

Una Prueba de Rangos para la Alternativa de Escala en  
dos Muestras Provenientes de la Distribución Lambda  
Generalizada

Tesis para optar al Título de Magister en Ciencias Estadística

Por

Luis Alejandro Másmela Caita

Código 832010

Director

Jimmy Antonio Corzo Salamanca

Dr. rer. nat.

Departamento de Estadística  
Universidad Nacional de Colombia

2007

A las dos mujeres que amo,  
mi madre Ana Elvira  
y mi hija Laurita.

## Formato único para entrega de los trabajos de grado.

**Título en Español:** *Una Prueba de Rangos para la Alternativa de Escala en dos Muestras Provenientes de la Distribución Lambda Generalizada*

**Título en Inglés:** *A Rank Test for the Scale Alternative in Two Generalized Lambda Distribution Samples*

**Resumen en Español:** Se construye y se estudian las bondades de una *Prueba de Rangos Localmente Más Potente (PRLMP)* para el problema de escala en dos muestras, construyendo la estadística de puntajes a partir de densidades de la DLG. Se compara en términos de su eficiencia relativa asintótica con las pruebas de Mood, Ansari-Bradley y Klotz. Se encontró que para muestras de poblaciones normales, algunas de las pruebas superan a las pruebas de Mood y Ansari-Bradley. Con muestras de poblaciones logística y exponencial doble un conjunto de pruebas propuestas supero las tres pruebas con que se comparó.

**Traducción de resumen al Inglés:** The advantages a *Locally Most Powerfull Ranks Test (LMPRT)* are built and studied for the scale problem in two samples by building the score function using as function of density the density of the Generalized Lambda Distribution. It is compared in terms of their asymptotic relative efficiency with the tests of Mood, Ansari-Bradley and Klotz. It was found that for normal samples, some of the tests overcome to the tests of Mood and Ansari-Bradley. With logistics samples and double exponential samples a group of proposed tests defeated the three tests with which it was compared.

**Descriptores o palabras claves en Español:** Pruebas de Rangos Localmente más Potente, Pruebas de Escala, Estadística No Paramétrica, Función de Puntajes, Distribución Lambda Generalizada.

**Traducción al Inglés de los descriptores:** Locally Most Powerfull Ranks Test, Scale Test, Non-parametric Statistics, Score Function, Generalized Lambda Distribution.

**Firma del Director:** \_\_\_\_\_

*Luis Alejandro Másmela Caita. 1971.*

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>i</b>
<b>1. Marco Teórico.</b>	<b>1</b>
1.1. El Modelo de Escala en Dos Muestras . . . . .	1
1.1.1. Puntajes Generales . . . . .	2
1.1.2. La Distribución de Rangos bajo Alternativas . . . . .	8
1.2. Eficiencia . . . . .	12
1.2.1. Eficiencia Relativa Asintótica y Eficacia . . . . .	14
1.2.2. Eficacia de Estadísticas Lineales de Rangos . . . . .	19
1.3. Distribución Lambda Generalizada . . . . .	22
1.3.1. Generalidades . . . . .	22
1.3.2. El Espacio de Parámetros . . . . .	23
1.3.3. Soporte y Algunos Momentos de la Distribución . . . . .	26
1.3.4. Algunas Formas de la D.L.G. . . . .	28
<b>2. La Prueba Propuesta</b>	<b>31</b>

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	5
2.1. Construcción de la Estadística Propuesta . . . . .	32
2.2. Eficacia de la Prueba Propuesta . . . . .	37
2.3. ERA de la prueba propuesta . . . . .	38
<b>3. Resultados</b>	<b>41</b>
<b>4. Conclusiones y Recomendaciones.</b>	<b>49</b>
A. Demostraciones de algunos teoremas.	53
B. Algunas definiciones y teoremas.	57

# Índice de Figuras

1.1. Función de Puntajes para las pruebas de Mood, Ansari-Bradley y Klotz.	7
1.2. Espacio $(\lambda_3, \lambda_4)$ para densidades DLG . . . . .	26
1.3. Formas de la <i>DLG</i> . $\alpha_3 = 0$ y $\alpha_4 = 3, 5, 9$ . . . . .	29
1.4. Formas de la <i>DLG</i> . $\alpha_3 = 1$ y $\alpha_4 = 4, 6, 9$ . . . . .	29
1.5. Formas de la <i>DLG</i> . $\alpha_4 = 4, \alpha_3 = 0, 0, 5, 1, 0$ . . . . .	30
1.6. Formas de la <i>DLG</i> . $1 \leq \lambda_3, \lambda_4 \leq 2$ . . . . .	30
2.1. Función de Puntajes para los valores de $\lambda_3$ considerados. . . . .	36
2.2. Función de Puntajes para los valores de $\lambda_3$ considerados. . . . .	36
3.1. Distribuciones simétricas muestreadas . . . . .	45
3.2. Distribuciones No simétricas muestreadas. . . . .	46

# Índice de Tablas

1.1. Soporte de la <i>DLG</i> . . . . .	27
2.1. Función de Puntajes para los valores de $\lambda_3$ considerados. . . . .	35
3.1. Eficacias y <i>ERA</i> muestreando de la distribución normal. . . . .	42
3.2. Eficacias y <i>ERA</i> muestreando de la distribución logística. . . . .	43
3.3. Eficacias y <i>ERA</i> muestreando de la distribución doble exponencial. . . . .	43
3.4. Eficacias y <i>ERA</i> muestreando de la <i>DLG</i> (0, -1, -0,1, -0,018). . . . .	47
3.5. Eficacias y <i>ERA</i> muestreando de la <i>DLG</i> (0, -0,1, -0,00075, -0,03). . . . .	48

# Introducción

Un problema frecuente en estadística consiste en probar si dos poblaciones muestreadas difieren en algún sentido. Suponga que los valores de las mediciones de los objetos que integran las dos poblaciones, se pueden considerar como variables aleatorias independientes con distribuciones  $G$  y  $H$ , y que la forma de saber si dichas distribuciones difieren es a través de la prueba del siguiente sistema de hipótesis

$$H_0 : G(x) = H(x) \forall x \in R$$

$$H_1 : G(x) \neq H(x) \text{ para al menos un } x \in R.$$

Una razón por la cual pueden diferir las distribuciones de las poblaciones involucradas se debe a sus parámetros de escala.

En el enfoque no paramétrico las medianas son consideradas como los parámetros de localización, y la variabilidad se interpreta como dispersión alrededor de las medianas. El modelo para el problema considerado puede ser definido a través de dos muestras aleatorias independientes  $X_1, \dots, X_m$  y  $Y_1, \dots, Y_n$  provenientes de distribuciones absolutamente continuas  $G$  y  $H$  de mediana cero, en donde las constantes positivas  $\varphi_x$  y  $\varphi_y$  hacen referencia a los parámetros de escala. De esta forma las distribuciones de las dos poblaciones se



pueden denotar por  $G(x) = F_X(x/\varphi_X)$  y  $H(x) = F_Y(x/\varphi_Y)$  respectivamente, con  $F \in \Omega_0$ , donde

$$\Omega_0 = \left\{ F : F \text{ absolutamente continua y } F(0) = \frac{1}{2}, \text{ \u00fanica} \right\}.$$

Las hip\u00f3tesis a enfrentar son

$$H_0 : \varphi_X = \varphi_Y$$

$$H_1 : \varphi_X < \varphi_Y,$$

o de igual forma, si  $\tau = \varphi_Y/\varphi_X$ , entonces

$$H_0 : \tau = 1 \tag{1}$$

$$H_1 : \tau > 1.$$

Sin p\u00e9rdida de generalidad, las distribuciones de las poblaciones muestreadas se transforman en  $F_X(x)$  y  $F_Y(x/\tau)$ , haciendo  $\varphi_X = 1$ , donde  $\tau$  es el cociente de los par\u00e1metros de escala. Con esta notaci\u00f3n la hip\u00f3tesis  $H_1$  significa que la distribuci\u00f3n de la poblaci\u00f3n de la variable  $Y$  es menos dispersa que la distribuci\u00f3n de la poblaci\u00f3n de la variable  $X$ .

Para el problema de escala han sido propuestas varias pruebas basadas en los rangos de las observaciones despu\u00e9s de combinar las muestras y luego ordenar. Se mencionan en la literatura, entre otras, las pruebas de Klotz, Mood, Ansari-Bradley y Savage, ver [Gibbons and Chakraborti \(1992\)](#).

Para enfrentar  $H_0$  versus  $H_1$  puede utilizarse una estad\u00edstica lineal de rangos de dos muestras de la forma

$$V = \sum_{j=1}^n a_N(R_j), \tag{2}$$

donde los  $R_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , se refiere a los rangos de la muestra tomada de la distribución de la variable  $Y$  luego de combinar ambas muestras y ordenarlas. Además  $a_N(i)$  se denomina puntaje y es una función no creciente (no decreciente) de los rangos para  $i \leq (N + 1)/2$  y no decreciente (no creciente) para  $i \geq (N + 1)/2$ , aquí  $N = n + m$ . "Las pruebas para diferencia en escala basadas en estadísticas lineales de rangos,  $V$ , comparten la propiedad de ser de distribución libre. Esto se sigue porque bajo  $H_0$  el vector de rangos se distribuye uniformemente para cualquier distribución continua  $F(\cdot)$ ", ver [Randles and Wolfe \(1979\)](#). Otras propiedades serán estudiadas en aras de construir una prueba proponiendo una forma particular de dichos puntajes.

La construcción de este tipo de pruebas se basa en la distribución de los rangos de la muestra de la variable  $Y$ . [Hoeffding \(1951\)](#) demuestra un lema que permite encontrar una expresión para dicha distribución, con base en la cual se pueden obtener formas particulares de la función de puntajes, función que involucra la distribución de la población de donde se muestrea. Para el caso del problema de escala que aquí interesa,  $a_N(\cdot)$  denota, como se mencionó anteriormente, la función de puntajes y  $F(\cdot)$  la distribución de donde se muestrea, si se elige  $F(\cdot)$  como la Distribución Lambda Generalizada ( $DLG$ ) se obtiene una familia de funciones de puntajes que depende de los cuatro parámetros que involucra la  $DLG$ . Estos cuatro parámetros en la  $DLG$  permiten aproximar una amplia gama de distribuciones entre las que también se cuentan muchas de las distribuciones conocidas.

El capítulo 1 contiene el marco teórico del trabajo, en éste se especifican, en la sección 1.1 el modelo de escala en dos muestras, en la sección 1.2 se trata

la eficiencia relativa asintótica y la eficacia de una prueba, mientras que en la sección 1.3 se describen la Distribución Lambda Generalizada, su espacio de parámetros, sus primeros momentos y algunas formas de sus densidades. El capítulo 2 se refiere a la prueba propuesta, se describe en la sección 2.1 la construcción de la función de puntajes, en la sección 2.2 se deduce una expresión para la eficacia de la prueba propuesta y en la sección 2.3 se obtienen expresiones para comparar la prueba propuesta con otras pruebas conocidas a través de la eficiencia relativa asintótica (*ERA*). En el capítulo 3 se muestran los cálculos de eficacias y *ERAs* condensados en diferentes tablas, estas tablas se discriminan dependiendo de la distribución de donde se muestrea. Al final del documento aparecen dos apéndices, en el apéndice A se presentan algunas demostraciones de teoremas enunciados a lo largo del trabajo, en el apéndice B se enuncian algunos teoremas y definiciones utilizados en el cuerpo del trabajo. Por último se presenta un apartado que contiene las conclusiones y recomendaciones.

# Capítulo 1

## Marco Teórico.

### 1.1. El Modelo de Escala en Dos Muestras

En este apartado se trata el tipo de estadística dada en (2), que como se observa es suma de una función de los rangos. El rango de la observación  $j$ -ésima, como se mencionó con anterioridad, se denota como  $R_j$ , y es la posición que ocupa la observación  $Y_j$  entre las observaciones de las dos muestras combinadas y ordenadas. Bajo el supuesto que el conjunto de vectores de rangos se distribuye uniforme, se presentan algunos resultados sobre las propiedades distribucionales de tal estadística, básicamente se muestran expresiones para la media y la varianza, al igual que para la media y la varianza asintótica en búsqueda de encontrar una apropiada estandarización para obtener resultados en cuanto a normalidad asintótica.

### 1.1.1. Puntajes Generales

A continuación se define formalmente el concepto de rango, base de las pruebas que se proponen en este trabajo.

**Definición 1** Sean  $X_1, \dots, X_N$ , variables aleatorias; se define el rango de la variable  $X_j$ , notado  $R_j$ , como el número de  $X_k$  con  $k = 1, 2, \dots, N$  tales que  $X_k \leq X_j$ . De esta forma el rango  $R_j$  de  $X_j$  es la posición que ocupa  $X_j$  en el conjunto ordenado  $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(N)}$ .

Se denota por  $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_N)$  el vector de rangos donde  $R_i$  es el rango de  $X_i$  y por  $\mathfrak{R}$  el conjunto de las  $N!$  permutaciones de los enteros  $\{1, 2, \dots, N\}$ , de esta forma  $\mathbf{R}$  toma valores en el conjunto  $\mathfrak{R}$ . Se presenta el siguiente teorema el cual permite establecer una relación entre el sistema de hipótesis dado en (1) y la distribución del vector de rangos  $\mathbf{R}$  en el conjunto  $\mathfrak{R}$ .

**Teorema 2** Sean  $X_1, \dots, X_N$ , una muestra aleatoria de una distribución continua y sea  $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_N)$  el vector de rangos donde  $R_i$  es el rango de  $X_i$ . Si  $\mathfrak{R} = \{r : r \text{ es una permutación de los enteros } 1, \dots, n\}$ , entonces  $\mathbf{R}$  se distribuye uniforme sobre el conjunto  $\mathfrak{R}$ .

**Demostración.** Apéndice A .

Para abordar el problema de interés se utilizan aquí pruebas basadas en estadísticas lineales de rangos, éstas seguidamente se definen.

**Definición 3** Sean  $a(1), \dots, a(N)$  y  $c(1), \dots, c(N)$  dos sucesiones no constantes de números. Una estadística de la forma

$$V = \sum_{i=1}^N c(i)a(R_i)$$

se denomina *estadística lineal de rangos*.

