

# Un estudio sobre la cobertura de opciones bajo riesgo de incertidumbre en los parámetros

Victoria Eugenia Monsalve Hernández

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias  
Escuela de Estadística  
Medellín, Colombia  
2017



# Un estudio sobre la cobertura de opciones bajo riesgo de incertidumbre en los parámetros

Por:

**Victoria Eugenia Monsalve Hernández**

vemonsalveh@unal.edu.co

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:  
**Magíster en Ciencias-Estadística**

Director: César Augusto Gómez Vélez, Ph.D.  
Profesor Asociado, Escuela de Estadística, Facultad de Ciencias  
Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

Línea de Profundización: Estadística Financiera.

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias, Escuela de Estadística, Maestría en Ciencias-Estadística  
Medellín, Colombia  
2017

## Declaración

En este apartado me permito declarar que he realizado el presente trabajo de grado de manera autónoma, apoyada únicamente de los medios permitidos y mencionados en esta tesis. En este trabajo se hace el debido reconocimiento a las ideas que se han tomado de otros autores de manera textual o figurativa de textos publicados y no publicados; dicho esto, es claro que ninguna parte del presente trabajo se ha empleado en ningún otro tipo de tesis o publicación de cualquier otra índole.

Medellín, Antioquia, 09.01.2017

---

(Victoria Eugenia Monsalve Hernández)

“Es mejor tener una respuesta aproximada a la pregunta correcta que una respuesta exacta la pregunta equivocada.”

*John W. Tukey*



# Agradecimientos

A la Escuela de Estadística de la Universidad Nacional de Colombia por brindarme la oportunidad de expandir mis conocimientos sobre ésta ciencia; además de alentar en mí, habilidades propias de una investigadora capaz proponer y ejecutar ideas que ayuden a generar aportes en está área del conocimiento y el refinamiento de las técnicas actualmente usadas.





## Resumen

Los derivados financieros son contratos realizados entre dos instituciones y/o agentes del mercado, se denominan derivados porque su valor monetario “deriva” del precio de otro activo denominado en general *subyacente* que puede ser un commodity (materia prima como oro, petróleo, etc) o el precio de un título valor, acciones, bonos, etc. Los derivados funcionan como mecanismos de transferencia de riesgo, mediante los cuales una persona o entidad puede por medio de un pago o flujo de pagos predeterminados en fechas predeterminadas a otra institución financiera o contraparte, transferir a esta última la incertidumbre en el conocimiento del precio futuro de activos financieros, como bienes o acciones. Un ejemplo básico de derivados son las opciones de compra o venta europeas.

En términos de modelos de valoración de opciones se ha desarrollado un amplio trabajo de investigación académica, partiendo del trabajo precursor de Black-Scholes (BS) que tuvo lugar en 1973, hasta las últimas contribuciones hechas que consideran una estructura estocástica en los parámetros como la tasa de interés y la volatilidad del precio del activo subyacente.

Una opción de compra europea o *call europea* es un contrato por medio del cual el emisor a cambio de una prima o precio inicial de la opción vende al tenedor el derecho pero no la obligación de adquirir (este derecho lo constituye la opción en si misma como contrato) un activo por un precio preespecificado denominado *precio de ejercicio de la opción* en una fecha futura o vencimiento.

Debido al riesgo intrínseco presente en este tipo de negociaciones, la parte que emite la opción (*emisor de la opción*), deberá cubrirla; es decir, en caso de que la contraparte que compra la opción o *tenedor de la opción* ejerza su derecho de compra o venta en el vencimiento, el emisor debe contar con el capital suficiente para garantizar la compra del subyacente por parte del tenedor al precio de ejercicio preestablecido.

Entre otros una de los principales aportes de la teoría de BS consiste en el hecho de que el modelo sugiere bajo determinados supuestos, que el emisor puede implementar un portafolio conformado por bonos y unidades o participaciones del activo subyacente cuyo valor inicial coincide con el de la opción y que de hecho en todo momento *replica el valor de ésta*, dicho portafolio es autofinanciado en teoría en el sentido de que las variaciones en su valor solo se deben a las variaciones en el precio del subyacente y a las compras y ventas que se realicen de sus componentes y solo estos factores responden por la pérdida o ganancia de valor del mismo. Este portafolio es el que le permite al emisor por medio de una estrategia de administración o *proceso de cobertura* descrito en la metodología de BS garantizar el pago contingente de la opción en el vencimiento o *payoff de la opción* al tenedor de la misma cerrando la transacción.

En este trabajo se abordará el análisis de una metodología de cobertura que contemple la incertidumbre asociada a la volatilidad y por tanto ésta sea especificada a través de un modelo que la considere como un parámetro estocástico, con la finalidad de revisar el costo final de cobertura de opciones teniendo cuenta las limitaciones del modelo de BS. La revisión del costo final se estudiará por medio de una simulación del costo de cobertura Delta que solo tiene en cuenta el activo subyacente pero donde la dinámica del precio de este último sigue un modelo de volatilidad estocástica; es decir, se intenta modelar de esta forma el impacto que puede tener el hecho de que la volatilidad de un activo es estocástica sobre el desempeño de coberturas basadas unicamente en una compra-venta del subyacente.

**Palabras claves:** Valoración de opciones, cobertura delta, movimiento Browniano geométrico, modelo de Black-Scholes, volatilidad estocástica.

## Abstract

Financial derivatives are contracts between two institutions and/or market agents; these are referred in such terms because their monetary value “derives” from the price of another underlying asset as is generally denominated. This asset may be a commodity (such as gold, oil, Etc.) or also can be the price of securities, stocks, or bonds, etc.

Derivatives operate as risk transfer mechanisms, whereby a person or entity may by an only payment or on a predetermined payment schedule to another financial institution or counterparty, transfer this uncertain risk on the future price of financial assets or shares. Basic examples of derivatives are European buying and selling options.

In terms of option pricing models, extensive academic research work has been developed, starting with the precursor work of Black-Scholes (BS) that took place in 1973, to the last contributions made that consider a stochastic structure in the parameters such as the interest rate and the volatility of price for underlying asset. An European purchase or European call option is a contract whereby an issuer in exchange for a premium or initial price of the option sells to a holder the right but not the obligation to acquire (this right is the option of the contract itself) an asset for a pre-specified price called the exercise price of the option for coverage on a future or specific expiration date.

Due to the intrinsic risk present in this type of negotiations, the party issuing the option (issuer of the option), must cover it; this means, in the event that the counterparty buying the option decides to exercise its right to buy or sell at its maturity before expiration, the issuer must have sufficient capital to guarantee the purchase of the underlying asset to the counterparty at the pre-established exercise price.

One of the main contributions of BS theory is that the model suggests under certain assumptions that the issuer can implement a portfolio consisting of bonds, units or participation units of the underlying asset, whose initial value coincides with the option and in fact at all times replicates the value of the option. In this sense, this portfolio is considered as self-financing because the fluctuations in their value are only due to changes in the price of the underlying asset and to purchases and sales that are made of its components and only these factors are responsible for the loss or gain of value thereof. Also, the portfolio allows the issuer through a management strategy or hedging process described in the BS methodology to guarantee the contingent payment of the option on its maturity or is payoff to the holder of the same closing the transaction.

In this paper, the analysis of a hedging methodology that considers the uncertainty asso-

ciated with volatility will be addressed and therefore it will be specified through a model that considers it as a stochastic parameter, in order to review the final cost of coverage. options taking into account the limitations of the BS model. The final cost review will be studied by means of a simulation of the Delta cost of coverage that only takes into account the underlying asset but where the dynamics of the price of the latter follows a stochastic volatility model; that is, we try to model in this way the impact that can have the fact that the volatility of an asset is stochastic on the performance of hedges based solely on a purchase-sale of the underlying.

**Keywords:** Options valuation, delta coverage, Geometric Brownian motion, Black-Scholes model, stochastic volatility.

# Índice general

|  |            |
|--|------------|
| <b>Declaración</b>   | <b>IV</b>  |
| <b>Agradecimientos</b>   | <b>VII</b> |
| <b>Resumen</b>   | <b>IX</b>  |
| <b>Abstract</b>  | <b>XI</b>  |
| <b>Índice de figuras</b>   | <b>XIV</b> |
| <b>Índice de tablas</b>  | <b>XV</b>  |
| <b>1. Introducción</b>   | <b>1</b>   |
| <b>I. Modelos para la Modelación del Precio de una Opción</b>                                | <b>3</b>   |
| <b>2. Modelo Black-Scholes para la Valoración de Opciones</b>                                | <b>4</b>   |
| 2.1. Opciones . . . . .  | 4          |
| 2.1.1. Fundamentación Matemática . . . . .   | 6          |
| 2.2. Integral de Itô . . . . .   | 12         |
| 2.2.1. Valoración de Derivados . . . . .   | 17         |
| <b>3. Modelos de Valoración de Opciones con Volatilidad Estocástica</b>                      | <b>19</b>  |
| 3.1. Proceso Ornstein-Uhlenbeck (OU) . . . . .   | 21         |
| 3.2. Estimación de la Volatilidad . . . . .  | 22         |
| 3.2.1. La Estimación de Parámetros del Modelo OU y su Distribución Inva-<br>riante . . . . . | 23         |
| 3.2.2. El Variograma y la estimación empírica de los parámetros. . . . .                     | 24         |
| <b>II. Cobertura de Opciones</b>   | <b>28</b>  |
| <b>4. Estrategias de Cobertura</b>   | <b>29</b>  |
| 4.0.1. Definición y tipos de cobertura . . . . .   | 29         |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>5. Caso de Estudio</b>   | <b>33</b> |
| 5.1. Presentación y Análisis de Resultados de la Simulación . . . . . | 40        |
| <b>6. Conclusiones</b>  | <b>50</b> |
| <b>Bibliografía</b>   | <b>51</b> |

# Índice de figuras

|  |    |
|--|----|
| 2-1. Diagrama del payoff de Opción Call. . . . .   | 5  |
| 2-2. Diagrama del payoff de Opción Put. . . . .  | 5  |
| 5-1. Variograma sobre los datos de la tabla (5-1). . . . .   | 36 |
| 5-2. Ajuste del Variograma (sobre el rezago $j$ =días). . . . .  | 37 |
| 5-3. Ajuste del Variograma usando valores iniciales iterados (sobre el rezago $j$ =<br>días). . . . .    | 38 |
| 5-4. Ajuste del modelo de volatilidad usando regresión no lineal (sobre el rezago<br>$j$ =días). . . . . | 39 |
| 5-5. Proceso de Volatilidad Estóastica . . . . .   | 44 |
| 5-6. Proceso del precio (USD) del subyacente . . . . .   | 45 |
| 5-7. Costo Final (USD) de Cobertura bajo el Proceso de Volatilidad Estóastica . . . . .                  | 45 |
| 5-8. Costo Final (USD) de Cobertura con Volatidad Constante . . . . .                                    | 48 |
| 5-9. Comparativo Costo Final (USD) de Cobertura . . . . .  | 49 |

# Índice de tablas

|  |    |
|--|----|
| 3-1. Modelos de Volatilidad estocástica . . . . .  | 20 |
| 5-1. Datos ‘sample_real5minprices’ de la librería ‘highfrequency’ . . . . .                                    | 34 |
| 5-2. Estimación de parámetros del variograma (3-25) por regresión no lineal. . . .                             | 38 |
| 5-3. Resumen de simulaciones del costo final con volatilidad estocástica y rebalan-<br>ceo semanal . . . . .   | 46 |
| 5-4. Resumen de simulaciones del costo final con volatilidad estocástica y rebalan-<br>ceo quincenal . . . . . | 46 |
| 5-5. Estimación de la Volatilidad mediante modelos GARCH(1,1). . . . .   | 47 |
| 5-6. Resumen de simulaciones del costo final con volatilidad estocástica y rebalan-<br>ceo semanal . . . . .   | 48 |
| 5-7. Resumen de simulaciones del costo final con volatilidad estocástica y rebalan-<br>ceo quincenal . . . . . | 49 |



# 1. Introducción

Los mercados financieros son aquellos donde se negocian y comercian instrumentos financieros como divisas, derivados, materias primas de consumo, materias primas de inversión, entre otros. Estos mercados se caracterizan por ser de diversos tamaños y tipos, entre los cuales podemos encontrar los mercados de capitales, los mercados de commodities, los mercados de divisas y los mercados de derivados. Éste último ha despertado gran interés entre los analistas financieros y académicos de diversas áreas, debido al enorme crecimiento que ha tenido en la última década y del que se espera continúe en alza en los próximos años de acuerdo a [Ahmad and Wilmott, 2005]. Otro de los aspectos por los cuales los derivados han llamado tanto la atención, en especial de académicos, radica en el riesgo intrínseco presente en las transacciones en que estos intervienen que en muchos casos es mal interpretado al ser considerado simplemente como riesgo de inversión.

Los derivados financieros se han definido por diversos autores como instrumentos financieros cuyo valor está sujeto o depende del valor de otro instrumento denominado “Activo Subyacente”, los cuales pueden ser: Acciones, bonos, divisas, materias primas (commodities), índices accionarios, tasas de interés, entre otros. Estos derivados son básicamente un contrato entre dos partes, que se da con la finalidad de transferir o mitigar el riesgo inherente del activo subyacente de acuerdo a lo definido en la Circular Externa No.025 de la Superintendencia [Financiera, 2014]. Dicha característica ha hecho que los derivados sean vistos como una especie de seguro, convirtiéndose así, en una de las herramientas más utilizadas especialmente por comerciantes de grandes volúmenes y administradores de riesgos.

Los principales derivados son: Forwards, Futuros, Swaps y Opciones; los cuales pueden ser tranzados en mercados estandarizados (Bolsa de Valores) o mercados no estandarizados (mercados de tipo mostrador - Over the Counter, OTC), en éste último los contratos se llevan a cabo de forma privada entre las dos partes de acuerdo a sus necesidades.

Los derivados sobre los que se centra el interés en este trabajo son las Opciones y su cobertura; pues a pesar de su concepción natural, entendiendo que un derivado como tal representa un mecanismo para mitigar el riesgo, el hecho de estar sujeto al valor de un subyacente hace inevitable la existencia de un riesgo intrínseco.

En este trabajo se considera un modelo adecuado para la valoración de opciones que incorpo-

ra una especificación de la volatilidad implicada cuando se encara un mercado ilíquido, bajo el escenario donde se tiene datos de alta frecuencia, con lo cual esperamos encontrar una tasa efectiva constante que permita adaptar la metodología Black-Scholes para la valoración de una opción y el cálculo de su cobertura basado sólo en la información que proporciona su subyacente.

Este trabajo estudia la estimación de la volatilidad a través de la técnica del variograma propuesto por los autores [Fouque et al., 2003] bajo una escala de pocos días, para luego evaluar la posibilidad de realizar una cobertura usando datos de alta frecuencia aprovechando la propiedad de la reversión rápida a la media. Con el fin de revisar el desempeño de los cálculos del costo final de cobertura, se realiza una estimación de la volatilidad mediante modelos GARCH. Lo anterior debido a que también es necesario tener en cuenta que no siempre es posible realizar una cobertura de manera continua como lo propone por ejemplo el modelo de BS por los costos de transacción que esto implica según lo indicado por Coleman [Coleman et al., 2003].

