R},\, T^1_0(M) = TM,\, T^0_1(M) = T^*M.$$

  Las secciones de $T^p_q(M)$ son llamadas *campos tensoriales* de tipo (p,q) sobre M. El espacio de los campos tensoriales de tipo $(p.q)$ sobre M es denotado por $\mathfrak{T}^p_q(M)$.

- La p-ésima potencia exterior de T^*M es el *fibrado de las p-formas* sobre M y es denotado por $\bigwedge^p T^*M$. Las secciones de $\bigwedge^p T^*M$ son llamadas *p-formas*, el espacio de las p-formas sobre M es denotado por $\Omega^p(M)$.

Si E es un fibrado vectorial sobre M, las secciones de su producto tensorial con alguno de los fibrados antes mencionados son caracterizados por la expresión *a valores en E*. En particular, las secciones del fibrado $\bigwedge^p T^*M \otimes E$ son llamadas *p formas sobre M a valores en E*. El espacio de las p-formas sobre M a valores en E es denotado por $\Omega^p(M; E)$.

1.4 Conexiones lineales o derivadas covariantes

A seguir consideremos $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial con fibra típica E_0. Sean $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial y $f \in C^\infty(M)$. Denotaremos por $X(f)$ la función definida por $X(f)(p) = X_p f = \mathrm{d}f_p(X_p)$.

Observación 1.4.1. Dados fibrados vectoriales, $\pi^i : E^i \to M$, $i = 1, \dots, n$, $\pi : F \to M$ sobre una variedad M. Cada aplicación $B : \Gamma(E^1) \times \cdots \times \Gamma(E^n) \to \Gamma(F)$ que sea $C^\infty(M)$-lineal en cada uno de sus argumentos se puede identificar con un elemento en $\Gamma\left(\mathrm{Hom}(E^1, \dots, E^n; F)\right)$. Más precisamente, para cada $p \in M$, existe una aplicación multilineal $\bar{B}_p : E^1_p \times \cdots \times E^n_p \to F_p$ tal que

$$B(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)(x) = \bar{B}_x\left(\epsilon_1(x), \dots, \epsilon_n(x)\right),$$

para cada $\epsilon_i \in \Gamma(E^i)$, $i = 1, \dots, n$, [3, Proposición 3.1].

Definición 1.4.2. Una *conexión lineal*, u *operador de derivada covariante* en E es una aplicación

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E) : (X, \epsilon) \longmapsto \nabla(X, \epsilon) := \nabla_X \epsilon,$$

tal que para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, cada $f, g \in C^\infty(M)$ y cada $\epsilon, \epsilon' \in \Gamma(E)$ las siguientes condiciones se verifican:

- $\nabla_{fX+gY}\epsilon = f\nabla_X \epsilon + g\nabla_Y \epsilon$,
- $\nabla_X(f\epsilon) = (Xf)\epsilon + f\nabla_X\epsilon$, *(regla de Leibnitz).*

Ejemplo 1.4.3. En un fibrado trivial $E = M \times E_0$ hay una conexión canónicamente definida.

$$\mathrm{d\!I} : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(M \times E_0) \to \Gamma(M \times E_0) : (X, \epsilon) \mapsto \left(\mathrm{d\!I}_X \epsilon\right)(p) := \mathrm{d}\epsilon_p(X_p),$$

para cada $p \in M$, cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ y cada $\epsilon \in \Gamma(E)$. Aquí ϵ es pensado como una función de M a valores en E_0.

Ejemplo 1.4.4. Sea $\phi : E\mid_U \to U \times E_0$ una trivialización local para E. Dada una sección $\varepsilon \in \Gamma(E\mid_U)$, convencionamos en denotar por $\tilde{\varepsilon} : U \to E_0$ la función asociada con ε, ver el Ejemplo 1.1.9. Se define un operador de derivada covariante,

$$\mathrm{d\!I}^\phi : \mathfrak{X}(U) \times \Gamma(E\mid_U) \to \Gamma(E\mid_U)$$

de la siguiente manera, para cada $(X, \varepsilon) \in \mathfrak{X}(U) \times \Gamma(E\mid_U)$ y cada $p \in U$,

$$(\mathrm{d\!I}^\phi_X \varepsilon)_p := (\phi\mid_{E_p})^{-1}\left(\mathrm{d}\tilde{\varepsilon}_p(X_p)\right).$$

Ejemplo 1.4.5. Consideremos $M = \mathbb{R}^n$. Entonces, hay una trivialización usual de $TM \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ donde a la pareja $(x, \dot{x})$ le corresponde la derivada direccional,

$$f \mapsto \left(\frac{d}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} f(x + \varepsilon\dot{x}).$$

Está trivialización induce una conexión ∇. Las derivadas covariantes se calculan de la manera siguiente. sean $X = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \sum g_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ campos vectoriales en $\mathbb{R}^n$, la expresión $\nabla_X Y = \sum X(g_i) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum f_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}$. Esta conexión se conoce como la conexión afin usual de $\mathbb{R}^n$.

Dadas conexiones lineales ∇ y ∇' en un fibrado vectorial $E \to M$, la aplicación:

$$\mathfrak{t} : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E) : (X, \epsilon) \longmapsto \mathfrak{t}(X, \epsilon) = \nabla_X \epsilon - \nabla'_X \epsilon = (\nabla - \nabla')_X \epsilon,$$

es $C^\infty(M)$-bilineal. Se sigue de lo observado en 1.4.1 que $\mathfrak{t}$ se puede identificar con una sección del fibrado $\mathrm{Hom}(TM, E; E)$, que mediante adjunción puede reinterpretarse como $\mathrm{Hom}\,(TM; \mathrm{End}(E)) = \Omega^1\,(M; \mathrm{End}(E))$. Es decir, $\mathfrak{t}$ es identificado con una 1-forma en M a valores en los endomorfismos de E, $\mathrm{End}(E)$.

Notamos que si ∇ es una conexión lineal en E y $\mathfrak{t} : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ es una aplicación arbitraria $C^\infty(M)$-bilineal, entonces $\nabla + \mathfrak{t}$ es también una conexión lineal en E. Tiene por tanto sentido la siguiente afirmación.

Teorema 1.4.6. *El espacio* $\mathrm{Cnx}(E)$ *de todas las conexiones lineales en* E *es un espacio afín modelado sobre el* $C^\infty(M)$*-módulo* $\Omega^1(M, \mathrm{End}(E))$ *de las* 1*-formas con valores endomorfismos de* E*.*

Ejemplo 1.4.7. Sea ∇ una conexión lineal en E y sea $\phi : E\,|_U \to U \times E_0$ una trivialización local para E. *El tensor de Christoffel* Γ de la conexión ∇ en las coordenadas de la trivialización ϕ se define como la aplicación $C^\infty(M)$ bilineal,

$$\Gamma : \Gamma(TM\,|_U) \times \Gamma(E\,|_U) \to \Gamma(E\,|_U)$$

definida por $\Gamma = \nabla - \mathrm{d}\!\mathrm{I}^\phi$. Como hemos observado, es posible identificar el tensor de Christoffel Γ con una sección del fibrado $\Gamma\,(\mathrm{Hom}(TM, E; E)) \cong \Omega^1\,(M; \mathrm{End}(E))$. Explícitamente, para $\epsilon \in \Gamma(E\,|_U)$, $p \in U$ y $v \in T_pM$, se tiene:

$$\nabla_v \epsilon = (\phi\,|_{E_p})^{-1}\,(\mathrm{d}\tilde{\epsilon}_p \cdot (X_p)) + \Gamma_p(v) \cdot (\epsilon(p))\,,$$

donde $\tilde{\varepsilon} : U \to E_0$ es la función asociada con ε por medio de la trivialización ϕ. Ver el Ejemplo 1.1.9.

Observación 1.4.8. Consideremos ahora el caso en el que M es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y E es el fibrado tangente TM. Entonces, disponemos de la conexión afín usual de $\mathbb{R}^n$, denotémosla por ∇_0. Cualquier otra conexión ∇ es de la forma $\nabla_0 + \Gamma$, donde Γ es su tensor de Christoffel. Dado que $\nabla_{0\,\partial x_i} \partial_{x_j} = 0$, tenemos que $\nabla_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} = \Gamma(\partial_{x_i}, \partial_{x_j})$. Esto nos permite calcular las coordenadas del tensor de Christoffel,

$$\sum \Gamma_{ij}^k \partial x_k = \nabla_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j}, \quad \Gamma = \sum \Gamma_{ij}^k \;\; \partial_{x_i} \otimes \partial_{x_j} \otimes dx_k.$$

Las coordenadas del tensor de Christoffel reciben el nombre de símbolo de Christoffel. Si los campos X, Y en M, se expresan como $X = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ y $Y = \sum g_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, con $f_i, g_j \in C^\infty(M)$,

$$\nabla_X Y = \sum f_i g_j \Gamma_{ij}^k \partial_{x_k} + \sum f_i \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

1.4.1 Curvatura

Definición 1.4.9. Dado $\pi : E \to M$ con operador de derivada covariante ∇, definimos el *tensor de curvatura* de ∇ como la aplicación

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$

definida por la prescripción:

$$R(X, Y, \varepsilon) = \nabla_X \nabla_Y \varepsilon - \nabla_Y \nabla_X \varepsilon - \nabla_{[X,Y]}\varepsilon. \tag{1.1}$$

Es fácil verificar que el tensor de curvatura R es $C^\infty(M)$-lineal es sus tres argumentos. Se sigue de 1.4.1 que R se identifica con una sección de $\Gamma(\mathrm{Hom}\,(TM, TM; \mathrm{End}(E)))$. Por lo tanto, éste define una aplicación bilineal $R_p : T_pM \times T_pM \to \mathrm{End}(E_p)$, para cada $p \in M$. Obviamente, el tensor de curvatura es anti-simétrico en sus dos primeros argumentos.

1.4.2 Torsión

Definición 1.4.10. Dada una conexión lineal ∇ en el fibrado tangente TM, *el tensor de torsión* de ∇ es la aplicación

$$T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

definida por la prescripción:

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \tag{1.2}$$

Observación 1.4.11. Al igual que con el tensor de curvatura, es posible demostrar que T es $C^\infty(M)$-lineal en sus dos argumentos. Se sigue de 1.4.1 que T puede ser identificado con un elemento de $\Gamma\left(\mathrm{Hom}(TM, TM; TM)\right) \cong \Omega^1\left(M; \mathrm{End}(TM)\right)$. Por lo tanto, éste define una aplicación bilineal $T_p : T_pM \times T_pM \to T_pM$ para cada $p \in M$. Obviamente, el tensor de torsión es anti-simétrico.

Capítulo 2

Espacios homogéneos e infinitesimalmente homogéneos

A los hombres y a los grupos se les conoce por sus acciones.

—

2.1 Algunos preliminares

Consideramos M una variedad suave. Utilizaremos la siguientes notaciones: $\mathcal{C}^\infty(M)$ el anillo de funciones suaves, $\mathfrak{X}(M)$ el módulo de los campos vectoriales suaves en M, $\Omega^k(M)$ el módulo de las k-formas en M.

Flujo de campos vectoriales suaves

Definición 2.1.1. Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, a la curva $\gamma : (a, b) \to M$ que cumple para $t \in (a, b)$ que $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$, se le conoce como curva solución del campo X. A la imagen de toda curva solución la llamaremos curva integral de X.

Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$ de [4, Lema 3.6], se sigue que para $x \in M$, existe un intervalo abierto I_x conteniendo al cero y una curva integral $\gamma_x : I_x \to M$ de X, tal que $\gamma_x(0) = x$, además ésta curva es única si I_x es un intervalo maximal.

Para $X \in \mathfrak{X}(M)$ a la aplicación $\Phi : \cup_{x \in M} I_x \times \{x\} \to M; (t, x) \mapsto \Phi(t, x) := \gamma_x(t)$, con I_x maximal, se le conoce como el flujo del campo vectorial X. Dicha aplicación es suave y cumple para $x \in M$ y $t, s \in I_x$ que $\Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t + s, x)$.

Note que el dominio de Φ es una vecindad de $0 \times M$ en $\mathbb{R} \times M$, en el caso en que ambos coincidan, diremos que el flujo Φ es global y el campo X es completo. Se puede demostrar que todo campo vectorial con soporte compacto es completo, en particular, si M es compacto entonces todo campo vectorial en M es completo.

Definición 2.1.2. Un subconjunto $\{\sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ del grupo de difeomorfismos de M, Diff(M), se llama grupo 1-paramétrico, si es subgrupo y además cumple

- $\sigma_{t+s} = \sigma_t \circ \sigma_s$.

- $\sigma : \mathbb{R} \times M \to M; (t,x) \mapsto \sigma(t,x) := \sigma_t(x)$ es una función suave.

Note que cuando un campo vectorial X es completo, su flujo define un grupo 1-paramétrico dado por $\sigma_t : M \to M; x \mapsto \sigma_t(x) := \Phi(t,x)$, con $t \in \mathbb{R}$. También se tiene que todo grupo 1-paramétrico $\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ define un campo vectorial X en M, definido para $f \in C^\infty(M)$ por $Xf := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\sigma_t^* f - f\right)$. Al campo X se le conoce como el generador infinitesimal de $\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$.

De lo anterior tenemos que el conjunto de campos vectoriales completos están en correspondencia biunívoca con los grupos 1-paramétricos.

Derivada de Lie

Para la definición de derivada de Lie vamos a suponer que los campos vectoriales son completos, y ademas el flujo de los campos los vamos a ver como grupos 1-paramétricos.

Sea X un campo vectorial de M y $\{\sigma_t\}$ su flujo. Definimos para $Y \in \mathfrak{X}(M)$, la derivada de Lie de Y con respecto al campo X como

$$\mathcal{L}_X Y := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left((\sigma_t)_* Y - Y\right).$$

Definimos la derivad de Lie para $f \in C^\infty(M)$ con respecto al campo X como

$$\mathcal{L}_X f := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left((\sigma_t)^* f - f\right).$$

Definimos la derivada de Lie para $\omega \in \Omega^1(M)$ con respecto al campo X como

$$\mathcal{L}_X \omega := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left((\sigma_t)^* \omega - \omega\right).$$

La derivada de Lie puede calcularse algebraicamente de forma sencilla, y coincide con el conmutador de campos entendidos como operadores diferenciales.

$$(\mathcal{L}_X Y)f = X(Yf) - Y(Xf) = [X,Y]f.$$

La derivada de Lie de campos tensoriales se define, exigiendo que el producto tensorial satisfaga la fórmula de Leibniz, es decir:

$$\mathcal{L}_X(\alpha \otimes \beta) = \mathcal{L}_X \alpha \otimes \beta + \alpha \otimes \mathcal{L}_X \beta.$$

De aquí se derivan diversas propiedades que permiten calcular la derivada de Lie de los productos exteriores, las contracciones interiores y de la diferencial de formas, las más habituales pueden consultarse en [1].

2.2 Grupos y Álgebras de Lie

En ésta sección definiremos grupo y subgrupo de Lie, mostraremos algunos ejemplos, al igual que definiremos álgebras y subálgebras de Lie. Para esto el lector debe de estar familiarizado con la noción de grupo, álgebra y variedad.

2.2.1 Grupos de Lie

Definición 2.2.1. Un grupo de Lie G, es una variedad suave con estructura de grupo, tal que la operación composición:

$$\begin{array}{rcl} \mu : G \times G & \longmapsto & G \\ (g,h) & \mapsto & \mu(g,h) = gh \end{array}$$

es suave.

Observemos que al ser G una variedad suave, el inverso puede encontrarse mediante el teorema de la función implícita, siendo la única solución para $g_0 \in G$ de la ecuación $\mu(g_0, x) = e$. Esto implica que la operación de inversión:

$$\begin{array}{rcl} i : G & \longmapsto & G \\ g & \mapsto & g^{-1} \end{array}$$

es también necesariamente suave.

A continuación listamos algunos ejemplos de grupos de Lie.

Ejemplo 2.2.2. El conjunto de los números reales con la operación suma, $(\mathbb{R}, +)$.

Ejemplo 2.2.3. Los números reales sin el cero, con la multiplicación, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

Ejemplo 2.2.4. La circunferencia unidad, $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \,/ |z| = 1\}$, con la multiplicación de números complejos, $(\mathbb{S}^1, \cdot)$.