La forma de escoger las constantes  $c(i)$  para una estadística lineal de rangos, es usualmente determinada por la naturaleza de la hipótesis particular que se desea probar y de si se trata de una o dos muestras. En problemas de dos muestras,  $\mathbf{R}$  es el vector de rangos de las variables  $Y_1, \dots, Y_n, X_1, \dots, X_m$ , donde  $N = n + m$ . Si, entre las  $n + m$  observaciones,  $R_i$  denota el rango de la variable  $Y_i$  y  $R_{n+j}$  denota el rango de la variable  $X_j$ , definiendo

$$c(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1, \dots, n \\ 0 & \text{si } i = n + 1, \dots, n + m \end{cases} \quad (1.1)$$

entonces

$$V = \sum_{i=1}^N c(i)a(R_i) = \sum_{i=1}^n a(R_i)$$

es la suma de los puntajes  $a(R_i)$  asignados a los rangos de las observaciones de la variable  $Y$ . Las constantes  $c(i)$  definidas en (1.1) se llaman las *constantes de regresión para dos muestras*. La selección de los puntajes  $a(1), \dots, a(N)$  en el problema de dos muestras produce pruebas estadísticas con diferentes propiedades.

El Teorema 2 argumenta que bajo  $H_0$  el vector de rangos,  $\mathbf{R}$ , tiene una distribución uniforme en el conjunto  $\mathfrak{R}$ . [Randles and Wolfe \(1979\)](#), muestran que en tal situación

$$P[R_i = r] = \frac{1}{N}, \quad r = 1, \dots, N$$

y

$$P[R_i = r, R_j = s] = \begin{cases} \frac{1}{N(N-1)}, & r \neq s = 1, \dots, N \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

para  $i \neq j$ . Estos resultados permiten establecer las siguientes afirmaciones.

**Lema 4** Sea  $a(1), \dots, a(N)$  una sucesión no constante de números. Entonces, si  $\mathbf{R}$  se distribuye uniforme bajo  $\mathfrak{R}$ ,

(i)

$$E[a(R_i)] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N a(k) = \bar{a}, \text{ para } i = 1, \dots, N,$$

(ii)

$$Var[a(R_i)] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (a(k) - \bar{a})^2, \text{ para } i = 1, \dots, N,$$

(iii)

$$Cov[a(R_i), a(R_j)] = \frac{-1}{N(N-1)} \sum_{k=1}^N (a(k) - \bar{a})^2, \text{ para } i \neq j = 1, \dots, N,$$

donde  $\bar{a} = (1/N) \sum_{i=1}^N a(i)$ .

**Demostración.** Apéndice A .

Usando el Lema 4 se establece la media y la varianza de la estadística lineal de rangos bajo el supuesto de la distribución uniforme de  $\mathbf{R}$  en el conjunto  $\mathfrak{R}$ .

**Teorema 5** Denote por  $V$  una estadística lineal de rangos con constantes  $c(1), \dots, c(N)$  dadas por (1.1) y puntajes  $a(1), \dots, a(N)$ . Si  $\mathbf{R}$  se distribuye uniformemente en  $\mathfrak{R}$ , entonces

(i)

$$E(V) = n\bar{a}$$

(ii)

$$Var(V) = \frac{mn}{N(N-1)} \left[ \sum_{i=1}^N (a(i) - \bar{a})^2 \right]$$

donde  $\bar{a} = (1/N) \sum_{i=1}^N a(i)$ .

**Demostración.** Apéndice A .

Para obtener propiedades asintóticas de la estadística lineal de rangos, se define a continuación la *función generadora de puntajes* para el modelo de dos muestras en el problema de escala, y se presentan casos particulares de ella que permiten obtener varias pruebas conocidas.

**Definición 6** *Suponga que  $\phi(u)$  es una función definida en el intervalo  $(0, 1)$ , no creciente (no decreciente) para  $u \leq 1/2$  y no decreciente (no creciente) para  $u \geq 1/2$ . Suponga además que  $0 < \int_0^1 (\phi(u) - \bar{\phi})^2 du < \infty$  donde  $\bar{\phi} = \int_0^1 \phi(u) du < \infty$ . Se define  $a_N(i) = \phi[i/(N+1)]$  con  $N = n + m$ , entonces*

$$\bar{V} = \frac{1}{N} \sum_1^n \phi\left(\frac{R_i}{N+1}\right)$$

es la **estadística lineal de rangos** obtenida a partir de la **función generadora de puntajes**  $\phi(u)$ .

Algunas pruebas conocidas en la literatura estadística se obtienen definiendo la función generadora de puntajes de manera particular.

(i) Si se selecciona:

$$\phi(u) = \left(u - \frac{1}{2}\right)^2$$

entonces

$$a_N(R_i) = \left(R_i - \frac{N+1}{2}\right)^2.$$



Esta función de puntajes se representa gráficamente en la Figura 1.1.(a), así la estadística lineal de rangos toma la forma

$$V = \sum_{i=1}^n \left( R_i - \frac{N+1}{2} \right)^2$$

que hace referencia al estadístico para la **prueba de Mood**.

(ii) Cuando se escoge

$$\phi(u) = \left| u - \frac{1}{2} \right|$$

cuya gráfica se muestra en la Figura 1.1.(b), se generan los puntajes

$$a_N(R_i) = \left| R_i - \frac{N+1}{2} \right|$$

y así

$$V = \sum_{i=1}^n \left| R_i - \frac{N+1}{2} \right|$$

es el estadístico de la **prueba de Ansari-Bradley**.

(iii) Al seleccionar

$$\phi(u) = [\Phi^{-1}(u)]^2$$

donde  $\Phi^{-1}$  denota la función percentil de la distribución normal estándar, (ver la gráfica 1.1.(c)), el puntaje que se genera es

$$a_N(R_i) = [\Phi^{-1}(R_i)]^2.$$

Por tanto la estadística lineal de rangos toma la forma

$$V = \sum_{i=1}^n [\Phi^{-1}(R_i)]^2$$

que hace referencia al estadístico para la **prueba de Klotz**.

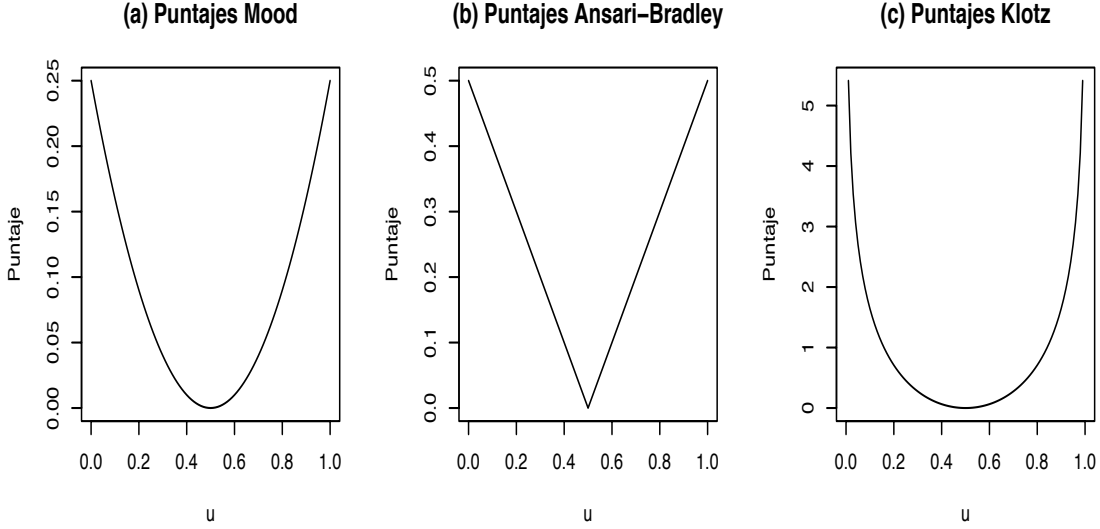


Figura 1.1: Función de Puntajes para las pruebas de Mood, Ansari-Bradley y Klotz.

**Teorema 7** *Suponiendo que  $N \rightarrow \infty$  y  $m/N \rightarrow \lambda$ ,  $0 < \lambda < 1$ , es decir, si ninguno de los tamaños de muestra domina asintóticamente, el valor esperado y la varianza asintótica de  $\bar{V}$  son:*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E(\bar{V}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N} \bar{a} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N} \frac{1}{N} \sum_1^N \phi\left(\frac{i}{N+1}\right) = (1-\lambda) \int_0^1 \phi(u) du \quad (1.2)$$

donde  $\bar{\phi} = \int_0^1 \phi(u) du$ , y

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \text{Var}(\bar{V}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{mn}{N^2(N-1)} \sum_{i=1}^N (a_i - \bar{a})^2 = \lambda(1-\lambda) \int_0^1 (\phi(u) - \bar{\phi})^2 du. \quad (1.3)$$

Además, [Hájek et al. \(1999\)](#) muestran que, dada la media asintótica en (1.2) y la varianza asintótica en (1.3),

$$\frac{\sqrt{N}(\bar{V} - (1-\lambda)\bar{\phi})}{\sqrt{\lambda(1-\lambda) \int_0^1 (\phi(u) - \bar{\phi})^2 du}} \xrightarrow{D} N(0, 1).$$

### 1.1.2. La Distribución de Rangos bajo Alternativas

El siguiente resultado, pilar de la teoría estudiada aquí, fue propuesto por [Hoeffding \(1951\)](#) y permite obtener la distribución del vector de rangos de una de las dos muestras para casos generales. El teorema es tomado de [Hettmansperger \(1984\)](#) pág. 142.

Sean  $X_1, \dots, X_m$  y  $Y_1, \dots, Y_n$  muestras aleatorias provenientes de distribuciones absolutamente continuas arbitrarias  $G(x)$  y  $H(x)$  respectivamente, con densidades  $g(x)$  y  $h(x)$ . Sean  $R_{(1)} < \dots < R_{(n)}$  los rangos de  $Y_{(1)} < \dots < Y_{(n)}$  en la muestra combinada.

**Teorema 8** *Suponga que  $h(x) > 0$  implica que  $g(x) > 0$ . Entonces*

$$P(R_{(1)} = r_1, \dots, R_{(n)} = r_n) = \frac{1}{\binom{m+n}{m}} E \left[ \prod_{i=1}^n \frac{h(V_{(r_i)})}{g(V_{(r_i)})} \right]$$

donde  $V_{(1)} < \dots < V_{(m+n)}$  son las estadísticas de orden de una muestra de tamaño  $m + n$  de  $G$ .

**Demostración.** Consideremos los eventos  $R_{(1)} = r_1, \dots, R_{(n)} = r_n$  dado  $y_{(1)} < \dots < y_{(n)}$ . Entonces hay  $r_1 - 1$   $x$ 's menores que  $y_{(1)}$ ,  $r_2 - r_1 - 1$   $x$ 's entre  $y_{(1)}$  y  $y_{(2)}$  etc. Sea  $r_0 = 0$  y  $r_{(n+1)} = n + m + 1$ . La distribución condicional puede escribirse como una probabilidad multinomial pensando en colocar las  $m$   $x$ 's en las  $n + 1$  celdas definidas por las  $y$ 's ordenadas fijas. De aquí

$$\begin{aligned} P(R_{(1)} = r_1, \dots, R_{(n)} = r_n | y_{(1)} < \dots < y_{(n)}) &= \\ &= \frac{m!}{\prod_{j=0}^n (r_{j+1} - r_j - 1)!} G(y_{(1)})^{r_1-1} [G(y_{(2)}) - G(y_{(1)})]^{r_2-r_1-1} \dots \\ &\quad \times [1 - G(y_{(n)})]^{m+n-r_n} \end{aligned}$$

donde, por ejemplo, la probabilidad de que una  $x$  caiga en la segunda celda es  $P(y_{(1)} < X < y_{(2)}) = G(y_{(2)}) - G(y_{(1)})$ . Ahora multiplicando por  $n! \prod h(y_{(i)})$ , la densidad conjunta de las  $Y_{(1)} < \dots < Y_{(n)}$ , e integrando con respecto a  $y_{(1)}, \dots, y_{(n)}$  se obtiene la distribución marginal de  $R_{(1)} < \dots < R_{(n)}$ . Además multiplicando y dividiendo por  $(m+n)! \prod g(y_{(i)})$  en la búsqueda del valor esperado indicado por el teorema, se obtiene

$$\begin{aligned} P(R_{(1)} = r_1, \dots, R_{(n)} = r_n) &= \int \dots \int \frac{m!n!}{(m+n)!} \frac{\prod h(y_{(i)})}{\prod g(y_{(i)})} \\ &\times \left\{ \frac{(m+n)!}{\prod (r_{j+1} - r_j - 1)!} G(y_{(1)})^{r_1-1} \dots [1 - G(y_{(n)})]^{m+n-r_n} \prod g(y_{(i)}) \right\} \\ &\times dy_{(1)} \dots dy_{(n)}. \end{aligned}$$

Reorganizando la expresión dentro de las llaves como la densidad marginal conjunta de  $V_{(r_1)} < \dots < V_{(r_n)}$  de  $V_{(1)} < \dots < V_{(m+n)}$ , la integral puede ser reescrita como el valor esperado y el teorema queda demostrado .

Bajo el resultado dado por el Teorema 8 y considerando el problema de escala para dos muestras, haciendo  $G(x) = F_X(x)$  y  $H(x) = F_Y(x/\tau)$ , bajo  $H_0 : \tau = 1$ , la distribución de  $R_{(1)} < \dots < R_{(n)}$  es uniforme en el conjunto de los  $\binom{m+n}{m}$  arreglos distinguibles igualmente probables de  $m$   $X$ s y  $n$   $Y$ s. Esto puede ser inmediatamente visto ya que bajo  $H_0$  se tiene que  $g = h$ .

**Definición 9** Sean  $\Theta$  el espacio del parámetros, y  $\Upsilon$  una prueba de la hipótesis  $H_0 : \theta \in \Theta_0$  donde  $\Theta_0 \subset \Theta$ . El tamaño de la prueba  $\Upsilon$  de  $H_0$  es definido como

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} [\pi_{\Upsilon}(\theta)]$$

donde  $\pi_{\Upsilon}(\theta)$  es la función potencia de la prueba. Si la prueba es no aleatorizada el tamaño de la misma es conocido como el nivel de significancia.