En concordancia con lo anterior, este trabajo se encuentra constituido por dos partes: la primera (capítulos 2 y 3) donde se hace mención de los modelos más usados en la valoración de opciones, partiendo del modelo Black-Scholes y migrando así a otros modelos que superan algunas de sus limitaciones, considerando modelos de volatilidad estocástica en concreto bajo el escenario de datos de alta frecuencia a fin de estimarla como un tasa efectiva constante. En la segunda parte (capítulos 4 y 5) se abarcará todo lo concerniente a las metodologías de coberturas y a la adaptación de la valoración de opciones y cálculo de costo final de cobertura con las estimaciones obtenidas para la volatilidad, resultados obtenidos vía simulación del precio del subyacente.

## **Parte I.**

# **Modelos para la Modelación del Precio de una Opción**

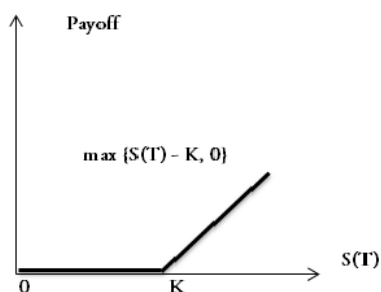
## 2. Modelo Black-Scholes para la Valoración de Opciones

### 2.1. Opciones

De acuerdo a [Hull, 2009], las opciones son un instrumento financiero que representa un acuerdo mutuo entre dos partes, donde una de las partes ofrece el derecho (más no la obligación) de comprar o vender un activo financiero en una fecha posterior (fecha de vencimiento) a un precio (precio de ejercicio) acordados previamente. Existe gran variedad de opciones según el activo para el cual se crea, siendo las más comunes las opciones sobre acciones, seguida de las opciones indexadas, las cuales son emitidas en mercados de índices accionarios como el S&P500, Nasdaq, Ftse100, etc; también podemos encontrar opciones sobre bonos, sobre tasas de interés, sobre divisas y sobre futuros.

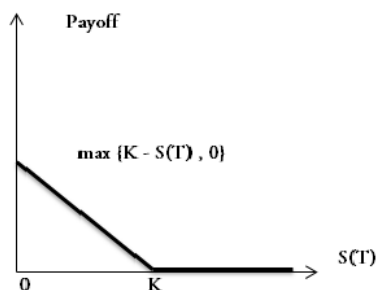
Hay dos tipos básicos de opciones a saber: Opción europea de compra o *Call europea* y opción de venta europea o *put europea*, el calificativo de *europea* se refiere al hecho de que tal opción solo se puede ejercer en la fecha de vencimiento en contraste con opciones *Americanas* (opción de compra Americana o *call Americana* y opción de venta Americana o *put Americana*) que pueden ser ejercidas en cualquier momento o fecha entre el comienzo del contrato y el vencimiento del mismo.

Una opción tipo *Call* o de compra, es aquella en la cual el tenedor o comprador de la opción paga una prima (precio inicial de la opción) al emisor de la opción adquiriendo de este último, y representado en la opción, el derecho (pero no la obligación) de comprar el activo subyacente a un precio predeterminado (precio de ejercicio:  $K$ ) en una fecha posterior fijada (fecha de vencimiento:  $T$ ). De este modo, si el tenedor desea ejercer este derecho, el emisor o vendedor del contrato estará en la obligación de vender al tenedor el activo subyacente por el precio de ejercicio preespecificado. En este caso, el pago final de la opción o payoff que recibe el tenedor depende del valor o precio del activo subyacente en el vencimiento, el cual está dado por  $(S_T - K)^+ = \text{máx}(0, S_T - K)$ , donde  $S_T$  es precio del activo subyacente en el vencimiento y  $K$  es el precio de ejercicio.



**Figura 2-1.:** Diagrama del payoff de Opción Call.

Por otra parte, la opción tipo Put o de compra es aquella por medio de la cual el tenedor paga una prima (*precio inicial de la opción*) al emisor de la opción y adquiere de este último, y representado por la opción, el derecho de vender el activo subyacente a un precio predeterminado (precio de ejercicio:  $K$ ) en una fecha posterior fijada (fecha de vencimiento:  $T$ ). De este modo, si el tenedor desea ejercer éste derecho, el emisor o vendedor del contrato estará en la obligación de comprar el activo subyacente por el precio de ejercicio preespecificado. En este caso, pago final de la opción o payoff que recibe el tenedor está dado por  $(K - S_T)^+ = \max(0, K - S_T)$ , donde nuevamente  $S_T$  corresponde al precio del activo subyacente en el vencimiento  $T$  y  $K$  es el precio de ejercicio de la opción.



**Figura 2-2.:** Diagrama del payoff de Opción Put.

Es claro que como una opción representa en cada caso un derecho y no una obligación el tenedor de una opción de compra puede en caso de que el precio del subyacente supere el precio de ejercicio en el vencimiento, o sea  $S_T > K$  adquirir el subyacente por el precio más favorable  $K$  que lo que vale en el mercado en dicho momento  $S_T$  obteniendo una ganancia (de ahí viene el termino “payoff”) igual a  $S_T - K > 0$ . Del mismo modo el tenedor de una opción de venta puede con su derecho adquirido si es el caso de que el precio del subyacente sea inferior en el vencimiento al precio de ejercicio  $K$  vender el subyacente por el precio más favorable  $K$

que el precio que rige en el mercado en dicho momento  $S_T$  realizando así la ganancia  $K - S_T$ .

### 2.1.1. Fundamentación Matemática

Dada la naturaleza del comportamiento de los activos financieros, estos son valorados mediante modelos matemáticos que involucran procesos estocásticos en tiempo discreto o continuo.

#### El Modelo Binomial

En esta sección se presentan las principales ideas tras la valoración y cobertura de opciones.

Comenzamos con el modelo binomial en un período, en este modelo todo se desarrolla en solo 2 instantes de tiempo, un instante inicial  $t_0$  y un instante final  $T$  que corresponderá al vencimiento. Inicialmente se considera que el precio de un activo en el instante  $t_0$  es  $S$  que va a corresponder con el subyacente (puede pensarse en todo momento por ejemplo en el precio de una acción en general se trata de un activo riesgoso). Al instante  $T$  el riesgo de mercado estará representado en el hecho de que esta acción solo puede tomar 2 posibles valores  $S_d$  con probabilidad  $p$  o  $S_u$  con probabilidad  $1 - p$  donde  $d$  y  $u$  son números tales que  $0 < d < u$  y  $0 < p < 1$ ; es decir:

$$S_T = \begin{cases} S_d & \text{con probabilidad } p, \\ S_u & \text{con probabilidad } 1 - p. \end{cases} \quad (2-1)$$

De forma paralela se considera un bono o una cuenta bancaria (en general un instrumento de renta fija) de tal modo que una inversión en dicho bono o depósito en dicha cuenta por un valor  $B$  (pesos) en el instante  $t_0$  se capitaliza en  $(1 + r\Delta t)B$  en el instante  $T$ , acá  $\Delta t = T - t_0$ ,  $r$  representa una tasa de interés simplemente compuesta, observe que de acuerdo al *principio de no arbitraje* se debe tener  $d < 1 + r\Delta t < u$  pues de otra forma (es decir si no se cumple esta desigualdad) habría una posibilidad de arbitraje en el mercado compuesto por la acción y la cuenta bancaria, por ejemplo si  $1 + r\Delta t < d < u$  entonces se puede prestar en  $t_0$  la cantidad  $S$  en el banco y comprar el activo riesgoso, al final del periodo en  $T$  en el caso menos favorable el valor de la acción será  $S_d$ , pero como  $(1 + r\Delta t < d)$  tenemos que  $(1 + r\Delta t) < S_d$  por lo que se puede pagar de vuelta al banco.

La cuestión central es cuál es el precio  $C$  en  $t_0$  de una opción sobre el subyacente ya mencionado, el payoff o pago en el vencimiento  $T$  dependerá del precio que presente el subyacente en dicho momento, así supondremos que la opción pagará el valor  $C_u$  si el subyacente resulta

valer  $S_u$  o pagará en el otro caso el valor  $C_d$ .

Uno de los principales intereses de este trabajo se centra en última instancia en analizar desde un punto de vista estadístico el comportamiento del valor del portafolio cuyo valor  $V$  en el instante  $t_0$  viene dado por:

$$V = b + \delta S, \quad (2-2)$$

El principal interés consiste en el análisis del correspondiente portafolio en el caso de un modelo con volatilidad estocástica, lo cual se desarrollará en una sección posterior.

El portafolio en (2-2) se conforma de una cantidad  $b$  invertida en la cuenta bancaria o bonos ( $b$  puede ser negativo indicando en tal caso que se trata de un préstamo bancario o equivalentemente la venta en corto de un bono) y de  $\delta$  unidades o participaciones de la acción o activo riesgoso  $S$ . Tanto  $b$  como  $\delta$  son determinados de la siguiente manera y consecuentemente el valor de este portafolio en el vencimiento  $V_T$  vendrá dado por

$$V_T = \begin{cases} (1 + r\Delta t)b + \delta(dS), & \text{con probabilidad } p. \\ (1 + r\Delta t)b + \delta(uS), & \text{con probabilidad } 1 - p. \end{cases} \quad (2-3)$$

La importancia del portafolio  $V$  (acá como en otras ocasiones abusamos de la notación refiriéndonos a  $V$  tanto como al portafolio mencionado como a su precio inicial en  $t_0$ ) consiste en que dicho portafolio es implementado por el emisor de la opción con el fin de replicar el precio de la misma, esto se consigue **escogiendo** las cantidades  $b$  y  $\delta$  de tal modo que

$$(1 + r\Delta t)b + \delta(dS) = C_d,$$

$$(1 + r\Delta t)b + \delta(uS) = C_u.$$

(2-4)

Observando que (2-4) se trata de un sistema de 2 ecuaciones en las 2 incógnitas  $b$  y  $\delta$  resolviendo para estas se obtiene

$$\delta = \frac{C_u - C_d}{uS - dS}, \quad (2-5)$$

y

$$\begin{aligned}
b &= \frac{1}{(1+r\Delta t)} [C_d - \delta(dS)] = \frac{1}{(1+r\Delta t)} [C_u - \delta(uS)], \\
&= \frac{1}{(1+r\Delta t)} \left[ \frac{C_d(uS) - C_u(dS)}{uS - dS} \right],
\end{aligned} \tag{2-6}$$

cabe resaltar que con estos valores de  $b$  y  $\delta$  en virtud de (2-4) el portafolio  $V$  **replica** el valor de la opción y por lo tanto con estos mismos valores debemos tener que (*principio de no arbitraje*)

$$\begin{aligned}
C = V = b + \delta S &= \frac{1}{(1+r\Delta t)} \left[ \frac{C_d(uS) - C_u(dS)}{uS - dS} \right] + \left( \frac{C_u - C_d}{uS - dS} \right) S. \\
&= \frac{1}{(1+r\Delta t)} \left[ \frac{C_d u - C_u d}{u - d} \right] + \left( \frac{C_u - C_d}{u - d} \right)
\end{aligned} \tag{2-7}$$

La última expresión para  $C$  puede escribirse de la forma

$$C = \frac{1}{(1+r\Delta t)} \left[ C_d \left( \frac{u - (1+r\Delta t)}{u - d} \right) + C_u \left( \frac{(1+r\Delta t) - d}{u - d} \right) \right]. \tag{2-8}$$

En vista de la *condición* de no arbitraje

$$0 < d < (1+r\Delta t) < u, \tag{2-9}$$

se tiene que las cantidades

$$q = \frac{u - (1+r\Delta t)}{u - d}, \quad y \quad 1 - q = \frac{(1+r\Delta t) - d}{u - d}, \tag{2-10}$$

constituyen una probabilidad y considerando esta probabilidad (2-7) expresa el hecho de que el valor inicial de la opción coincide con el valor esperado y traído a valor presente por medio del factor de descuento  $1/(1+r\Delta t)$ ; es decir:

$$C = \frac{1}{(1+r\Delta t)} (C_d q + C_u (1 - q)). \tag{2-11}$$

O mejor

$$C = \frac{E_q[C_T]}{(1+r\Delta t)}. \tag{2-12}$$



### Cobertura delta en el modelo binomial

Como hemos visto si el emisor implementa un portafolio con un número de acciones (es decir participaciones de la acción considerada como subyacente) igual a

$$\delta = \frac{C_u - C_d}{uS - dS}, \quad (2-13)$$

a la fracción  $\delta$  se le conoce en el argot financiero como la *delta* o *razón de cobertura* (*hedge ratio*) de la opción por eso se denota comunmente con la letra delta del alfabeto griego. Observe que esta cantidad  $\delta$  es conocida en el instante inicial  $t_0$ , además note la similitud con la derivada de una función que en este caso dicha función sería el precio de la opción en función del valor del subyacente  $C_T(S_T)$ . Luego dependiendo de si la cantidad  $b = V = C - \delta S$  es positiva o negativa se presta o se invierte una cantidad igual de efectivo para conformar el portafolio

$$V = b + \delta S \quad (2-14)$$

En teoría el valor en el vencimiento de este portafolio coincidirá con el valor final o payoff de la opción  $C_T$  permitiendo de este modo que el emisor pueda honrar su parte en el contrato. El proceso de implementar el portafolio  $V$  se denomina ***cobertura delta de la opción***.

### Cobertura delta en el modelo binomial multi periodo

Con menores modificaciones adaptamos el modelo binomial al caso de varios períodos; acá todo sucede en el lapso de tiempo de  $t_0$  hasta  $T$ , pero ahora consideramos  $N$  períodos cada uno de los cuales posee una duración de  $\Delta t = (T - t_0)/N$ . Denotamos por  $t_n = t_0 + n\Delta t$ . En el instante  $t_0$  el precio de la acción que será considerada como subyacente es  $S_0$ , en  $t_1 = t_0 + \Delta t$  la acción puede valer

$$S_{t_1} = \begin{cases} S_0 d, & \text{con probabilidad } p, \\ S_0 u, & \text{con probabilidad } 1 - p. \end{cases} \quad (2-15)$$

Esta vez tomamos los parámetros  $d$  y  $u$  como:

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad \text{y} \quad u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}. \quad (2-16)$$

En cualquier otro periodo se tendrá

$$S_{t_{n+1}} = \begin{cases} S_{t_n} e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, & \text{con probabilidad } p, \\ S_{t_n} e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, & \text{con probabilidad } 1 - p. \end{cases} \quad (2-17)$$

y simplemente queremos llamar la atención a que en este caso el valor del portafolio que replica una opción con pago final o payoff  $C(T, S_T)$ , satisface en cada momento la relación

$$V_{t_n} = b_n + \delta(t_n)S_{t_n}, \quad (2-18)$$

donde

$$\delta_{t_n} = \frac{C(t_{n+1}, S_{t_n}u) - C(t_{n+1}, S_{t_n}d)}{S_{t_n}u - S_{t_n}d}, \quad \text{y} \quad b_n = e^{-r\Delta t} \left( \frac{C(t_{n+1}, S_{t_n}d)u - C(t_{n+1}, S_{t_n}u)d}{u - d} \right). \quad (2-19)$$

Una cobertura delta consiste en mantener al inicio del  $n$ -ésimo periodo un número de participaciones de la acción igual a  $\delta(t_n)$  y una cantidad de efectivo igual a  $b_n$  con saldo a favor o en contra en una cuenta bancaria.<sup>1</sup>

En este modelo de varios periodos vamos a modelar la dinámica de la cuenta bancaria o bono de la siguiente forma, una cantidad  $B_{t_n}$  de efectivo capitalizará en  $B_{t_{n+1}} = B_{t_n} e^{r\Delta t}$  al final del período.