Ejemplo 2.2.5. Si $(G, \cdot)$ y $(G', +)$ son grupos de Lie, entonces $(G \times G', *)$ es un grupo de Lie donde la operación * está dada por $(g, g') * (h, h') = (g \cdot h, g' + h')$.

Ejemplo 2.2.6. El toro de dimensión 2 real, $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Ejemplo 2.2.7. El conjunto de isomorfismos lineales de $\mathbb{R}^n$ con la composición de funciones, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \,/ \det \varphi \neq 0\}$. En este caso la estructura suave es la que hace suaves a los elementos de matriz; es decir la que representa $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ como un abierto de $\mathbb{R}^{n \times n}$: El conjunto de matrices con entradas reales y determinante distinto de cero, donde la operación es la multiplicación de matrices.

Definición 2.2.8. Dado G un grupo de Lie, decimos que $H \subseteq G$ es subgrupo de Lie, si es una subvariedad suave embebida en G. En este caso H es también un grupo de Lie.

Un teorema de E. Cartán garantiza que todos los subgrupos cerrados de un grupo de Lie son subgrupos de Lie, [1, Teorema 4.2].

Ejemplo 2.2.9. EL grupo ortogonal $\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \,/ AA^T = Id\}$, el grupo especial ortogonal $\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n) \,/ \det A = 1\}$, el grupo de transformaciones lineales que preservan orientación $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \,/ \det(A) > 0\}$ y el grupo especial lineal $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \,/ \det(A) = 1\}$ son todos ellos subgrupos de Lie de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

2.2.2 Álgebras de Lie

Definición 2.2.10. Un álgebra de Lie (real, compleja, o en general sobre un campo), es un espacio vectorial V dotado de una operación bilineal $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$ que cumple las siguientes propiedades:

- $[u, v] = -[v, u]$,
- $[u, [v, w]] + [w, [u, v]] + [v, [w, u]] = 0$ (Identidad de Jacobi).

Cuando no se especifique, entenderemos que nos referimos a álgebras de Lie reales. Al operador $[\cdot,\cdot]$ lo llamaremos el bracket de Lie.

Definición 2.2.11. Una subálgebra de Lie U de V, es un subespacio vectorial de V que es cerrado bajo el bracket de Lie.

Ejemplo 2.2.12. El conjunto de matrices $n \times n$ con entrada en los reales, $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$, con el operador conmutador $[A, B] = AB - BA$ es un álgebra de Lie.

Ejemplo 2.2.13. Si M es una variedad entonces el conjunto de campos vectoriales sobre M, $\mathfrak{X}(M)$, es un álgebra de Lie (de dimensión infinita sobre los reales), donde el corchete de Lie de dos campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ está dado por $[X, Y] := XY - YX$.

Definición 2.2.14. Un morfismo de álgebras de Lie, es una transformación lineal

$$\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$$

que cumple $\Phi([A, B]) = [\Phi(A), \Phi(A)]$, para $A, B \in \mathfrak{g}$. Un morfismo de álgebras de Lie será un isomorfismo si es una biyección.

Consideremos $f \colon M \to N$ un mapa suave, X y Y campos vectoriales en M y N respectivamente. Decimos que X se proyecta sobre Y si para todo $p \in M$ se tiene $d_p f(X_p) = Y_{f(p)}$. Decimos que X es proyectable por f si tiene alguna proyección Y en N. Si X se proyecta sobre Y escribimos $X \sim_f Y$.

La demostración del siguiente Lema la pueden encontrar en [1].

Lema 2.2.15. *Sea $f \colon M \to N$ un mapa suave, si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(N)$ son tal que $X \sim_f \tilde{X}$ y $Y \sim_f \tilde{Y}$, entonces se tiene que $[X, Y] \sim_f [\tilde{X}, \tilde{Y}]$.*

El lema anterior implica que el conjunto $\mathfrak{X}^f(M)$ de los campos vectoriales en M proyectables por f forma una subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(M)$.

Si f es sobreyectivo, todo campo proyectable $X \in \mathfrak{X}^f(M)$ tiene una única proyección, que denotamos $f_*(X)$. Del lema anterior también se extrae que el mapa f_* es un morfismo de álgebras de Lie.

Si además f es un difeomorfismo, entonces todo campo en M es proyectable. Se toma $f_*(X)_q := \mathrm{d}_p f(X_p)$, con $q \in N$ y $p = f^{-1}(q)$. En este caso $f_* \colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(N)$ es un isomorfismo de álgebras de Lie.

Definición 2.2.16. Dado G un grupo de Lie, para $g \in G$ definimos las traslaciones a izquierda y a derecha respectivamente a las aplicaciones $R_g : G \to G; x \to gx$ y $L_g : G \to G; x \to gx$.

Observación 2.2.17. Al ser L_g y R_g difeomorfismos de grupos de Lie, entonces por el ejemplo anterior se tienen los siguientes isomorfismos de álgebras de Lie $(R_g)_*\colon \mathfrak{X}(G) \to \mathfrak{X}(G)$ y $(L_g)_*\colon \mathfrak{X}(G) \to \mathfrak{X}(G)$.

Definición 2.2.18. Decimos que un campo $X \in \mathfrak{X}(G)$ es invariante a izquierda o a derecha si $(L_g)_*X = X$ o $(R_g)_*X = X$, para todo $g \in G$.

Los conjuntos de campos invariantes a izquierda y a derecha los denotaremos por $\mathfrak{X}(G)^L$ y $\mathfrak{X}(G)^R$ respectivamente. Existe una correspondencia uno a uno entre éstos inducida por $i_* : \mathfrak{X}(G) \to \mathfrak{X}(G)$, donde i es la función inversión.

Observación 2.2.19.

- Si X es invariante a izquierda o a derecha, basta con saber cuanto es su valor en la identidad para conocer sus otros valores, pues para $g \in G$, $X_g = \mathrm{d}_e L_g(X_e) = X_g$ o $X_g = \mathrm{d}_e R_g(X_e) = X_g$. Note que cualquier vector tangente a la identidad determinaría un campo invariante a izquierda o a derecha, basta simplemente definirlo empleando traslaciones a izquierda o a derecha.
- Si $X, Y \in \mathfrak{X}(G)^L$, por la definición se sigue que $X \sim_{L_g} X$ y $Y \sim_{L_g} Y$, utilizando el Lema 2.2.15 se tiene que $[X,Y] \sim_{L_g} [X,Y]$, de donde $[X,Y] \in \mathfrak{X}(G)^L$. De una manera análoga se tiene el mismo resultado para $\mathfrak{X}(G)^R$.
- Todo campo $X \in \mathfrak{X}(G)$ invariante a izquierda o a derecha es completo, (véase p. ej. [1, Proposición 4.6]).

Ejemplo 2.2.20. Atendiendo la Observación 2.2.19, los espacios $\mathfrak{X}(G)^L$ y $\mathfrak{X}(G)^R$ son cerrados bajo el corchete de Lie, en consecuencia tenemos que éstos son subálgebras de Lie de $\mathfrak{X}(G)$. Consideremos las funciones evaluación en la identidad,

$$\begin{aligned} Ev : \mathfrak{X}(G)^L &\to T_eG \\ X &\mapsto X_e, \\ Ev : \mathfrak{X}(G)^R &\to T_eG \\ X &\mapsto X_e, \end{aligned}$$

del primer item de la Observación 2.2.19 se sigue que ambas funciones son biyectivas, luego se induce una estructura de álgebra de Lie a T_eG, donde el corchete de Lie viene dado por $[A,B] := Ev[X,Y]$, con $A, B \in T_eG$ y X, Y elementos de $\mathfrak{X}(G)^L$ o $\mathfrak{X}(G)^G$, que cumplen que $Ev(X) = A$ y $Ev(Y) = B$.

Convenimos considerar en $\mathfrak{g} := T_eG$ el corchete de Lie inducido por el isomorfismo Ev con $\mathfrak{X}(G)^L$. Decimos que $\mathfrak{g}$, con este corchete, es el álgebra de Lie asociada al grupo de Lie G.

Observación 2.2.21. Si en lugar de utilizar $\mathfrak{X}(G)^L$ utilizamos $\mathfrak{X}(G)^R$ para inducir el corchete de Lie en $\mathfrak{g}$, entonces el corchete de Lie varía solamente en el signo.

Ejemplo 2.2.22. El álgebra de Lie de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Del isomorfismo $\Psi : \mathrm{Mat}(n \times n) \to T_e(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))\,; A \mapsto \Psi(A) := \frac{\partial}{\partial t}_{t=0}(Id + tA)$ tenemos que el álgebra de Lie de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ es el álgebra de matrices con entradas reales

$\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$. Veamos que el corchete esta dado por el conmutador de matrices. Para esto consideremos $U = u_{ij}$ una matriz de coordenadas de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, si $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ entonces la ecuación $\dot{U} = UA$ induce el campo $X_A = u_{ik} a_{kj} \frac{\partial}{\partial u_{ij}}$ [1], este campo cumple que $X_A(Id) = A$, y además que es invariante a izquierda, ya que si $\phi(t)$ es una curva integral, entonces para $g \in G$ $\psi(t) = g \cdot \phi(t)$ también lo es. Luego se tiene que la aplicación $\Psi : \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \to \mathfrak{X}^L(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}))$; $A \mapsto \Psi(A) := X_A$ es un isomorfismo, de esto y el cómputo

$$
\begin{aligned}
[X_A, X_B] = ([X_A, X_B]\, u_{ij}) \frac{\partial}{\partial u_{ij}} &= (X_A X_B u_{ij} - X_B X_A u_{ij}) \frac{\partial}{\partial u_{ij}} \\
&= (X_A(u_{ik} b_{kj}) - X_B(u_{ik} a_{kj})) \frac{\partial}{\partial u_{ij}} \\
&= u_{i\beta} (a_{\beta k} b_{kj} - b_{\beta k} a_{kj}) \frac{\partial}{\partial u_{ij}} = X_{AB-BA} = X_{[A,B]}
\end{aligned}
$$

con $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$, se sigue el resultado.

Ejemplo 2.2.23. Atendiendo el Ejemplo 2.2.9, para el grupo ortogonal y el grupo ortogonal especial de orden n, al ser $\mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{O}(n)$ un abierto, entonces

$$\mathfrak{o}(n) := T_e\mathrm{O}(n) = T_e\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \;/ A + A^T = 0\}$$

es precisamente el conjunto de las matrices antisimétricas de orden n. Asimismo,

$$\mathfrak{sl}(n) := T_e\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \;/ \mathrm{tr}(x) = 0\}$$

es el conjunto de matrices con traza cero. Estas álgebras de Lie son a su vez subálgebras de Lie de $T_e\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Función exponencial.

Para cada $V \in \mathfrak{g}$ existe un único $X \in \mathfrak{X}(G)^L$ tal que $X_e = V$. Como X es completo tiene un flujo global Φ, que cumple $\Phi(o, e) = e$. Con todo esto definimos la función exponencial, $\exp : \mathfrak{g} \to G$, para $V \in \mathfrak{g}$ como $\exp(V) := \Phi(1, e)$. La función exponencial es suave y cumple que $\exp(tV) = \Phi(t, e)$. La función exponencial tiene propiedades muy notables.

Observación 2.2.24. Propiedades de la función exponencial.

- Es equivalente definir la función exponencial utilizando campos invariantes a izquierda o derecha.
- Fijo $V \in \mathfrak{g}$ el mapa $\exp(tV) \colon \mathbb{R} \to G$ es un morfismo del grupo aditivo $\mathbb{R}$ en G.
- La derivada de la función exponencial en 0 es el mapa identidad en $\mathfrak{g}$.
- El flujo de los campos invariantes puede describirse fácilmente utilizando la función exponencial. Si X es un campo invariante izquierda, entonces su flujo es $\Phi(t, g) = g \cdot \exp(tX_e)$. De forma análoga, si Y es un campo invariante a derecha, su flujo es $\Psi(t, g) = \exp(tY_e) \cdot g$.

[1] Se omiten los símbolos de sumatoria por brevedad.

2.3 Acciones de grupos

A seguir presentamos la terminología básica de las acciones de grupos. Sea G un grupo con elemento unidad e.

Definición 2.3.1. Una acción a izquierda de G sobre un conjunto M, es una aplicación:

$$\begin{array}{rccl} \phi: & G \times M & \longrightarrow & M \\ & (g,p) & \longmapsto & \phi((g,p)) = pg \end{array}$$

que cumple:

1. $\phi(e,p) = p$,
2. $\phi(gh,p) = \phi\,(g,\phi(h,p))$.

Del mismo modo se define una acción a derecha como siendo una función

$$\begin{array}{rccl} \phi: & M \times G & \longrightarrow & M \\ & (p,g) & \longmapsto & \phi((p,g)) = pg \end{array}$$

que cumple:

1. $\phi(p,e) = p$,
2. $\phi(p,hg) = \phi\,(\phi(p,h),g)$.

Dada una acción a derecha $\phi : M \times G \to M$, la prescripción $\phi' : G \times M \to M : (g,p) \mapsto \phi(p,g^{-1})$ define una acción a izquierda de G sobre M. Por esta razón sólo nos centramos en el estudio de acciones a izquierda.

Definición 2.3.2. Dada una acción de G en M. Para $p \in M$, definimos el estabilizador de p como el subgrupo:

$$\mathrm{St}(p) := \{g \in G\ / gp = p\}.$$

Asimismo, definimos la órbita de p como el conjunto:

$$O(p) = \{gp \in M\ / g \in G\}.$$

Dados p,$q \in M$ y $g \in G$ tal que $gp = q$, entonces se cumple la siguiente relación entre los estabilizadores de p y q ,

$$St(p) = gSt(q)g^{-1}.$$

Si G actúa sobre M, para cada $p \in M$ denotamos por $\beta_p : G \to M$ la aplicación inducida por la acción de G sobre el elemento $p \in M$, es decir,

$$\beta_p : G \to M : g \mapsto g \cdot p,$$

es claro que $\beta_p^{-1}(p) = \mathrm{St}(p)$, y además, $\beta_p(G) = O(p)$.

Notemos que si $g \cdot p = h \cdot p$, entonces $g^{-1}h \in \mathrm{St}(p)$ en consecuencia, la aplicación β_p induce una aplicación $\bar{\beta_p} : G/St(p) \to M$.

Teorema 2.3.3. *Con la terminología anterior, la aplicación obtenida por restricción en el codominio*

$$\bar{\beta}_p : G/St(p) \to O(p)$$

es una biyección.

Definición 2.3.4. Decimos que una acción de G en M es transitiva si posee solamente una órbita, esto es, si son dados $p, q \in M$, existe $g \in G$ tal que $p = gq$.

Supongamos que G es un grupo de Lie. Sea $\phi : G \times M \to M$ una acción diferenciable de G sobre una variedad diferenciable M. En este caso, para cada $p \in M$ el estabilizador $St(p)$ al ser un subgrupo cerrado es un subgrupo de Lie de G. Además, el espacio cociente $G/St(p) := \{gSt(p) : g \in G\}$ admite una estructura diferenciable de modo que la aplicación inducida en el cociente por la acción de G sobre el elemento $p \in M$, $\bar{\beta}_p : G/St(p) \to O(p)$ es un difeomorfimso. En particular, cuando la acción de G en M es transitiva, para $p \in M$, se tiene que $\bar{\beta}_p : G/St(p) \to M$ es un difeomorfismo.

Lo anterior motiva la siguiente definición:

Definición 2.3.5. Un espacio homogéneo es una variedad diferenciable M, equipada de una acción suave y transitiva de un grupo de Lie.

Atendiendo en lo anterior, es claro que una variedad suave M es un espacio homogéneo, si y solamente si, M se puede expresar como el cociente entre un grupo de Lie G y un subgrupo cerrado H de éste.

Ejemplo 2.3.6. El grupo ortogonal actúa por conjugación sobre las matrices simétricas, $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(n \times n, R) \,/ A = A^T\}$. Esto es, para $O \in O(n)$ y $B \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$, la prescripción $O \cdot A := OAO^T$ bien define una acción de $\mathrm{O}(n)$ sobre $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$. Para la cual el estabilizador y la órbita para una matriz $A \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ están dados por

$$St(A) = \{B \in \mathrm{O}(n) \,/ AB = BA\},$$
$$O(A) = \{OAO^T \,/ O \in \mathrm{O}(n)\},$$

respectivamente.