De aquí, si  $k$  es un entero tal que  $k/\binom{m+n}{m} = \alpha$  entonces algún conjunto  $C$  de  $k$  vectores de rangos  $(r_1, \dots, r_n)$  es una región crítica de tamaño  $\alpha$  para  $H_0 : \tau = 1$ . El problema es determinar la mejor región crítica bajo algún criterio establecido.

La potencia de una prueba para  $H_0 : \tau = 1$  versus  $H_1 : \tau > 1$  con región crítica  $C$  de tamaño  $\alpha$  esta dada por

$$\beta(\tau) = \sum_{(r_1, \dots, r_n) \in C} \frac{1}{\binom{m+n}{m}} E \left[ \prod_{i=1}^n \frac{\frac{1}{\tau} f\left(\frac{V(r_i)}{\tau}\right)}{f(V(r_i))} \right] \quad (1.4)$$

donde  $V_{(1)} < \dots < V_{(n+m)}$  son estadísticas de orden de una muestra de tamaño  $m + n$  de  $F(x)$ .

A continuación se define lo que de aquí en adelante se entenderá como una "Prueba de Rangos Localmente más Potente"; la definición al mismo tiempo da el criterio para obtener la forma del estadístico para dicha prueba, como es, maximizar la potencia de (1.4) en el valor de  $\tau$  en la hipótesis nula.

**Definición 10** *La Prueba de Rangos Localmente más Potente (PRLMP) de tamaño  $\alpha$  esta dada por la región crítica  $C^*$  de tamaño  $\alpha$  tal que  $\beta'(1)$  es un máximo. Aquí  $\beta'(1)$  es la derivada de  $\beta(\tau)$  evaluada en  $\tau = 1$ .*

Hettmansperger (1984) plantea como ejercicio encontrar la forma del estadístico de la PRLMP que enfrenta las hipótesis  $H_0 : \tau = 1$  versus  $H_1 : \tau > 1$  para el problema de escala, basado en la Definición 10 y en la expresión para la potencia dada en (1.4). La solución a este ejercicio permite establecer el siguiente resultado.

**Teorema 11** Dada  $F \in \Omega_0$  y suponiendo que es válido intercambiar derivadas con valores esperados, entonces la Prueba de Rangos Localmente más Potente (PRLMP) rechaza  $H_0 : \tau = 1$  en favor de  $H_1 : \tau > 1$  si

$$V = \sum_{j=1}^n E \left[ -1 - V_{(r_i)} \frac{f'(V_{(r_i)})}{f(V_{(r_i)})} \right] \geq c$$

donde  $c$  es determinada por  $P_{H_0}(V \geq c) = \alpha$ .

**Demostración.** Suponiendo que el intercambio entre derivadas e integrales es válido<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \beta(\tau) &= \sum_{(r_1, \dots, r_n) \in C} \frac{1}{\binom{m+n}{m}} E \left[ \frac{\frac{d}{d\tau} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\tau} f\left(\frac{V_{(r_i)}}{\tau}\right)}{\prod_{i=1}^n f(V_{(r_i)})} \right] \\ &= \sum_{(r_1, \dots, r_n) \in C} \frac{1}{\binom{m+n}{m}} E \left[ \frac{-n}{\tau^{n+1}} + \frac{\sum_{i=1}^n f'\left(\frac{V_{(r_i)}}{\tau}\right) \left(-\frac{V_{(r_i)}}{\tau^2}\right) \prod_{j \neq i} f\left(\frac{V_{(r_j)}}{\tau}\right)}{\tau^n \prod_{i=1}^n f(V_{(r_i)})} \right]. \end{aligned}$$

Evaluando en  $\tau = 1$ , tenemos,

$$\begin{aligned} \beta'(1) &= \sum_{(r_1, \dots, r_n) \in C} \frac{1}{\binom{m+n}{m}} E \left[ -n + \frac{\sum_i \left( f'(V_{(r_i)}) (-V_{(r_i)}) \prod_{j \neq i} f(V_{(r_j)}) \right)}{f(V_{(r_i)}) \prod_{j \neq i} f(V_{(r_j)})} \right] \\ &= \frac{1}{\binom{m+n}{m}} \sum_{(r_1, \dots, r_n) \in C} E \left[ \sum_i \left( -1 - \frac{V_{(r_i)} f'(V_{(r_i)})}{f(V_{(r_i)})} \right) \right]. \end{aligned}$$

Para maximizar  $\beta'(1)$  se construye  $C^*$  incluyendo los vectores  $(r_1, \dots, r_n)$  que produzcan los valores más grandes de

$$V = \sum_i E \left[ -1 - V_{(r_i)} \frac{f'(V_{(r_i)})}{f(V_{(r_i)})} \right]$$

con lo que el teorema queda demostrado. .

<sup>1</sup>El Teorema 26 en el Apéndice B establece las condiciones para que este intercambio se pueda realizar.

Por tanto, se deduce que el puntaje para la *PRLMP* para la alternativa de escala es  $a(i) = E[-1 - V_{(r_i)} f'(V_{(r_i)}) / f(V_{(r_i)})]$ , y éste puede aproximarse por:

$$a^*(i) = -1 - F^{-1}[i/(m+n+1)] \frac{f'(F^{-1}[i/(m+n+1)])}{f(F^{-1}[i/(m+n+1)])} \quad (1.5)$$

donde primero se aproximó  $V_{(i)}$  por  $F^{-1}(U_{(i)})$  siendo  $U_{(1)} < \dots < U_{(m+n)}$  las estadísticas de orden de una distribución uniforme sobre  $(0, 1)$  y luego se pasó el valor esperado a través de la función teniendo en cuenta que  $EU_{(i)} = i/(m+n+1)$ , ver [Hájek et al. \(1999\)](#) pág. 39. Además, para el cálculo de la eficiencia en la siguiente sección se requerirá utilizar la parametrización  $\tau = e^\Delta$ , que proviene de escribir los parámetros de escala de la forma  $\varphi_x = e^{\gamma_x}$  y  $\varphi_y = e^{\gamma_y}$ , así, el cociente de los parámetros de dispersión se puede reescribir como

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \frac{e^{\gamma_x}}{e^{\gamma_y}} = e^{\gamma_x - \gamma_y} = e^\Delta,$$

con  $\Delta = \gamma_x - \gamma_y$ . Luego, el sistema de hipótesis dado en (1) toma la forma

$$H_0 : \Delta = 0 \quad (1.6)$$

$$H_1 : \Delta > 0.$$

## 1.2. Eficiencia

Los conceptos requeridos en este trabajo, respecto a Eficiencia Relativa Asintótica y que son tratados en esta sección, se basan en [Randles and Wolfe \(1979\)](#) Cap.5 y en [Hettmansperger \(1984\)](#) Secc.2.6.

Generalmente la calidad de una prueba se evalúa de acuerdo a la capacidad que tiene para detectar cambios en cuanto a distanciamientos de la

hipótesis nula. Al enfrentar dos pruebas, partiendo del hecho que tienen el mismo tamaño, se preferirá aquella que tenga una curva de potencia por encima de la otra. Para enfrentarlas será necesario considerar la obtención de expresiones para las potencias de las dos pruebas que se comparan y usarlas para describir la calidad relativa de las dos pruebas. En la búsqueda de estos tipos de comparaciones se requiere manipular el tamaño de la muestra  $n$ , el valor del parámetro en la alternativa  $\theta$ , la forma de la distribución  $F(x)$ , y el nivel de significancia específico  $\alpha$ . Los procedimientos requeridos para tal comparación se convierten en un obstáculo para llegar a conclusiones generales. Como una alternativa, se considera la comparación de los dos procedimientos de prueba basado en sus propiedades distribucionales asintóticas. Al considerar comparaciones asintóticas se obvia el problema del tamaño de muestra y como las distribuciones límites son usualmente continuas, esto hará más fáciles las comparaciones. Sin embargo estas aproximaciones con grandes muestras inmediatamente crean algunas dificultades. Debe mostrarse que las pruebas involucradas son consistentes para cualquier  $\theta > 0$ , lo cual implica que la potencia asintótica de ambas pruebas es 1 para cualquier valor del parámetro en la alternativa. Si no se tienen pruebas consistentes inmediatamente se concluye que esta teoría no podrá ser utilizada. Las condiciones de Pitman, ver [Capon \(1961\)](#), sugieren una solución para el problema de comparar asintóticamente pruebas. Para vencer el dilema de la consistencia, se propone considerar propiedades asintóticas de los procedimientos de las pruebas para secuencias de alternativas que son ellas mismas convergentes a los valores de la hipótesis nula. Así, las comparaciones resultantes son locales, es decir, se refieren a alter-



nativas próximas a los valores en la hipótesis nula y se debe escoger secuencias de alternativas apropiadas. Más aún, sucede que este método de comparación no depende del nivel  $\alpha$ , y permite escoger asintóticamente entre dos pruebas de manera que dependan solamente de la forma de la distribución de interés  $F(x)$ .

### 1.2.1. Eficiencia Relativa Asintótica y Eficacia

En esta sección se presentan los conceptos de eficiencia, de Eficiencia Relativa Asintótica (*ERA*) y de eficacia, y basado en las condiciones de Pitman se da un teorema que permite expresar la *ERA* como cociente de eficacias al cuadrado.

**Definición 12** Sean  $V_n^{(i)}$  estadísticas que proveen pruebas de tamaño  $\alpha$  que rechazan  $H_0 : \theta = 0$  a favor de  $H_1 : \theta > 0$  cuando  $V_n^{(i)} \geq k^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , basadas en una muestra aleatoria  $X_1, \dots, X_n$  de  $F(x - \theta)$ ,  $F$  fija en  $\Omega_0$ . Dados  $\theta$  y  $\beta$ ,  $\alpha < \beta < 1$ , sean  $n^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , los tamaños de las muestras requeridas para que

$$P_{\theta, F}(V_n^{(i)} \geq k^{(i)}) = \beta. \quad (1.7)$$

Entonces la eficiencia de  $V_n^{(1)}$  relativa a  $V_n^{(2)}$  es  $n^{(2)}/n^{(1)}$ .

Por tanto, si  $n^{(2)}/n^{(1)} = 0,5$ , entonces  $V_n^{(1)}$  requiere, cuando más dos veces el número de observaciones que  $V_n^{(2)}$  para obtener la misma potencia.

Note que según la Definición 12, para calcular la eficiencia se necesitan las distribuciones de  $V_n^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , bajo la hipótesis alternativa las cuales no son sencillas de obtener. Si se consideran muestras grandes se puede evitar

este problema asumiendo que las pruebas son consistentes, ya que el límite de (1.7) será aproximadamente uno y la distribución bajo la alternativa no sería necesaria.

**Definición 13** Considerando las estadísticas  $V_n^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , que proveen dos pruebas para  $H_0 : \theta = 0$  versus  $H_1 : \theta > 0$  basadas en una muestra aleatoria  $X_1, \dots, X_n$  de una distribución  $F(x - \theta)$ ,  $F \in \Omega_0$ . Suponga que las pruebas son asintóticamente de tamaño  $\alpha$ , esto es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{H_0} (V_n^{(i)} \geq k_n^{(i)}) = \alpha, \quad i = 1, 2.$$

Para  $\beta$  fijo,  $\alpha < \beta < 1$ , suponga que  $\{\theta_j\}$  es una sucesión de alternativas tales que  $\theta_j \rightarrow 0$  con la correspondiente secuencia  $\{n_j^{(i)}\}$ ,  $i = 1, 2$ , de tamaños de muestra tales que

$$\lim_{n_j^{(i)} \rightarrow \infty} P_{\theta_j} \left( V_{n_j^{(i)}}^{(i)} \geq k_{n_j^{(i)}}^{(i)} \right) = \beta, \quad i = 1, 2.$$

Ahora en  $\theta_j$ ,  $n^{(2)}/n^{(1)}$  es la eficiencia de  $V^{(1)}$  relativa a  $V^{(2)}$  y cuando el límite

$$e_{12} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{n_j^{(2)}}{n_j^{(1)}}$$

existe y es independiente de  $\{\theta_j\}$ , de  $\alpha$ , y de  $\beta$  se le llama la eficiencia relativa asintótica de  $V^{(1)}$  relativa a  $V^{(2)}$ .

Esto significa que  $e_{12}$  es un buen indicador del cociente de los tamaños de muestra necesarios para conseguir el mismo nivel y la misma potencia para alternativas cercanas a la hipótesis nula. Note también que esta eficiencia, como era de esperar, depende de la  $F \in \Omega_0$ ,  $F$  fija.

**Condiciones de regularidad de Pitman**

Se establecen ahora un conjunto de condiciones de regularidad, debidas a Pitman, que hacen el cálculo de la eficiencia menos complejo en muchos casos. Se supone que  $V_n$  es una estadística para probar  $H_0 : \theta = 0$  versus  $H_1 : \theta > 0$  con región crítica  $V_n \geq k_n$ .

1.  $V_n$  es una prueba consistente.
2. Existen sucesiones  $\{\mu_n(\theta)\}$  y  $\{\sigma_n(\theta)\}$  tal que  $(V_n - \mu_n(\theta)) / \sigma_n(\theta)$  se distribuye asintóticamente como una  $n(0, 1)$ , uniformemente en una vecindad de  $\theta = 0$ .