El valor en  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  del portafolio replicante  $V$  es

$$V_{t_{n+1}} = b_n e^{r\Delta t} + \delta(t_n)S_{t_{n+1}}, \quad (2-20)$$

y se puede verificar que al final de cada período se cumple

$$V_{t_{n+1}} = C(t_{n+1}, S_{t_{n+1}}), \quad (2-21)$$

Es decir el portafolio de cobertura replica al final de cada periodo el valor de la opción, esto le permite al emisor honrar su compromiso en el contrato. También se puede mostrar que (ver [Wilmott, 2007])

$$C(t_0, S_{t_0}) = e^{-r(T-t_0)} E_q[C_T]. \quad (2-22)$$

<sup>1</sup> Si es a favor o en contra depende de la opción, por ejemplo en el caso de una opción de compra este saldo es una deuda y en el caso de una opción de venta este saldo es a favor, para los detalles véase [Hull, 2009]

La cual es la prima o valor inicial que se debe pagar al emisor para participar de la opción como tenedor.

Terminamos esta exposición del modelo binomial multiperiodo, resaltando el carácter general que poseen las relaciones (2-18), (2-19) y (2-22) en el sentido de que independientemente de la complejidad en la modelación del activo subyacente, por ejemplo modelo de Black-Scholes, modelo de volatilidad estocástica, se seguirán cumpliendo relaciones similares.

### Procesos Estocásticos de difusión

Siguiendo a [Sheldon, 2006], un proceso estocástico puede entenderse como una colección de variables aleatorias definidas sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, F, P)$ , donde  $F$  es una colección de todos los eventos posibles y representa toda la información contenida en el espacio de probabilidad. Dicha colección de variables puede considerarse como una familia de variables aleatorias indexadas por el tiempo.

El intervalo o conjunto de índices  $I$  puede ser de tipo continuo o discreto y esto determina que el proceso se ha denominado “proceso estocástico en tiempo continuo” o “proceso estocástico en tiempo discreto”. Entre algunos de los procesos estocásticos más estudiados se encuentran los procesos Markovianos en los que por definición la distribución del futuro del proceso condicional en la historia del mismo hasta el presente, solo depende del estado del proceso vigente en el instante presente, una definición un poco más precisa vendrá más adelante.

Los procesos de Markov que vamos a utilizar como modelo para la dinámica del precio de una acción o un activo con riesgo en general, serán procesos de Markov en tiempo continuo donde las variables aleatorias que conforman la familia del proceso son continuas, estos procesos también se denominan procesos de difusión.

El *Movimiento Browniano* es un proceso de difusión que desempeña el papel de “pieza básica” para la construcción de procesos y/o modelos más complejos.

### Movimiento Browniano Estándar

**Definición 1** *Un proceso se denomina **movimiento Browniano Estándar** si cumple las siguientes condiciones:*

- $W(0)=0$ .

- El proceso  $W$  tiene incrementos independientes; es decir, si  $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ , entonces  $W(t_4) - W(t_3)$  y  $W(t_2) - W(t_1)$  son variables aleatorias independientes.
- Para  $s < t$  la variable aleatoria  $W(t) - W(s)$  posee una distribución Normal con media 0, y varianza  $(t - s)$ .

$$W(t) - W(s) \sim N(0, t - s).$$

- $W$  posee trayectorias continuas.

El movimiento Browniano también aparece con el nombre de proceso Wiener en gran parte de la literatura.

## 2.2. Integral de Itô

Considérese una función  $f(t)$  continua y acotada en el intervalo  $[0, T]$ , dada una partición  $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$  de este intervalo, con  $t_{i+1} - t_i = \Delta t = T/N$ , se pueden considerar la variable aleatoria dada por la suma

$$S^{\Delta t} = \sum_{i=1}^N f(t_{i+1})[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}], \quad (2-23)$$

donde  $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$  son los incrementos de un movimiento Browniano estándar, la suma en (2-23) consta de términos que son variables aleatorias normales independientes, para el  $i$ -ésimo término se tiene que

$$f(t_{i+1})[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}] \sim N(0, \Delta t). \quad (2-24)$$

Se sigue de la definición de  $W$  dada arriba que  $S$  también es una variable aleatoria normal ( de hecho se tiene una familia, una variable aleatoria  $S^{\Delta t}$  para cada valor de  $\Delta t$ ) con

$$\begin{aligned} \mu_S &= E[S^{\Delta t}] = E \left[ \sum_{i=1}^N f(t_{i+1})[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}] \right], \\ &= \sum_{i=1}^N f(t_{i+1})E[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}], \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2-25)$$

también

$$\begin{aligned}
 V[S^{\Delta t}] &= E \left[ \left( \sum_{i=1}^N f(t_{i+1}) [W_{t_{i+1}} - W_{t_i}] \right)^2 \right], \\
 &= \sum_{i=1}^N f^2(t_{i+1}) E[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2], \\
 &= \sum_{i=1}^N f^2(t_{i+1}) \Delta t.
 \end{aligned} \tag{2-26}$$

Cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  el número de términos en  $S^{\Delta t}$  aumenta y por el Teorema Central del Límite  $S^{\Delta t}$  converge en distribución a una variable aleatoria normal que denotamos por

$$I = \int_{t_0}^T f(t) dW(t), \quad \text{tal que} \quad \int_{t_0}^T f(t) dW(t) \sim N(0, \sigma_I^2). \tag{2-27}$$

donde

$$\sigma_I^2 = \int_{t_0}^T f^2(t) dt. \tag{2-28}$$

y

$$E \left[ \int_{t_0}^T f(t) dW(t) \right] = 0. \tag{2-29}$$

La integral  $\int_{t_0}^T f(t) dW(t)$  se denomina la **Integral de Itô** de la función  $f(t)$  en el intervalo  $[t_0, T]$ .

Esta integral a un costo técnico bastante alto se puede extender a integrandos que pueden ser también procesos de difusión  $\sigma_t$ ,  $0 \leq t \leq T$  que cumplen ciertas condiciones, en este caso la integral de Itô correspondiente

$$I^* = \int_{t_0}^T \sigma_t dW(t), \tag{2-30}$$

puede existir como límite en cierto sentido de sumas similares a (2-23). Solo que en general  $I^*$  no necesariamente posee a una distribución normal, aunque sigue siendo cierto en general que

$$E \left[ \int_{t_0}^T \sigma_t dW(t) \right] = 0, \quad \text{y} \quad V \left[ \int_{t_0}^T \sigma_t dW(t) \right] = \int_{t_0}^T E[\sigma_t^2] dt \tag{2-31}$$

Para conocer los detalles de una forma más precisa uno se debe dirigir a referencias especializadas del tema como por ejemplo [Sheldon, 2006] y las referencias citadas.

Un segundo punto importante para mencionar consiste en que puede interpretarse la integral de Itô

$$\int_{t_0}^T f(t)dW(t),$$

como un proceso  $I_T$  si la vemos como función del parámetro temporal  $T$ . Esta interpretación permite entonces considerar procesos de la forma

$$X_t = X_0 + \int_{t_0}^t \mu(s)ds + \int_{t_0}^t \sigma(s)dW(s), \quad (2-32)$$

Donde  $X_0$  es una variable aleatoria,  $\mu(s)$  y  $\sigma(s)$  son procesos de trayectorias continuas con suficiente regularidad para que las respectivas integrales existan en un determinado sentido, la primera integral siendo una integral de las que se ocupa el cálculo usual. Los procesos de la forma en (2-33) se denominan **procesos de Itô** y se suelen representar en forma diferencial

$$dX_t = \mu(t)dt + \sigma(t)dW. \quad (2-33)$$

es decir, un proceso que cumpla (2-33) en realidad satisface una integral como en (2-32) y en general se cumple que

$$E[X_t] = E[X_0 + \int_{t_0}^t \mu(s)ds], \quad y \quad V[X_t] = \int_{t_0}^t E[\sigma_s^2]ds \quad (2-34)$$

### Lema de Itô

El lema de Itô equivale en el cálculo estocástico al teorema fundamental del cálculo convencional. El lema establece que si  $X_t$  es una difusión de Itô, es decir un proceso que satisface una EDS de la forma

$$dX_t = \mu(t)dt + \sigma(t)dW_t, \quad (2-35)$$

donde como lo hemos mencionado antes  $\mu(s)$  y  $\sigma(s)$  son procesos con suficiente regularidad para que las integrales en (2-32) existan. El proceso resultante  $Z_t$  de aplicar una transformación suficientemente regular  $\varphi(\cdot)$  al proceso de Itô  $X_t$ , es decir

$$Z_t = \varphi(X_t),$$

es también una difusión de Itô, el mismo lema establece como se calculan los coeficientes de la correspondiente representación de  $Z_t$

$$dZ_t = d\varphi(X_t) = \left( \mu(t) \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\sigma^2(t)}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right) dt + \sigma(t) \frac{d\varphi}{dx} dW_t, \quad (2-36)$$

donde las derivadas están evaluadas por supuesto en  $X_t$ .

De la anterior expresión puede apreciarse que existe una gran similitud con el método de resolución de integrales del cálculo determinístico: “Regla de la Cadena”, por lo que operativamente este lema termina convirtiéndose en una herramienta útil para la solución de ecuaciones diferenciales estocásticas.

### Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Como la mayoría de conceptos en *cálculo estocástico* y en la teoría de procesos de difusión en general, la noción de *ecuación diferencial estocástica* o SDE por sus siglas en inglés (Stochastic Differential Equation) requiere de un aparato considerable de detalles técnicos de la teoría de la medida para ser definidas con precisión, una exposición de este tipo está fuera del alcance y propósito de este trabajo; sin embargo, intentaremos una presentación intuitiva que facilite la lectura del resto del trabajo.

Para introducir la idea de ecuación diferencial estocástica primero intentamos entender la siguiente ecuación integral

$$X(t) = x_0 + \int_0^t \alpha(s, X(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, X(s)) dW \quad , \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2-37)$$

Acá tanto  $\alpha(t, x)$  como  $\sigma(t, x)$  son dos funciones que se suponen dadas, definidas en  $[0, T] \times D$  donde  $D$  es un intervalo de la recta real (en los modelos que se emplean en este trabajo se tiene que  $D = (0, \infty)$  o bien  $D = (-\infty, \infty)$ ). Las funciones  $\alpha(t, x)$  y  $\sigma(t, x)$  se suponen con suficiente regularidad para la existencia de las integrales. La variable incógnita de la ecuación integral (2-37) viene representada por el proceso  $X_t$ ,  $x_0$  es una constante real que desempeña el papel de condición inicial, (2-37) se trata entonces de una igualdad entre 2 variables aleatorias (de hecho la igualdad entre 2 procesos estocásticos) representados por

$X_t$  y por  $x_0 + \int_0^t \alpha(s, X(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, X(s)) dW$ .<sup>2</sup>

Un teorema (Teorema de existencia de ecuaciones diferenciales estocásticas) garantiza que bajo ciertas condiciones de regularidad en las funciones  $\alpha(t, x)$  y  $\sigma(t, x)$  entonces existe un proceso  $X_t$  que satisface la ecuación integral (2-37), especialmente sobre  $\sigma$  para que la integral sea martingala cuadrado integrable ; éste proceso  $X_t$  es denominado la solución de la **ecuación diferencial estocástica** representada por

$$dX(t) = \alpha(t, X(t)) dt + \sigma(t, X(t)) dW(t), \quad X(0) = x_0. \quad (2-38)$$

Recuerde que esta representación diferencial no es más que una notación compacta para la ecuación integral en (2-37) que posee sentido matemático.

Observe también que en la expresión (2-38), si la función  $\sigma(t, x)$  se toma como 0, la ecuación (2-38) se reduce a la ecuación diferencial ordinaria

$$dX(t) = \alpha(t, X(t))dt.$$

así las SDE como en (2-38) pueden ser interpretadas como una extensión de las ecuaciones diferenciales ordinarias en las que un término aleatorio ( $\sigma(t, X(t)) dW(t)$ ) afecta en cada instante el lado izquierdo de la EDO.<sup>3</sup>

Finalizamos esta sección exponiendo el hecho de que en virtud de (2-34), si  $X_t$  es la solución de una SDE como en (2-38) entonces

$$E[X_t] = x_0 + \int_0^t E[\alpha(s, X(s))]ds, \quad y \quad V[X_t] = \int_0^t E[\sigma^2(s, X(s))]ds. \quad (2-39)$$

por lo que las tasas de crecimiento de la media y la varianza de  $X_t$  son

$$\frac{dE[X_t]}{dt} = E[\alpha(t, X(t))], \quad y \quad \frac{dV[X_t]}{dt} = E[\sigma^2(t, X(t))]. \quad (2-40)$$

En las aplicaciones financieras los coeficientes  $\alpha(s, X(s))$  y  $\sigma(s, X(s))$  se denominan *tendencia* y *volatilidad* del proceso  $X_t$  respectivamente.

<sup>2</sup>La igualdad entre 2 variables aleatorias es entendida en el sentido de igualdad en casi todo punto, para detalles vease.

<sup>3</sup>Para la motivación de las SDEs también conviene pensar en el método de Euler para aproximar la solución de una EDO  $x_{n+1} = x_n + \alpha(t_n, x_n)\Delta t$ , si añadimos una perturbación (o innovación aleatoria) en cada instante terminamos esquemas de la forma  $x_{n+1} = x_n + \alpha(t_n, x_n)\Delta t + \sigma(t_n, x_n)\Delta W$ , que representan una discretización de una ecuación como (2-38).



## 2.2.1. Valoración de Derivados

### Valoración Neutral al Riesgo

Siguiendo a [Bingham and Kiesel, 2004], este tipo de valoración, se da bajo las condiciones de no arbitraje, el precio de una opción de compra por ejemplo está dado por:

$$F(t, s) = e^{-r(T-t)} E^Q [(S_T - K)^+ | S_t = s], \quad \text{donde } (x)^+ \doteq \max(0, x). \quad (2-41)$$

[Sheldon, 2006], indica que esta expresión permite ver que el precio de la opción depende del valor esperado del pago final descontado por el factor  $e^{-r(T-t)}$ , donde el superíndice de la esperanza,  $Q$ , indica que dicho valor esperado es calculado con respecto a una medida de probabilidad  $Q$  denominada, *medida de probabilidad neutra al riesgo*.