Vamos a describir las órbitas generadas por esta acción. Supongamos A, B son matrices simétricas que se encuentran en la misma órbita. Luego $A = OBO^T$ para algún $O \in \mathrm{O}(n)$, por lo tanto, $\det(A - \lambda Id) = \det(OBO^T - \lambda Id)$, de donde se sigue que $\det(A - \lambda Id) = \det(B - \lambda Id)$. En consecuencia, A y B tienen el mismo polinomio característico y por ende los mismos valores propios.

Recíprocamente, si A y B son matrices simétricas con los mismos valores propios. Por el Teorema de la descomposición espectral sabemos que $A = ODO^T$ y $B = C\bar{D}C^T$, en que D y $\bar{D}$ son matrices diagonales en cuya diagonal aparecen los valores propios de A y B respectivamente, y $O, C \in \mathbf{O}(n)$. Como A y B poseen los mismos valores propios, entonces (conjugando por matrices de permutación si fuese necesario) $D = \bar{D}$. Luego reemplazando $D = C^T BC$ en A, obtenemos $A = QBQ^T$, con $Q = OC^T \in \mathrm{O}(n)$, esto es $A = Q \cdot B$.

Concluimos entonces que A y B están en la misma órbita si y sólo si tienen los mismos valores propios. De esto se sigue el espacio $\mathrm{Sym}(\mathbb{R}, n)$ bajo la acción por conjugación del grupo $\mathrm{O}(n)$ no es un espacio homogéneo.

Ejemplo 2.3.7. El grupo de los movimientos del plano $\mathrm{Mov}(\mathbb{R}^2)$ se define como el conjunto de todas las transformaciones del plano que tienen la propiedad de preservar ángulos, distancias y orientación, dotado de la composición de funciones.

Podemos identificar de manera natural $\mathrm{Mov}(\mathbb{R}^2)$ con el grupo $\mathrm{SO}(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ dotado de la operación $\ltimes$ definida por:

$$(A, b) \ltimes (A', b') = (AA', A'b + b').$$

La prescripción:

$$\begin{array}{rccl} \phi: & \mathrm{Mov}(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & [(A, b), x] & \longmapsto & \phi([(A, b), x]) = Ax + b \end{array}$$

define una acción de $\mathrm{Mov}(\mathbb{R}^2)$ en $\mathbb{R}^2$.

En este caso, el estabilizador para $x \in \mathbb{R}^2$ es el grupo:

$$\begin{aligned} St(x) &= \{(A, b) \in \mathrm{Mov}(\mathbb{R}^2) \ / \ Ax + b = x\} \\ &= \{(A, x - Ax) \ / \ A \in \mathrm{SO}(2)\} \cong \mathrm{SO}(2). \end{aligned}$$

Asimismo, la órbita para $x \in \mathbb{R}^2$ es todo el espacio $\mathbb{R}^2$. Es decir, $\mathbb{R}^2$ es un espacio homogéneo bajo esta acción. A saber, para cualesquier $x, y \in \mathbb{R}^2$ y cada $A \in \mathrm{SO}(2)$, es claro que $\phi\left([(A, y - Ax), x]\right) = y$. En consecuencia, $O(x) = \mathbb{R}^2$ para cualquier $x \in \mathbb{R}^2$.

Atendiendo lo anterior, tenemos

$$\mathrm{Mov}(\mathbb{R}^2)/\mathrm{SO}(2) \cong \mathbb{R}^2.$$

Ejemplo 2.3.8. Consideremos el grupo ortogonal especial de orden 2,

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ g_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \ : \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

La multiplicaciónón de matrices induce una acción a izquierda de este grupo sobre el espacio $\mathbb{R}^2$ como sigue

$$\rho : (g_\theta, x) \in \mathrm{SO}(2) \times \mathbb{R}^2 \mapsto g_\theta \cdot x \in \mathbb{R}^2.$$

Geométricamente el efecto de la acción de la matriz g_θ sobre el vector x es una rotaciónón de este vector por un ángulo θ en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

En consecuencia, dado un vector $x \neq 0$ en el plano, su grupo de isotropía es trivial y su órbita está constituida por todos los vectores con la misma norma que x; es decir, las órbitas son circunferencias concéntricas en el origen. Veamos los detalles.

Para $x \in \mathbb{R}^2$, el grupo de isotropía por esta acción es $\mathrm{SO}(2)_x = \{g_\theta \in \mathrm{SO}(2) : g_\theta \cdot x = x\}$. Es decir, $g_\theta \in \mathrm{SO}(2)_x$, si y sólo si x es un vector propio para g_θ asociado al valor propio $\lambda = 1$. Luego, 1 es una raíz del polinomio característico

$$P_{g_\theta}(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) - \lambda & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda\cos(\theta) + 1$$

esto es, $0 = P_{g_\theta}(1) = 2(1-\cos(\theta))$; en consecuencia, $\theta = 0$ y este valor obliga la igualdad $g_\theta = 1_{\mathrm{SO}(2)}$. Concluimos que

$$\mathrm{SO}(2)_x = \begin{cases} \{1_{\mathrm{SO}(2)}\}, & x \neq 0, \\ \mathrm{SO}(2), & x = 0. \end{cases}$$

Vamos a determinar las órbitas por esta acción y a describir el espacio de órbitas. Note que dos elementos $(x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ están en la misma órbita si y sólo si existe $g_\theta \in \mathrm{SO}(2)$ de modo que

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

de donde $x_1 = x\cos(\theta) - y\sin(\theta)$, $y_1 = x\sin(\theta) + y\cos(\theta)$. En consecuencia,

$$(x, y) \sim (x_1, y_1) \Longleftrightarrow \|(x_1, y_1)\|^2 = x_1^2 + y_1^2 = x^2 + y^2 = \|(x, y)\|^2.$$

Así, las órbitas son circunferencia concéntricas en el origen y por tanto esta acción no es transitiva.

Note que la función sobreyectiva y continua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\} : (x, y) \mapsto \|(x, y)\|^2$ es compatible con $\sim$; luego por paso al cociente hay una biyección continua $\bar{f} : \mathbb{R}^2/\mathrm{SO}(2) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \mathbb{R}^2/\mathrm{SO}(2) \arrow[r, "\bar{f}"'] & \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Así, el espacio de órbitas por esta acción $\mathbb{R}^2/\mathrm{SO}(2)$ puede ser identificado con el espacio $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Ejemplo 2.3.9. La recta proyectiva compleja $\mathbb{CP}^1$, se define como el espacio cociente del plano complejo agujereado $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ por medio de la relación de equivalencia

$$z \sim w \ \text{ si y solo si } \ z = \lambda w, \ \text{ para algún } \ \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

$\mathbb{CP}^1$ se identifica de manera natural con $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mediante el isomorfismo

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{CP}^1 & \longrightarrow & \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ & [(z_1, z_2)] & \longmapsto & f([(z_1, z_2)]) = \frac{z_1}{z_2} \end{array}$$

El grupo especial lineal (complejo) de orden 2, $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \,/\, \det(A) = 1\}$ actúa sobre la recta proyectiva compleja como sigue:

$$A * [(z, 1)] := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} az + b \\ cz + d \end{bmatrix},$$

donde $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ y $[(z, 1)] \in \mathbb{CP}^1$.

Que de forma equivalente, al considerar la identificación con $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ resulta $[(z, 1)]$ se corresponde con z y $[(z, 0)]$ con el infinito. Luego

$$Az = \frac{az + b}{cz + d}$$

para $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ y $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Esta acción es transitiva. Solo basta ver que cualquier punto se puede llevar al infinito y viceversa, pero esto se cumple ya que la clase $[(z, 1)]$ es llevada a la clase $[(1, 0)]$ mediante la matriz

$$\begin{bmatrix} z^{-1} & 0 \\ -1 & z \end{bmatrix}$$

y la clase $[(1, 0)]$ es llevada a la clase $[(z, 1)]$ por la matriz

$$\begin{bmatrix} z & 0 \\ 1 & z^{-1} \end{bmatrix}.$$

Para $z = \infty$, utilizando el elemento correspondiente $[(z, 0)]$ para calcular obtenemos

$$A \in St(\infty) \text{ si, y solo si, } A \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix},$$

de donde se sigue que $a = \lambda, c = 0$. De nuevo la condición $ad - bc = 1$ implica que $d = 1/\lambda$, por lo tanto

$$St(\infty) = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Como la acción es transitiva y el estabilizador de dos elementos difieren por conjugación, atendiendo lo anterior para $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se cumple que

$$St(z) = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Concluimos entonces para $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/St(z) \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Ejemplo 2.3.10. Consideremos el grupo de las matrices triangulares superiores e invertibles de orden 2,

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| ac \neq 0 \right\}.$$

Este grupo actúa por multiplicación sobre $\mathbb{R}^2$; esto es, la prescripción:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cy \end{bmatrix}$$

define una acción de T sobre el plano para la cual calcularemos las órbitas de los vectores canónicos de $\mathbb{R}^2$.

$$O(e_1) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \; ac \neq 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \; a \neq 0 \right\},$$

$$O(e_2) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \; ac \neq 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} \middle| \; c \neq 0 \right\}.$$

Notemos que $O(e_1)$ se puede identificar con el eje x y $O(e_2)$ con el plano excepto el eje x. Como $O(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, entonces $\mathbb{R}^2 = O(e_1) \cup O(e_2) \cup O(0)$. Como ningún elemento de T mapeo el vector e_1 sobre e_2 concluimos que esta acción no es transitiva. Así, $\mathbb{R}^2$ no es homogéneo bajo dicha acción.

Por otro lado, para los estabilizadores tenemos:

$$St(e_1) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| \; \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| \; c \neq 0 \right\},$$

$$St(e_2) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| \; \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \; a \neq 0 \right\}.$$

En consecuencia,

$$T/St(e_1) \cong O(e_1) \cong (\mathbb{R}/\{0\}, \cdot),$$

$$T/St(e_2) \cong O(e_2) \cong (\mathbb{R} \times (\mathbb{R}/\{0\}), \cdot).$$

2.4 Objetos invariantes por una acción

Si tenemos una acción de G en M para cada $g \in G$ la aplicación

$$L_g : M \to M; x \mapsto gx$$

es un difeomorfismo, lo que hace de las siguientes aplicaciones isomorfismos.

$$\begin{array}{rccl} (L_g)^* : & C^\infty(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ & f & \longmapsto & (L_g)^*(f) = f \circ L_g, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} (L_g)_* : & \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ & X & \longmapsto & \left((L_g)_* X\right)_x = d_{g^{-1}x} L_g \left(X_{g^{-1}x}\right), \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} (L_g)^* : & \Omega^1(M) & \longrightarrow & \Omega^1(M) \\ & \omega & \longmapsto & (L_g)^*(\omega)(X) = \omega\left((L_g)_* X\right). \end{array}$$

Por extensión tambiénén se tiene $(L_g)^*$ el pullback de k-formas, y de tensores de todo tipo.

Definición 2.4.1. Dado una acción de G en M, decimos que $f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\omega \in \Omega^k(M)$ son invariantes por la acción de G o G-invariantes, si cumplen que $(L_g)^*(f) = f$, $(L_g)_*(X) = X$ y $(L_g)^*(\omega) = \omega$, para todo $g \in G$.

Las funciones G-invariantes son especialmente interesantes, pues son constantes sobre las órbitas.

Ejemplo 2.4.2. Algunos ejemplos de funciones G-invariantes.

- Considerando la acción de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ sobre $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ por conjugación, tenemos que las funciones $\det : \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (determinante), $\mathrm{Tra} : \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (Traza) y $\mathrm{P} : \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A \to \mathrm{P}(A) := \det(A - \lambda I)$ (Polinomio característico) son invariantes por ésta acción, pues para $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ y $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ se cumple:
  - $\det(gAg^{-1}) = \det(g)\det(A)\det(g^{-1}) = \det(A)\det(g)\det(g^{-1}) = \det(Agg^{-1}) = \det(A)$.
  - $\mathrm{Tra}(gAg^{-1}) = \mathrm{Tra}(Agg^{-1}) = \mathrm{Tra}(A)$.
  - $\det(gAg^{-1} - \lambda I) = \det(g(A - \lambda I)g^{-1}) = \det(A - \lambda I)$.
- Consideremos el grupo de los movimientos del plano actuando en $\mathbb{R}^2$, la forma de volumen $dx \wedge dy$ y el tensor $dx^2 + dy^2$ son invariantes bajo esta acción. En efecto, para $g = (A, b) \in \mathrm{Mov}(\mathbb{R}^2)$, con $A = (a_{ij}) \in \mathrm{SO}(2)$, se tiene que $(L_g)^*(dx) = a_{11}dx + a_{12}dy$ y $(L_g)^*(dy) = a_{21}dx + a_{22}dy$, luego

$$\begin{aligned}
&(L_g)^*(dx \wedge dy) = (L_g)^*(dx) \wedge (L_g)^*(dy) \\
&= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})dx \wedge dy = \det(A)dx \wedge dy = dx \wedge dy
\end{aligned}$$

  y

$$\begin{aligned}
&(L_g)^*(dx^2 + dy^2) = ((L_g)^*(dx))^2 + ((L_g)^*(dy))^2 \\
&= (a_{11}^2 + a_{21}^2)dx^2 + (a_{22}^2 + a_{12}^2)dy^2 + 2(a_{11}a_{12} + a_{22}a_{21})dx \otimes dy = dx^2 + dy^2.
\end{aligned}$$

  La última igualdad se da ya que las filas y las columnas de la matriz A tienen norma uno y son ortogonales entre si.

2.5 Acciones de álgebras de Lie

De la misma manera que los grupos actúan en las variedades suaves, lo hacen las álgebras de Lie. Si bien, en este caso los elementos del álgebra en vez de inducir difeomorfismos de la variedad, inducen "difeomorfismos infinitesimales", es decir, campos vectoriales.

Definición 2.5.1. Dada $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y M un a variedad, una acción de $\mathfrak{g}$ en M es un homomorfismo de álgebras de Lie $\phi' : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$.

Es costumbre, añadir constantemente el apelativo "infinitesimal" a todo lo que tiene que ver con la acción de un álgebra. De esta manera se habla de acciones infinitesimales, o acciones infinitesimalmente libres, infinitesimalmente transitivas, etc. Nosotros evitaremos este uso para no recargar la notación.

Definición 2.5.2. Una acción $\phi' : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$, se dice que es fiel si $\ker \phi' = \{0\}$. Decimos que la acción ϕ' es transitiva si para todo $p \in M$ y $X_p \in T_pM$, existe $V \in \mathfrak{g}$, tal que $\phi'(V)_p = X_p$, decimos que es libre si para cada $p \in M$, se tiene que la función $E_p \circ \phi' : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ es inyectiva, donde $E_p : \mathfrak{X}(M) \to \mathbb{R}$ es la función evaluación en p.

Definición 2.5.3. Un espacio infinitesimalmente homogéneo es una variedad (o un germen de variedad) dotado de una acción fiel y transitiva de un álgebra de Lie de dimensión finita.

Definición 2.5.4. Dada una acción $\phi' : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$, decimos que un campo, una función, o tensor, es invariante bajo esta acción, si cada uno de estos objetos son invariantes por el flujo de cualquier campo en la imagen de ϕ.

Con esto tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.5.5. *Un objeto Θ (bien sea función, campo o tensor) es invariantes por una acción $\phi' : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ si y solo si $\mathcal{L}_{\phi'(A)}\Theta = 0$ para todo $A \in \mathfrak{g}$.*

Demostración 2.5.6. *La implicación de izquierda a derecha se tiene por la definición de objeto invariante y por la definición de derivada de Lie. Para hacer la otra implicación supongamos un objeto Θ que cumple para todo $A \in \mathfrak{g}$ que $\mathcal{L}_{\phi'(A)}\Theta = 0$, para A fijo consideremos $\Theta_t = \sigma_t^*(\Theta)$, donde σ_t es el flujo del campo $X := \phi'(A)$, tenemos que $\frac{\partial}{\partial t}|_{t_0}\Theta_t = \mathcal{L}_X\Theta_{t_0}$, como $\mathcal{L}_X\Theta = 0$, tenemos que Θ es un punto fijo de este campo, de donde obtenemos que Θ es invariante por la acción del álgebra.*

2.5.1 Acción infinitesimal inducida por la acción de un grupo

Toda acción $\phi : G \times M \to M$ induce una acción del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre M como sigue. A cada $A \in \mathfrak{g}$ le asignamos el campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ definido para $p \in M$ por $X_p := \frac{d}{dt}exp(tA)p$. Ésta acción se le conoce con el nombre de acción infinitesimal del álgebra $\mathfrak{g}$ sobre M.