3.

$$\left. \frac{d}{d\theta} \mu_n(\theta) \right|_{\theta=0} = \frac{d}{d\theta} \mu_n(0) = \mu'_n(0) \text{ existe.}$$

4. Para una sucesión  $\{\theta_n\}$  tal que  $\theta_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\sigma_n(\theta_n)}{\sigma_n(0)} \rightarrow 1 \text{ y } \frac{\mu'_n(\theta_n)}{\mu'_n(0)} \rightarrow 1, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

5.

$$\frac{\mu'_n(0)}{\sqrt{n}\sigma_n(0)} \rightarrow c > 0.$$

**Definición 14** *La cantidad  $c$  es llamada la eficacia de la prueba basada en  $V_n$ . Para  $n$  grande, ésta mide la tasa de cambio en unidades estándar de la media asintótica de  $V_n$  en la hipótesis nula. Una prueba con eficacia relativa grande  $c$  responde rápidamente a alternativas y se espera que tenga unas buenas propiedades de potencia local.*

Las condiciones 3 y 4 son condiciones de suavidad sobre los parámetros de  $V_n$  como funciones de  $\theta$ , es decir la curva no presenta cambios abruptos. A menudo, la estadística se construye de tal forma que  $V_n \xrightarrow{P} \mu(\theta)$  o  $E_\theta V_n \rightarrow \mu(\theta)$  y  $n \text{Var} V_n \rightarrow \sigma^2(\theta)$  de manera que se puede tomar  $\mu_n(\theta) = \mu(\theta)$  para toda  $n$  y  $\sigma_n(\theta) = \sigma(\theta)/n^{1/2}$ . Entonces la condición 2 se transforma en  $n^{1/2} (V_n - \mu(\theta)) / \sigma(\theta)$  asintóticamente como una  $n(0, 1)$ , uniformemente en una vecindad de  $\theta = 0$ ; y la eficacia se puede calcular fácilmente para los parámetros asintóticos  $\mu(\theta)$  y  $\sigma(\theta)$  sin depender de  $n$ .

**Teorema 15** *Suponga que  $V_n$  satisface las condiciones de regularidad 1 a 5 y produce una prueba asintóticamente de tamaño  $\alpha$  para  $H_0 : \theta = 0$  versus  $H_1 : \theta > 0$ . Sea  $\theta_n = \theta/n^{1/2}$  para  $\theta > 0$  fijo. Entonces la potencia asintótica de la prueba esta dada por*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta_n} (V_n \geq k_n) = 1 - \Phi (Z_\alpha - \theta c) \quad (1.8)$$

donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_0 (V_n \geq k_n) = 1 - \Phi (Z_\alpha), \quad (1.9)$$

y  $c$  es la eficacia definida en la condición 5.

**Demostración.** Apéndice **A** .

De este modo se puede aproximar formalmente la potencia de una prueba consistente cercana a la hipótesis nula. La potencia aproximada en (1.8) requiere la varianza asintótica bajo  $H_0$  y la media asintótica bajo  $H_1$  para calcular la eficacia  $c$ . El Teorema 15 puede ser expresado en forma diferente. El límite en (1.9), puede reescribirse, con  $k_n = \mu_n(0) + t\sigma_n(0)$ , como

$$P_0 \left( \frac{V_n - \mu_n(0)}{\sigma_n(0)} \leq t \right) \rightarrow \Phi(t)$$

o bien  $[V_n - \mu_n(0)] / \sigma_n(0) \xrightarrow{D_0} Z \sim n(0, 1)$ , donde  $D_0$  denota convergencia en distribución cuando  $\theta = 0$ . De igual forma, la expresión en (1.8) llega a ser, con  $\theta_n = \theta/n^{1/2}$ ,

$$P_{\theta_n} \left( \frac{V_n - \mu_n(0)}{\sigma_n(0)} \leq t \right) \rightarrow \Phi(t - \theta c)$$

o  $[V_n - \mu_n(0)] / \sigma_n(0) \xrightarrow{D_\theta} Z \sim n(\theta c, 1)$ . Ya que la distribución asintótica de

$$\frac{V_n - \mu_n(0)}{\sigma_n(0)}$$

cambia solamente en la media, de 0 a  $\theta c$ , cuando la alternativa converge a 0.

Ahora se enuncia un teorema que permite, asumiendo que las pruebas involucradas cumplen las 5 condiciones de regularidad de Pitman, expresar la ERA como cociente de eficacias al cuadrado.

**Teorema 16** *Suponga que  $V_n^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , proveen dos pruebas para el sistema de hipótesis  $H_0 : \theta = 0$  versus  $H_1 : \theta > 0$ . Suponga que ambas satisfacen las condiciones de regularidad 1-5 y además las condiciones de la Definición 13. Entonces la eficiencia asintótica de  $V_n^{(1)}$  relativa a  $V_n^{(2)}$  es*

$$e_{12} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{n_j^{(2)}}{n_j^{(1)}} = \frac{c_1^2}{c_2^2},$$

donde  $c_i$  es la eficacia de  $V_n^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ .

**Demostración.** [Hettmansperger \(1984\)](#) .

### 1.2.2. Eficacia de Estadísticas Lineales de Rangos

Basado en la Definición 6, la forma de la estadística de puntajes generales es

$$\bar{V} = \frac{1}{N} \sum_1^n \phi \left( \frac{R_i}{N+1} \right),$$

donde  $N\text{Var}\bar{V} \rightarrow \lambda(1-\lambda) \int_0^1 (\phi(u) - \bar{\phi})^2 du$ . Para el cálculo de la media asintótica de  $\bar{V}$  bajo la alternativa, se procede partiendo del rango  $R_i$  de  $Y_i$ , éste se obtiene contando el número de observaciones de la muestra combinada y ordenada menores o iguales que  $Y_i$ . Si se denotan por  $G_m(\cdot)$  y  $H_n(\cdot)$  las respectivas funciones de distribución empíricas de las muestras de  $X$  y de  $Y$ , esto es

$$\begin{aligned} G_m(Y_i) &= \frac{\#(Y \leq Y_i)}{m} \\ H_n(Y_i) &= \frac{\#(X \leq Y_i)}{n} \end{aligned}$$

entonces  $R_i = mG_m(Y_i) + nH_n(Y_i)$ . La estadística  $\bar{V}$  puede escribirse como

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \frac{1}{N} \sum_1^n \phi \left( \frac{R_i}{N+1} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_1^n \phi \left( \frac{m}{N+1} G_m(Y_i) + \frac{n}{N+1} H_n(Y_i) \right) \\ &= \frac{n}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \phi \left( \frac{m}{N+1} G_m(y) + \frac{n}{N+1} H_n(y) \right) dH_n(y). \end{aligned}$$

Como  $G_m(x)$  y  $H_n(x)$  convergen en probabilidad a  $G(x)$  y  $H(x)$ <sup>2</sup>, se espera que, bajo condiciones de regularidad

$$\bar{V} \rightarrow (1-\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \phi [\lambda G(y) + (1-\lambda)H(y)] dH(y).$$

<sup>2</sup>Ver Teorema 9.2 Glivenko-Cantelli en [Gibbons and Chakraborti \(1992\)](#)

Para el modelo de escala y bajo la parametrización  $\tau = e^\Delta$  se tiene que  $G(x) = F(x)$  y  $H(x) = F(x/\tau) = F(e^{-\Delta}x)$ , además como se mencionó con anterioridad, a menudo la estadística es construida de tal forma que  $V_n \xrightarrow{P} \mu(\theta)$ , así

$$\mu(\Delta) = (1 - \lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \phi [\lambda F(y) + (1 - \lambda)F(e^{-\Delta}y)] e^{-\Delta} f(e^{-\Delta}y) dy.$$

Haciendo el cambio de variable  $t = e^{-\Delta}y$  se tiene que  $dt = e^{-\Delta}dy$  y por esto

$$\mu(\Delta) = (1 - \lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \phi [\lambda F(e^\Delta t) + (1 - \lambda)F(t)] f(t) dt.$$

Ahora bajo condiciones de regularidad que permiten el intercambio de derivadas e integrales (ver Teorema 26 en Apéndice B)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\Delta} \mu(\Delta) &= (1 - \lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\Delta} \{ \phi [\lambda F(e^\Delta t) + (1 - \lambda)F(t)] f(t) \} dt \\ &= (1 - \lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \phi' [\lambda F(e^\Delta t) + (1 - \lambda)F(t)] \lambda f(e^\Delta t) e^\Delta t f(t) dt. \end{aligned}$$

Evaluando la derivada en  $\Delta = 0$ ,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\Delta} \mu(\Delta) \right|_{\Delta=0} &= (1 - \lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \phi' [\lambda F(t) + (1 - \lambda)F(t)] \lambda f^2(t) t dt \\ &= \lambda(1 - \lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \phi' [F(t)] f^2(t) t dt, \end{aligned}$$

bajo la sustitución  $r = F(t)$ ,  $dr = f(t)dt$  se obtiene

$$\left. \frac{d}{d\Delta} \mu(\Delta) \right|_{\Delta=0} = \lambda(1 - \lambda) \int_0^1 \phi' (r) f(F^{-1}(r)) F^{-1}(r) dr$$

y luego integrando por partes con  $u = f(F^{-1}(r)) F^{-1}(r)$  y  $dv = \phi'(r) dr$  se tiene  $v = \phi(r)$  y

$$du = \left[ \frac{f'(F^{-1}(r))}{f(F^{-1}(r))} F^{-1}(r) + f(F^{-1}(r)) \frac{1}{f(F^{-1}(r))} \right] dr$$

$$= \left[ \frac{f'(F^{-1}(r))}{f(F^{-1}(r))} F^{-1}(r) + 1 \right] dr$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\Delta} \mu(\Delta) \Big|_{\Delta=0} &= \lambda(1-\lambda) \left\{ f(F^{-1}(r)) F^{-1}(r) \phi(r) \Big|_0^1 \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 \phi(r) \left[ \frac{f'(F^{-1}(r))}{f(F^{-1}(r))} F^{-1}(r) + 1 \right] dr \right. \\ &= \lambda(1-\lambda) \int_0^1 \phi(r) \left[ -1 - F^{-1}(r) \frac{f'(F^{-1}(r))}{f(F^{-1}(r))} \right] dr \end{aligned}$$

por tanto, se ha mostrado que

$$\frac{d}{d\Delta} \mu(\Delta) \Big|_{\Delta=0} = \lambda(1-\lambda) \int_0^1 \phi(u) \phi_{Esc}(u, f) du$$

donde

$$\phi_{Esc}(u, f) = -1 - F^{-1}(u) \frac{f'(F^{-1}(u))}{f(F^{-1}(u))}. \quad (1.10)$$

Se puede observar que  $\phi_{Esc}(u, f)$  tiene la misma forma que la función de puntajes de (1.5). Para el cálculo de la eficacia se requiere  $\mu'(0) = \frac{d}{d\Delta} \mu(\Delta) \Big|_{\Delta=0}$  y  $\sigma^2(0) = \lambda(1-\lambda) \int_0^1 (\phi(u) - \bar{\phi})^2 du$  de aquí que

$$eff(\bar{V}) = \frac{\sqrt{\lambda(1-\lambda)} \int_0^1 \phi(u) \phi_{Esc}(u, f) du}{\sqrt{\int_0^1 (\phi(u) - \bar{\phi})^2 du}} \quad (1.11)$$

con  $\phi_{Esc}(u, f)$  dado en (1.10).

La eficacia de la prueba propuesta será comparada con las eficacias de las pruebas de Mood, Ansari-Bradley y Klotz a través de la ERA. Las expresiones para las eficacias de las pruebas con que se realizarán las comparaciones se dan a continuación.

Para la prueba de Mood se tiene

$$eff(M) = \sqrt{720\lambda(1-\lambda)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ F(x) - \frac{1}{2} \right] x f^2(x) dx, \quad (1.12)$$



para la prueba de Ansari-Bradley la expresión para la eficacia esta dada por

$$eff(AB) = \sqrt{48\lambda(1-\lambda)} \left[ \int_0^\infty x f^2(x) dx - \int_{-\infty}^0 x f^2(x) dx \right]. \quad (1.13)$$

Por último, para la prueba de Klotz la expresión para su eficacia es

$$eff(K) = \sqrt{2\lambda(1-\lambda)} \int_{-\infty}^\infty \left\{ \frac{\Phi^{-1}[F(x)]}{\varphi(\Phi^{-1}[F(x)])} \right\} x f^2(x) dx, \quad (1.14)$$

donde  $\Phi^{-1}$  se refiere a la función percentil de la distribución normal, mientras que  $\varphi$  es la función de densidad de la distribución normal.

### 1.3. Distribución Lambda Generalizada

En este apartado se presentan, con respecto a la Distribución Lambda Generalizada, algunas generalidades, su espacio de parámetros, su soporte y expresiones para sus primeros momentos. Adicionalmente se muestran algunos gráficos de densidades obtenidos a partir de valores particulares dados a los parámetros de los cuales esta distribución depende.

#### 1.3.1. Generalidades

Esta distribución es una generalización de la distribución Lambda de Tukey. Fue desarrollada por Ramberg y Schemiser con el propósito de generar variables aleatorias para estudios de simulación por el método de Monte Carlo debido a la forma simple de los resultados algorítmicos. Una amplia variedad de formas de curvas son posibles con esta distribución, además de la aproximación de muchas distribuciones conocidas.

La familia de Distribuciones Lambda Generalizada, *DLG*, o también conocida como familia de Distribuciones RST (Ramberg-Schmeiser-Tukey) con parámetros  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  se presenta a partir de su función percentil

$$F^{-1}(y) = F^{-1}(y; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \lambda_1 + \frac{y^{\lambda_3} - (1 - y)^{\lambda_4}}{\lambda_2} \quad (1.15)$$

donde  $0 \leq y \leq 1$ . Los parámetros  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son, respectivamente, parámetros de localización y escala, mientras que  $\lambda_3$  y  $\lambda_4$  son parámetros de sesgo y curtosis. Las restricciones sobre  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  que producen una distribución válida serán discutidos más adelante.

A continuación se presenta la función de densidad de probabilidad (f.d.p.) de la *DLG*.

**Teorema 17** *Para la DLG la f.d.p. esta dada por la expresión*

$$f(x) = \frac{\lambda_2}{\lambda_3 y^{\lambda_3 - 1} + \lambda_4 (1 - y)^{\lambda_4 - 1}} \quad \text{donde } x = F^{-1}(y)$$

(Note que  $F^{-1}(y)$  puede ser calculada por (1.15).)