### Valoración vía Fórmula Black-Scholes

Esta formulación o modelo se dio a conocer en una publicación hecha por los economistas [Black and Scholes, 1973], quienes hallaron que una opción Call ( $C$ ) y Put ( $P$ ) europea pueden valorarse mediante las siguientes expresiones:

Para una Call u opción de compra

$$C = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \quad (2-42)$$

y para una Put u opción de venta

$$P = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \quad (2-43)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (2-44)$$

y

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (2-45)$$

donde  $N(x)$  es la función de distribución acumulada de la distribución Normal estándar,  $S_0$  es el precio del activo en el tiempo 0,  $K$  es el precio de ejercicio,  $r$  es la tasa libre de riesgo,  $\sigma$  es la volatilidad del precio del activo y  $T$  es la fecha de vencimiento.

Dicha formulación está basada en los siguientes supuestos:

- El precio del activo sigue una distribución LogNormal.
- No se pagan dividendos ni costos de transacción.
- Las tasas de interés no cambian a lo largo de la vida de la opción.
- Se asume que la volatilidad es constante.
- No existen arbitrajes o no debe haber lugar a los mismos.
- Las opciones solo pueden ser ejercidas en la fecha de expiración.
- El comportamiento del mercado no se puede predecir.

[Ahn et al., 1999] y [Schröter et al., 2012] consideran que dichos supuestos son rígidos y que son poco realistas, pero sin duda reconocen éste aporte como un buen referente del que es posible partir para la construcción de un modelo con mejor desempeño de valoración mediante la flexibilización de alguno o varios de estos supuestos.

### 3. Modelos de Valoración de Opciones con Volatilidad Estocástica

Siguiendo a [Fouque et al., 2000], encontramos que uno de los supuestos que resultan más contradictorio con observaciones empíricas a la hora de usar el modelo de Black-Scholes para la valoración de opciones europeas, es el supuesto de que la volatilidad en el precio del activo subyacente es constante.

En este capítulo nos vamos a concentrar en modelos que extienden el modelo de Black-Scholes flexibilizando la hipótesis de que la volatilidad es constante, tratandola más bien como una cantidad aleatoria.

El modelamiento de la volatilidad como un proceso estocástico está motivado por estudios empíricos de los retornos de precios de activos en mercados capitales en los cuales se observa al estimar la volatilidad que esta exhibe características “aleatorias”.

Es así como dicho autor concluye que el modelado de la volatilidad como una variable o proceso estocástico se convierte en una modificación importante particularmente hablando sobre modelos como el Black-Scholes, brindándoles una mejor capacidad de describir y representar un mercado mucho más complejo.

[Fouque et al., 2000], indica que si bien el precio del activo  $(S_t)_{t \geq 0}$  satisface una ecuación diferencial estocástica de la forma

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t, \tag{3-1}$$

donde  $(\sigma_t)_{t \geq 0}$  que representa el proceso de volatilidad, debe satisfacer ciertas condiciones de regularidad para que el modelo quede bien definido; sin embargo, dichas condiciones no precisan que deba ser un proceso de Itô, sino que puede ser un proceso de “saltos” o una cadena de Markov, entre otros; siempre y cuando garantice su positividad para que represente correctamente una volatilidad.

Además, el proceso de volatilidad no necesariamente estará perfectamente correlacionado con el movimiento Browniano  $(W_t)$  que causa las variaciones aleatorias del precio del subyacente,

por lo cual un modelo de volatilidad estocástica debe incorporar un segundo componente aleatorio solo parcialmente correlacionado con el movimiento Browniano ( $W_t$ ) que genere las fluctuaciones en volatilidad .

Este autor agrega también que al modelar un proceso de volatilidad, acorde con observaciones empíricas una característica deseable que este ha de capturar y preservar es la reversión a la media. Esta hace referencia al tiempo que tarda un proceso en volver al nivel medio de su distribución invariante.

[Fouque et al., 2000] indica que algunas opciones que brinda estas características (función positiva y con reversión a la media) son procesos como:

- Lognormal(LN), dado por:

$$dY_t = c_1 Y_t dt + c_2 Y_t d\hat{Z}_t \quad (3-2)$$

- Ornstein-Uhlenbeck (OU) , dado por:

$$dY_t = \alpha (m - Y_t) dt + \beta d\hat{Z}_t \quad (3-3)$$

- Feller o Cox-Ingersoll-Ross (CIR), dado por:

$$dY_t = k (m - Y_t) dt + \nu \sqrt{Y_t} d\hat{Z}_t \quad (3-4)$$

De los cuales se han venido desprendiendo los modelos de volatilidad estocástica listados en la siguiente tabla escogidos por sus buenas propiedades al ser positivas y tener reversión a la media (a excepción del modelo LN):

| Autor       | Correlación   | $f(y)$            | Proceso Y               |
|-------------|---------------|-------------------|-------------------------|
| Hull-White  | $\rho = 0$    | $f(y) = \sqrt{y}$ | Lognormal               |
| Scott       | $\rho = 0$    | $f(y) = e^y$      | Reversión a la Media OU |
| Stein-Stein | $\rho = 0$    | $f(y) =  y $      | Reversión a la Media OU |
| Ball-Roma   | $\rho = 0$    | $f(y) = \sqrt{y}$ | CIR                     |
| Heston      | $\rho \neq 0$ | $f(y) = \sqrt{y}$ | CIR                     |

**Tabla 3-1.:** Modelos de Volatilidad estocástica

### 3.1. Proceso Ornstein-Uhlenbeck (OU)

De acuerdo a lo mencionado en la sección anterior, existe una variedad relativamente amplia de modelos de volatilidad estocástica, los cuales han sido estudiados y documentados por autores como [Arató et al., 1999], algunos de los cuales fueron mencionados en la tabla (3-1). Sin embargo, siguiendo a [Fouque et al., 2003], más que trabajar bajo un modelo específico, lo que interesa es trabajar con un modelo que pueda describir y capturar las características de la volatilidad.

Un ejemplo de lo anteriormente descrito es el proceso Ornstein-Uhlenbeck conocido por sus siglas (OU) el cuál puede describirse como sigue:

$$dY_t = \alpha (m - Y_t) dt + \beta d\hat{Z}_t \quad (3-5)$$

donde,

$$\hat{Z}_t = \rho W_t + \sqrt{1 - \rho^2} Z_t \quad (3-6)$$

La volatilidad es modelada como  $\sigma_t = f(Y_t)$ , donde  $f(x)$  es una función positiva, un caso comúnmente usado consiste en la función exponencial  $f(x) = e^x$ .

El proceso OU se caracteriza además por ser un proceso de difusión Markoviano, cuya distribución invariante esta dada por:

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu^2}} \exp\left(-\frac{(y - m)^2}{2\nu^2}\right) \quad (3-7)$$

donde,

$$\nu^2 = \frac{\beta^2}{2\alpha} \quad (3-8)$$

Siendo esta la función de distribución de una  $N(m, \nu^2)$ , se puede calcular la covarianza bajo este supuesto como:

$$E\{(Y_t - m)(Y_s - m)\} = \nu^2 e^{-\alpha|t-s|} \quad (3-9)$$

A partir de la anterior expresión [Fouque et al., 2003] expone dos grandes conclusiones:

- $\alpha$  o  $\frac{1}{\alpha}$  es la escala de tiempo en la que se da lugar a la reversión a la media del proceso.
- $\nu^2$  es el parámetro que controla el tamaño de las fluctuaciones de la volatilidad.

A partir de este hecho, el autor en mención, considera un estimador empírico que utiliza para estimar  $\alpha$ , llamado variograma el cual será el tema a tratar en la siguiente sección.

En este trabajo nos vamos a concentrar en el siguiente modelo para el precio de un activo riesgoso que incorpora la volatilidad como un proceso estocástico:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma_t X_t dW_t \quad (3-10)$$

con,

$$dY_t = \alpha (m - Y_t) + \beta \left( \rho dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t \right) \quad (3-11)$$

donde,

- $W_t$  y  $Z_t$  son movimientos Brownianos independientes entre sí, siendo el segundo la fuente adicional de aleatoriedad en las fluctuaciones de la volatilidad.
- El proceso de volatilidad es  $\sigma_t = e^{Y_t}$ .
- $\alpha$ : Es la tasa de reversión a la media.
- $m$ : Es la media de la distribución invariante de  $Y_t$ .
- $\beta$ : Es la volatilidad de la volatilidad.

en breve vamos a denominar a este modelo, modelo de volatilidad estocástica *Ornstein-Uhlenbeck Exponencial* (EOU) :

## 3.2. Estimación de la Volatilidad

Uno de los parámetros claves en la estimación de la volatilidad como proceso, es la escala de tiempo en la que se da lugar a la reversión a la media de ésta. Según [Fouque et al., 2000] estas escalas de tiempo pueden ser largas (sobre el orden de meses) o cortas (sobre el orden de días) y no necesariamente ser mutuamente excluyentes. Estos autores, identifican este parámetro a través de una función empírica llamada variograma, la cual es evaluada sobre los log-retornos absolutos y cuyo resultado es validado a través de la evaluación del espectro de dichos datos.

Dado que su estudio se enfoca en la estimación de la escala de tiempo corta, usan por tanto, datos de alta frecuencia, donde vislumbran una variación sistemática intra-día de la volatilidad, la cual es denominada el “efecto día”, y que corresponde a las oscilaciones periódicas presentes en el variograma. Dentro del marco investigativo de estos autores, se resalta que la estimación directa de parámetros mediante el método generalizado de momentos, no consigue separar los efectos de la reversión a la media y de las componentes periódicas.

### 3.2.1. La Estimación de Parámetros del Modelo OU y su Distribución Invariante

El objetivo de esta sección consiste en establecer un nexo entre la metodología que vamos a utilizar mas adelante para estimar los parámetros del modelo de volatilidad estocástica que estamos considerando y que el efecto de este último en el tratamiento que damos a las simulaciones de cobertura más adelante se resume a un único número a saber, la varianza  $\bar{\sigma}^2$  del proceso  $e^{Y_t}$  donde  $Y_t$  es el proceso OU bajo la distribución estacionaria o invariante de este último. Las principales ideas presentadas en esta subsección son tomadas a partir del aporte de [Fouque et al., 2000].

Como lo mencionamos un poco atrás el proceso de Orstein-Uhlenbeck posee la distribución estacionaria

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu^2}} \exp\left(-\frac{(y-m)^2}{2\nu^2}\right). \quad (3-12)$$

El hecho de ser la distribución invariante significa que si a la ecuación diferencial estocástica que caracteriza el proceso OU, es decir

$$dY_t = \alpha(m - Y_t) dt + \beta d\hat{Z}_t \quad (3-13)$$

es complementada con una condición inicial  $Y_0$  correspondiente a una variable aleatoria con distribución dada por (3-12) entonces la solución de la ecuación diferencial estocástica (3-13)  $Y_t$  tendrá la misma distribución (3-12) para cada tiempo  $t > 0$ .

Además para un valor inicial determinístico cualquiera  $y_0$ , la solución  $Y_t$  de (3-13) posee una distribución normal con media y varianza dadas por

$$E[Y_t] = m + (y_0 - m)e^{-\alpha t}, \quad V[Y_t] = \nu^2(1 - e^{-2\alpha t}). \quad (3-14)$$

Observe por tanto que los límites cuando  $t \rightarrow \infty$  y  $\alpha \rightarrow \infty$  son iguales y la distribución límite de  $Y_t$  coincide con la distribución estacionaria (3-12).

El hecho de que  $Y_t$  sea un proceso de difusión con una distribución invariante lo convierte también en un proceso *ergódico*. En este punto declaramos que una definición precisa del concepto de ergodicidad de un proceso o un proceso estocástico ser ergódico requiere de varios detalles técnicos cuya inclusión en este trabajo desviarían la atención hacia puntos que nos interesan menos que el asunto de la estimación del modelo OU. Detalles precisos sobre el tema de ergodicidad de procesos pueden ser revisados en los aportes de [Doob, 1953].

Mencionar el hecho de que el proceso  $Y_t$  es ergódico es importante debido a que según el *Teorema Ergódico* los procesos ergódicos poseen la siguiente propiedad estadística deseable de que *el promedio de los valores de un proceso a lo largo de una realización del mismo es igual al promedio del proceso sobre todas las realizaciones (media transversal) bajo la distribución estacionaria*. Para la situación particular que nos interesa tenemos que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_t^2 dt = E^\Phi[\sigma_r^2]. \quad (3-15)$$

donde  $\Phi$  denota la distribución estacionaria en (3-12).

Igualmente ya hicimos notar el hecho de que el límite de la distribución de  $Y_t$  para valores grandes del tiempo es igual a límite cuando  $\alpha \rightarrow \infty$ .

Así cuando la tasa de reversión a la media de  $\alpha$  del proceso OU es relativamente alta (lo cual se puede dar en una escala de alta frecuencia de precios intra-día), La distribución del proceso de volatilidad impacta los valores de una opción **simplemente** a través de una volatilidad efectiva  $\bar{\sigma}$

$$\bar{\sigma}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_t^2 dt = E^\Phi[\sigma_r^2]. \quad (3-16)$$

### 3.2.2. El Variograma y la estimación empírica de los parámetros.

Esta subsección se basa en la metodología de estimación de parámetros para un modelo de volatilidad estocástica propuesta por [Fouque et al., 2003].

Como ya lo habíamos anticipado nos concentraremos en la estimación de parámetros del siguiente modelo de volatilidad estocástica para la dinámica del precio de un activo con riesgo

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW. \quad (3-17)$$



Donde el proceso de volatilidad  $\sigma_t$  consiste en un modelo exponencial de Orstein Uhlenbeck, es decir

$$\sigma_t = f(Y_t) = e^{Y_t}.$$

donde el proceso  $Y_t$  es la solución de

$$dY_t = \alpha(m - Y_t)dt + \beta dZ. \quad (3-18)$$

donde  $\alpha$ ,  $m$  y  $\beta$  son parámetros constantes y  $Z_t$  es un movimiento Browniano independiente de  $W_t$  en (3-17).

Para construir una función empírica de los datos denominada variograma la cual será utilizada en la estimación de los parámetros en (3-18).

La estimación planeada se realizará basada en una serie de precios de alta frecuencia con el objetivo de extraer el efecto de la reversión en una escala de tiempo rápida (recuerde que la distribución estacionaria o invariante del modelo EOU comienza a dominar cuando  $t$  es grande o equivalentemente cuando  $\alpha$  es grande).

Vamos a denotar por  $\bar{S}_n$  a la media de los precios en un periodo de 5 minutos en el instante  $n$  o algún otro precio representativo del activo en esta misma ventana temporal.

Luego se consideran las fluctuaciones normalizadas de los precios  $\bar{D}_n$  dadas por

$$\bar{D}_n = \frac{2(\bar{S}_n - \bar{S}_{n-1})}{\sqrt{\Delta t}(\bar{S}_n + \bar{S}_{n-1})}. \quad (3-19)$$

la expresión equivalente para las fluctuaciones normalizadas en relación a la clase de modelos continuos de la forma

$$dS_t = \mu S_t dt + f(Y_t) S_t dW. \quad (3-20)$$

corresponde a

$$\frac{\Delta S_t}{S_t \sqrt{\Delta t}} = f(Y_t) \frac{\Delta W_t}{\sqrt{\Delta t}} + \mu \sqrt{\Delta t} \quad (3-21)$$

donde el término  $\mu \sqrt{\Delta t}$ , que representa el valor medio de las fluctuaciones normalizadas, puede ser despreciado puesto que es relativamente pequeño, mientras que la expresión  $\frac{\Delta W_t}{\sqrt{\Delta t}}$

representa el término correspondiente al error  $\{\varepsilon_n\}$  o desvío en relación al valor medio que constituye una sucesión de variables aleatorias distribuidas  $N(0, 1)$ .