Una manera equivalente de definir la acción infinitesimal es la siguiente, para $V \in \mathfrak{g}$ tomemos $X \in \mathfrak{X}(M)^L$, tal que $X_e = V$. Si consideramos $(X, \{0\}) \in \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(M)$, se tiene que éste es proyectable sobre $\mathfrak{X}(M)$ bajo la aplicación $\mathrm{d}\phi$, luego nuestro homomorfismo $\phi' : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ lo definimos para $V \in \mathfrak{g}$ por $\phi'(V) := \mathrm{d}\phi\,(X, \{0\})$.

Ejemplo 2.5.7. :

1. Considerando la acción ϕ de $G = \mathrm{GL}(n)$ en $\mathbb{R}^n$ dada por $\phi(A, p) := Ap$, para $A \in G$ y $p \in \mathbb{R}^n$; luego la acción del álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ está dada por $\phi'(A)_p = \frac{d}{dt}|_{t=0}\exp(tA)p = \frac{d}{dt}|_{t=0}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tA)^k}{k!}\right)p = Ap$, con $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ y $p \in \mathbb{R}^n$. De una manera muy similar se demuestra para las acciones de los ejemplos 2.3.8 y 2.3.10 , que la acción infinitesimal inducida es igual esta última.

2. Tomando la acción de $\mathrm{O}(n)$ en $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ del ejemplo 2.3.6, denotémola por ϕ, para $A \in \mathfrak{o}(n)$ y $p \in \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$, se tiene que $\phi'(A)_p = \frac{d}{dt}|_{t=0}\left(\exp(tA)\cdot p\cdot \exp(tA)^T\right) = Ap + pA^T$

3. Consideremos ϕ la acción de $\mathrm{Mov}(\mathbb{R}^n)$=$\mathrm{O}(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$, en este caso el álgebra de Lie de dicho grupo es $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(n) \ltimes \mathbb{R}^n$. La acción $\phi' : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, se define como sigue, para $A \in \mathfrak{o}$, considere $\phi'(A,0)_p := \frac{d}{dt}|_{t=0}\exp(tA)p = Ap$ y para $x \in \mathbb{R}^n$, $\phi'(o,x)_p = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\exp(tx)+p) = x$, luego la acción para cualquier $(A,x) \in \mathfrak{g}$ viene dada por $\phi'(A,x)_p = Ap + x$, para $p \in \mathbb{R}^n$.

Aunque todo objeto invariante por G es invariante por la acción infinitesimal inducida de $\mathfrak{g}$, no siempre se cumple que todo objeto invariante por la acción infinitesimal lo es también por G. Para esto tiene que haber una condición en el grupo. Vamos a enunciar y demostrar un teorema en que se cumple la equivalencia. El siguiente teorema nos será de mucha utilidad.

Teorema 2.5.8. *Si G es un grupo conexo y U es un abierto entorno de la identidad, entonces para todo $g \in G$ existen $g_1, g_2, \cdots, g_n$ elementos de U tal que $g = g_1 \cdot g_2 \cdots g_n$.*

Demostración 2.5.9. *Supongamos G grupo conexo y U entorno abierto de la identidad en G, para demostrar el teorema veamos que el conjunto no vacío $\hat{U} := \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$, con $U_k := \{g_1 \cdot g_2 \cdots g_k | g_i \in U\}$, es un conjunto abierto y cerrado. Es abierto pues cada conjunto U_k es abierto; veamos que es cerrado, para esto tomemos g un punto de acumulación de $\hat{U}$. Si consideramos el conjunto $U^{-1} := \{g_i^{-1} \,|\, g_i \in U\}$ entonces se tiene que $L_g(U^{-1}) := \{g \cdot g_i^{-1} \,|\, g_i \in U\}$ es un entorno abierto de g y por lo tanto existe $\hat{g} \in \hat{U} \cap L_g(U^{-1})$, luego para algún $j \in \mathbb{N}$ y $h \in U^{-1}$ se tiene que $\hat{g} = g_1 \cdots g_j$ y $\hat{g} = gh$, de donde se sigue que $g = g_1 \cdots g_j h^{-1} \in U_{j+1} \subset \hat{U}$. Como $\hat{U}$ es un subconjunto abierto y cerrado no vacío de G y como G es conexo, entonces $G = \hat{U}$, de donde obtenemos el resultado deseado.*

Como para $\exp : \mathfrak{g} \to G$ se tiene que $d_0 \exp = Id_{\mathfrak{g}}$, luego por el teorema de la función implícita existen entornos U y V de Id y e respectivamente, tal que $\exp|_U : U \to V$ es un difeomorfismo, usando esto y el teorema anterior se tiene que para $g \in G$ existen $A_1, A_2, \cdots, A_n$ elementos de $\mathfrak{g}$ tal que $g = \exp(A_1)\exp(A_2)\cdots\exp(A_n)$.

Teorema 2.5.10. *Dado una acción $\phi : G \to Diff(M)$ y $\phi' : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ su acción infinitesimal. Si G es conexo entonces un tensor Θ en M es invariante por G si y sólo si para todo $A \in \mathfrak{g}, \mathcal{L}_{\phi'(A)}\Theta = 0$.*

Demostración 2.5.11. *Sea Θ un tensor $G-$invariante y $X := \phi'(A) \in \mathfrak{X}(M)$ con $A \in \mathfrak{g}$, si tomamos el flujo de X como $\sigma_t = L_{exp(tA)}$, luego $\mathcal{L}_X\Theta = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\sigma_t^*\Theta = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}L^*_{exp(tA)}\Theta = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\Theta = 0$. Ahora supongamos $\mathcal{L}_{\phi'(A)}\Theta = 0$, para todo $A \in \mathfrak{g}$; de esto se sigue que $L_{exp(tA)}\Theta = \Theta$ para todo $A \in \mathfrak{g}$ y $t \in \mathbb{R}$. Consideremos $g \in G$, del teorema anterior se tiene que $g = exp(A_1)exp(A_2)\cdots exp(A_n)$, con $A_i \in \mathfrak{g}$; luego $L_g^*\Theta = L^*_{exp(A_1)\cdots exp(A_n)}\Theta = L^*_{exp(A_1)}(L^*_{exp(A_1)}\cdots(L^*_{exp(A_1)}\Theta)\cdots) = \Theta$, por lo tanto Θ es G-invariante.*

Capítulo 3

Conexiones invariantes de los espacios homogéneos e infinitesimalmente homogéneos

3.1 Acción de los difeomorfismos sobre las conexiones tangentes

3.1.1 Imagen directa de una conexión tangente por un difeomorfismo

Sea $f\colon M \to N$ un difeomorfismo entre variedades. De forma natural el difeomorfismo f induce isomorfismos en todos los espacios de funciones y tensores asociados a M y a N. En particular tenemos la imagen directa (push-forward) de campos vectoriales $f_*\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(N)$. Por comodidad, al inverso de f_*, lo denominamos imagen inversa y lo denotamos f^*.

Si ∇ es una conexión tangente en M, podemos utilizar el difeomorfismo f para inducir entonces una conexión tangente en N. De esta manera, definimos una conexión tangente $f_*\nabla$ en N. Esto se hace de la única manera posible.

Definición 3.1.1. Se llama imagén directa de ∇ por f a la conexión tangente $f_*\nabla$ en N definida mediante la fórmula:

$$(f_*\nabla)_X Y = f_*(\nabla_{f^*X} f^*Y).$$

La imagen directa de conexiones es, por definición, compatible con la composición de difeomorfismos. Es decir, si $f\colon M \to N$ y $g\colon N \to N'$ son difeomorfismos, entonces $g_* \circ f_* = (f \circ g)_*$.

Consideremos ahora una acción suave de un grupo de Lie G en la variedad M. Se induce de forma natural una acción ϕ_* de G en el espacio afín $\mathrm{Cnx(TM)}$. Tiene sentido por tanto decir si una conexión es *invariante* o no por la acción de un grupo. Denotamos por $\mathrm{Cnx(TM)^G}$ al conjunto de las conexiones invariantes.

Las 1-formas con valor en endomorfirmos de TM son tensores de tipo 2-covariante 1-contravariante. Por tanto la acción de G en $\Omega^1(M, \mathrm{End}(TM))$ es un objeto conocido. Tiene sentido preguntarse si una 1-forma de este tipo es invariante por la acción del grupo. El espacio de 1-formas invariantes $\Omega^1(M, \mathrm{End}(TM))$ es claramente un espacio vectorial y un módulo sobre el anillo $\mathcal{C}^\infty(M)^G$ de las funciones suaves invariantes.

Teorema 3.1.2. *Si* $\mathrm{Cnx(TM)^G}$ *no es vacío, entonces está dotado de forma natural de una estructura de espacio afín, modelado sobre el espacio* $\Omega^1(M, End(T(M)))^G$*.*

Demostración 3.1.3. *De las definiciones de imagen directa e inversa de conexiones y de tensores, se tiene fácilmente que si ∇ es una conexión tangente y T una 1-forma con valores en End(TM) entonces para cada difeomorfismo f de M se tiene $f_*(\nabla + T) = f_*(\nabla) + f_*(T)$. De ahí se llega fácilmente al resultado esperado.*

3.1.2 Derivada de Lie de una conexión tangente en la dirección de un campo

La derivada de Lie, usualmente se define para campos vectoriales, o con algo más de generalidad para tensores de cualquier tipo. Existe una teoría general de la derivada de Lie, desarrollada en [4]. En particular es bien natural definir la derivada de Lie para secciones de fibrados afines que dependan de forma functorial de la variedad base. En este caso, que corresponde a las conexiones tangentes, puede tomarse una definición totalmente análoga a la clásica.

Definición 3.1.4. Sea X un campo vectorial en M, generador del grupo 1-paramétrico $\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ y ∇ una conexión tangente en M. Se define la derivada de Lie de ∇ en la dirección de X como la 1-forma con valores en End(TM),

$$\mathcal{L}_X\nabla = \lim_{t\to 0}\frac{\sigma_{-t*}\nabla - \nabla}{t}$$

donde el límite se calcula puntualmente en cada fibra $\text{Hom}(T_xM, \text{End}(T_xM)) \simeq \mathbb{R}^{n^3}$ para $x \in M$.

En la situación más general, si X no es un campo vectorial completo, se pueden utilizar particiones de la unidad para descomponer X como suma localmente finita de campos completos. La derivada de Lie es, por definición, lineal en la dirección de derivación, es decir, $\mathcal{L}_{fX+gY}\nabla = f(\mathcal{L}_X\nabla) + g(\mathcal{L}_Y\nabla)$.

Al ser $\mathcal{L}_X\nabla$ un tensor 2-covariante, 1-contravariante, el acoplamiento $(\mathcal{L}_X\nabla)(Y,Z)$ con una pareja Y, Z, de campos vectoriales debe ser un campo vectorial. Veamos como calcular este acoplamiento, lo que nos llevará a una fórmula análoga a la conocida para la derivada de Lie de campos tensoriales:

$$(\mathcal{L}_X\nabla)(Y,Z) = \lim_{t\to 0}\frac{\sigma_{-t*}\nabla - \nabla}{t}(Y,Z) = \lim_{t\to 0}\frac{(\sigma_{-t*}\nabla)_Y Z - \nabla_Y Z}{t} =$$
$$\lim_{t\to 0}\frac{\sigma_{-t*}(\nabla_Y Z) - \nabla_Y Z}{t} + \lim_{t\to 0}\frac{\sigma_{-t*}(\nabla_{\sigma_{t*}Y}\sigma_{t*}Z) - \sigma_{-t*}(\nabla_Y Z)}{t} =$$
$$[X, \nabla_Y Z] + \lim_{t\to 0}\sigma_{-t*}\frac{\nabla_{\sigma_{t*}Y}\sigma_{t*}Z - \nabla_Y Z}{t} =$$
$$[X, \nabla_Y Z] + \lim_{t\to 0}\frac{\nabla_{\sigma_{t*}Y}\sigma_{t*}Z - \nabla_Y\sigma_{t*}Z}{t} + \lim_{t\to 0}\frac{\nabla_Y\sigma_{t*}Z - \nabla_Y Z}{t} =$$
$$[X, \nabla_Y Z] + \lim_{t\to 0}\nabla_{\frac{\sigma_{*t}Y - Y}{t}}\sigma_{t*}Z + \lim_{t\to 0}\nabla_Y\frac{\sigma_{t*}Z - Z}{t} =$$
$$[X, \nabla_Y Z] - \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_Y[X,Z].$$

Es decir,

$$(\mathcal{L}_X\nabla)(Y,Z) = [X, \nabla_Y Z] - \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_Y[X,Z]. \tag{3.1}$$

Definición 3.1.5. Sea M una variedad y G un grupo de Lie actuando en M por difeomorfirmos. Decimos que una conexión ∇ es invariante por la acción de G, si para cada elemento $g \in G$ se tiene $L_{g*}\nabla = \nabla$.

Teorema 3.1.6. *Sea M un espacio homogéneo de grupo G, un grupo de Lie conexo. Consideremos $\phi' \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ la acción infinitesimal inducida. Sea ∇ una conexión tangente en M. La condición necesaria y suficiente para que ∇ sea invariante por G es que para cada $A \in \mathfrak{g}$, $\mathcal{L}_{\phi'(A)}\nabla = 0$.*

Atendiendo al resultado anterior, si ϕ' es una acción infinitesimal de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en una variedad M, decimos que ∇ es invariante si $\mathcal{L}_{\phi'(A)}\nabla = 0$ para cada $A \in \mathfrak{g}$.

De nuevo, si partimos de una acción infinitesimal de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, podemos también definir el espacio $\mathrm{Cnx}(\mathrm{TM})^{\mathfrak{g}}$. Se verifica el siguiente resultado:

Teorema 3.1.7. *Si $\mathrm{Cnx}(\mathrm{TM})^{\mathfrak{g}}$ no es vacío, entonces está dotado de forma natural de una estructura de espacio afín, modelado sobre el espacio $\Omega^1(M, End(T(M)))^{\mathfrak{g}}$.*

3.2 Espacios infinitesimalmente homogéneos de dimension 2

Los espacios infinitesimalmente homogéneos en dimensión 2 y 3, complejos, fueron clasificados por S. Lie en el siglo XIX. La clasificación real es algo más fina, y en el caso de dimensión 2 se encuentra en [2] y en [5].

En la tabla 3.1 reproducimos los resultados de [2], que clasifica las acciones fieles de álgebras de Lie de dimensión finita en abiertos del plano. Esta clasificación se entiende de la siguiente manera, suponiendo que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de dimensión finita real que actúa de forma fiel en un abierto U de una superficie, $\mathfrak{g}$ se puede identificar localmente con un álgebra real y analítica de campos vectoriales en un abierto de $\mathbb{R}^2$. De los resultados de González-López, Kamran, and Olver [2] se sigue que para cada $p \in U$, existen coordenadas locales de tal forma que $\mathfrak{g}$ se identifica con un álgebra de la tabla 3.1. En otras palabras, salvo isomorfismo y en coordenadas locales, todas las acciones fieles de álgebras de Lie reales de dimensión finita están descritas en la tabla 3.1.

Los casos 1-8 corresponden a las acciones primitivas (no dejan fija ninguna dirección en el espacio), y por tanto a espacios infinitesimalmente homogéneos que se conocen como isótropos (todas las direcciones son conjugadas). Los casos 9-11 corresponden a acciones que no son transitivas, se trata de la geometría de dimensión uno. Los casos 12-28 corresponden a espacios infinitesimalmente homogéneos y no isótropos. Es decir, los casos 1-8 y 12-28 corresponden a las diferentes estructuras de espacio infinitesimalmente homogéneo que admite un germen del plano.

En dicha tabla, las funciones ξ's que aparecen en los casos 20 y 21 deben ser linealmente independientes, y las funciones η's que aparecen en los casos 22 y 23 deben formar una base de soluciones para una ecuación diferencial lineal de orden r, con coeficientes constantes .