**Demostración.** Apéndice A .

### 1.3.2. El Espacio de Parámetros

Para cualquier f.d.p de variables aleatorias continuas se deben cumplir dos condiciones, estas son:

$$f(x) \geq 0 \text{ y } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Para la *DLG* las condiciones se reducen a:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3 y^{\lambda_3 - 1} + \lambda_4 (1 - y)^{\lambda_4 - 1}} \geq 0 \text{ y } \int_0^1 f(F^{-1}(y)) dF^{-1}(y) = 1$$

para la segunda condición se sabe que

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

o

$$f(x) = \frac{dy}{dF^{-1}(y)}$$

de esta forma

$$f(x)dF^{-1}(y) = dy$$

o

$$dy = f(F^{-1}(y))dF^{-1}(y)$$

por tanto

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(F^{-1}(y))dF^{-1}(y) &= \int_0^1 dy \\ &= y|_0^1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Además para la primera condición se tiene que:

**Teorema 18** *La DLG especifica una distribución válida si y solo si*

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3 y^{\lambda_3-1} + \lambda_4 (1-y)^{\lambda_4-1}} \geq 0$$

para todo  $y \in [0, 1]$ .

**Demostración.** Ver [Karian and Dudewicz \(2000\)](#) .

En el siguiente teorema se verifica que  $\lambda_1$  actúa como parámetro de localización.

**Teorema 19** *Si la variable aleatoria  $X$  es  $DLG(0, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  entonces la variable aleatoria  $X + \lambda_1$  es  $DLG(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ .*

**Demostración.** Ver [Karian and Dudewicz \(2000\)](#) .

El siguiente corolario establece una condición con respecto a los signos de los parámetros de la  $DLG$ , para que ésta sea una distribución válida.

**Corolario 1** *La  $DLG(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  especifica una distribución válida si*

$$g(y, \lambda_3, \lambda_4) \equiv \lambda_3 y^{\lambda_3-1} + \lambda_4 (1-y)^{\lambda_4-1} \quad (1.16)$$

*tiene el mismo signo (positivo o negativo) de  $\lambda_2$  para todo  $y \in [0, 1]$ . En particular, la  $DLG(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  especifica una distribución válida si  $\lambda_2, \lambda_3$  y  $\lambda_4$  tienen el mismo signo.*

Es así que, dado un signo particular para  $\lambda_2$  la expresión en (1.16) requiere del mismo signo para especificar una distribución válida, de esta forma el análisis sobre los valores que pueden tomar las parejas  $(\lambda_3, \lambda_4)$  permitiría determinar regiones en el espacio- $(\lambda_3, \lambda_4)$  para los cuales la  $DLG$  es válida, así se consideraran las siguientes regiones:

$$\text{Región 1} = \{(\lambda_3, \lambda_4) \mid \lambda_3 \leq -1, \lambda_4 \geq 1\}$$

$$\text{Región 2} = \{(\lambda_3, \lambda_4) \mid \lambda_3 \geq 1, \lambda_4 \leq -1\}$$

$$\text{Región 3} = \{(\lambda_3, \lambda_4) \mid \lambda_3 \geq 0, \lambda_4 \geq 0\}$$

$$\text{Región 4} = \{(\lambda_3, \lambda_4) \mid \lambda_3 \leq 0, \lambda_4 \leq 0\}.$$

**Teorema 20** *Con un apropiado valor de  $\lambda_2$ , la  $DLG(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  es válida en los puntos  $(\lambda_3, \lambda_4)$  si y solo si  $(\lambda_3, \lambda_4)$  esta en una de las regiones de la*

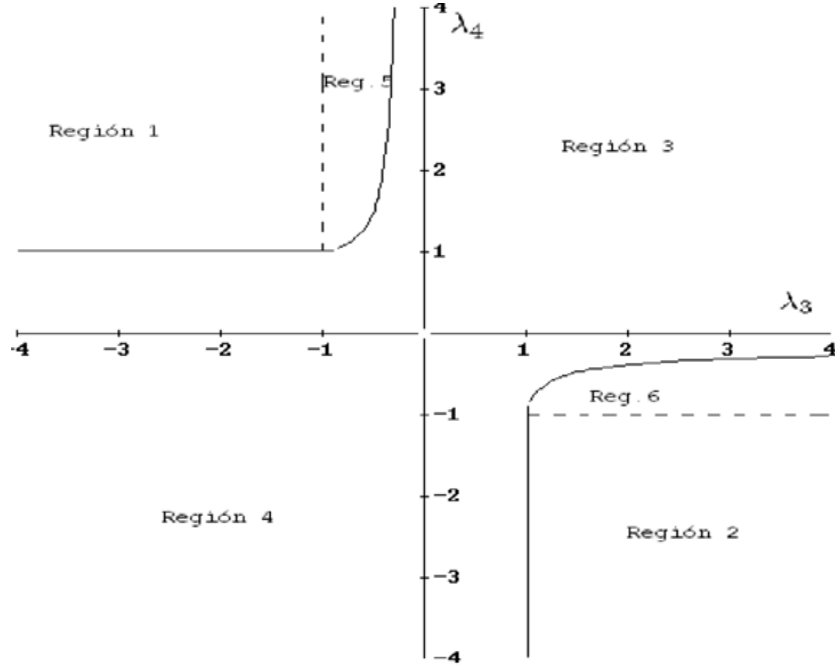
Figura 1.2: Espacio  $(\lambda_3, \lambda_4)$  para densidades DLG

Figura 1.2. Las curvas límites entre las regiones válidas y no válidas están dadas por

$$\frac{(1 - \lambda_3)^{1-\lambda_3}}{(\lambda_4 - \lambda_3)^{\lambda_4 - \lambda_3}} (\lambda_4 - 1)^{\lambda_4 - 1} = -\frac{\lambda_3}{\lambda_4} \quad (\text{Región 5 en el segundo cuadrante})$$

y

$$\frac{(1 - \lambda_4)^{1-\lambda_4}}{(\lambda_3 - \lambda_4)^{\lambda_3 - \lambda_4}} (\lambda_3 - 1)^{\lambda_3 - 1} = -\frac{\lambda_4}{\lambda_3} \quad (\text{Región 6 en el cuarto cuadrante}).$$

### 1.3.3. Soporte y Algunos Momentos de la Distribución

**Teorema 21** *El soporte de la f.d.p. de la DLG $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  está dado en la Tabla 1.1.*

Se puede mostrar (ver [Karian and Dudewicz \(2000\)](#)) que el  $k$ -ésimo momento cuando  $\lambda_1 = 0$ , de la distribución propuesta, si éste existe, está dado

$\lambda_3$	$\lambda_4$	Soporte
$\lambda_3 > 0$	$\lambda_4 > 0$	$[\lambda_1 - 1/\lambda_2, \lambda_1 + 1/\lambda_2]$
$\lambda_3 > 0$	$\lambda_4 = 0$	$[\lambda_1, \lambda_1 + 1/\lambda_2]$
$\lambda_3 = 0$	$\lambda_4 > 0$	$[\lambda_1 - 1/\lambda_2, \lambda_1]$
$\lambda_3 < 0$	$\lambda_4 < 0$	$(-\infty, \infty)$
$\lambda_3 < 0$	$\lambda_4 = 0$	$(-\infty, \lambda_1 + 1/\lambda_2)$
$\lambda_3 = 0$	$\lambda_4 < 0$	$[\lambda_1 - 1/\lambda_2, \infty)$ .

Tabla 1.1: Soporte de la *DLG*.

por

$$E(X^k) = \lambda_2^{-k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i \beta(\lambda_3(k-i) + 1, \lambda_4 i + 1),$$

donde  $\beta$  denota la función beta. El  $k$ -ésimo momento no existe cuando cualquiera de los argumentos de la función beta son negativos. Así, el  $k$ -ésimo momento existe si y solo si  $-1/k < \min(\lambda_3, \lambda_4)$ .

Ellos también desarrollan la siguiente expresión para la media, la varianza, el tercer ( $\mu_3 = E(X - \mu)^3$ ) y el cuarto momento ( $\mu_4 = E(X - \mu)^4$ ) alrededor de la media para esta distribución:

$$\mu = \lambda_1 + A/\lambda_2,$$

$$\sigma^2 = (B - A^2)/\lambda_2^2,$$

$$\mu_3 = (C - 3AB + 2A^3)/\lambda_2^3,$$

$$\mu_4 = (D - 4AC + 6A^2B - 3A^4)/\lambda_2^4,$$

donde

$$A = 1/(1 + \lambda_3) - 1/(1 + \lambda_4),$$

$$B = 1/(1 + 2\lambda_3) + 1/(1 + 2\lambda_4) - 2\beta(1 + \lambda_3, 1 + \lambda_4),$$

$$C = 1/(1 + 3\lambda_3) - 3\beta(1 + 2\lambda_3, 1 + \lambda_4) + 3\beta(1 + \lambda_3, 1 + 2\lambda_4) - 1/(1 + 3\lambda_4)$$

$$D = 1/(1 + 4\lambda_3) - 4\beta(1 + 3\lambda_3, 1 + \lambda_4) - 6\beta(1 + 2\lambda_3, 1 + 2\lambda_4) - 4\beta(1 + \lambda_3, 1 + 3\lambda_4) \\ + 1/(1 + 4\lambda_4).$$

### 1.3.4. Algunas Formas de la D.L.G.

Esta distribución de cuatro parámetros incluye un amplio rango de formas de curvas ilustradas por los gráficos de densidades en las Figuras 1.3 a 1.6. Las densidades son indexadas por los valores de su sesgo ( $\alpha_3 = E(x - \mu)^3 / \sigma^3$ ) y curtosis ( $\alpha_4 = E(x - \mu)^4 / \sigma^4$ ). Cada una tiene media cero y varianza de uno. En las Figuras 1.3 y 1.4 el sesgo es fijo y tres valores de curtosis son ilustrados. En la Figura 1.3,  $\alpha_3 = 0$  y  $\alpha_4 = 3, 5, 9$ , mientras que en la Figura 1.4  $\alpha_3 = 1$  y  $\alpha_4 = 4, 6, 9$ . En la Figura 1.5, la curtosis es fija ( $\alpha_4 = 4$ ) y tres valores de sesgo son ilustrados ( $\alpha_3 = 0, 0,5$  y  $1,0$ ). Curvas en forma de  $U$  también son posibles y ocurren cuando  $1 \leq \lambda_3, \lambda_4 \leq 2$ . Algunas densidades en forma de  $U$  son graficadas en la Figura 1.6.

Mediante el método de momentos expuesto en [Karian and Dudewicz \(2000\)](#), se calculan los valores para el vector  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  que permiten aproximar muchas de las distribuciones conocidas en la literatura, de esta forma el vector  $(0, 0, 1975, 0, 1349, 0, 1349)$  permite aproximar la distribución normal estándar, el vector  $(0, 5, 2, 1, 1)$  permite aproximar la distribución uniforme  $(0, 1)$ , la distribución logística con parámetros  $\mu = 0$  y  $\sigma = 1$  puede ser aproximada a través del vector  $(0, -0,0003637, -0,0003630, -0,0003630)$ . Con el vector  $(7,5505 \times 10^{-17}, -0,1192, -0,08020, -0,08020)$  se puede aproximar la distribu-

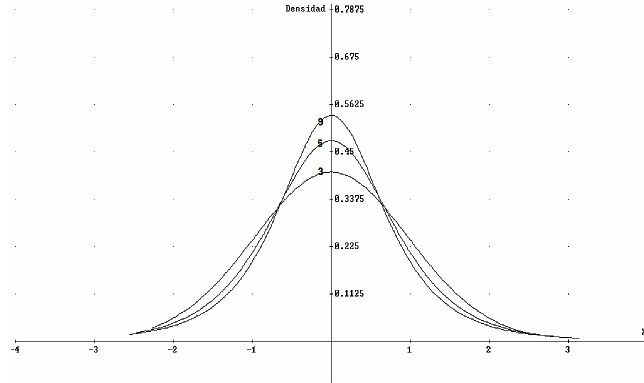


Figura 1.3: Formas de la *DLG*.  $\alpha_3 = 0$  y  $\alpha_4 = 3, 5, 9$

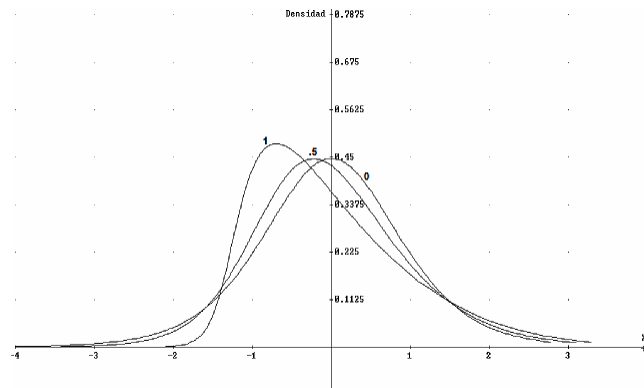


Figura 1.4: Formas de la *DLG*.  $\alpha_3 = 1$  y  $\alpha_4 = 4, 6, 9$ .

ción doble exponencial, algunos otros vectores más serán utilizados en el desarrollo del trabajo para generar distribuciones sesgadas (Ver [McWilliams \(1990\)](#)).