Es posible entonces reducir la expresión para las fluctuaciones normalizadas de forma consistente con un modelo continuo como (3-20) de modo que

$$\bar{D}_n = f(Y_n) \epsilon_n = \sigma_n \epsilon_n, \quad (3-22)$$

donde como se ha indicado  $\{\epsilon_n\}$  es una secuencia de i.i.d de variables Gaussianas con media cero y varianza 1,  $\sigma_n$  es la volatilidad en el instante  $t_n$ .

Se procede a considerar el logaritmo de las fluctuaciones normalizadas

$$X_n = \log |\bar{D}_n| = \log \sigma_n + \log |\epsilon_n| \quad (3-23)$$

el cual es la suma del del logaritmo del proceso de volatilidad mas un proceso de ruido blanco.

El variograma  $V_j^N$  que corresponde a la siguiente función muestral

$$V_j^N = \frac{1}{N} \sum_n (X_{n+j} - X_n)^2 \quad (3-24)$$

El propósito de trabajar con el logaritmo de este modelo radica en la maniobrabilidad que otorga el hecho de trabajar con un proceso aditivo de ruido blanco.

El variograma o la función muestral en (3-15), es un estimador de

$$2\nu^2 (1 - e^{-j\alpha\Delta t}) + 2\gamma^2, \quad (3-25)$$

donde  $\gamma^2 = \text{var} \{\log \varepsilon\}$ .

La expresión en (3-25) del siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}
E [(X_{n+j} - X_n)^2] &= E [(X_j - X_0)^2] \quad \text{por estacionaridad} & (3-26) \\
&= E [(\log(f(Y_j)) - \log(f(Y_0)))^2] + E [(\log(|\varepsilon_j|) - \log(|\varepsilon_0|))^2] \\
&= 2E [(\log(f(Y)))^2] - 2E [\log(f(Y_j)) \log(f(Y_0))] + 2\text{var} [\log(|\varepsilon_j|)] \\
&\approx 2\nu^2 (1 - e^{-j\alpha\Delta t}) + 2\gamma^2. & (3-27)
\end{aligned}$$

Donde se ha tenido en cuenta en la última ecuación que  $f(Y_j) = \exp(Y_j)$ .

A partir del variograma se espera tener información sobre al menos tres parámetros:

- $\alpha$ , que representa la tasa de reversión a la media o escala a la cual ésta se da. Este parámetro está relacionado con la curvatura de la gráfica del variograma.
- $\gamma^2$ , que representa la varianza del ruido blanco ( $\log |\varepsilon_n|$ ), es determinado a través del intercepto.
- $\nu_f^2$ , que representa la varianza del proceso ( $\log(f(\bar{Y}_n))$ ), es determinado a través de la distancia entre la asíntota horizontal y el intercepto con el eje vertical en la gráfica del variograma.

**Parte II.**

**Cobertura de Opciones**

## 4. Estrategias de Cobertura

### 4.0.1. Definición y tipos de cobertura

Según [Wilmott, 2007], la cobertura en un sentido amplio es la reducción de riesgo mediante la explotación de la correlación entre inversiones riesgosas. Su clasificación y la aplicación de sus estrategias, radica en la dependencia o no, del modelo que valora el derivado. Agrega también que en la valoración de derivados es importante conocer la volatilidad del precio activo subyacente, ya que este parámetro es fundamental a la hora de determinar el modelo, pues a partir de su correcta definición dependerá que tan apropiadas son la valoración del derivado y la estrategia de cobertura elegida.

[Wilmott, 2007], destaca la cobertura Delta como uno de los pilares de la teoría de los derivados, ya que ésta alude a la eliminación teóricamente perfecta de todo riesgo mediante una combinación inteligente entre la opción y el subyacente, a través de la explotación de la correlación entre los cambios en el valor de la opción y las variaciones en el precio de las acciones (activo subyacente). Este tipo de cobertura constituye un claro ejemplo de una cobertura dinámica pues debe ser constantemente monitoreada y frecuentemente ajustada por medio de la venta o compra del activo subyacente. Sin embargo, al vender o comprar el activo subyacente se incurre en costos de transacción que aumentan con la frecuencia de los reajustes, lo cual deteriora el propósito de la cobertura, generando pérdidas según indica [Hobson, 1998] .

A partir del modelo de valoración de opciones Black-Scholes, refiriéndonos particularmente a las opciones de compra o call, cuya expresión esta dada por:

$$C(S_t, t) = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (4-1)$$

donde,  $S_t$  el precio del subyacente en el tiempo  $t$ ,  $N(x)$  es la función de distribución acumulada de la Normal y,  $d_1$  y  $d_2$  se expresan como sigue:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

se puede inferir diversos métodos de cobertura, las cuales se basan en una tasa de cambio (derivada) que busca medir la sensibilidad de una variable del modelo con respecto al cambio percibido en uno de sus parámetros; de los cuales se describen a continuación aquellos de mayor relevancia en el tema:

- Delta: Mide la sensibilidad del valor del portafolio con respecto a cambios en el subyacente. Su expresión esta dada por:

$$\frac{\partial C(S, t)}{\partial S} = N(d_1) \quad (4-2)$$

- Gamma: Mide la sensibilidad de la Delta con respecto a cambios en el subyacente. Este tipo de cobertura, genera mayor precisión pues busca eliminar los efectos de segundo orden que posee la cobertura delta, ya que intenta reducir el impacto de los reajustes tanto de magnitud como de tiempos de ejecución. Su expresión esta dada por:

$$\frac{\partial^2 C(S_t, t)}{\partial S_t^2} = \frac{N'(d_1)}{\sigma S_t \sqrt{T-t}} \quad (4-3)$$

[Hull, 2009], indica que si la *Gamma* de un portafolio es pequeña, entonces su *Delta* cambia lentamente, por lo que ésta última no requerirá reajustarse con tanta frecuencia; caso contrario ocurre cuando *Gamma* es grande, lo cual implicará un riesgo muy alto dejar pasar largos períodos de tiempo sin reajustar la cobertura *Delta*. Este tipo de cobertura en esencia, está monitoreando el tamaño del error que existe entre el precio de la opción y el precio del subyacente cuya relación de cambio se mide a través del grado de curvatura que existen entre ellos.

Para entender en que consiste la cobertura delta vamos a considerar el precio en el instante  $t$ ,  $V_t$  de una opción que puede ser una opción europea de compra o de venta. Como hemos visto en el modelo de Black-Scholes se modela la dinámica del precio del activo subyacente  $S_t$  por medio de

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t. \quad (4-4)$$

También el precio de una opción  $V_t$  en el instante  $t$  con precio de ejercicio  $K$ , vencimiento en  $T > t$ , cuando el activo subyacente vale  $S_t$  se puede representar por medio de

$$V(t, S_t) = e^{-r(T-t)} E [(S_T - K)^+ | S_t]. \quad (4-5)$$

La función  $V(t, s)$  que dá el valor de la opción, satisface la ecuación diferencial de Balck-Scholes con condición final

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + rs \frac{\partial V}{\partial s} = rV, \quad (4-6)$$

$$V(T, s) = (s - K)^+ = \text{máx}\{0, s - K\}. \quad (4-7)$$

Sí denotamos  $V_t = V(t, S_t)$  sabemos por la formula de Itô que

$$dV_t = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V(t, S_t)}{\partial s^2} \right) dt + \frac{\partial V(t, S_t)}{\partial s} dS_t \quad (4-8)$$

teniendo en cuenta (4-6) esta última ecuación es equivalente a

$$dV_t = r \left( V(t, S_t) - S_t \frac{\partial V(t, S_t)}{\partial s} \right) dt + \frac{\partial V(t, S_t)}{\partial s} dS_t \quad (4-9)$$

De la misma manera un portafolio con valor en  $t$ ,  $\pi_t$ , y administrado de tal forma que en todo momento se tengan  $\Delta_t$  unidades o participaciones del subyacente  $S_t$  y una cuenta bancaria con valor  $B_t = \pi_t - \Delta_t S_t$ .

Es decir

$$\pi_t := \pi(t, S_t) = B_t + \Delta_t S_t, \quad (4-10)$$

el cambio instantaneo en el valor de dicho portafolio  $d\pi_t$  es

$$\begin{aligned} d\pi_t &= dB_t + \Delta_t dS_t, \\ &= r(\pi_t - \Delta_t S_t)dt + \Delta_t dS_t \end{aligned} \quad (4-11)$$

Se puede observar entonces de (4-9) y (4-11) que si en un instante inicial  $t_0$  tomamos como valor inicial para  $\pi_t$  el valor o precio de la opción en dicho instante  $V_{t_0}$  y en cada

momento mantenemos en el portafolio un número de participaciones del subyacente  $\Delta_t$  igual a la derivada  $\frac{\partial V(t, S_t)}{\partial s}$  es decir

$$\pi(t_0, S_{t_0}) = V(t_0, S_{t_0}), \quad y \quad \Delta_t = \frac{\partial V(t, S_t)}{\partial s}. \quad (4-12)$$

se tendría entonces que el precio del portafolio  $\pi_t$  **replicaría** el valor de la opción  $V_t$ , pues se tiene que

$$\begin{aligned} d(\pi_t - V_t) &= r \left[ \pi_t - V_t - \left( \Delta_t - \frac{\partial V}{\partial s} \right) S_t \right] dt + \left( \Delta_t - \frac{\partial V}{\partial s} \right) dS_t, \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4-13)$$

La **cobertura delta** consiste entonces en mantener un portafolio  $\pi_t$  que inicialmente vale  $V_{t_0}$  y en cada momento un número de participaciones del subyacente  $S_t$  igual a  $\Delta_t = \frac{\partial V(t, S_t)}{\partial s}$ .

O de forma equivalente si  $\Delta_t = \frac{\partial V(t, S_t)}{\partial s}$  también se tiene de (4-11) y de la formula de Itô que

$$\frac{\partial \pi(t, S_t)}{\partial s} = \frac{\partial V(t, S_t)}{\partial s}, \quad (4-14)$$

y la “delta” o derivada con respecto al precio del subyacente  $S_t$  del portafolio compuesto  $\pi_t - V_t$  es

$$\frac{\partial}{\partial s} [\pi(t, s) - V(t, s)] = 0. \quad (4-15)$$

Finalizamos esta sección indicando que una cobertura Gamma sería una en la cual se constituya un portafolio de cobertura  $\pi_t$  que además de cumplir (4-15) también cumpla que se Gamma neutro es decir

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} [\pi(t, s) - V(t, s)] = 0. \quad (4-16)$$



## 5. Caso de Estudio

En este apartado se realizará una estimación de la volatilidad haciendo uso de herramientas de estimación no paramétricas como la regresión no lineal apoyándonos específicamente en el variograma muestral introducido en la sección 3.2. Por lo tanto, en primera instancia, el objetivo será el de estimar los parámetros  $\alpha$ ,  $\nu$  y  $\gamma$  a fin de lograr simular el proceso de volatilidad, para posteriormente simular el comportamiento del precio del subyacente y con ello generar los respectivos cálculos del precio de una opción de compra sobre éste y por tanto examinar su proceso de cobertura, teniendo en cuenta que el objeto de su estudio estará soportada sólo con información del subyacente, lo cual puede darse en los casos en los que el mercado no es líquido.

En este ejercicio de simulación se estimará la volatilidad de la serie de precios de alta frecuencia contenidos en la base de datos “sample\_real5minprices” disponible en **R** en la librería “highfrequency”, la cual contiene 4819 precios registrados de una misma acción que constituye su evolución durante un período de observación que va desde el 3 de marzo de 2005 hasta el 1 de junio de 2005, donde un día cuenta con 79 observaciones del precio. Esta simulación se consigue hacer a partir de la discretización del precio de una opción sobre el precio histórico del subyacente; es decir, de

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (5-1)$$

se simula de manera discretizada

$$\Delta S_t = rS_t \Delta t + \sigma S_t \Delta W_t \quad (5-2)$$

donde el valor de  $\sigma$  está dado por la volatilidad constante estimada bajo el método del variograma explicado en la sección 3.2 y bajo estimación vía modelos GARCH para permitir una comparación de desempeño de la estimación del primer método en mención en el cálculo del costo de cobertura final, lo anterior asumiendo que estas estimaciones pertenecen a una media de la distribución invariante del proceso de volatilidad.

Por otro lado, el proceso Wiener o movimiento Browniano ( $W_t$ ) se simula bajo las condiciones indicadas en la sección 2.1., en la subsección donde se le define.

Vamos a denotar por  $S_n$  el precio en el instante  $n$ , considerando las fluctuaciones normalizadas definidas por

$$D_n = \frac{2(S_n - S_{n-1})}{\sqrt{\Delta t}(S_n + S_{n-1})}. \quad (5-3)$$

A continuación se presenta un extracto de la base de datos mencionada que nos proporcionará la evolución en el tiempo de  $S_n$ :

| Fecha hora          | Precio    |
|---------------------|-----------|
| 04/03/2005 9:30:00  | 105,00606 |
| 04/03/2005 9:35:00  | 104,89096 |
| .                   | .         |
| 03/04/2005 9:30:00  | 103,35453 |
| 03/04/2005 9:35:00  | 103,7423  |
| .                   | .         |
| 01/06/2005 14:05:00 | 113,5682  |
| 01/06/2005 14:10:00 | 113,441   |

**Tabla 5-1.:** Datos ‘sample\_real5minprices’ de la librería ‘highfrequency’.

La versión continua de las fluctuaciones en (5-3) se puede escribir como

$$\frac{1}{\Delta t} \left( \frac{\Delta S}{S_t} - \mu \Delta t \right) = \sigma_t \frac{\Delta W_t}{\sqrt{\Delta t}}, \quad (5-4)$$

que se consigue al discretizar la ecuación con la cual estamos modelando la dinámica de los precios

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW, \quad (5-5)$$

El término  $\mu \Delta t$  se omite en (5-4) por ser empíricamente de magnitud no significativa. Con base a (5-4) vamos a modelar las fluctuaciones normalizadas  $\{D_n\}$  por medio de

$$D_n = \sigma_n \epsilon_n, \quad (5-6)$$

donde  $\sigma_n$  es la volatilidad de los precios en el instante  $n$  y  $\{\epsilon_n\}$  es un ruido blanco Gaussiano de media cero y varianza 1.