I. Acciones primitivas

	Generadores	Estructura
1.	$\{\partial_x, \partial_y, \alpha(x\partial_x + y\partial_y) + y\partial_x - x\partial_y\}$, $\alpha \geqslant 0$	$\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^2$
2.	$\{\partial_x, x\partial_x + y\partial_y, \left(x^2 - y^2\right)\partial_x + 2xy\partial_y\}$	$\mathfrak{sl}(2)$
3.	$\{y\partial_x - x\partial_y, (1 + x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y, 2xy\partial_x + (1 + y^2 - x^2)\partial_y\}$	$\mathfrak{so}(3)$
4.	$\{\partial_x, \partial_y, x\partial_x + y\partial_y, y\partial_y - x\partial_y\}$	$\mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^2$
5.	$\{\partial_x, \partial_y, x\partial_x - y\partial_y, y\partial_y, x\partial_y\}$	$\mathfrak{sl}(2) \ltimes \mathbb{R}^2$
6.	$\{\partial_x, \partial_y, x\partial_x, y\partial_y, x\partial_y, y\partial_y\}$	$\mathfrak{gl}(2) \ltimes \mathbb{R}^2$
7.	$\{\partial_x, \partial_y, x\partial_x + y\partial_y, y\partial_x - x\partial_y, \left(x^2 - y^2\right)\partial_x + 2xy\partial_y, 2xy\partial_y + (y^2 - x^2)\partial_y\}$	$\mathfrak{sl}(3,1)$
8.	$\{\partial_x, \partial_y, x\partial_x, x\partial_y, y\partial_x, y\partial_y, x^2\partial_x + xy\partial_y, xy\partial_x + y^2\partial_y\}$	$\mathfrak{sl}(3)$

II. Acciones no primitivas

	Generadores	Estructura
9.	$\{\partial_x\}$	$\mathbb{R}$
10.	$\{\partial_x, x\partial_x\}$	$\mathfrak{h}_2$
11.	$\{\partial_x, x\partial_x, x^2\partial_x\}$	$\mathfrak{sl}(2)$
12.	$\{\partial_x, \partial_y, x\partial_x + \alpha y\partial_y\}$	$\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^2$
13.	$\{\partial_x, \partial_y, x\partial_x, y\partial_y\}$	$\mathfrak{h}_2 \oplus \mathfrak{h}_2$
14.	$\{\partial_x, \partial_y, x\partial_x, x^2\partial_y\}$	$\mathfrak{gl}(2)$
15.	$\{\partial_x, \partial_y, x\partial_x, y\partial_y, x^2\partial_x, y^2\partial_y\}$	$\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$
16.	$\{\partial_x, \partial_y, x\partial_x, y\partial_y, x^2\partial_x, \}$	$\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{h}_2$
17.	$\{\partial_x + \partial_y, x\partial_x + y\partial_y, x^2\partial_x + y^2\partial_y\}$	$\mathfrak{sl}(2)$
18.	$\{\partial_x, 2x\partial_x + y\partial_y, x^2\partial_x + xy\partial_y\}$	$\mathfrak{sl}(2)$
19.	$\{\partial_x, x\partial_x, y\partial_y, x^2\partial_x + xy\partial_y\}$	$\mathfrak{gl}(2)$
20.	$\{\partial_y, \xi_1(x)dy, \cdots, \xi_r(x)dy\}, r \geq 1$	$\mathbb{R}^{r+1}$
21.	$\{\partial_y, y\partial_y, \xi_1(x)\partial_y, \cdots, \xi_r(x)\partial_y\}$, con $r \geq 1$	$\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^{r+1}$
22.	$\{\partial_x, \eta(x)_1\partial_y, \cdots, \eta_r(x)\partial_y\}, r \geq 1$	$\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^{r+1}$
23.	$\{\partial_x, y\partial_y, \eta_1(x)\partial_y, \cdots, \eta_r(x)\partial_y\}, r \geq 1$	$\mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^r$
24.	$\{\partial_x, \partial_y, x\partial_x + \alpha y\partial_y, x\partial_y, \cdots, x^r\partial_y\}, r \geq 1$	$\mathfrak{h}_2 \ltimes \mathbb{R}^{r+1}$
25.	$\{\partial_x, \partial_y, x\partial_y, \cdots, x^{r-1}\partial_y, x\partial_x + (ry + x^r)\,\partial_y\}, r \geq 1$	$\mathbb{R} \oplus (\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^r)$
26.	$\{\partial_x, \partial_y, x\partial_x, x\partial_y, y\partial_y, x^2\partial_y, \cdots, x^r\partial_y\}, r \geq 1$	$(\mathfrak{h}_2 \oplus \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^{r+1}$
27.	$\{\partial_x, \partial_y, 2x\partial_x + ry\partial_y, x\partial_y, x^2\partial_x + rxy\partial_y, x^2\partial_y, \cdots, x^r\partial_y\}, r \geq 1$	$\mathfrak{sl}(2) \ltimes \mathbb{R}^{r+1}$
28.	$\{\partial_x, \partial_y, x\partial_x, x\partial_y, y\partial_y, x^2\partial_x + rxy\partial_y, x^2\partial_y, \cdots, x^r\partial_y\}, r \geq 1$	$\mathfrak{gl}(2) \ltimes \mathbb{R}^{r+1}$

TABLA 3.1: Clasificación local de las acciones fieles de álgebras de Lie de dimensión finita en variedades de dimensión 2.

3.3 Conexiones invariantes de los espacios infinitesimalmente homogéneos de dimensión 2

Atendiendo la observación 1.4.8, sabemos que una conexión en un abierto de $\mathbb{R}^2$ es de la forma

$$\nabla = \nabla_0 + \Gamma,$$

donde ∇_0 es la conexión usual de $\mathbb{R}^2$.
Como nosotros estamos interesados en encontrar conexiones invariantes en el plano, basta con encontrar condiciones sobre los símbolos Γ_{ij}^l, las cuales se obtienen analizando las ecuaciones

$$(\mathcal{L}_X \nabla)_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} = 0,$$

para $X \in \mathfrak{g}$ en un sistema de generadores y $\partial_{x_i}, \partial_{x_j} \in \{\partial_x, \partial_y\}$.

Todos nuestros cálculos se harán a partir de la identidad

$$(\mathcal{L}_X \nabla)_Y Z = [X, \nabla_Y Z] - \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_Y [X, Z], \tag{3.2}$$

donde X, Y y Z son campos vectoriales, además asumiendo que $\partial_{x_1} = \partial_x = \frac{\partial}{\partial_x}$ y $\partial_{x_2} = \partial_y = \frac{\partial}{\partial_y}$ utilizaremos que

$$\nabla_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} = \Gamma_{ij}^1 \partial_x + \Gamma_{ij}^2 \partial_y, \tag{3.3}$$

con $i, j \in \{1, 2\}$.

Antes de comenzar con nuestros cálculos lo siguiente nos será de mucha utilidad. Vamos a determinar las posibles conexiones en el plano que son invariantes por la acción infinitesimal de $\mathfrak{g}$. Como ya sabemos, si ∇ es una tal conexión, se debe verificar que

$$(\mathcal{L}_X \nabla)_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} = 0,$$

para cada $X \in \mathfrak{g}$ y cada $i, j \in \{1, 2\}$.

Atendiendo la identidad 3.2 tenemos

$$\left(\mathcal{L}_{\partial_{x_i}} \nabla\right)_{\partial_{x_j}} \partial_{x_k} = \left[\partial_{x_i}, \nabla_{\partial_{x_j}} \partial_{x_k}\right] - \nabla_{\left[\partial_{x_i}, \partial_{x_j}\right]} \partial_{x_k} - \nabla_{\partial_{x_j}} \left[\partial_{x_i}, \partial_{x_k}\right],$$

donde $i, j, k \in \{1, 2\}$. Dado que $\left[\partial_{x_i}, \partial_{x_j}\right] = 0$, cualesquiera sean $i, j \in \{1, 2\}$, la igualdad anterior se reduce a

$$\left(\mathcal{L}_{\partial_{x_i}} \nabla\right)_{\partial_{x_j}} \partial_{x_k} = \left[\partial_{x_i}, \nabla_{\partial_{x_j}} \partial_{x_k}\right].$$

De este modo, ∇ es invariante por la acción de $\mathfrak{g}$ si y sólo si se verifican las igualdades

$$\left[\partial_{x_i}, \nabla_{\partial_{x_j}} \partial_{x_k}\right] = 0,$$

o de forma equivalente

$$\partial_{x_i} \Gamma_{jk}^l = 0, \tag{3.4}$$

para cada $i, j, k, l \in \{1, 2\}$.

Observación 3.3.1. En el caso en que ∂_x o ∂_y están en el álgebra $\mathfrak{g}$, entonces por el computo anterior se sigue que los símbolos de Christoffel en dicha álgebra son funciones que solo depende de x o de y, según sea el caso. Cuando ambos operadores están en el álgebra se tendrá que los símbolos serán constantes.

En el caso donde los símbolos Γ_{ij}^l sean todos nulos, en éste se tendrá que la única conexión invariante es la usual.

En adelante por comodidad en la escritura, supondremos que i, j, k, l son subíndices o superíndices que tomarán valores en $\{1, 2\}$.

Por cuestiones de espacio y ya que los cómputos tienden a ser repetitivos y en algunos casos similares, haremos ciertos cómputos de manera detallada, en los demás simplemente se dará el resultado y su procedencia. Procedemos con el cálculo de las conexiones invariantes para cada caso de la tabla 3.1.

1. Consideremos el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \langle \partial_x, \partial_y, \alpha(x\partial_x + y\partial_y) + y\partial_x - x\partial_y \rangle$, $\alpha \geq 0$. Atendiendo la observación 3.3.1, se concluye que los Γ_{ij}^l son constantes.

   Si hacemos $X\alpha = (x\partial_x + y\partial_y) + y\partial_x - x\partial_y$, de manera sencilla se obtiene que

   $$[X, \partial_x] = -\alpha\partial_x + \partial_y \text{ y } [X, \partial_y] = -\partial_x - \alpha\partial_y,$$

   utilizando esto, las propiedades de ∇ y la identidad 3.2 se tiene

   $$\begin{aligned}
   (L_X\nabla)_{\partial_x} \partial_x &= [X, \nabla_{\partial_x}\partial_x] - \nabla_{[X,\partial_x]}\partial_x - \nabla_{\partial_x} [X, \partial_x] \\
   &= -\left(\Gamma_{11}^1\partial_x + \Gamma_{11}^2\partial_y\right) X + 2\alpha\nabla_{\partial_x}\partial_x - \nabla_{\partial_y}\partial_x - \nabla_{\partial_x}\partial_y \\
   &= -\alpha\Gamma_{11}^1\partial_x + \Gamma_{11}^1\partial_y - \Gamma_{11}^2\partial_x - \alpha\Gamma_{11}^2\partial_y + 2\alpha\nabla_{\partial_x}\partial_x - \nabla_{\partial_y}\partial_x - \nabla_{\partial_x}\partial_y \\
   &= \left(\alpha\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{12}^1\right)\partial_x + \left(\alpha\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{12}^2\right)\partial_y.
   \end{aligned}$$

   Como queremos que la conexión sea invariante, entonces se tiene que cumplir que $(L_X\nabla)_{\partial_x} \partial_x = 0$, esto implica que los coeficientes de los referenciales sean iguales a cero, lo que nos proporciona el siguiente sistema de ecuaciones

   $$\begin{aligned}
   \alpha\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{21}^1 &= 0, \\
   \alpha\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{21}^2 &= 0.
   \end{aligned}$$

   Cómo los siguientes resultados se obtienen de la misma manera, simplemente se darán los sistema de ecuaciones y su procedencia, el lector podrá verificarlos con unas simples cuentas.

   - $(L_X\nabla)_{\partial_x} \partial_y = 0$

   $$\begin{aligned}
   \alpha\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{11}^1 &= 0, \\
   \alpha\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{11}^2 &= 0.
   \end{aligned}$$

- $(L_X\nabla)_{\partial_y}\partial_x = 0$

$$\begin{aligned}\alpha\Gamma_{21}^1 - \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 &= 0,\\ \alpha\Gamma_{21}^2 + \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2 &= 0.\end{aligned}$$

- $(L_X\nabla)_{\partial_y}\partial_y = 0$

$$\begin{aligned}\alpha\Gamma_{22}^1 - \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{21}^1 &= 0,\\ \alpha\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2 &= 0.\end{aligned}$$

Estos sistemas los podemos representar en el siguiente arreglo matricial:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & \alpha & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & \alpha & -1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha & -1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \alpha & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \alpha & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix}\Gamma_{11}^1\\ \Gamma_{11}^2\\ \Gamma_{12}^1\\ \Gamma_{12}^2\\ \Gamma_{21}^1\\ \Gamma_{21}^2\\ \Gamma_{22}^1\\ \Gamma_{22}^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},$$

El determinante de la matriz está dado por el polinomio $\alpha^8+12\alpha^6+30\alpha^4+28\alpha^2+9$. Como este determinante es distinto de cero para $\alpha \geq 0$, luego el sistema tiene sentido cuando $\Gamma_{ij}^l = 0$ para todo $i, j, l \in \{1, 2\}$. En este caso la única conexión invariante es la conexión usual en $\mathbb{R}^2$.

2. Sea $\mathfrak{g} = \left\langle \partial_x, x\partial_x + y\partial_y, \left(x^2 - y^2\right)\partial_x + 2xy\partial_y \right\rangle$.

   Haciendo
   $$Y = x\partial_x + y\partial_y \text{ y } Z = \left(x^2 - y^2\right)\partial_x + 2xy\partial_y,$$
   obtenemos que $[\partial_x, Y] = \partial_x$, $[\partial_x, Z] = 2Y$ y $[Y, Z] = Z$.

   Como $\partial_x \in \mathfrak{g}$ de la observación 3.3.1 se tiene que Γ_{ij}^l son funciones que solo dependen de y.

   - De $(L_Y\nabla)_{\partial_{x_i}}\partial_{x_j} = 0$ obtenemos las ecuaciones diferenciales

   $$y\partial_y\Gamma_{ij}^l + \Gamma_{ij}^l = 0, \tag{3.5}$$

     Al resolver éstas ecuaciones diferenciales para cada i, j, tenemos que las soluciones vienen dadas por

   $$\Gamma_{ij}^l = \frac{c_{ij}^l}{y},$$

     con $c_{ij}^l \in \mathbb{R}$

Con el fin de que el lector se familiarice con las cuentas, haremos los cómputos de $(L_Y\nabla)_{\partial_{x_i}}\partial_{x_j} = 0$ para $i = j = 1$, los demás casos se hacen de manera similar.
De la identidad 3.2 se tiene que

$$\begin{aligned}(L_Y\nabla)_{\partial_{x_1}}\partial_{x_1} &= \left[Y, \nabla_{\partial_{x_1}}\partial_{x_1}\right] - \nabla_{\left[Y,\partial_{x_1}\right]}\partial_{x_1} - \nabla_{\partial_{x_1}}[Y,\partial_{x_1}] \\ &= \left[Y, \nabla_{\partial_{x_1}}\partial_{x_1}\right] + 2\nabla_{\partial_{x_1}}\partial_{x_1} \\ &= \left[Y, \Gamma_{11}^1\partial_x + \Gamma_{11}^2\partial_y\right] + \left(2\Gamma_{11}^1\partial_x + 2\Gamma_{11}^2\partial_y\right).\end{aligned}$$

Usando las propiedades del corchete de Lie y 3.3 obtenemos

$$\begin{aligned}\left[Y, \Gamma_{11}^1\partial_x + \Gamma_{11}^2\partial_y\right] &= \left[Y, \Gamma_{11}^1\partial_x\right] + \left[Y, \Gamma_{11}^2\partial_y\right] \\ &= Y\Gamma_{11}^1\partial_x - \Gamma_{11}^1\partial_x Y + \\ &\quad Y\Gamma_{11}^2\partial_y - \Gamma_{11}^2\partial_y Y \\ &= \left(-\Gamma_{11}^1 + y\partial_y\Gamma_{11}^1\right)\partial_x + \left(-\Gamma_{11}^2 + y\partial_y\Gamma_{11}^2\right)\partial_y.\end{aligned}$$

Luego $(L_Y\nabla)_{\partial_{x_1}}\partial_{x_1} = \left(y\partial_y\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^1\right)\partial_x + \left(y\partial_y\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{22}^2\right)\partial_y$.