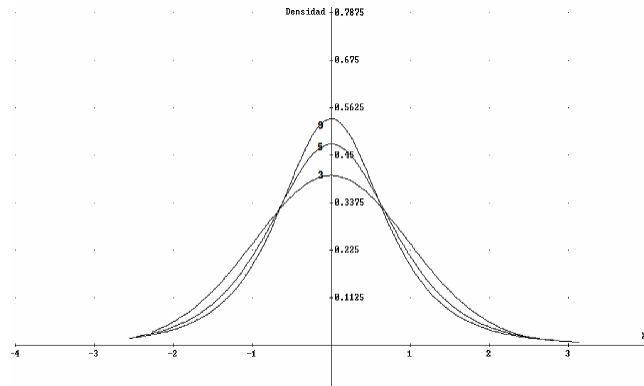


Figura 1.5: Formas de la *DLG*.  $\alpha_4 = 4$ ,  $\alpha_3 = 0, 0,5,1,0$

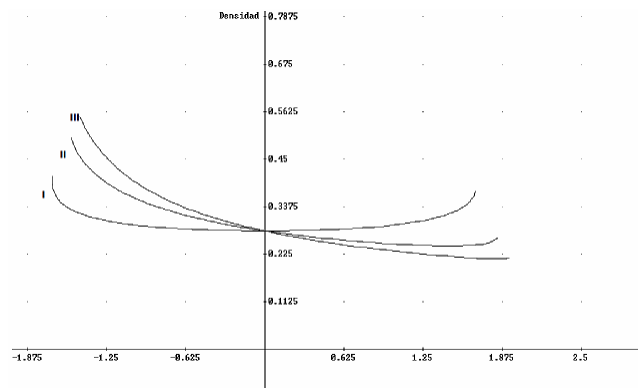


Figura 1.6: Formas de la *DLG*.  $1 \leq \lambda_3, \lambda_4 \leq 2$

# Capítulo 2

## La Prueba Propuesta

En las secciones anteriores se presentaron varias expresiones base para la obtención de la estadística de la *PRLMP* para el problema de escala en dos muestras, como son, la aproximación para la función de puntajes dada por

$$a^*(i) = -1 - F^{-1} [i/(m+n+1)] \frac{f'(F^{-1} [i/(m+n+1)])}{f(F^{-1} [i/(m+n+1)])}.$$

Con respecto a la Distribución Lambda Generalizada, su función percentil

$$F^{-1}(y; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \lambda_1 + \frac{y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_4}}{\lambda_2}$$

además de su función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \frac{\lambda_2}{\lambda_3 y^{\lambda_3-1} + \lambda_4 (1-y)^{\lambda_4-1}} \text{ donde } x = F^{-1}(y). \quad (2.1)$$

El objetivo inicial del trabajo pretende describir la forma del estadístico para la prueba que se desea proponer. La expresión general para el estadístico de prueba es

$$V = \sum_{i=1}^n a^*(R_i)$$

en donde  $a^*(i)$  se relaciona con la función generadora de puntajes  $\phi(u)$  a través de la expresión  $a^*(i) = \phi[i/(N+1)]$  con  $N = n + m$ .

## 2.1. Construcción de la Estadística Propuesta

Inicialmente se encontrará una expresión para  $\phi(u)$  en función de los parámetros  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  de la *DLG*. Partiendo de

$$\phi(u) = -1 - F^{-1}(u) \frac{f'[F^{-1}(u)]}{f[F^{-1}(u)]}$$

se requiere la derivada de la f.d.p., así que, con base en (2.1) se tiene que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{dy} \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{d}{dy} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_3^{\lambda_3-1}y + \lambda_4(1-y)^{\lambda_4-1}} \right) f(x) \\ &= \frac{-\lambda_2 \left( \lambda_3(\lambda_3-1)y^{\lambda_3-2} - \lambda_4(\lambda_4-1)(1-y)^{\lambda_4-2} \right)}{(\lambda_3^{\lambda_3-1}y + \lambda_4(1-y)^{\lambda_4-1})^2} f(x) \\ &= -\frac{\lambda_3(\lambda_3-1)y^{\lambda_3-2} - \lambda_4(\lambda_4-1)(1-y)^{\lambda_4-2}}{\lambda_2} [f(x)]^3 \end{aligned}$$

Entonces, se obtiene:

$$-\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\lambda_3(\lambda_3-1)y^{\lambda_3-2} - \lambda_4(\lambda_4-1)(1-y)^{\lambda_4-2}}{\lambda_2} [f(x)]^2, \text{ donde } x = F^{-1}(y).$$

Calculando la expresión anterior en  $x = F^{-1}(u)$  se consigue

$$\begin{aligned} -\frac{f'[F^{-1}(u)]}{f[F^{-1}(u)]} &= -\frac{f'(x)}{f(x)} \\ &= \frac{\lambda_3(\lambda_3-1)u^{\lambda_3-2} - \lambda_4(\lambda_4-1)(1-u)^{\lambda_4-2}}{\lambda_2} [f(x)]^2 \\ &= \frac{\lambda_3(\lambda_3-1)u^{\lambda_3-2} - \lambda_4(\lambda_4-1)(1-u)^{\lambda_4-2}}{\lambda_2} \left[ \frac{\lambda_2}{\lambda_3 u^{\lambda_3-1} + \lambda_4(1-u)^{\lambda_4-1}} \right]^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{\lambda_3(\lambda_3 - 1)u^{\lambda_3-2} - \lambda_4(\lambda_4 - 1)(1 - u)^{\lambda_4-2}}{(\lambda_3u^{\lambda_3-1} + \lambda_4(1 - u)^{\lambda_4-1})^2} \lambda_2.$$

Por último, multiplicando por  $F^{-1}(u)$ , la función percentil de la *DLG*, y restando 1 se tiene que

$$\begin{aligned} \phi(u) &= -1 - F^{-1}(u) \frac{f' [F^{-1}(u)]}{f [F^{-1}(u)]} \\ &= -1 + \left( \lambda_1 + \frac{u^{\lambda_3} - (1 - u)^{\lambda_4}}{\lambda_2} \right) \frac{\lambda_3(\lambda_3 - 1)u^{\lambda_3-2} - \lambda_4(\lambda_4 - 1)(1 - u)^{\lambda_4-2}}{(\lambda_3u^{\lambda_3-1} + \lambda_4(1 - u)^{\lambda_4-1})^2} \lambda_2. \end{aligned}$$

Con lo anterior se ha demostrado el siguiente teorema.

**Teorema 22** *Las función  $\phi(u)$  obtenida a partir de densidades de la familia *DLG* para la alternativa de escala en dos muestras es*

$$\phi(u) = -1 + \frac{(\lambda_1\lambda_2 + u^{\lambda_3} - (1 - u)^{\lambda_4}) \left( \lambda_3(\lambda_3 - 1)u^{\lambda_3-2} - \lambda_4(\lambda_4 - 1)(1 - u)^{\lambda_4-2} \right)}{(\lambda_3u^{\lambda_3-1} + \lambda_4(1 - u)^{\lambda_4-1})^2} \quad (2.2)$$

en donde  $0 < u < 1$ .

Puesto que  $\lambda_1$  es, para la *DLG*, el parámetro de localización, sin pérdida de generalidad se puede suponer que las distribuciones de donde se muestrea están centradas en cero, para esto se requiere que  $\lambda_1 = 0$ . Por tanto, la función dada en (2.2) se reduce a

$$\phi(u) = -1 + \frac{[u^{\lambda_3} - (1 - u)^{\lambda_4}] \left[ \lambda_3(\lambda_3 - 1)u^{\lambda_3-2} - \lambda_4(\lambda_4 - 1)(1 - u)^{\lambda_4-2} \right]}{[\lambda_3u^{\lambda_3-1} + \lambda_4(1 - u)^{\lambda_4-1}]^2}, \quad (2.3)$$

así, la función  $\phi(u)$  queda dependiendo de los parámetros  $\lambda_3$  y  $\lambda_4$  únicamente. Uno de los objetivos específicos planteados en el proyecto que precede éste trabajo, es considerar densidades simétricas para la construcción de la función

de puntajes, éstas se obtienen haciendo  $\lambda_3 = \lambda_4$  en la *DLG*. Finalmente la función de puntajes, que bajo éstas condiciones se notará como  $\phi_{\Omega_s}(u)$  debido a que proviene de densidades simétricas, toma la forma

$$\phi_{\Omega_s}(u) = -1 + \frac{(\lambda_3 - 1)}{\lambda_3} [u^{\lambda_3} - (1 - u)^{\lambda_3}] \frac{u^{\lambda_3-2} - (1 - u)^{\lambda_3-2}}{[u^{\lambda_3-1} + (1 - u)^{\lambda_3-1}]^2}. \quad (2.4)$$

De acuerdo con la Definición 6, se requiere para la función  $\phi_{\Omega_s}(u)$  construida que  $0 < \int_0^1 (\phi_{\Omega_s}(u) - \bar{\phi})^2 du < \infty$  donde  $\bar{\phi}_{\Omega_s} = \int_0^1 \phi_{\Omega_s}(u) du < \infty$ . De este modo, las integrales que se deben calcular para verificar las condiciones son:

$$\int_0^1 \phi_{\Omega_s}(u, f) du = -1 + \frac{\lambda_3 - 1}{\lambda_3} \int_0^1 \frac{(u^{\lambda_3} - (1 - u)^{\lambda_3}) (u^{\lambda_3-2} - (1 - u)^{\lambda_3-2})}{(u^{\lambda_3-1} + (1 - u)^{\lambda_3-1})^2} du \quad (2.5)$$

y,

$$\int_0^1 (\phi_{\Omega_s}(u) - \bar{\phi}_{\Omega_s})^2 du = \int_0^1 \left[ -1 + \frac{(\lambda_3 - 1)}{\lambda_3} (u^{\lambda_3} - (1 - u)^{\lambda_3}) \right. \quad (2.6) \\ \left. \times \frac{u^{\lambda_3-2} - (1 - u)^{\lambda_3-2}}{(u^{\lambda_3-1} + (1 - u)^{\lambda_3-1})^2} - \bar{\phi}_{\Omega_s} \right]^2 du.$$

Debido a lo complicado del cálculo de dichas integrales, se optó por elegir valores particulares para  $\lambda_3$  que hicieran que estas condiciones se verificaran. Los resultados obtenidos para estas integrales por métodos numéricos, se realizan para valores de  $\lambda_3$  dados en la Tabla 2.1. Para estos valores la integral de (2.5) se anula mientras que para la integral de (2.6) los resultados se presentan en la tabla referida.

Para observar el comportamiento de la función de puntajes, las Figuras (2.1) y (2.2) muestran la forma de las mismas indexadas por los valores dados

$\lambda_3$	$\int_0^1 \phi_{\Omega_s}(u)^2 du$	$\lambda_3$	$\int_0^1 \phi_{\Omega_s}(u)^2 du$
0,4	8,435531	-0,4	0,766919
0,3	3,903372	-0,5	0,687110
0,2	2,492683	-0,6	0,622352
0,1349	2,010224	-0,7	0,568761
0,1	1,820019	-0,8	0,523682
-0,000363	1,428841	-0,9	0,485238
-0,0802	1,219302	-1,0	0,452064
-0,1	1,176439	-2,0	0,268711
-0,2	0,998851	-3,0	0,191330
-0,3	0,867688	-10,0	0,063529

Tabla 2.1: Función de Puntajes para los valores de  $\lambda_3$  considerados.

al parámetro  $\lambda_3$ . A medida que el valor del parámetro decrece las funciones de puntajes asignan pesos mayores a más proporción de observaciones en torno al centro, esto se observa en la forma cada vez más apuntada que toman las gráficas entorno a  $u = 1/2$ . La forma de estas funciones cumplen con las condiciones establecidas anteriormente para las funciones de puntajes, ser no creciente para  $u \leq 1/2$  y no decreciente para  $u \geq 1/2$ .

La familia de estadísticos que se genera toma la forma

$$\begin{aligned}
 V &= \sum_{i=1}^n a^*(R_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n \phi_{\Omega_s} \left( \frac{R_i}{N+1} \right)
 \end{aligned}$$

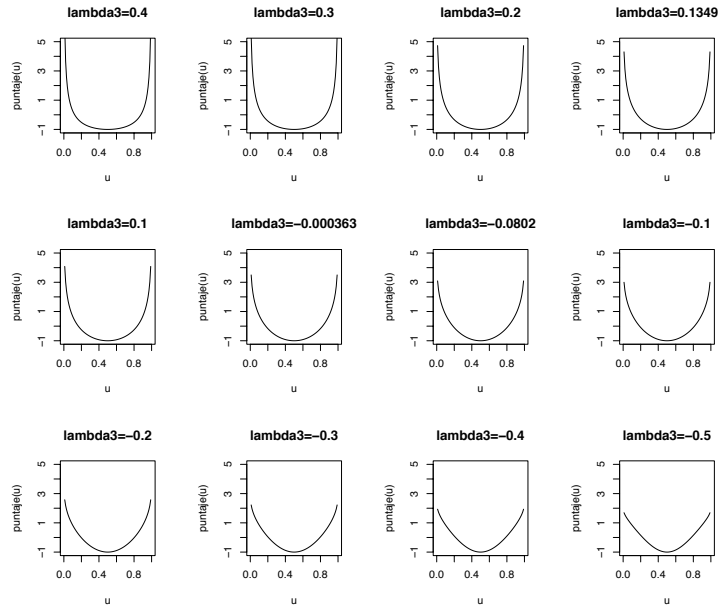


Figura 2.1: Función de Puntajes para los valores de  $\lambda_3$  considerados.

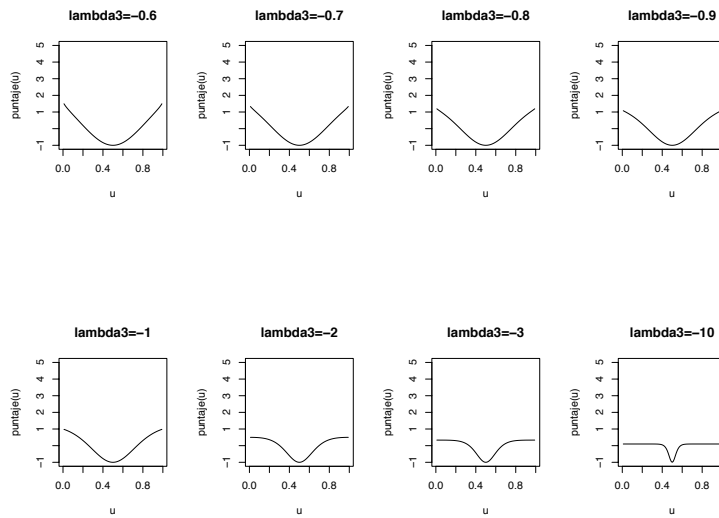


Figura 2.2: Función de Puntajes para los valores de  $\lambda_3$  considerados.

donde  $\Omega_s$  denota la función de puntajes dada por (2.4), por tanto, la expresión para  $V$  se obtiene como función de  $\lambda_3$ ,  $R_i$  y  $N = n + m$ .