Vamos a analizar el logaritmo del valor absoluto de las fluctuaciones normalizadas, lo cual implica reescribir (5-6) como:

$$X_n = \log |D_n| = \log \sigma_n + \log |\epsilon_n|, . \quad (5-7)$$

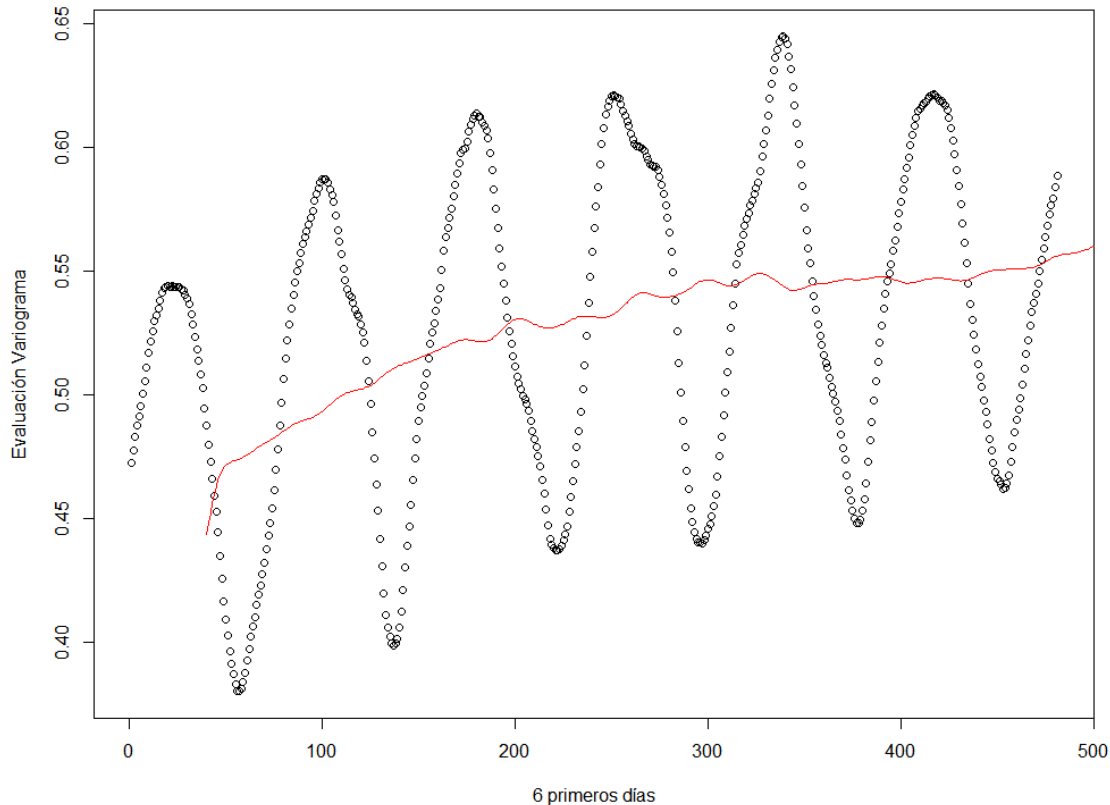
Note que el trabajar con el logaritmo de la expresión permite simplificar el proceso al estar conformado por la suma de 2 procesos, el logaritmo de la volatilidad y un ruido blanco.

Luego, sobre la expresión dada para  $X_n$  en (5-7), procedemos aplicar un filtro tipo media móvil sobre 10 puntos a fin de compensar el ruido singular generado por la componente  $\log |\epsilon_n|$ , lo cual nos facilitará la construcción de la estructura empírica de la función del variograma así:

$$V_j^N = \frac{1}{N} \sum_n (X_{n+j} - X_n)^2, \quad (5-8)$$

donde  $j$  es el rezago y  $N$  es el número total de puntos. Por lo tanto, a partir de los precios listados en la tabla(5-1), se construye entonces su correspondiente variograma con base en la ecuación (5-8), donde se obtiene el siguiente gráfico cuya línea punteada corresponde a la estructura empírica del variograma en función de los rezagos de los precios indexados, la cual permite evidenciar un comportamiento que esta gobernado por una componente periódica que no es más que el efecto intra-día de los datos. Por otro lado, la línea sólida corresponde a la calibración y ajuste de la curvatura mediante la expresión formal dada para el variograma, la cual recordemos se escribe como:

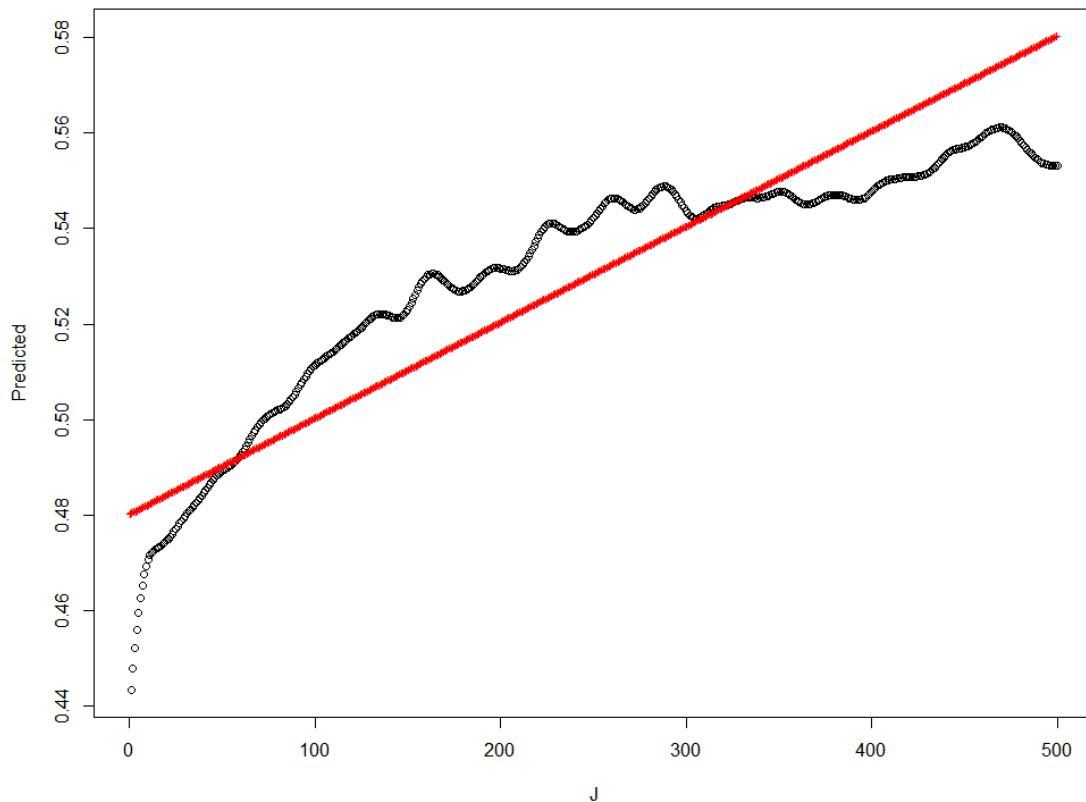
$$V_j^N = 2\nu^2 (1 - e^{-j\alpha\Delta t}) + 2\gamma^2, \quad (5-9)$$



**Figura 5-1.:** Variograma sobre los datos de la tabla (5-1).

En la anterior gráfica se puede apreciar el comportamiento de la volatilidad registrada intradía (puntos negros) y un bosquejo de lo que sería una media del proceso (línea roja), lo cual nos facilita la observación de una primera estimación de los tres parámetros de interés, así: El intercepto nos da información sobre el valor que puede tomar la varianza del ruido  $\log |\varepsilon_n|$  dado por  $\gamma^2$ , la distancia entre la asíntota horizontal y el intercepto nos da información sobre el valor que puede tomar la varianza del proceso  $\log f(\bar{Y}_n)$  dado por  $\nu^2$  y finalmente la curva formada por la línea sólida nos ayudará a determinar un primer valor de  $\alpha$ , la cual corresponde a la tasa de reversión a la media. Lo anterior sin tener en cuenta la correlación que pueda existir entre el proceso  $\bar{Y}_n$  y el ruido singular de las fluctuaciones  $\log |\varepsilon_n|$ . Por lo tanto, note que en la figura (5-1), la línea sólida de la gráfica tiende a estar alrededor de valores como 0.5 lo cual nos da indicios de un posible valor inicial para  $\alpha$ ; por otro lado, puede observarse que el intercepto se encuentra cercano a valores como 0.46, lo que nos da indicio del valor inicial de  $\gamma$ , con lo cual se gráfica nuevamente el variograma sobre los datos a fin de examinar el ajuste que se obtiene mediante la regresión no línea, la cual se observa

a continuación.

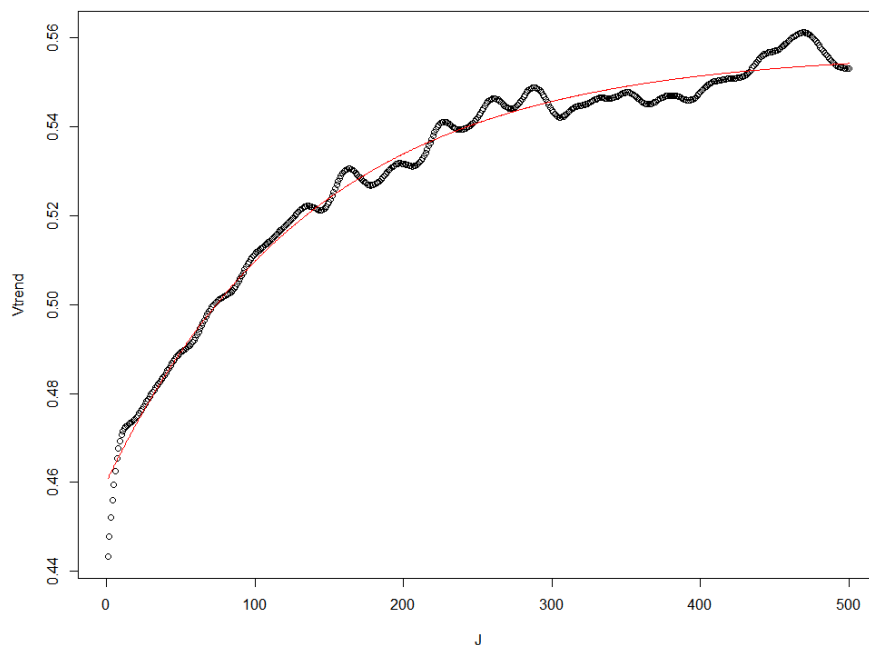


**Figura 5-2.:** Ajuste del Variograma (sobre el rezago  $j$ =días).

Podemos ver en la figura (5-2) que la línea sólida no alcanza ajustarse muy bien a los datos, por tanto su aproximación tiende a ser deficiente; luego, partiendo de las estimaciones de los parámetros con los cuales se graficó, se buscó bajo iteración hallar los valores de los parámetros que permitiesen un mejor ajuste, encontrando que una mejora sustancial se da bajo los siguientes valores iniciales de los parámetros:

- $\alpha = 400$
- $\gamma = 0.47$
- $\nu = 0.22$

A continuación se observa la gráfica del variograma, generada a través del uso de los valores iniciales iterados:



**Figura 5-3.:** Ajuste del Variograma usando valores iniciales iterados (sobre el rezago  $j =$  días).

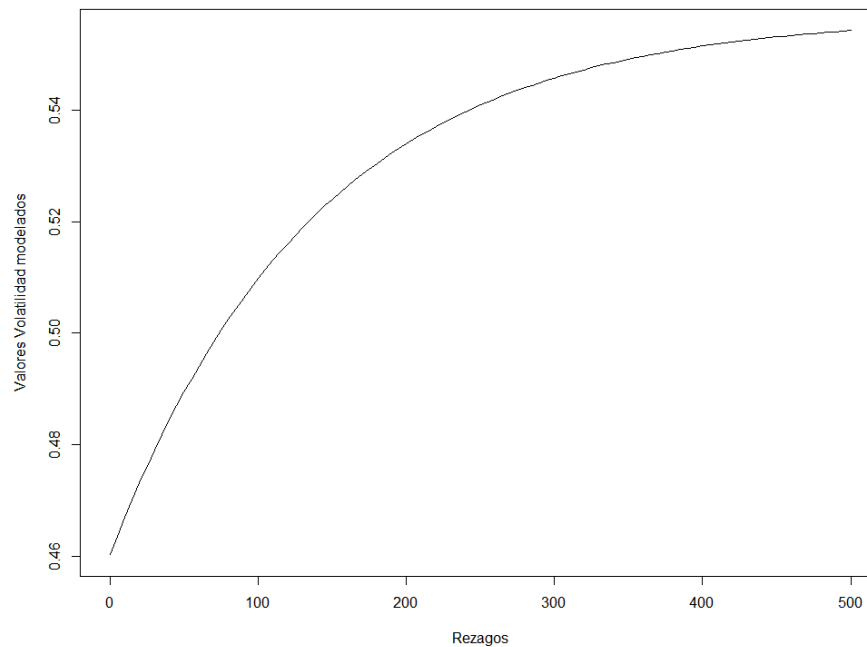
Así bajo la regresión no lineal, se muestra en la siguiente tabla las estimaciones obtenidas de los parámetros:

| Parámetros | Estimación    | Error Est.    | Valor t | $Pr(>  t )$ |
|------------|---------------|---------------|---------|-------------|
| $\gamma$   | $4.797e - 01$ | $3.050e - 04$ | 1572.81 | $< 2e - 16$ |
| $\nu$      | $2.199e - 01$ | $6.096e - 04$ | 360.70  | $< 2e - 16$ |
| $\alpha$   | $1.425e + 02$ | $2.174e + 00$ | 65.56   | $< 2e - 16$ |

**Tabla 5-2.:** Estimación de parámetros del variograma (3-25) por regresión no lineal.

Por lo tanto, tomando las estimaciones de los parámetros arrojadas por la regresión no lineal y teniendo en cuenta además que  $\Delta t = \frac{1}{79 \times 251} = 5.043119e^{-5}$ , finalmente se obtiene la gráfica del variograma ajustado, la cual representa la estimación empírica del valor medio de la distribución invariante de la volatilidad en concordancia a (3-25); por lo que puede notarse en dicha gráfica que para los primeros 6 días que comprende 500 rezagos u observaciones, la volatilidad toma un valor que oscila entre 0.46 y 0.56 donde adquiere cierta estabilidad

en valores cercanos a 0.55, aduciendo a la propiedad de ergodicidad del modelo bajo el cual se estableció; sin embargo, en la siguiente sección se hará una estimación formal de éste parámetro.



**Figura 5-4.:** Ajuste del modelo de volatilidad usando regresión no lineal (sobre el rezago  $j$ =días).

Por lo tanto, lo aquí obtenido emula el comportamiento de la volatilidad  $\sigma_t$  de los precios  $S_t$  en el instante  $t$ , el cual cuando  $N$  tiende a infinito consigue aproximarse con exactitud a un proceso exponencial OU determinado principalmente por una tasa de reversión a la media  $\alpha$  y una varianza  $\nu^2$  de su distribución invariante, por lo que el proceso simulado está modelado como:

$$\sigma_t = e^{Y_t}; \quad dY_t = \alpha(m - Y_t)dt + \nu\sqrt{2\alpha}dZ_t \quad (5-10)$$

Lo cual viene dado por  $Cov(Y_0, Y_t) = \nu^2 e^{-\alpha t}$ , bajo la distribución invariante  $N(m, \nu^2)$ .