- De $(L_Z\nabla)_{\partial_x}\partial_x = 0$, $(L_Z\nabla)_Z Z = 0$, $(L_Z\nabla)_X Y = 0$, $(L_Z\nabla)_Z X = 0$, $(L_Z\nabla)_Y Y = 0$ y $(L_Z\nabla)_Y X = 0$ se obtienen respectivamente los siguientes sistemas de de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{12}^1 + 1 &= 0, \\ -\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{12}^2 &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{11}^2 &= -1, \\ \Gamma_{12}^2 &= -\Gamma_{21}^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{22}^1 + \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 &= 0, \\ \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^1 &= -1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^1 &= -1 \\ \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{22}^2 &= 1\end{aligned}$$

$$\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{22}^2 = -1,$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{22}^1 + \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{11}^1 &= 0, \\ \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{21}^1 &= -1.\end{aligned}$$

Al resolver conjuntamente dichos sistemas, se obtiene que la única conexión invariante es la que tiene símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0,\\
\Gamma^1_{12} &= \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{22} = \frac{-1}{y},\\
\Gamma^2_{11} &= \frac{1}{y}.
\end{aligned}$$

Esto no debe sorprendernos, pues este caso corresponde a la geometría del plano hiperbólico, y la anterior es la conexión de Levi-Civita asociada.

3. Sea $\mathfrak{g} = \left\langle y\partial_x - x\partial_y, (1+x^2-y^2)\partial_x + 2xy\partial_y, 2xy\partial_x + (1+y^2-x^2)\partial_y \right\rangle$.

   Para hacer mas asequible los cómputos, haremos un cambio de coordenadas, para esto consideremos la función

$$\begin{array}{rccl}
\Phi: & \mathbb{R}^2 - [0,\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R}\times[0,2\pi] \\
 & (x,y) & \longmapsto & \Phi((x,y)) = (\sqrt{x^2+y^2}, \arctan(y/x))
\end{array},$$

   tenemos que

$$\begin{aligned}
\Phi_*(\partial_x) &= \cos\theta\partial_r - \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta,\\
\Phi_*(\partial_y) &= \sin\theta\partial_r + \frac{\cos\theta}{r}\partial_\theta.
\end{aligned}$$

   Luego los campos de $\mathfrak{g}$ en las nuevas coordenadas quedan dados por

$$\begin{aligned}
X &= \Phi_*\Big(y\partial_x - x\partial_y\Big) = -\partial_\theta,\\
Y &= \Phi_*\Big((1+x^2-y^2)\partial_x + 2xy\partial_y\Big) = (1+r^2)\cos\theta\partial_r - \frac{1-r^2}{r}\sin\theta\partial_\theta,\\
Z &= \Phi_*\Big(2xy\partial_x + (1+y^2-x^2)\partial_y\Big) = (1+r^2)\sin\theta\partial_r - \frac{(1-r^2)}{r}\cos\theta\partial_\theta.
\end{aligned}$$

   Para nuestros cómputos serán necesarios los siguientes corchetes de Lie

$$\begin{aligned}
[\partial_\theta, Y] &= -(1+r^2)\sin\theta\partial_r - \frac{(1-r^2)}{r^2}\sin\theta\partial_\theta,\\
[\partial_r, Y] &= 2r\cos\theta\partial_r + \frac{(r^2+1)}{r^2}\sin\theta\partial_\theta.
\end{aligned}$$

   - De $(L_{\partial_\theta})_{\partial_{x_i}}\partial_{x_j} = 0$, tomando $\partial_{x_i}, \partial_{x_j} \in \{\partial_\theta, \partial_r\}$ y asumiendo que $\partial_{x_1} = \partial_\theta$ y $\partial_{x_2} = \partial_r$, obtenemos para $i,j \in \{1,2\}$ los sistemas

$$-\partial_\theta\Gamma^1_{ij}\partial_r - \partial_\theta\Gamma^2_{ij}\partial_\theta = 0,$$

     de donde $\partial_\theta\Gamma^l_{ij} = 0$, y por consiguiente se tiene que los coeficientes Γ^l_{ij} dependen solo de r.
   - Para $(L_Y)_{\partial_\theta}\partial_\theta = 0$ se tiene

$$
\begin{aligned}
0 =& \Big((1+r^2) cos\theta(\partial_r \Gamma^1_{22} - 1) + (1+r^2)\sin\theta(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12} - \Gamma^1_{21}) \\
& - \frac{2}{r}\cos\theta \Gamma^1_{22}\Big)\partial_r \\
& + \Big((1+r^2)\cos\theta \partial_r \Gamma^2_{22} - \frac{(r^2+1)}{r^2}\sin\theta\Gamma^1_{22} - (1+r^2)\sin\theta(\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{21}) \\
& - \frac{(1-r^2)}{r}\cos\theta\Gamma^2_{22} + \frac{(1-r^2)}{r}\sin\theta\Big)\partial_\theta.
\end{aligned}
$$

Haciendo $\cos\theta = 0, \sin\theta = 1$ y $\cos\theta = 1, \sin\theta = 0$ obtenemos los sistemas

$$
\frac{1}{r}\Gamma^1_{22} + r(\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{21}) - \frac{(1-r^2)}{r^2+1} = 0, \tag{3.6}
$$

$$
\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12} - \Gamma^1_{21} = 0, \tag{3.7}
$$

$$
(1+r^2)\partial_r \Gamma^1_{22} - \frac{2}{r}\Gamma^1_{22} - (1+r^2) = 0, \tag{3.8}
$$

$$
(1+r^2)\partial_r \Gamma^2_{22} - \frac{(1-r^2)}{r}\Gamma^2_{22} = 0. \tag{3.9}
$$

- Para $(L_Y)_{\partial_\theta}\, \partial_r = 0$ tenemos

$$
\begin{aligned}
0 =& \Big((1+r^2)\cos\theta\partial_r \Gamma^1_{21} - \frac{(1-r^2)}{r}\cos\theta\Gamma^1_{21} + (1+r^2)\sin\theta(\Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{11}) \\
& + \frac{(1+r^2)}{r^2}\sin\theta\Gamma^1_{22} - 2r\sin\theta\Big)\partial_r + \\
& \Big((1+r^2)\cos\theta\partial_r\Gamma^2_{21} + \frac{(r^2+1)}{r^2}\sin\theta(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{21}) + 2r\cos\theta\Gamma^2_{21} \\
& - (1+r^2)\sin\theta\Gamma^2_{11} + \frac{(r^2+1)}{r^2}\cos\theta\Big)\partial_\theta.
\end{aligned}
$$

Con $\cos\theta = 0, \sin\theta = 1$ y $\cos\theta = 1, \sin\theta = 0$ obtenemos

$$
\Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{11} + \frac{1}{r^2}\Gamma^1_{22} - \frac{2r}{r^2+1} = 0, \tag{3.10}
$$

$$
\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{21} - r^2\Gamma^2_{11} = 0, \tag{3.11}
$$

$$
(1+r^2)\partial_r\Gamma^1_{21} + 2r\Gamma^2_{21} + \frac{r^2+1}{r^2} = 0, \tag{3.12}
$$

$$
(1+r^2)\partial_r\Gamma^1_{21} - \frac{(1-r^2)}{r}\Gamma^1_{21} = 0. \tag{3.13}
$$

- De $(L_Y)_{\partial_r}\, \partial_\theta = 0$ tenemos

$$
\begin{aligned}
0 =& \Big((1+r^2)\partial_r \Gamma_{12}^1 \cos\theta - \frac{(1-r^2)}{r}\Gamma_{12}^1 \cos\theta + (1+r^2)(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1)\sin\theta \\
&+ \frac{(1+r^2)}{r^2}\sin\theta - 2r\sin\theta \Big)\partial_r + \\
&\Big((1+r^2)\partial_r \Gamma_{12}^2 \cos\theta - \frac{(r^2+1)}{r^2}\Gamma_{12}^1 \sin\theta + 2r\Gamma_{12}^2\cos\theta + \frac{(r^2+1)}{r^2}\Gamma_{22}^2 \sin\theta \\
&- (1+r^2)\Gamma_{11}^2 \sin\theta + \frac{(r^2+1)}{r^2}\cos\theta \Big)\partial_\theta .
\end{aligned}
$$

De esto obtenemos los sistemas

$$
\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 + \frac{1}{r^2}\Gamma_{22}^1 - \frac{2r}{r^2+1} = 0, \tag{3.14}
$$

$$
-\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 - r^2\Gamma_{11}^2 = 0, \tag{3.15}
$$

$$
(1+r^2)\partial_r \Gamma_{12}^2 + 2r\Gamma_{12}^2 + \frac{r^2+1}{r^2} = 0, \tag{3.16}
$$

$$
(1+r^2)\partial_r \Gamma_{12}^1 - \frac{(1-r^2)}{r}\Gamma_{12}^1 = 0. \tag{3.17}
$$

- De $(L_Y)_{\partial_r}\partial_r = 0$ tenemos

$$
\begin{aligned}
0 = & \Big((1+r^2)\partial_r \Gamma_{11}^1 \cos\theta + 2r\Gamma_{11}^1 \cos\theta + (1+r^2)\Gamma_{11}^2 \sin\theta + \\
&+ \frac{(r^2+1)}{r^2}(\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{12}^1)\sin\theta + 2\cos\theta \Big)\partial_r + \\
&\Big((1+r^2)\partial_r \Gamma_{11}^1 \cos\theta + \frac{(r^2+1)}{r^2}(\Gamma_{21}^2 + \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) + \\
&\frac{(3r^2+1)}{r}\Gamma_{11}^2 - \frac{2}{r^3}\sin\theta \Big)\partial_\theta .
\end{aligned}
$$

De esto se desprenden los siguientes sistemas

$$
\Gamma_{21}^2 + \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 - \frac{2}{r(r^2+1)} = 0, \tag{3.18}
$$

$$
r^2\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{12}^1 = 0, \tag{3.19}
$$

$$
(1+r^2)\partial_r \Gamma_{11}^2 + \frac{(3r^2+1)}{r}\Gamma_{11}^2 = 0, \tag{3.20}
$$

$$
(1+r^2)\partial_r \Gamma_{11}^1 + 2r\Gamma_{11}^1 + 2 = 0. \tag{3.21}
$$

Al solucionar las ecuaciones diferenciales 3.8, 3.9, 3.13, 3.12, 3.17, 3.16, 3.21 y 3.20, obtenemos que

$$\Gamma^1_{12} = \frac{c^1_{12} r}{r^2+1}, \qquad \Gamma^1_{21} = \frac{c^1_{21} r}{r^2+1},$$
$$\Gamma^2_{12} = \frac{c^2_{12}}{r^2+1} + \frac{1-r^2}{r3+r}, \qquad \Gamma^2_{21} = \frac{c^2_{21}}{r^2+1} + \frac{1-r^2}{r3+r},$$
$$\Gamma^1_{11} = \frac{c^1_{11} - 2r}{r^2+1}, \qquad \Gamma^2_{11} = \frac{c^2_{11}}{r(r^2+1)},$$
$$\Gamma^1_{22} = \frac{c^1_{22} r^2}{r^2+1} + \frac{r(r^2-1)}{r^2+1}, \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{c^2_{22} r}{r^2+1}.$$

Con $c^l_{ij} \in \mathbb{R}$, e $i, j, l \in \{1, 2\}$.
Reemplazando $\Gamma^1_{12}, \Gamma^1_{21}, \Gamma^2_{22}, \Gamma^2_{11}$ en las ecuaciones 3.7, 3.11, 3.15 y 3.19, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} c^2_{22} - c^1_{21} - c^1_{12} &= 0, \\ c^2_{22} - c^1_{21} - c^2_{11} &= 0, \\ c^2_{12} + c^2_{22} + c^2_{11} &= 0, \\ c^2_{11} + c^1_{21} + c^1_{12} &= 0. \end{aligned}$$

Al resolver este sistema se tiene que $c^2_{11} = c^2_{22} = c^1_{12} = c^1_{21} = 0$, en consecuencia

$$\Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0.$$

Si reemplazamos $\Gamma^1_{22}, \Gamma^2_{21}, \Gamma^2_{12}, \Gamma^1_{11}$ en las ecuaciones 3.6, 3.10, 3.9, 3.21 y hacemos $r = 1$, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} c^1_{22} + c^2_{21} + c^2_{12} &= 0, \\ c^2_{21} - c^1_{11} + c^1_{22} &= 0, \\ c^2_{12} - c^1_{11} + c^1_{22} &= 0, \end{aligned}$$

en que su solución viene dada por $c^2_{12} = c^2_{21} = c^1_{11} = c^1_{22} = 0$, por consiguiente tenemos que la única conexión invariante es la que tiene por símbolos de Christoffel en las coordenadas estereográficas polares r, θ:

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{(1-r^2)}{r(r^2+1)}, \qquad \Gamma^1_{11} = \frac{-2r}{r^2+1}, \qquad \Gamma^1_{22} = \frac{r(r^2-1)}{r^2+1}.$$

Esto no debe sorprendernos, pues este caso corresponde a la geometría de la esfera, y la anterior es la conexión de Levi-Civita asociada, en coordenadas estereográficas polares.

4. Consideremos $\mathfrak{g} = \langle \partial_x, \partial_y, x\partial_x + y\partial_y, y\partial_y - x\partial_y \rangle$.

   Como el álgebra del caso 1 está contenida en esta álgebra, se sigue entonces que $\Gamma^l_{ij} = 0$ para $i, j, l \in \{1, 2\}$.

5. Sea $\mathfrak{g} = \langle \partial_x, \partial_y, x\partial_x - y\partial_y, y\partial_y, x\partial_y \rangle$.

Como $\partial_x, \partial_y \in \mathfrak{g}$ por la Observación 3.3.1 se tiene que los Γ_{ij}^l son constantes.

- De $\left(L_{x\partial_y}\nabla\right)_{\partial_y}\partial_y = 0$, $\left(\mathcal{L}_{x\partial_y}\nabla\right)_{\partial_y}\partial_x = 0$, $\left(\mathcal{L}_{x\partial_y}\nabla\right)_{\partial_x}\partial_y = 0$, $(\mathcal{L}_{y\partial_x}\nabla)_{\partial_x}\partial_x = 0$, $(\mathcal{L}_{y\partial_x}\nabla)_{\partial_x}\partial_y = 0$ y $(\mathcal{L}_{y\partial_x}\nabla)_{\partial_y}\partial_x = 0$ se obtienen respectivamente las igualdades $\Gamma_{22}^1 = 0, \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2, \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{12}^1, \Gamma_{11}^2 = 0, \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^1$ y $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^2$.
  En resumen se obtiene las igualdades
  $$\Gamma_{22}^2 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1, \tag{3.22a}$$
  $$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2, \tag{3.22b}$$
  $$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = 0. \tag{3.22c}$$
- Haciendo $Z = x\partial_x - y\partial_y$, de $(\mathcal{L}_Z\nabla)_{\partial_x}\partial_y = 0$ se tiene $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0$.

De todo lo anterior se concluye que los símbolos de Christoffel vienen dados por

$$\Gamma_{ij}^l = 0, \text{ para } i,j,l \in \{1,2\}.$$

Luego la única conexión invariante por esta álgebra es la usual en $\mathbb{R}^2$.

6. Sea $\mathfrak{g} = \langle \partial_x, \partial_y, x\partial_x, y\partial_y, x\partial_y, y\partial_y \rangle$.
   Ya sabemos que Γ_{ij}^l son constantes para todo $i,j,l \in \{1,2\}$ y además por cómputos realizados en el álgebra anterior se tienen las igualdades 3.22.
   - Cuando hacemos $(\mathcal{L}_{x\partial_x}\nabla)_{\partial_x}\partial_x = 0$ obtenemos $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0$.
   - De $\left(\mathcal{L}_{y\partial_y}\nabla\right)_{\partial_y}\partial_y = 0$ se tiene $\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0$.