## 2.2. Eficacia de la Prueba Propuesta

Para la evaluación de la prueba que se propone, se procede a calcular su eficacia con el objetivo de compararla con varias de las pruebas conocidas. Es así que, basado en la expresión (1.11) y habiendo verificado que, para los valores de  $\lambda_3$  considerados, los supuestos sobre la función  $\phi_{\Omega_s}$  se cumplen, y de manera particular que la integral  $\bar{\phi}_{\Omega_s}$  se anula, se puede observar que la eficacia para la prueba queda dada por

$$eff(\bar{V}) = \sqrt{\lambda(1-\lambda)} \frac{\int_0^1 \phi_{\Omega_s}(u) \phi_{Esc}(u, f) du}{\sqrt{\int_0^1 \phi_{\Omega_s}^2(u) du}} \quad (2.7)$$

en donde  $\phi_{\Omega_s}(u)$  y  $\phi_{\Omega_s}^2(u)$  se refieren a la función de puntajes involucrada en la expresión para el estadístico de la prueba propuesta, mientras que la función  $\phi_{Esc}(u, f)$  se refiere a la función de puntajes en donde  $f$  es la densidad de la población de donde se muestrea. Se debe esperar que, al coincidir el vector de parámetros  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  para las dos funciones  $\phi_{\Omega_s}(u)$  y  $\phi_{Esc}(u, f)$ , la prueba propuesta sea una *PRLMP*. Si se considera  $\phi_{Esc}(u, f)$  del mismo tipo como en (2.4), se estará suponiendo que se muestrea de una distribución simétrica centrada en cero, mientras que, de manera general, si se supone  $\phi_{Esc}(u, f)$  de la forma dada en (2.3), no eligiendo valores iguales de  $\lambda_3$  y  $\lambda_4$ , se supondrá que se muestrea de distribuciones centradas en cero pero no simétricas.

De esta forma, para el cálculo de la integral del numerador en (2.7) se



tienen que  $\phi_{\Omega_s}(u)$  esta dado por (2.4) y

$$\phi_{Esc}(u, f) = -1 + \frac{[u^{\lambda'_3} - (1-u)^{\lambda'_4}] [\lambda'_3(\lambda'_3 - 1)u^{\lambda'_3-2} - \lambda'_4(\lambda'_4 - 1)(1-u)^{\lambda'_4-2}]}{[\lambda'_3 u^{\lambda'_3-1} + \lambda'_4(1-u)^{\lambda'_4-1}]^2} \quad (2.8)$$

Dichos cálculos se realizaron dando valores a los parámetros  $\lambda_3, \lambda'_3$  y  $\lambda'_4$  de los que queda dependiendo la integral.

### 2.3. ERA de la Prueba Propuesta con respecto a otras pruebas conocidas

Con base en la expresión de la eficacia para la Prueba de Propuesta dada en (2.7) y las expresiones para las eficacias de las pruebas de Mood, Ansari-Bradley y Klotz se puede calcular la ERA de la Prueba Propuesta relativa a las pruebas mencionadas. No obstante de poder realizar los cálculos exactos de las eficacias de las pruebas con que se va a comparar la prueba propuesta mediante las expresiones (1.12), (1.13) y (1.14), se utilizaron las expresiones presentadas en la Sección 2.2 para estos cálculos, permitiendo con esto observar las buenas aproximaciones obtenidas utilizando la DLG. Por ejemplo, para la prueba de Mood muestreando de una distribución normal se tiene que

$$\begin{aligned} \text{eff}(M) &= \sqrt{720\lambda(1-\lambda)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ F(x) - \frac{1}{2} \right] x f^2(x) dx \\ &= \sqrt{720\lambda(1-\lambda)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \Phi(x) - \frac{1}{2} \right] x \varphi^2(x) dx \\ &= \frac{\sqrt{15}}{\pi} \sqrt{\lambda(1-\lambda)} \approx 1,232808888 \sqrt{\lambda(1-\lambda)}. \end{aligned}$$

La aproximación se obtiene con base en (2.7) haciendo  $\phi_{\Omega_s}(u) = (u - \frac{1}{2})^2$  y teniendo en cuenta que  $\bar{\phi}_{\Omega_s} = \int_0^1 \phi_{\Omega_s}(u) du = 1$ , luego

$$eff(M) = \sqrt{\lambda(1-\lambda)} \frac{\int_0^1 \phi_{\Omega_s}(u) \phi_{Esc}(u, f) du}{\sqrt{\int_0^1 [\phi_{\Omega_s}(u) - \bar{\phi}_{\Omega_s}]^2 du}}.$$

Para  $\phi_{Esc}(u, f)$  dado por (2.8) se toma, para aproximar la distribución normal estándar, como vector de parámetros (0, 0,1975, 0,1349, 0,1349). Utilizando métodos numéricos para realizar los cálculos se obtiene que  $eff(M) \approx 1,232809\sqrt{\lambda(1-\lambda)}$ .

Para la prueba de Ansari-Bradley

$$\begin{aligned} eff(AB) &= \sqrt{48\lambda(1-\lambda)} \left[ \int_0^\infty x f^2(x) dx - \int_{-\infty}^0 x f^2(x) dx \right] \\ &= \sqrt{48\lambda(1-\lambda)} \left[ \int_0^\infty x \varphi^2(x) dx - \int_{-\infty}^0 x \varphi^2(x) dx \right] \\ &= \frac{\sqrt{48}}{2\pi} \sqrt{\lambda(1-\lambda)} \approx 1,102657790 \sqrt{\lambda(1-\lambda)} \end{aligned}$$

aproximando con la DLG utilizando como función de puntajes  $\phi_{\Omega_s}(u) = |u - \frac{1}{2}|$  a través de métodos numéricos se tiene que  $eff(AB) \approx 1,102658\sqrt{\lambda(1-\lambda)}$ .

Para la prueba de Klotz se tiene

$$\begin{aligned} eff(K) &= \sqrt{2\lambda(1-\lambda)} \int_{-\infty}^\infty \left\{ \frac{\Phi^{-1}[F(x)]}{\varphi(\Phi^{-1}[F(x)])} \right\} x f^2(x) dx \\ &= \sqrt{2\lambda(1-\lambda)} \int_{-\infty}^\infty \left\{ \frac{\Phi^{-1}[\Phi(x)]}{\varphi(\Phi^{-1}[\Phi(x)])} \right\} x \varphi^2(x) dx \\ &= \sqrt{2\lambda(1-\lambda)} \int_{-\infty}^\infty x^2 \varphi(x) dx \\ &= \sqrt{2}\sqrt{\lambda(1-\lambda)} \approx 1,414213562 \sqrt{\lambda(1-\lambda)} \end{aligned}$$

aproximando con la DLG utilizando como función de puntajes  $\phi_{\Omega_s}(u) = [\Phi^{-1}(u)]^2$ , la aproximación obtenida es  $eff(K) \approx 1,414214\sqrt{\lambda(1-\lambda)}$ .

Indicada las formas para calcular las diferentes eficacias, las *ERAs* surgen como cocientes de las eficacias de las pruebas que se quieren comparar elevadas al cuadrado, estos cálculos se presentan mediante tablas en el siguiente capítulo.

# Capítulo 3

## Resultados

En la sección anterior se presentó una expresión para el cálculo de la eficacia de la prueba propuesta que depende de tres parámetros  $\lambda_3$ ,  $\lambda'_3$  y  $\lambda'_4$ . Aquí el primer parámetro determina los puntajes para la prueba propuesta y los dos últimos determinan la distribución de donde se muestrea. Los resultados se presentan en tablas que se encuentran organizados de la siguiente manera: Una columna encabezada con *Lambda 3* que contienen los valores de este parámetro y que determinan la forma de la estadística de prueba; la siguiente columna, encabezada con *IntPhi^2*, especifica el valor de la integral en (2.6), las columnas con *Eff* presentan las eficacias y las etiquetadas con *ERA* se refieren a la eficiencia relativa asintótica. Se denota por *M*, *AB*, *K* y *V* las pruebas de puntajes de Mood, Ansari-Bradley, Klotz y la prueba propuesta respectivamente. Una lectura de la tabla por renglones muestra, para un valor particular de  $\lambda_3$ , los cálculos a que se refiere cada columna, de esta forma, ya que las eficacias de las pruebas de Mood, Ansari-Bradley y Klotz dependen exclusivamente de la distribución de donde se muestrea y no del valor de  $\lambda_3$ ,

estos valores en la columna de cada tabla son constantes. Sin embargo, al ser las *ERAs* el cuadrado de los cocientes entre eficacias de la prueba propuesta y las diferentes pruebas mencionadas, estos valores no son constantes en cada tabla.

Muestreando de una Normal Estandar (Con función de puntajes DLG)								
Lamda 3	Int Phi^2	Eff(V)	Eff(M)	Eff(AB)	Eff(K)	ERA(V,M)	ERA(V,AB)	ERA(V,K)
0,4	8,435531	1,122345	1,232809	1,102658	1,414214	0,828822	1,036027	0,629829
0,3	3,903372	1,342088	1,232809	1,102658	1,414214	1,185141	1,481427	0,900600
0,2	2,492683	1,409201	1,232809	1,102658	1,414214	1,306635	1,633293	0,992924
<b>0,1349</b>	<b>2,010224</b>	<b>1,418070</b>	<b>1,232809</b>	<b>1,102658</b>	<b>1,414214</b>	<b>1,323134</b>	<b>1,653917</b>	<b>1,005461</b>
0,1	1,820019	1,415921	1,232809	1,102658	1,414214	1,319125	1,648907	1,002416
<b>-0,000363</b>	<b>1,428841</b>	<b>1,389847</b>	<b>1,232809</b>	<b>1,102658</b>	<b>1,414214</b>	<b>1,270990</b>	<b>1,588738</b>	<b>0,965837</b>
<b>-0,0802</b>	<b>1,219302</b>	<b>1,370251</b>	<b>1,232809</b>	<b>1,102658</b>	<b>1,414214</b>	<b>1,235403</b>	<b>1,544253</b>	<b>0,938794</b>
-0,1	1,176439	1,363236	1,232809	1,102658	1,414214	1,222786	1,528482	0,929206
-0,2	0,998851	1,325479	1,232809	1,102658	1,414214	1,155990	1,444987	0,878447
-0,3	0,867688	1,286029	1,232809	1,102658	1,414214	1,088203	1,360253	0,826935
-0,4	0,766919	1,246748	1,232809	1,102658	1,414214	1,022741	1,278426	0,777190
-0,5	0,687110	1,208605	1,232809	1,102658	1,414214	0,961119	1,201399	0,730363
-0,6	0,622352	1,172083	1,232809	1,102658	1,414214	0,903910	1,129887	0,686889
-0,7	0,568761	1,137393	1,232809	1,102658	1,414214	0,851196	1,063995	0,646831
-0,8	0,523682	1,104595	1,232809	1,102658	1,414214	0,802813	1,003516	0,610065
-0,9	0,485238	1,073664	1,232809	1,102658	1,414214	0,758482	0,948102	0,576377
-1,0	0,452064	1,044528	1,232809	1,102658	1,414214	0,717874	0,897343	0,545519
-2,0	0,268711	0,829938	1,232809	1,102658	1,414214	0,453210	0,566513	0,344399
-3,0	0,191330	0,700934	1,232809	1,102658	1,414214	0,323268	0,404085	0,245654
-10,0	0,063529	0,392414	1,232809	1,102658	1,414214	0,101320	0,126651	0,076994

Cada uno de los valores en la columna eficacia debe ser multiplicada por el factor (1)

Tabla 3.1: Eficacias y *ERA* muestreando de la distribución normal.

En todas las tablas, la fila sombreada indica al valor de  $\lambda_3$  que define la función de puntajes para la cual, la prueba que se propone alcanza el valor más grande de eficacia. Además se observa que este valor de eficacia, en todos los casos, es mayor que el mismo para las pruebas de Mood, Ansari-Bradley y Klotz. En el caso de las Tablas 3.1, 3.2 y 3.3 en donde se muestrea de distribuciones con densidades simétricas (normal estándar, logística y doble exponencial), por haberse construido la función de puntajes con  $\lambda_3 = \lambda_4$  y no depender de ninguno de los otros dos parámetros, la prueba que resulta localmente más potente es aquella en donde el valor de  $\lambda_3$  coincide con el valor

Muestreando de una Logística (Con función de puntajes DLG)								
Lamda 3	Int Phi^2	Eff(V)	Eff(M)	Eff(AB)	Eff(K)	ERA(V,M)	ERA(V,AB)	ERA(V,K)
0,4	8,435531	0,839287	1,118033	1,023404	1,181598	0,563523	0,672553	0,504524
0,3	3,903372	1,053669	1,118033	1,023404	1,181598	0,888176	1,060020	0,795186
0,2	2,492683	1,147407	1,118033	1,023404	1,181598	1,053237	1,257017	0,942965
<b>0,1349</b>	<b>2,010224</b>	<b>1,176627</b>	<b>1,118033</b>	<b>1,023404</b>	<b>1,181598</b>	<b>1,107563</b>	<b>1,321853</b>	<b>0,991603</b>
0,1	1,820019	1,185808	1,118033	1,023404	1,181598	1,124914	1,342563	1,007139
<b>-0,000363</b>	<b>1,428841</b>	<b>1,195341</b>	<b>1,118033</b>	<b>1,023404</b>	<b>1,181598</b>	<b>1,143074</b>	<b>1,364236</b>	<b>1,023397</b>
<b>-0,0802</b>	<b>1,219302</b>	<b>1,191089</b>	<b>1,118033</b>	<b>1,023404</b>	1,181598	<b>1,134956</b>	<b>1,354547</b>	<b>1,016129</b>
-0,1	1,176439	1,189718	1,118033	1,023404	1,181598	1,132345	1,351431	1,013791
-0,2	0,998851	1,173966	1,118033	1,023404	1,181598	1,102558	1,315881	0,987123
-0,3	0,867688	1,153402	1,118033	1,023404	1,181598	1,064270	1,270185	0,952844
-0,4	0,766919	1,130195	1,118033	1,023404	1,181598	1,021874	1,219586	0,914887
-0,5	0,687110	1,105739	1,118033	1,023404	1,181598	0,978128	1,167376	0,875720
-0,6	0,622352	1,080901	1,118033	1,023404	1,181598	0,934679	1,115520	0,836820
-0,7	0,568761	1,056229	1,118033	1,023404	1,181598	0,892497	1,065177	0,799055
-0,8	0,523682	1,032053	1,118033	1,023404	1,181598	0,852108	1,016973	0,762894
-0,9	0,485238	1,008576	1,118033	1,023404	1,181598	0,813781	0,971232	0,728580
-1,0	0,452064	0,985914	1,118033	1,023404	1,181598	0,777622	0,928076	0,696207
-2,0	0,268711	0,805718	1,118033	1,023404	1,181598	0,519347	0,619830	0,464972
-3,0	0,191330	0,688542	1,118033	1,023404	1,181598	0,379272	0,452654	0,339564
-10,0	0,063529	0,391431	1,118033	1,023404	1,181598	0,122575	0,146290	0,109741

Cada uno de los valores en la columna eficacia debe ser multiplicada por el factor (1)

Tabla 3.2: Eficacias y ERA muestreando de la distribución logística.