## 5.1. Presentación y Análisis de Resultados de la Simulación

En esta sección vamos a simular tanto el proceso que sigue el precio del subyacente como el correspondiente al de la volatilidad. A partir de las estimaciones conseguidas de los parámetros  $\alpha$  y  $\nu$  además del parámetro  $m$  del cual hablaremos más adelante, podremos modelar el precio del subyacente como

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sigma_t S_t dW_t, \\ \sigma_t &= e^{Y_t}, \\ dY_t &= \alpha(m - Y_t)dt + \beta dZ_t, \end{aligned} \tag{5-11}$$

donde  $W_t$  y  $Z_t$  corresponden a movimientos Brownianos independientes.

Por otra parte, teniendo en cuenta la ecuación lineal para  $Y_t$  en (5-11), se tiene que

$$Y_t = e^{-\alpha t} Y_0 + m(1 - e^{-\alpha t}) + \beta e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha u} dZ_u, \tag{5-12}$$

utilizamos la siguiente discretización de (5-12) para su simulación

$$Y_{t_n} = e^{-\alpha t_n} Y_0 + m(1 - e^{-\alpha t_n}) + \beta e^{-\alpha t_n} \sum_{i=0}^n e^{\alpha t_i} \Delta Z_{t_i}, \tag{5-13}$$

donde  $t_i = i\Delta t$  y  $\Delta Z_i \sim N(0, \Delta t)$ .

Cabe mencionar que utilizando la fórmula de Itô, a partir de (5-11) también se tiene que el proceso del precio  $S_t$  se puede representar como

$$S_t = S_0 \exp \left( \int_0^t r - \frac{e^{2Y_u}}{2} du + \int_0^t e^{Y_u} dW_u \right), \tag{5-14}$$

y en lugar de (5-14) consideramos la siguiente discretización

$$S_{t_{n+1}} = S_{t_n} \exp \left( \left[ r - \frac{e^{2Y_{t_{n+1}}}}{2} \right] \Delta t + e^{Y_{t_{n+1}}} \Delta W \right), \tag{5-15}$$

donde  $\Delta W \sim N(0, \Delta t)$ .



Considerando que el principal objetivo en esta sección consiste en simular el costo de cobertura de una opción call, o dicho de una forma más precisa, se trata de estimar el costo bajo una cobertura delta utilizando las fórmulas del modelo BS a pesar de que en realidad el precio del subyacente sigue un proceso de volatilidad estocástica como en (5-11), tenemos que el costo de cobertura es simulado como se explica a continuación:

Con el valor inicial de la opción  $C_{BS}(t_0, S_{t_0})$  se constituye un portafolio con  $\Delta(t_0, S_{t_0}) = \Delta(0)$  unidades del subyacente y una inversión o préstamo por  $C_{BS}(t_0, S_{t_0}) - \Delta(0)S_{t_0}$  en una cuenta bancaria, así tenemos

$$C_{BS}(t_o, S_t) = \underbrace{\Delta(0)S_{t_0}}_{\text{En acciones}} + \underbrace{(C_{BS}(t_0, S_{t_0}) - \Delta(0)S_{t_0})}_{\text{En cuenta bancaria}} \quad (5-16)$$

donde  $C_{BS}(t_0, S_{t_0})$  es la función de BS, es decir

$$C_{BS}(t_o, S_t) = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (5-17)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (5-18)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad (5-19)$$

y  $\Delta(t) = \Delta(t_0, S_{t_0})$ , corresponde a la delta de la opción en el modelo de BS, es decir

$$\Delta(t) = \Delta(t_0, S_{t_0}) = \frac{\partial C_{BS}(t_0, S)}{\partial S} = N(d_1). \quad (5-20)$$

$N(x)$  es la función de distribución acumulada de la normal estándar.

Antes de seguir con la descripción de la cobertura delta, debemos hacer una pausa para aclarar un punto importante que consiste en el proxi que vamos a utilizar como volatilidad constante para evaluar las fórmulas de Black-Scholes correspondientes al precio y a la delta de la opción. En un régimen de reversión a la media alta (tasa de reversión a la media  $\alpha$  relativamente alta ) del proceso de volatilidad  $Y_t$ , la distribución estacionaria del proceso  $Y_t$

aproxima su distribución como se explicó en la sección 3.2.1. Esta distribución viene dada por

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} e^{-\frac{(y-m)^2}{2\nu^2}}, \quad \text{donde } \nu = \frac{\beta}{\sqrt{2\alpha}}. \quad (5-21)$$

Por lo tanto, bajo el contexto indicado (régimen de reversión a la média alto), la distribución estacionaria  $\Phi(y)$  nos permite estimar una *volatilidad constante efectiva*  $\bar{\sigma}$  para considerar la cobertura de una opción bajo el modelo de Black-Scholes

$$dS_t = rS_t dt + \bar{\sigma} S_t dW_t, \quad (5-22)$$

Para esto consideramos primero el proceso

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t, \quad (5-23)$$

y su discretización

$$\Delta S_t = \mu S_t \Delta t + \sigma_t S_t \Delta W_t, \quad (5-24)$$

de donde deducimos que

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \left( \frac{\Delta S_t}{S_t} - \mu \Delta t \right) = \sigma_t \frac{\Delta W_t}{\sqrt{t}}, \quad (5-25)$$

como en la sección (3.2.2) consideramos las *fluctuaciones normalizadas*  $D_n$  dadas por

$$D_n = \frac{2(S_n - S_{n-1})}{\sqrt{\Delta t}(S_n + S_{n-1})}, \quad (5-26)$$

de (5-25) tenemos entonces que

$$D_n = \sigma_n \epsilon_n, \quad (5-27)$$

donde  $\epsilon_n$  constituye una secuencia *iid* de variables  $N(0, 1)$  independientes de  $\sigma_n$ . Por lo tanto, de la ergodicidad del proceso de volatilidad  $\sigma_t = e^{Y_t}$  tenemos que

$$\bar{\sigma}^2 \approx \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_t^2 dt, \quad (5-28)$$

$\bar{\sigma}$  es la volatilidad constante efectiva en una escala de reversión a la media alta que estamos buscando y en conclusión la vamos a estimar como

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N D_n^2. \quad (5-29)$$

que también es definida por [Fouque et al., 2003] como

$$\bar{\sigma}^2 = E [\bar{D}_n^2] = e^{2m+2\nu^2} \quad (5-30)$$

donde a partir de los base de datos usadas, encontramos que  $\bar{\sigma}^2 = E [\bar{D}_n^2] = 0.1377443$ ; luego, despejando  $m$  de la expresión en 5-30, encontramos que su valor estimado es -1,039534.

Para finalizar la explicación de la simulación, describiremos a continuación la cobertura delta y la estimación de su costo.

Una vez que en un tiempo inicial  $t_0$  se implementa el portafolio en (5-16) el valor de este en el siguiente instante  $t_1 = t_0 + \Delta t$  es

$$V_1 = \Delta(0)S_{t_1} + (1 + r\Delta t) (C_{BS}(t_0, S_{t_0}) - \Delta(0)S_{t_0}), \quad (5-31)$$

Es pertinente aclarar que la discretización del tiempo acá es diferente de la empleada por ejemplo para discretizar los procesos en (5-11), pues esta corresponde a la frecuencia de rebalanceo con que se planea implementar el portafolio de cobertura.

En el instante  $t_1$  se rebalancea entonces el portafolio de cobertura de forma tal que

$$V_1 = \Delta(1)S_{t_1} + (V_1 - \Delta(1)S_{t_1}), \quad (5-32)$$

y en el instante  $t_2$  este portafolio valdrá

$$V_2 = \Delta(1)S_{t_2} + (1 + r\Delta t) (V_1 - \Delta(1)S_{t_1}), \quad (5-33)$$

y se continua de esta forma, por lo que simularemos el costo de cobertura calculando de forma iterativa la siguiente discretización

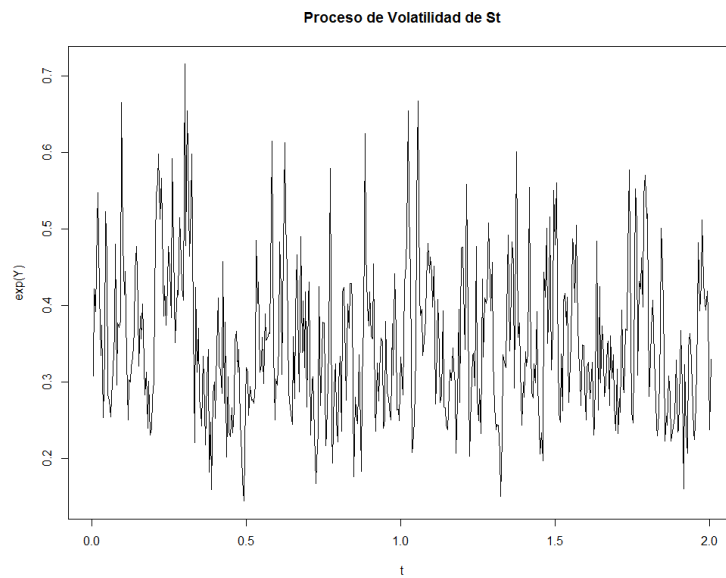
$$V_1 = \Delta(0)S_{t_1} + (1 + r\Delta t) (C_{BS}(t_0, S_{t_0}) - \Delta(0)S_{t_0}),$$

$$V_{n+1} = \Delta(n)S_{t_{n+1}} + (1 + r\Delta t) (V_n - \Delta(n)S_{t_n}),$$

$$L = (S_T - K)^+ - V_T. \quad (5-34)$$

donde  $L$  es la pérdida (positiva o negativa) en que incurre el emisor de la opción si cubre efectivamente la opción con pago final  $(S_T - K)^+ = \max(0, S_T - K)$ .

Teniendo en cuenta todo lo mencionado anteriormente, como primer resultado tenemos que el proceso de volatilidad oscila alrededor de una media según apreciación de la siguiente gráfica, lo que podría confirmar la ergodicidad del proceso



**Figura 5-5.:** Proceso de Volatilidad Estocástica

Bajo la estimación de los parámetros  $\alpha$ ,  $\nu$  y  $m$  nos permitimos modelar el proceso que sigue la valoración del subyacente y por tanto un portafolio constituido solo con éste, mostramos a continuación uno de los caminos que éste podría seguir

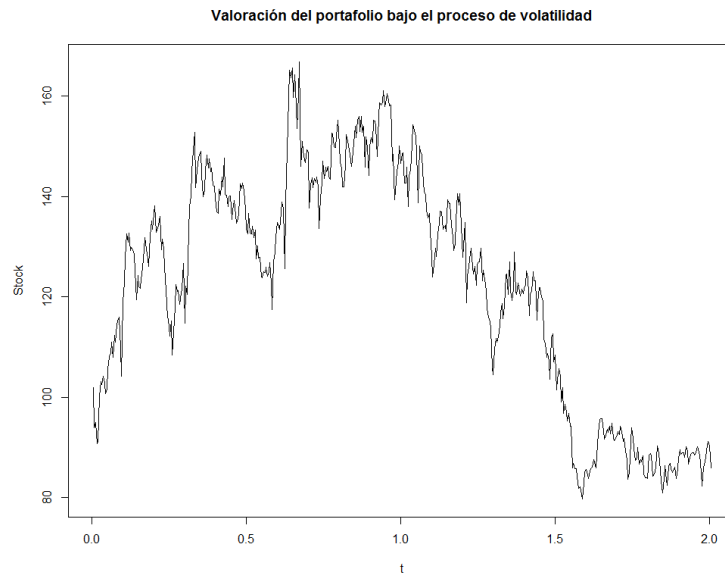


Figura 5-6.: Proceso del precio (USD) del subyacente

Luego, el costo final de cobertura calculado bajo tres escenarios diferentes teniendo en cuenta rebalanceso semanal y quincenal, es el que se muestra a continuación

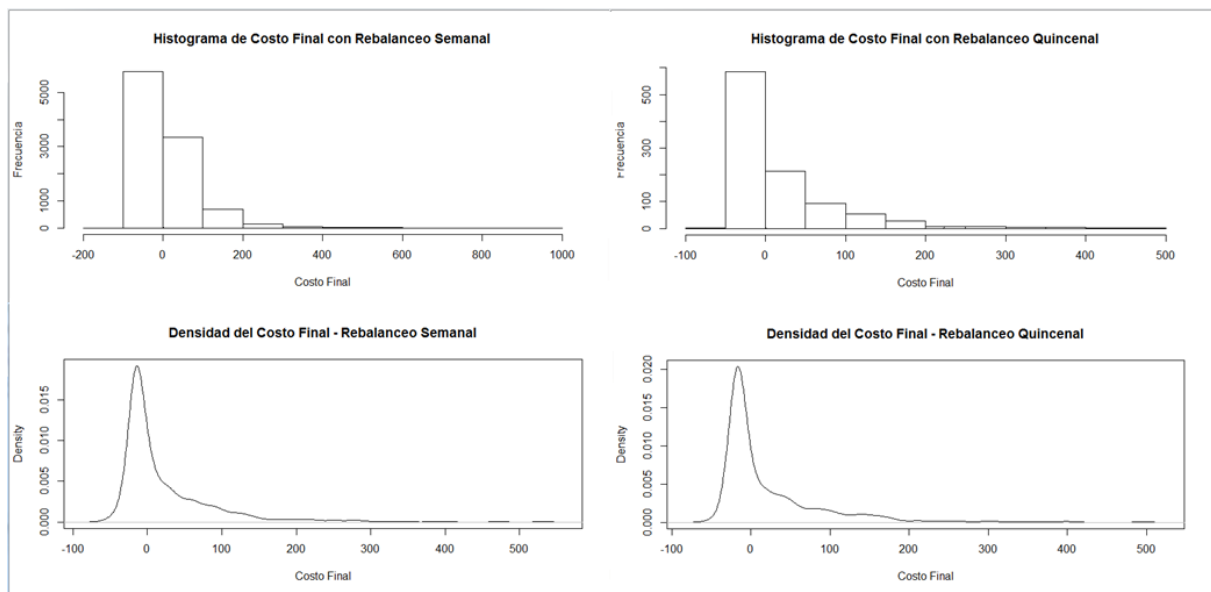


Figura 5-7.: Costo Final (USD) de Cobertura bajo el Proceso de Volatidad Estocástica

El resumen de los escenarios se muestran a continuación

| <b>COSTO FINAL CON VOLATILIDAD ESTÓCASTICA</b> |          |         |         |        |        |         |
|--|----------|---------|---------|--------|--------|---------|
| <b>Rebalanceo Semanal</b>                      |          |         |         |        |        |         |
| Replicas                                       | Min.     | 1er.Qu  | Mediana | Media  | 3er.Qu | Max.    |
| 1000   | -64.900  | -17.370 | -6.129  | 18.110 | 35.640 | 405.600 |
| 2000   | -126.600 | -17.010 | -5.881  | 19.410 | 33.320 | 447.400 |
| 10000  | -106.200 | -17.180 | -6.957  | 17.940 | 33.490 | 944.300 |

**Tabla 5-3.:** Resumen de simulaciones del costo final con volatilidad estócastica y rebalanceo semanal

| <b>COSTO FINAL CON VOLATILIDAD ESTÓCASTICA</b> |         |         |         |        |        |         |
|--|---------|---------|---------|--------|--------|---------|
| <b>Rebalanceo Quincenal</b>                    |         |         |         |        |        |         |
| Replicas                                       | Min.    | 1er.Qu  | Mediana | Media  | 3er.Qu | Max.    |
| 1000   | -54.33  | -17.90  | -10.38  | 16.90  | 32.17  | 495.20  |
| 2000   | -61.850 | -17.540 | -9.571  | 18.040 | 30.050 | 611.100 |
| 10000  | -63.350 | -17.480 | -9.115  | 18.130 | 32.350 | 571.400 |

**Tabla 5-4.:** Resumen de simulaciones del costo final con volatilidad estócastica y rebalanceo quincenal

De los anteriores resultados cabe destacar dos aspectos: el primero es la distribución que sigue los resultados arrojados de la simulación del costo final de cobertura, siendo ésta de cola pesada a la derecha, lo cual tiene sentido pues es común encontrar distribuciones con una cola pesada en “funciones” que miden una pérdida o ganancia; lo segundo a notar es que la distribución contiene tanto valores negativos como al valor cero en zonas donde se concentran altas probabilidades de ocurrencia, lo cual sugiere que el ejercicio final de la cobertura bien pudiera generar ganancias o podría ser incluso un valor nulo, es decir no costar nada.