   De nuevo obtenemos que la única conexión invariante es la conexión usual:
   $$\Gamma_{ij}^l = 0 \text{ con } i,j,l \in \{1,2\}.$$
7. Sea $\mathfrak{g} = \left\langle \partial_x, \partial_y, x\partial_x + y\partial_y, y\partial_x - x\partial_y, \left(x^2 - y^2\right)\partial_x + 2xy\partial_y, 2xy\partial_y + (y^2 - x^2)\partial_y \right\rangle$.
   Como el álgebra del caso 5 está contenida en ésta álgebra, tenemos de nuevo
   $$\Gamma_{ij}^l = 0 \text{ para } i,j,l \in \{1,2\}.$$
   Tomando $Y = \left(x^2 - y^2\right)\partial_x + 2xy\partial_y$, se tiene que $[\partial_x, Y] = 2x\partial_x + 2y\partial_y$,utilizando esto y el hecho de que $\Gamma_{ij}^l = 0$ en $(\mathcal{L}_Y\nabla)_{\partial_x}\partial_x = 0$, se tiene que $2\partial_x + 2\partial_y = 0$, lo que es absurdo. Luego se concluye en este caso que el conjunto de las conexiones invariantes es vacío.
8. Sea $\mathfrak{g} = \{\partial_x, \partial_y, x\partial_x, x\partial_y, y\partial_x, y\partial_y, x^2\partial_x + xy\partial_y, xy\partial_x + y^2\partial_y\}$.
   En éste caso se obtiene de nuevo $\Gamma_{ij}^l = 0$ para $i,j,l \in \{1,2\}$, pues el álgebra descrita en el caso 6 está contenida en ésta álgebra. Nuevamente, si tomamos $Y = x^2\partial_x + xy\partial_y$, se tiene que $[\partial_x, Y] = 2xd + y\partial_y$ y de $(\mathcal{L}_Y\nabla)_{\partial_x}\partial_x = 0$ se sigue que $2\partial_x = 0$, imposible. Por lo tanto no hay conexiones invariantes en este caso.

9. Sea $\mathfrak{g} = \langle \partial_x \rangle$.

   De $(\mathcal{L}_{\partial_x}\nabla)_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} = 0$, obtenemos que los símbolos Γ^l_{ij} dependen solo de y. En este caso tenemos que el conjunto de conexiones invariantes por la acción de $\mathfrak{g}$ es infinito.

10. Sea $\mathfrak{g} = \langle \partial_x, x\partial_x \rangle$.

    Del álgebra anterior tenemos que Γ^l_{ij} depende solo de y. De $(\mathcal{L}_{x\partial_x}\nabla)_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} = 0$, con $i, j, l \in \{1, 2\}$ se sigue que $\Gamma^l_{ij} = 0$, excepto los símbolos $\Gamma^1_{12}, \Gamma^1_{21}, \Gamma^2_{22}$, que son funciones de y . De lo cual concluimos que en este caso hay infinitas conexiones invariantes por la acción de $\mathfrak{g}$.

11. $\mathfrak{g} = \left\langle \partial_x, x\partial_x, x^2\partial_x \right\rangle$.

    Del álgebra anterior, tenemos que $\Gamma^l_{ij} = 0$ excepto Γ^2_{22}, $\Gamma^1_{21}, \Gamma^1_{12}$ que son funciones de y, como $\Gamma^1_{11} = 0$, luego de $\left(\mathcal{L}_{x^2\partial_x}\nabla\right)_{\partial_x} \partial_x = 0$ se sigue que $2\partial_x = 0$, lo cual no es posible, concluimos en este caso que no hay conexiones invariantes.

12. $\mathfrak{g} = \langle \partial_x, \partial_y, x\partial_x + \alpha y\partial_y \rangle$, $0 < |\alpha| \leq 1$.

    Se sabe de antemano que los símbolos Γ^l_{ij} son funciones constantes. Tomando $X = x\partial_x + \alpha y\partial_y$, si $\alpha \neq \frac{1}{2}$, se sigue de $(\mathcal{L}_X\nabla)_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} = 0$ que $\Gamma^l_{ij} = 0$. Así en este caso solamente hay una conexión invariante por $\mathfrak{g}$. Pero si $\alpha = \frac{1}{2}$, de $(\mathcal{L}_X\nabla)_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} = 0$ se sigue que todos los símbolos Γ^l_{ij} son ceros excepto Γ^1_{22} que sería constante, entonces en este caso se tendrían infinitas conexiones invariantes.

13. $\mathfrak{g} = \langle \partial_x, \partial_y, x\partial_x, y\partial_y \rangle$.

    Por 3.3.1, los símbolos Γ^l_{ij} son constantes, del álgebra en 10 tenemos que todos son cero excepto Γ^2_{22},$\Gamma^1_{12}, \Gamma^1_{21}$ que serían constantes. De $\left(\mathcal{L}_{y\partial_y}\nabla\right)_{\partial_y} \partial_y = 0$, $\left(\mathcal{L}_{y\partial_y}\nabla\right)_{\partial_y} \partial_x = 0$, $\left(\mathcal{L}_{y\partial_y}\nabla\right)_{\partial_x} \partial_y = 0$ se sigue que $\Gamma^2_{22} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0$, concluimos que $\Gamma^l_{ij} = 0$, de donde la única concexión invariante en este caso es la usual.

14. $\mathfrak{g} = \left\langle \partial_x, \partial_y, x\partial_x, x^2\partial_y \right\rangle$.

    Como el álgebra del caso 11 está contenida en esta álgebra, luego en este caso no existen conexiones invariantes por $\mathfrak{g}$.

15. $\mathfrak{g} = \left\langle \partial_x, \partial_y, x\partial_x, y\partial_y, x^2\partial_x, y^2\partial_y \right\rangle$.

    Como el álgebra del caso anterior está ontenida en esta álgebra, luego en este caso no hay conexiones invariantes.

16. $\mathfrak{g} = \left\langle \partial_x, \partial_y, x\partial_x, y\partial_y, x^2\partial_x, \right\rangle$.

    Como el álgebra del caso 11 esta contenida en esta álgebra, concluimos nuevamente que no hay conexiones invariantes en este caso.

17. $\mathfrak{g} = \left\langle \partial_x + \partial_y, x\partial_x + y\partial_y, x^2\partial_x + y^2\partial_y \right\rangle$

    Sean $X = \partial_x + \partial_y$, $Y = x\partial_x + y\partial_y$ y $Z = x^2\partial_x + y^2\partial_y$.

    - De $(\mathcal{L}_X\nabla)_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} = 0$, se tienen los sistemas

    $$\partial_x\Gamma^l_{ij} = -\partial_y\Gamma^l_{ij}.$$

- De $(\mathcal{L}_Y \nabla)_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} = 0$ se tiene

$$(x-y)\partial_x \Gamma^l_{ij} + \Gamma^l_{ij} = 0,$$
$$(y-x)\partial_y \Gamma^l_{ij} + \Gamma^l_{ij} = 0.$$

Reemplazando las ecuaciones anteriores en $(\mathcal{L}_Z \nabla)_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} = 0$ se obtiene que

$$\Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^1_{22} = 0,$$
$$\Gamma^1_{11} = -\frac{2}{x-y},$$
$$\Gamma^2_{22} = -\frac{2}{y-x}.$$

Nótese que la recta $x = y$ debe interpretarse como la frontera del espacio infinitesimalmente homogéneo en cuestión, y por este motivo es posible encontrar una singularidad en la conexión.

18. $\mathfrak{g} = \left\langle \partial_x, 2x\partial_x + y\partial_y, x^2\partial_x + xy\partial_y \right\rangle$.

Dado que ∂_x forma parte del álgebra, tenemos que todos los símbolos Γ^l_{ij} son funciones de y. Tomemos $Y = 2x\partial_x + y\partial_y$ y $Z = x^2\partial_x + xy\partial_y$.

De las ecuaciones $(\mathcal{L}_Y \nabla)_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} = 0$, $(\mathcal{L}_Z \nabla)_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} = 0$ se obtienen los sistemas:

$$\begin{aligned} y\partial_y \Gamma^1_{11} + 2\Gamma^1_{11} &= 0, \\ y\partial_y \Gamma^2_{11} + 3\Gamma^2_{11} &= 0, \\ y\partial_y \Gamma^1_{12} + \Gamma^1_{12} &= 0, \\ y\partial_y \Gamma^2_{12} + 2\Gamma^2_{12} &= 0, \\ y\partial_y \Gamma^1_{21} + \Gamma^1_{21} &= 0, \\ y\partial_y \Gamma^2_{21} + 2\Gamma^2_{21} &= 0, \\ y\Gamma^1_{21} + y\Gamma^1_{12} + 2 &= 0. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \Gamma^1_{22} &= 0, \\ \Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{11} &= 0, \\ y\Gamma^2_{22} - y\Gamma^1_{12} + 1 &= 0, \\ y\Gamma^2_{22} - y\Gamma^1_{21} + 1 &= 0, \\ y\Gamma^1_{21} + y\Gamma^1_{12} + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Cuya solución general puede expresarse en función de 3 constantes arbitrarias a, b, $c \in \mathbb{R}$:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{a+b}{y^2}, \quad \Gamma^2_{11} = \frac{c}{y^3},$$
$$\Gamma^2_{12} = \frac{a}{y^2}, \quad \Gamma^2_{21} = \frac{b}{y^2},$$
$$\Gamma^2_{22} = -\frac{2}{y} \quad \Gamma^1_{22} = 0,$$
$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\frac{1}{y}.$$

19. $\mathfrak{g} = \left\langle \partial_x, x\partial_x, y\partial_y, x^2\partial_x + xy\partial_y \right\rangle$.

    Este álgebra contiene a la del caso 10, y de ahí se tiene que Γ_{22}^2 es función solo de y y los demás símbolos de Christoffel son cero. Para $Y = x^2\partial_x + xy\partial_y$ se tiene que $[\partial_x, Y] = 2x\partial_x + 2y\partial_y$, usando esto en $(\mathcal{L}_Y \nabla)_{\partial_x} \partial_y = 0$ se obtiene que $2\partial_x = 0$. En consecuencia, no hay conexiones invariantes en este caso.

20. $\mathfrak{g} = \langle \partial_y, \xi_1(x)\partial_y, \cdots, \xi_r(x)\partial_y \rangle$, con $r \geq 1$

    En este caso, las funciones $1, \xi_1, \ldots, \xi_r$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.

    Como $\partial_y \in \mathfrak{g}$ de la observación 3.3.1, tenemos que los Γ_{ij}^l son funciones de x, Calculando $\left(\mathcal{L}_{\xi_k(x)\partial_y} \nabla\right)_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} = 0$ se obtiene el sistema

$$\begin{aligned}
\left(\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1\right) \partial_x \xi_k(x) + \partial_x^2 \xi_k(x) &= 0, \\
\left(\Gamma_{21}^1 - \Gamma_{22}^2\right) \partial_x \xi_k(x) &= 0, \\
\left(\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{21}^1\right) \partial_x \xi_k(x) &= 0, \\
\left(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1\right) \partial_x \xi_k(x) &= 0, \\
\Gamma_{22}^1 \partial_x \xi_k(x) &= 0, \\
\Gamma_{22}^2 \partial_x \xi_k(x) &= 0.
\end{aligned}$$

    Para que este sistema sea compatible, es necesario que para $k \neq l$ se tenga,

$$\frac{\partial_x^2 \xi_k}{\partial_x \xi_k} = \frac{\partial_x^2 \xi_l}{\partial_x \xi_l}.$$

    Esto es solo posible si la diferencia entre ξ_l está en el espacio generado por 1 y ξ_k. Por tanto, todas los campos $\xi_k(x)\partial_y$ con $k > 1$ ya están incluidos en el álgebra de Lie $\langle \partial_y, \xi_1(x)\partial_y \rangle$. Es decir, el sistema solamente es compatible en el caso en el que r es igual a uno.

    Al resolver los sistemas de ecuaiones, se sigue para el caso $r = 1$ que Γ_{11}^2 depende solo de x y que las siguientes relaciones entre los otros símbolos se satisfacen

$$\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \tag{3.23a}$$

$$\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1 = -\frac{\partial_x^2 \xi_k}{\partial_x \xi_k}. \tag{3.23b}$$

    En cualquier otro caso, no hay conexiones invariantes.

21. $\mathfrak{g} = \langle \partial_y, y\partial_y, \xi_1(x)\partial_y, \cdots, \xi_r(x)\partial_y \rangle$, con $r \geq 1$.

    En este caso, las funciones $1, \xi_1, \ldots, \xi_r$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.

    El álgebra de este caso, contiene a la del caso 20. Por tanto, ya obtenemos que si $r > 1$ no hay conexiones invariantes, pero si se tiene el caso $r = 1$, se satisface de nuevo el sistema 3.23. Asumiendo esto, de $\left(\mathcal{L}_{y\partial_y} \nabla\right)_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} = 0$ se sigue que $\Gamma_{11}^2 = 0$. Concluimos que en este caso $\Gamma_{12}^2, \Gamma_{21}^2$ y Γ_{11}^1 son funciones de x y además se tienen las siguientes relaciones

$$\Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^2_{11} = 0, \tag{3.24a}$$

$$\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{11} = -\frac{\partial_x^2 \xi_k}{\partial_x \xi_k}. \tag{3.24b}$$

22. $\mathfrak{g} = \langle \partial_x, \eta_1(x)\partial_y, \cdots, \eta_r(x)\partial_y \rangle$, con $r \geq 1$.

En este caso las funciones $\eta_1(x), \ldots, \eta_r(x)$ son una base del espacio de soluciones de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes.

Tomamos k tal que $1 \leq k \leq r$. Los símbolos Γ^l_{ij} dependen solo de y. De $\left(\mathcal{L}_{\eta_k(x)\partial_y} \nabla\right)_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} = 0$, obtenemos los sistemas

$$\eta_k(x)\partial_y \Gamma^1_{11} + \partial_x \eta_k(x)\left(\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{11}\right) + \partial_x^2 \eta_k(x) = 0, \tag{3.25a}$$

$$\eta_k(x)\partial_y \Gamma^1_{11} + \partial_x \eta_k(x)\left(\Gamma^1_{21} + \Gamma^1_{12}\right) = 0, \tag{3.25b}$$

$$\eta_k(x)\partial_y \Gamma^1_{12} + \Gamma^1_{22}\partial_x \eta_k(x) = 0, \tag{3.25c}$$

$$\eta_k(x)\partial_y \Gamma^2_{12} + \partial_x \eta_k(x)\left(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}\right) = 0, \tag{3.25d}$$

$$\eta_k(x)\partial_y \Gamma^1_{21} + \Gamma^1_{22}\partial_x \eta_k(x) = 0, \tag{3.25e}$$

$$\eta_k(x)\partial_y \Gamma^2_{21} + \partial_x \eta_k(x)\left(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{21}\right) = 0, \tag{3.25f}$$

$$\eta_k(x)\partial_y \Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{22}\partial_x \eta_k(x) = 0, \tag{3.25g}$$

$$\eta_k(x)\partial_y \Gamma^1_{22} = 0. \tag{3.25h}$$

De estas ecuaciones se deduce que las funciones $\alpha_k := \frac{\partial_x \eta_k(x)}{\eta_k(x)}$ y $\alpha_k^2 := \frac{\partial_x^2 \eta_k(x)}{\eta_k(x)}$ son constantes. Por ende se debe cumplir que $\eta_k(x)$ es un múltiplo de $e^{\alpha_k x}$. Finalmente, utilizando las ecuaciones para un k fijo, podemos despejar los símbolos de Christoffel en función de 8 constantes arbitrarias c^k_{ij}:

$$\Gamma^2_{11} = c^1_{22}\alpha_k^3 y^3 + (c^2_{22} - c^1_{12} - c^1_{21})\alpha_k^2 y^2 + (c^1_{11} - c^2_{21} - c^2_{12})\alpha_k y - \alpha_k^2 y + c^2_{11}, \tag{3.26a}$$

$$\Gamma^1_{11} = c^1_{22}\alpha_k^2 y^2 - (c^1_{12} + c^1_{21})\alpha_k y + c^1_{11}, \tag{3.26b}$$

$$\Gamma^2_{12} = -c^1_{22}\alpha_k^2 y^2 - (c^2_{22} - c^1_{12})\alpha_k y + c^2_{12}, \tag{3.26c}$$

$$\Gamma^2_{21} = -c^1_{22}\alpha_k^2 y^2 - (c^2_{22} - c^1_{21})\alpha_k y + c^2_{21}, \tag{3.26d}$$

$$\Gamma^1_{12} = -c^1_{22}\alpha_k y + c^1_{12}, \tag{3.26e}$$

$$\Gamma^1_{21} = -c^1_{22}\alpha_k y + c^1_{21}, \tag{3.26f}$$

$$\Gamma^2_{22} = c^1_{22}\alpha_k y + c^2_{22}, \tag{3.26g}$$

$$\Gamma^1_{22} = c^1_{22}. \tag{3.26h}$$

Para que las soluciones que se obtienen, para cada k, sean compatibles, es necesario que todas las constantes α_k sean iguales. Pero en ese caso, todas las funciones $\eta_k(x)$ generan un espacio de dimensión 1, y necesariamente $r = 1$.