Por otra parte, no parece haber una diferencia relevante entre las frecuencias de los rebalanceos de la cobertura; sin embargo, la distribución generada por los frecuencias quincenales parece tener mayor variabilidad que la generada semanalmente.

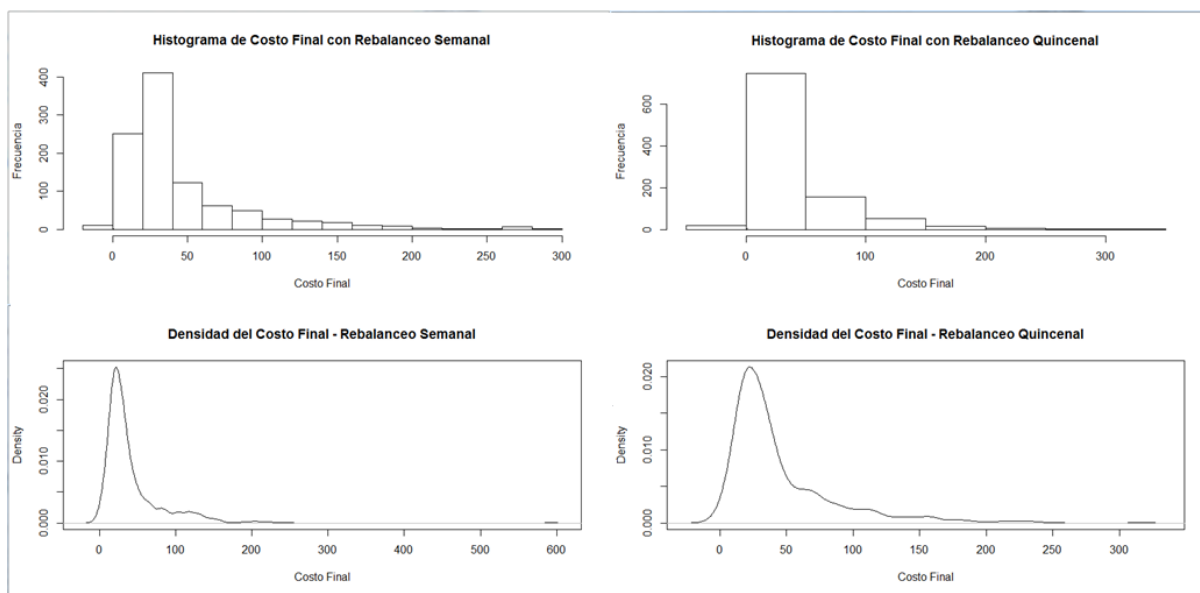
Con fines comparativos, revisaremos ahora los resultados asumiendo una volatilidad constante en el ejercicio de valoración del subyacente y por tanto en la cobertura de un portafolio

constituido unicamente con éste. Para ello generamos una estimación de la volatilidad a partir de la base datos mencionada en la parte introductoria de este capítulo, dicha estimación se hará bajo un modelo GARCH(1,1) cuyo resultado se muestra a continuación.

| <b>AJUSTE MODELO GARCH (DISTRIBUCIÓN: NIG)</b>  |            |            |           |          |
|---|------------|------------|-----------|----------|
| MODELO GARCH: sGARCH(1,1), MEDIA: ARFIMA(1,0,1) |            |            |           |          |
| PARÁMETROS ÓPTIMOS                              |            |            |           |          |
| Parámetro                                       | Estimación | Error Est. | Valor t   | P(>  t ) |
| mu  | 105.005000 | 0.312137   | 3336.4064 | 0.0000   |
| ar1   | 1.000000   | 0.000460   | 2173.7474 | 0.000000 |
| ma1   | -0.079061  | 0.015244   | -5.1865   | 0.000000 |
| omega   | 0.005063   | 0.000816   | 6.2055    | 0.000000 |
| alpha1  | 0.136492   | 0.017180   | 7.9450    | 0.000000 |
| beta1   | 0.787690   | 0.023522   | 33.4878   | 0.000000 |
| skew  | 0.045285   | 0.026187   | 1.7293    | 0.083754 |
| shape   | 1.035278   | 0.098014   | 10.5625   | 0.000000 |
| ERRORES ESTANDAR ROBUSTOS                       |            |            |           |          |
| Parámetro                                       | Estimación | Error Est. | Valor t   | P(>  t ) |
| mu  | 105.005000 | 0.023029   | 4559.6146 | 0.0000   |
| ar1   | 1.000000   | 0.000451   | 2218.6130 | 0.000000 |
| ma1   | -0.079061  | 0.015768   | -5.0142   | 0.000001 |
| omega   | 0.005063   | 0.000922   | 5.4895    | 0.000000 |
| alpha1  | 0.136492   | 0.016769   | 8.1397    | 0.000000 |
| beta1   | 0.787690   | 0.024301   | 32.4135   | 0.000000 |
| skew  | 0.045285   | 0.031390   | 1.4427    | 0.149109 |
| shape   | 1.035278   | 0.148386   | 6.9769    | 0.000000 |
| LogVerosimilitud: 392.1679                      |            |            |           |          |
| Criterios de Información                        |            |            |           |          |
| Akaike: -0.15944                                |            |            |           |          |
| Bayes: -0.14868                                 |            |            |           |          |

**Tabla 5-5.:** Estimación de la Volatilidad mediante modelos GARCH(1,1).

Bajo el escenario de una volatilidad constante tanto en la valoración del precio del subyacente y por tanto en el portafolio constituido únicamente por este activo, los resultados obtenidos del costo final de cobertura fueron los siguientes:



**Figura 5-8.:** Costo Final (USD) de Cobertura con Volatilidad Constante

El resumen de los escenarios se muestran a continuación

| <b>COSTO FINAL CON VOLATILIDAD CONSTANTE</b> |        |        |         |       |        |        |
|--|--------|--------|---------|-------|--------|--------|
| <b>Rebalanceo Semanal</b>                    |        |        |         |       |        |        |
| Replicas                                     | Min.   | 1er.Qu | Mediana | Media | 3er.Qu | Max.   |
| 1000   | -11.64 | 18.37  | 28.93   | 41.57 | 48.31  | 396.20 |
| 2000   | -10.21 | 18.35  | 28.43   | 42.06 | 48.10  | 372.90 |
| 10000  | -14.35 | 18.95  | 28.82   | 41.54 | 48.68  | 451.30 |

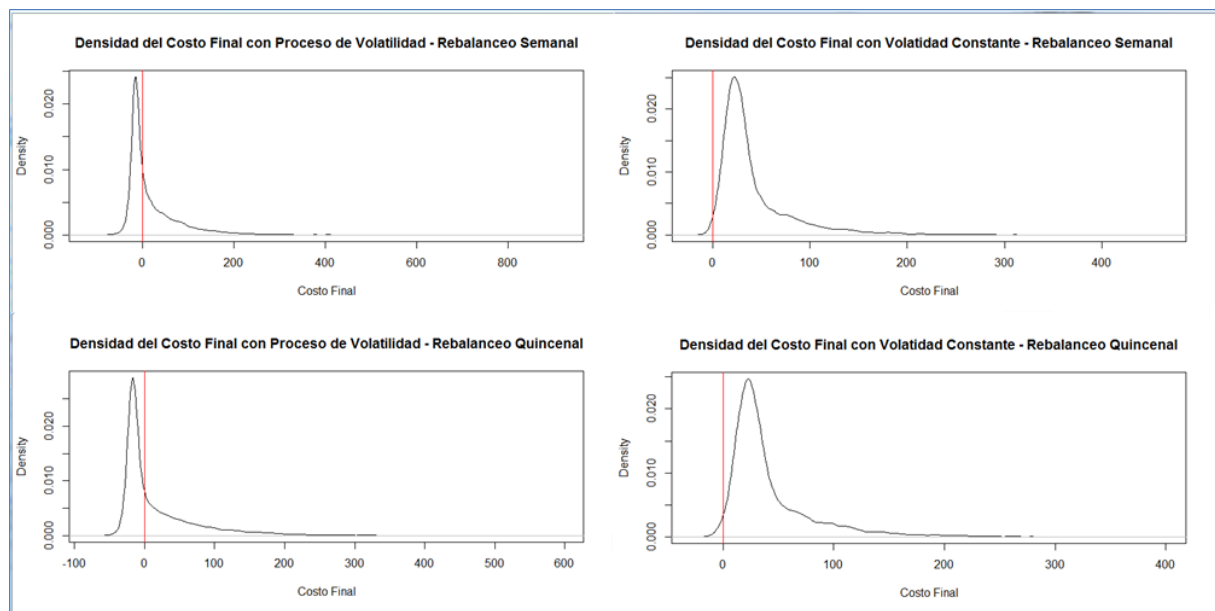
**Tabla 5-6.:** Resumen de simulaciones del costo final con volatilidad estocástica y rebalanceo semanal



| <b>COSTO FINAL CON VOLATILIDAD CONSTANTE</b> |        |        |         |       |        |        |
|--|--------|--------|---------|-------|--------|--------|
| <b>Rebalanceo Quincenal</b>                  |        |        |         |       |        |        |
| Replicas                                     | Min.   | 1er.Qu | Mediana | Media | 3er.Qu | Max.   |
| 1000   | -11.53 | 19.12  | 30.29   | 42.93 | 55.61  | 381.90 |
| 2000   | -18.77 | 18.47  | 28.93   | 42.86 | 51.70  | 374.50 |
| 10000  | -19.53 | 18.77  | 28.49   | 41.98 | 50.57  | 482.60 |

**Tabla 5-7.:** Resumen de simulaciones del costo final con volatilidad estocástica y rebalanceo quincenal

Los anteriores resultados son ligeramente similares a los obtenidos bajo la modelación del proceso de la volatilidad; sin embargo, la mayor diferencia a resaltar es que tanto los valores negativos como el valor cero de estas distribuciones se ubican en zonas de muy baja probabilidad de ocurrencia, lo cual podrá entonces implicar que bajo esta modelación existan mayores probabilidades de presentar un costo final de cobertura a pagar. Para facilitar su observación se muestra a continuación en forma paralela los resultados de las distribuciones empíricas.



**Figura 5-9.:** Comparativo Costo Final (USD) de Cobertura

## 6. Conclusiones

En el presente trabajo se estudió vía simulación la diferencia que puede existir en el cálculo del costo final en la ejecución del ejercicio de cobertura de un derivado financiero como las opciones de compra, específicamente hablando de las Call europeas, bajo la estimación puntual de la volatilidad mediante procesos OU y GARCH. En este contexto, se encontró que la modalidad de estimación del parámetro en mención puede afectar considerablemente el desempeño de la estimación del costo final de cobertura.

Dado que el método usado para estimar dicha volatilidad es de naturaleza empírica, existe una impetuosa necesidad de reforzar la validación numérica de la estimación a través de un coeficiente o índice que otorgue un indicio del porcentaje de variabilidad que existe en la estimación del parámetro, más aún motivados por el impacto que éste resultado ofrece en el cálculo de cobertura y su balanceo o reajuste.

Resulta conveniente revisar en trabajos futuros cuál es la frecuencia recomendable de balanceos o reajustes a realizar sobre la cobertura, supeditadas al margen de variabilidad de la estimación de la volatilidad, pues debido a los costos transaccionales, la frecuencia con la que ésta se realice tendrá un aporte significativamente grande o no al costo final del ejercicio. En este orden de ideas y a través de lo revisado en el soporte bibliográfico, lo ideal es minimizar dicha frecuencia, pero esto solo será posible garantizando el mínimo margen de incertidumbre en la estimación de la volatilidad como parámetro clave del cálculo de la cobertura de derivados como las opciones de compra.

# Bibliografía

- [Ahmad and Wilmott, 2005] Ahmad, R. and Wilmott, P. (2005). Which free lunch would you like today, sir?: Delta hedging, volatility arbitrage and optimal portfolios.
- [Ahn et al., 1999] Ahn, H., Muni, A., and Swindle, G. (1999). Optimal hedging strategies for misspecified asset price models. *Applied Mathematical Finance*, 6(3):197–208.
- [Arató et al., 1999] Arató, M., Baran, S., and Ispány, M. (1999). Functionals of complex ornstein-uhlenbeck processes. *Computers & Mathematics with Applications*, 37(1):1–13.
- [Bingham and Kiesel, 2004] Bingham, N. and Kiesel, R. (2004). *Risk-Neutral Valuation: Pricing and Hedging of Financial Derivatives*. Springer Finance Textbooks. Springer.
- [Black and Scholes, 1973] Black, F. and Scholes, M. S. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654.
- [Coleman et al., 2003] Coleman, T. F., Kim, Y., Li, Y., and Verma, A. (2003). Dynamic hedging with a deterministic local volatility function model. Technical report, Cornell University.
- [Doob, 1953] Doob, J. (1953). *Stochastic Processes*. Wiley Publications in Statistics. John Wiley & Sons.
- [Financiera, 2014] Financiera, S. (2014). Capítulo xviii - instrumentos financieros derivados y productos estructurados. Technical report, Superintendencia Financiera de Colombia.
- [Fouque et al., 2003] Fouque, J.-P., Papanicolaou, G., R. Sircar, K., and Solna, K. (2003). Short timescale in s&p 500 volatility. 6.
- [Fouque et al., 2000] Fouque, J.-P., Papanicolaou, G., and Sircar, K. R. (2000). *Derivatives in financial markets with stochastic volatility*. Cambridge University Press.
- [Hobson, 1998] Hobson, D. G. (1998). Volatility misspecification, option pricing and super-replication via coupling. *Annals of Applied Probability*, pages 193–205.
- [Hull, 2009] Hull, J. (2009). *Options, Futures and Other Derivatives*. Prentice Hall finance series. Pearson/Prentice Hall.

- [Schröter et al., 2012] Schröter, T., Monoyios, M., Rometsch, M., and Urban, K. (2012). Model uncertainty and the robustness of hedging models.
- [Sheldon, 2006] Sheldon, L. (2006). *Introductory Stochastic Analysis for Finance and Insurance*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley.
- [Wilmott, 2007] Wilmott, P. (2007). *Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance*. Wiley-Interscience, New York, NY, USA, 2 edition.