Es decir, si $r = 1$ y $\eta_1(x) = e^{\alpha_k x}$, hay un espacio octodimensional de conexiones invariantes. En otro caso, no hay conexiones invariantes.

23. $\mathfrak{g} = \langle \partial_x, y\partial_y, \eta_1(x)\partial_y, \cdots, \eta_r(x)\partial_y \rangle$ con $r \geq 1$.

Como este álgebra contiene a la del caso 22, podemos asegurar que si $r > 1$ o $\eta_1(x)$ no es una función exponencial, no hay conexiones invariantes.

En el caso en el que $r = 1$ y $\eta_1(X) = e^{\alpha_1 x}$, los símbolos están dados por 3.26.

De $\left(\mathcal{L}_{y\partial_y}\nabla\right)_{\partial_{x_i}}\partial_{x_j} = 0$, obtenemos las ecuaciones

$$y\partial_y\Gamma^1_{11} = y\partial_y\Gamma^2_{12} = y\partial_y\Gamma^2_{21} = 0 \tag{3.27}$$

y los sistemas de ecuaciones

$$y\partial_y\Gamma^1_{11} - \Gamma^1_{11} = 0, \tag{3.28a}$$
$$y\partial_y\Gamma^1_{12} + \Gamma^1_{12} = 0, \tag{3.28b}$$
$$y\partial_y\Gamma^1_{21} + \Gamma^1_{21} = 0, \tag{3.28c}$$
$$y\partial_y\Gamma^1_{22} + 2\Gamma^1_{22} = 0, \tag{3.28d}$$
$$y\partial_y\Gamma^2_{22} + \Gamma^2_{22} = 0. \tag{3.28e}$$

De 3.27 se sigue que $\Gamma^1_{11}, \Gamma^2_{12}, \Gamma^2_{21}$ son constantes. Teniendo en cuenta que Γ^1_{22} es constante, de la ecuación 3.28d se sigue que $\Gamma^1_{22} = 0$, usando esto y las ecuaciones del sistema 3.25 obtenemos $\Gamma^2_{22} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{12}$, las cuales son constantes que al reemplazarlas en las ecuaciones 3.28b y 3.28c, se sigue que son nulas. Al reemplazar estos valores en 3.25b se tiene que Γ^1_{11} es constante. Al reemplazar todos estos valores en 3.25a, se tiene que

$$\Gamma^2_{11} = -\alpha_1(\Gamma^2_{21} + \Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11})y - \alpha_1^2 y + c^2_{11}.$$

En resumen se tiene para los símbolos de Christoffel de nuestra conexión lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^2_{22} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{22} = 0,\\
&\Gamma^2_{21} = c^2_{21}, \Gamma^2_{12} = c^2_{12}, \Gamma^1_{11} = c^1_{11},\\
&\Gamma^2_{11} = -\alpha_1(c^2_{21} + c^2_{12} - c^1_{11})y - \alpha_1^2 y + c^2_{11}.
\end{aligned}$$

Con $c^2_{21}, c^2_{12}, c^1_{11}$ y c^2_{11} constantes arbitrarias.

24. $\mathfrak{g} = \langle \partial_x, \partial_y, x\partial_x + \alpha y\partial_y, x\partial_y, \cdots, x^r\partial_y \rangle$, con $r \geq 1$.

Del álgebra en 12 se obtiene que $\Gamma^l_{ij} = 0$, usando esto en los cálculos de $\left(\mathcal{L}_{x^k\partial_y}\nabla\right)_{\partial_x}\partial_x = 0$, con $0 \leq k \leq r$, de obtiene la ecuación

$$-k(k-1)x^{k-2} = 0.$$

Pero de esto se debe cumplir $r = 1$, de lo contrario se llega a una incompatibilidad. Luego tenemos en este caso que nuestra álgebra es parte del álgebra 6 (transformaciones afines) obteniendo así una conexión invariante.

25. $\mathfrak{g} = \left\langle \partial_x, \partial_y, x\partial_y, \cdots, x^{r-1}\partial_y, x\partial_x + (ry + x^r)\,\partial_y \right\rangle$, con $r \geq 1$.

Si consideramos $r = 1$, obtenemos el álgebra $\mathfrak{g} = \{\partial_x, \partial_y, x\partial_x + (y + x)\,\partial_y\}$, como ∂_x y ∂_y están en esta álgebra, de la Observación 3.3.1, los símbolos Γ_{ij}^{l} son constantes, considerando esto y llamando $Y = x\partial_x + (y + x)\,\partial_y$, de $(\mathcal{L}_Y\nabla)_{\partial_{x_i}}\partial_{x_j} = 0$ obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} -\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2 &= 0, \\ \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{21}^1 &= 0, \\ \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 &= 0, \\ \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 &= 0, \\ \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^1 &= 0, \\ \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^1 &= 0, \\ \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{22}^1 &= 0. \end{aligned}$$

Al resolver este sistema se tiene que $\Gamma_{ij}^{l} = 0$, teniendo así para el caso $r = 1$ una conexión invariante, siendo ésta la conexión usual en $\mathbb{R}^2$.

Para $r = 2$, obtenemos el álgebra $\mathfrak{g} = \{\partial_x, \partial_y, x\partial_y, x\partial_x + (y + x)\,\partial_y, x\partial_x + \left(2y + x^2\right)\partial_y\}$. Como el álgebra del caso $r = 1$ está contenida en esta álgebra, se tiene entonces que los símbolos Γ_{ij}^{l} son todos nulos, considerando ésto y $Z = \left(2y + x^2\right)\partial_y$, del cálculo $(\mathcal{L}_Z\nabla)_{\partial_x}\partial_x = 0$ se llega a una contradicción.

Concluimos entonces que existe una conexión para caso $r = 1$, en los demás casos el conjunto de conexiones es vacío.

26. $\mathfrak{g} = \left\langle \partial_x, \partial_y, x\partial_x, x\partial_y, y\partial_y, x^2\partial_y, \cdots, x^r\partial_y \right\rangle$, con $r \geq 1$.

    Como el álgebra en 13 está contenida en esta álgebra cualquiera sea el valor de r, tenemos entonces que $\Gamma_{ij}^{l} = 0$. Ahora, si $r = 1$ se tiene una conexión, en el caso $r > 1$ sabemos que de los cálculos de $(\mathcal{L}_{x^2}\nabla)_{\partial_x}\partial_x = 0$ llegamos a una contradicción, por ende no hay conexiones invariantes.

27. $\mathfrak{g} = \left\langle \partial_x, \partial_y, 2x\partial_x + ry\partial_y, x\partial_y, x^2\partial_x + rxy\partial_y, x^2\partial_y, \cdots, x^r\partial_y \right\rangle$, con $r \geq 1$.

    Por estar los operadores ∂_x y ∂_y en ésta álgebra, se tiene que los símbolos Γ_{ij}^{l} son constantes. Para $Y = 2x\partial_x + ky\partial_y$ con $1 \leq k \leq r$, del cálculo $(\mathcal{L}_Y\nabla)_{\partial_{x_i}}\partial_{x_j} = 0$ se tienen las ecuaciones diferenciales,

$$\begin{aligned} 2\Gamma_{11}^1\partial_x + (4 - k)\Gamma_{11}^2\partial_y &= 0, \\ k\Gamma_{12}^1\partial_x + 2\Gamma_{12}^2\partial_y &= 0, \\ k\Gamma_{21}^1\partial_x + 2\Gamma_{21}^2\partial_y &= 0, \\ (2k - 2)\Gamma_{22}^1\partial_x + k\Gamma_{22}^2\partial_y &= 0. \end{aligned}$$

    Para $k = 1$, de las ecuaciones anteriores obtenemos $\Gamma_{ij}^{l} = 0$ excepto Γ_{22}^1 que es constante, pero de $\left(\mathcal{L}_{x\partial_y}\nabla\right)_{\partial_y}\partial_y = 0$ se tiene que $\Gamma_{22}^1 = 0$. Si $r = 2$, del cálculo $\left(\mathcal{L}_{x^2\partial_y}\nabla\right)_{\partial_x}\partial_x = 0$ obtenemos una contradicción. Luego se debe cumplir $r = 1$, teniendo en cuanta que los símbolos Γ_{ij}^{l} son nulos y considerando $Z = x^2\partial_x + xy^2\partial_y$, del cómputo $(\mathcal{L}_Z\nabla)_{\partial_x}\partial_x = 0$ se tiene nuevamente una contradicción. Concluimos entonces que en este caso no hay conexiones invariantes.

28. $\mathfrak{g} = \{\partial_x, \partial_y, x\partial_x, x\partial_y, y\partial_y, x^2\partial_x + rxy\partial_y, x^2\partial_y, \cdots, x^r\partial_y\}$, con $r \geq 1$.

    Como el álgebra del caso 13 está contenida en esta álgebra, luego $\Gamma_{ij}^l = 0$. Del cómputo $(\mathcal{L}_Z\nabla)_{\partial_x}\partial_x = 00$, con $Z = x^2\partial_x + rxy\partial_y$, se llega a una contradicción. Luego en este caso no existen conexiones invariantes.

3.3.1 Resumen de resultados

Los resultados antes descritos se resumen en las siguientes tablas.

Acciones que:	Casos
No admiten conexiones invariantes	7, 8, 11, 14, 15, 16, 19, 27, 28; y los siguientes para $r > 1$: 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26.
Admiten una única conexión invariante	1, 2, 3, 4, 5, 6, 12 (con $\alpha \neq \frac{1}{2}$), 13, 17 y los siguientes con $r = 1$: 24, 25, 26.
Admiten un espacio de dimensión finita y positiva de conexiones invariantes	12 (con $\alpha = \frac{1}{2}$), 18, 22 (con $r = 1$ y $\eta_1(x) = e^{\alpha x}$) y 23 (con $r = 1$ y $\eta_1(x) = e^{\alpha x}$).
Admiten un espacio infinito dimensional de conexiones invariantes	9, 10 y los siguientes con $r = 1$: 20, 21.

ACCIONES CON ESPACIO DE CONEXIONES DE DIMENSIÓN FINITA > 0		
Caso	Símbolos de Christoffel	Dimensión de $\mathrm{Cnx}(\mathrm{TM})^{\mathfrak{g}}$
$12(\alpha = \frac{1}{2})$	Para constante arbitraria a, $$\Gamma^1_{22} = a,$$ el resto de los símbolos Γ^l_{ij} son nulos.	1
18	Para constantes arbitrarias a, b, c, $$\Gamma^1_{11} = \frac{a+b}{y^2}, \quad \Gamma^2_{11} = \frac{c}{y^3},$$ $$\Gamma^2_{12} = \frac{a}{y^2}, \quad \Gamma^2_{21} = \frac{b}{y^2},$$ $$\Gamma^2_{22} = -\frac{2}{y} \quad \Gamma^1_{22} = 0$$ $$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\frac{1}{y}.$$	3
22 con $r = 1$, $\eta_1 = e^{\alpha x}$.	Para constantes c^l_{ij}, $$\Gamma^2_{11} = c^1_{22}\alpha^3 y^3 - c^2_{22}\alpha^2 y^2 + (c^1_{11} - c^2_{21} - c^2_{12})\alpha y - \alpha^2 y + c^2_{11}$$ $$\Gamma^1_{11} = c^1_{22}\alpha^2 y^2 - (c^1_{12} + c^1_{21})\alpha y + c^1_{11}$$ $$\Gamma^2_{12} = -c^1_{22}\alpha^2 y^2 - (c^2_{22} - c^1_{12})\alpha y + c^2_{12}$$ $$\Gamma^2_{21} = -c^1_{22}\alpha^2 y^2 - (c^2_{22} + c^2_{21})\alpha y + c^2_{21}$$ $$\Gamma^1_{12} = -c^1_{22}\alpha y + c^1_{12}$$ $$\Gamma^1_{21} = -c^1_{22}\alpha y + c^1_{21}$$ $$\Gamma^2_{22} = c^1_{22}\alpha y + c^2_{22}$$ $$\Gamma^1_{22} = c^1_{22}.$$	8
23 con $r = 1$, $\eta_1 = e^{\alpha x}$.	Para $c^2_{21}, c^2_{12}, c^1_{11}$ y c^2_{11} constantes arbitrarias, $$\Gamma^2_{22} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{22} = 0$$ $$\Gamma^2_{21} = c^2_{21}, \Gamma^2_{12} = c^2_{12}, \Gamma^1_{11} = c^1_{11}$$ $$\Gamma^2_{11} = -\alpha(c^2_{21} + c^2_{12} - c^1_{11})y - \alpha^2 y + c^2_{11}.$$	4

ACCIONES CON ESPACIO DE CONEXIONES DE DIMENSIÓN INFINITA	
Caso	Símbolos de Christoffel
9	Γ_{ij}^{l} son funciones y.
10	$\Gamma_{ij}^{l} = 0$ excepto $\Gamma_{22}^{2}, \Gamma_{21}^{1}, \Gamma_{12}^{1}$ que son funciones de y.
20, para $r = 1$	$\Gamma_{22}^{1} = \Gamma_{21}^{1} = \Gamma_{12}^{1} = \Gamma_{22}^{2} = 0$ $\Gamma_{12}^{2} + \Gamma_{21}^{2} - \Gamma_{11}^{1} = -\dfrac{\partial_x^2 \xi_k}{\partial_x \xi_k}.$ Con $\Gamma_{11}^{2}, \Gamma_{12}^{2}, \Gamma_{21}^{2}$ y Γ_{11}^{1} funciones de x.
21, para $r = 1$	$\Gamma_{22}^{1} = \Gamma_{21}^{1} = \Gamma_{12}^{1} = \Gamma_{22}^{2} = \Gamma_{11}^{2} = 0$ $\Gamma_{12}^{2} + \Gamma_{21}^{2} - \Gamma_{11}^{1} = -\dfrac{\partial_x^2 \xi_k}{\partial_x \xi_k}.$ Con $\Gamma_{12}^{2}, \Gamma_{21}^{2}$ y Γ_{11}^{1} funciones de x.

ACCIONES CON UNA ÚNICA CONEXIÓN	
Caso	Símbolos de Christoffel
1, 4, 5, 6, 12($\alpha \neq \frac{1}{2}$), 13, los siguientes con $r = 1$: 24, 25, 26	$\Gamma_{ij}^{l} = 0.$
2	$\Gamma_{11}^{1} = \Gamma_{22}^{1} = \Gamma_{12}^{2} = \Gamma_{21}^{2} = 0,$ $\Gamma_{12}^{1} = \Gamma_{21}^{1} = \Gamma_{22}^{2} = \frac{-1}{y},$ $\Gamma_{11}^{2} = \frac{1}{y}.$
3	$\Gamma_{11}^{2} = \Gamma_{22}^{2} = \Gamma_{12}^{1} = \Gamma_{21}^{1} = 0,$ $\Gamma_{12}^{2} = \Gamma_{21}^{2} = \frac{(1-r^2)}{r(r^2+1)},$ $\Gamma_{11}^{1} = \frac{-2r}{r^2+1},$ $\Gamma_{22}^{1} = \frac{r(r^2-1)}{r^2+1}.$
17	$\Gamma_{11}^{2} = \Gamma_{12}^{1} = \Gamma_{12}^{2} = \Gamma_{21}^{1} = \Gamma_{21}^{2} = \Gamma_{22}^{1} = 0,$ $\Gamma_{11}^{1} = -\frac{2}{x-y},$ $\Gamma_{22}^{2} = -\frac{2}{y-x}.$

Referencias

[1] David Blazquez Sanz et al. *Un curso de Geometría diferencial: Cálculo tensorial, Grupos de Lie, Geometría diferencial Euclidiana*. Universidad Nacional de Colombia, 2015.

[2] Artemio González-López, Niky Kamran, and Peter J. Olver. “Lie algebras of vector fields in the real plane”. In: *Proceedings of the London Mathematical Society* 3.2 (1992), pp. 339–368.

[3] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry*. Vol. 1. 2. Interscience publishers New York, 1963.

[4] Ivan Kolár, Jan Slovák, and Peter W. Michor. *Natural operations in differential geometry*. Springer Verlag, 1999.

[5] Boris Komrakov, A Churyumov, and Boris Doubrov. “Two-dimensional homogeneous spaces”. In: *Preprint series: Pure mathematics http://urn. nb. no/URN: NBN: no-8076* (1993).

[6] Sophus Lie. *Theorie der Transformationgruppen*. Vol. III. Leipzig. 2nd Ed., 1893, pp. 339–368.