Muestreando de una Doble Exponencial (Con función de puntajes DLG)								
Lamda 3	Int Phi^2	Eff(V)	Eff(M)	Eff(AB)	Eff(K)	ERA(V,M)	ERA(V,AB)	ERA(V,K)
0,4	8,435531	0,727447	0,931694	0,866025	1,073635	0,609616	0,705573	0,459081
0,3	3,903372	0,932222	0,931694	0,866025	1,073635	1,001134	1,158718	0,753920
0,2	2,492683	1,031648	0,931694	0,866025	1,073635	1,226073	1,419065	0,923315
<b>0,1349</b>	<b>2,010224</b>	<b>1,067170</b>	<b>0,931694</b>	<b>0,866025</b>	<b>1,073635</b>	<b>1,311960</b>	<b>1,518470</b>	<b>0,987993</b>
0,1	1,820019	1,080018	0,931694	0,866025	1,073635	1,343740	1,555253	1,011926
<b>-0,000363</b>	<b>1,428841</b>	<b>1,100292</b>	<b>0,931694</b>	<b>0,866025</b>	<b>1,073635</b>	<b>1,394663</b>	<b>1,614191</b>	<b>1,050274</b>
<b>-0,0802</b>	<b>1,219302</b>	<b>1,104220</b>	<b>0,931694</b>	<b>0,866025</b>	<b>1,073635</b>	<b>1,404639</b>	<b>1,625737</b>	<b>1,057786</b>
-0,1	1,176439	1,104016	0,931694	0,866025	1,073635	1,404120	1,625137	1,057395
-0,2	0,998851	1,097825	0,931694	0,866025	1,073635	1,388416	1,606961	1,045570
-0,3	0,867688	1,085551	0,931694	0,866025	1,073635	1,357544	1,571229	1,022321
-0,4	0,766919	1,069588	0,931694	0,866025	1,073635	1,317912	1,525359	0,992475
-0,5	0,687110	1,051456	0,931694	0,866025	1,073635	1,273608	1,474081	0,959111
-0,6	0,622352	1,032146	0,931694	0,866025	1,073635	1,227258	1,420436	0,924207
-0,7	0,568761	1,012310	0,931694	0,866025	1,073635	1,180539	1,366363	0,889024
-0,8	0,523682	0,992374	0,931694	0,866025	1,073635	1,134499	1,313076	0,854353
-0,9	0,485238	0,972622	0,931694	0,866025	1,073635	1,089787	1,261326	0,820682
-1,0	0,452064	0,953245	0,931694	0,866025	1,073635	1,046797	1,211569	0,788308
-2,0	0,268711	0,791385	0,931694	0,866025	1,073635	0,721488	0,835055	0,543328
-3,0	0,191330	0,680995	0,931694	0,866025	1,073635	0,534246	0,618340	0,402323
-10,0	0,063529	0,390760	0,931694	0,866025	1,073635	0,175903	0,203592	0,132467

Cada uno de los valores en la columna eficacia debe ser multiplicada por el factor (1)

Tabla 3.3: Eficacias y ERA muestreando de la distribución doble exponencial.

que se da a este parámetro para aproximar la función de donde se muestrea, es decir  $\lambda_3$ . Así, al muestrear de una población con distribución normal estándar, (Ver Tabla 3.1), la prueba es localmente más potente cuando  $\lambda_3 = 0,1349$ , esto

se debe a que el vector de parámetros para aproximar la distribución normal es  $(0, 0,1975, 0,1349, 0,1349)$ . Los valores de  $\lambda_3$  para los cuales la prueba propuesta supera a la prueba de Mood están entre aproximadamente  $-0,4$  y  $0,3$ , cuando se compara contra la prueba de Ansari-Bradley, la prueba propuesta es mejor al variar  $\lambda_3$  entre aproximadamente  $-0,8$  y  $0,4$ , mientras que para la prueba de Klotz ocurre lo mismo para valores entre  $0,1$  y  $0,1349$ . En este último intervalo la prueba propuesta supera a todas las anteriores.

Al muestrear de la distribución logística, (Ver Tabla 3.2), la prueba es localmente más potente cuando  $\lambda_3 = -0,000363$ . El vector de parámetros de la Distribución *DLG* que aproxima a la distribución logística es  $(0, -0,0003637, -0,0003630, -0,0003630)$ , se observa que  $\lambda_3$  coincide en ambos casos como era de esperar. Sin embargo cuando se comparan las columnas de las eficacias del conjunto de pruebas propuestas con las de Mood, Ansari-Bradley y Klotz, se observa que con respecto a Mood los valores de  $\lambda_3$  que hacen la prueba propuesta mejor oscilan entre, aproximadamente,  $-0,4$  y  $0,2$ . Con respecto a la prueba de Ansari-Bradley, valores aproximados de  $\lambda_3$  entre  $-0,8$  y  $0,3$  hacen que la prueba propuesta tenga una eficacia más grande, mientras que con respecto a la prueba de Klotz ocurre lo mismo con valores de  $\lambda_3$  entre aproximadamente  $-0,1$  y  $0,1$ . En este último intervalo la prueba propuesta supera a todas las anteriores.

Cuando se muestrea de la distribución doble exponencial, al realizar la comparación con las pruebas de Mood y Ansari-Bradley los valores de  $\lambda_3$  que hacen la eficacia de la prueba propuesta mayor oscilan entre  $-1,0$  y  $0,3$ , aunque se puede observar que la *ERA* de  $V$  respecto a  $M$  en comparación con la *ERA*

de  $V$  respecto a  $AB$  resulta mayor en todos los casos debido a que la eficacia de la prueba de Mood es mayor que la eficacia de la prueba de Ansari-Bradley. El intervalo para  $\lambda_3$  en donde la eficacia de la prueba propuesta supera a la prueba de Klotz esta entre  $-0,3$  y  $0,1$ . Los gráficos de las distribuciones simétricas de donde se muestrea, aproximados por la DLG, se ilustran en la Figura 3.1.

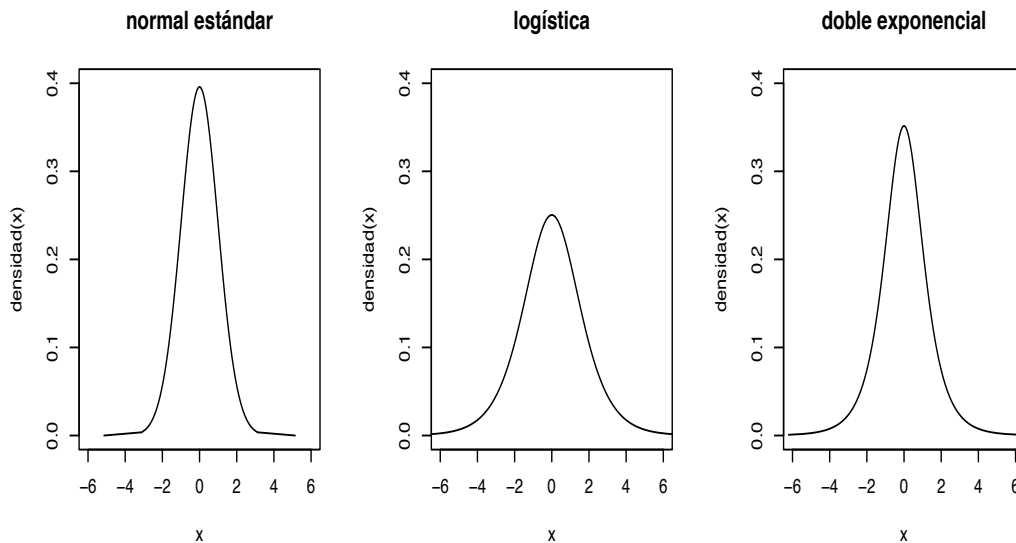


Figura 3.1: Distribuciones simétricas muestreadas

Las Tablas 3.4 y 3.5 presentan las eficacias y las  $ERA$ 's cuando se muestrea de distribuciones no simétricas obtenidas a partir de la  $DLG$ , estas mismas distribuciones fueron utilizadas en McWilliams (1990). Las distribuciones de donde se muestrea se generan utilizando como vectores de parámetros  $(0, -0,1, -0,00075, -0,03)$  y  $(0, -1, -0,1, -0,018)$  y los gráficos correspondientes a su densidades se pueden observar en la Figura 3.2. El grado de asimetría de la primera densidad es mayor al de la segunda debido a la mayor diferencia entre los valores dados a los parámetros  $\lambda_3$  y  $\lambda_4$  en cada caso. Debido a que la



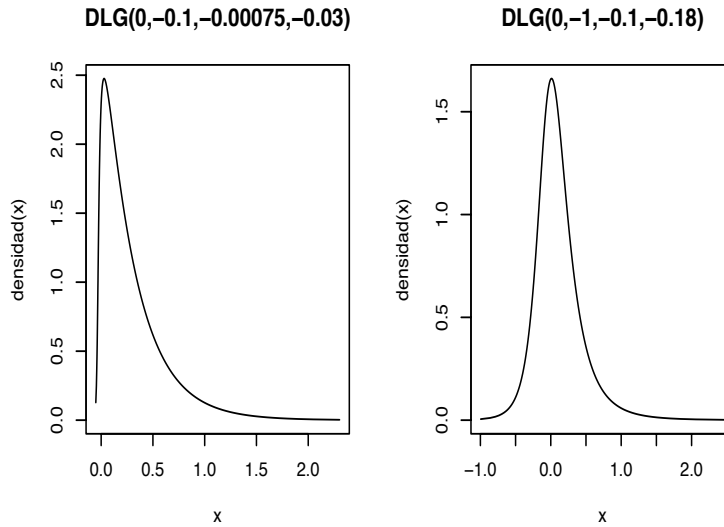


Figura 3.2: Distribuciones No simétricas muestreadas.

función de puntajes fue generada haciendo este par de parámetros iguales los resultados de estos casos difieren de los anteriores a medida que la asimetría es mayor.

Para el caso en el que se muestrea de la  $DLG(0, -0,1, -0,00075, -0,03)$ , densidad que resulta con un grado mayor de asimetría de las dos consideradas, los resultados se presentan en la Tabla 3.4. En esta tabla se puede observar que el mayor valor de eficacia obtenido se alcanza cuando  $\lambda_3 = 0,2$  y que difiere del valor de  $\lambda'_3$  dado a la distribución de donde se muestrea ( $\lambda'_3 = -0,00075$ ). Los valores para las eficacias de las pruebas consideradas disminuyen ostensiblemente cuando se muestrea de esta distribución. Cuando se compara la prueba propuesta con la prueba de Mood se observa que los valores de  $\lambda_3$  para los cuales  $V$  tiene mejor eficacia están entre  $-0,4$  y  $0,4$ . Cuando se compara con la prueba de Ansari-Bradley, la prueba propuesta tiene una mayor eficiencia

cuando  $\lambda_3$  toma valores entre  $-0,8$  y  $0,4$ , cabe notar que cuando  $\lambda_3$  toma valores entre  $-0,000363$  y  $0,3$ , aproximadamente, la prueba de Ansari-Bradley requiere más del doble de tamaño de muestra para obtener la misma potencia. En comparación con la prueba de Klotz, la prueba propuesta solo alcanza valores mayores de eficacia cuando  $\lambda_3$  toma valores de  $0,1349$  y  $0,2$  mostrando los buenos atributos que tiene esta prueba.

Muestreando de una $DLG(0,-0.1,-0.00075,-0.03)$								
Lamda 3	Int Phi^2	Eff(V)	Eff(M)	Eff(AB)	Eff(K)	ERA(V,M)	ERA(V,AB)	ERA(V,K)
0,4	8,435531	0,562363	0,501048	0,433883	0,663999	1,259721	1,679919	0,717296
0,3	3,903372	0,658969	0,501048	0,433883	0,663999	1,729699	2,306663	0,984905
<b>0,2</b>	<b>2,492683</b>	<b>0,673955</b>	<b>0,501048</b>	<b>0,433883</b>	<b>0,663999</b>	<b>1,809269</b>	<b>2,412775</b>	<b>1,030213</b>
<b>0,1349</b>	<b>2,010224</b>	<b>0,665820</b>	<b>0,501048</b>	<b>0,433883</b>	0,663999	<b>1,765856</b>	<b>2,354881</b>	1,005493
0,1	1,820019	0,658496	0,501048	0,433883	0,663999	1,727218	2,303354	0,983492
<b>-0,000363</b>	<b>1,428841</b>	<b>0,631581</b>	<b>0,501048</b>	<b>0,433883</b>	<b>0,663999</b>	<b>1,588912</b>	<b>2,118915</b>	<b>0,904740</b>
<b>-0,0802</b>	<b>1,219302</b>	<b>0,607611</b>	<b>0,501048</b>	<b>0,433883</b>	<b>0,663999</b>	<b>1,470591</b>	<b>1,961126</b>	<b>0,837367</b>
-0,1	1,176438	0,601601	0,501048	0,433883	0,663999	1,441646	1,922527	0,820886
-0,2	0,998852	0,571753	0,501048	0,433883	0,663999	1,302141	1,736488	0,741450
-0,3	0,867688	0,543612	0,501048	0,433883	0,663999	1,177118	1,569761	0,670261
-0,4	0,766920	0,517694	0,501048	0,433883	0,663999	1,067550	1,423645	0,607872
-0,5	0,687110	0,494086	0,501048	0,433883	0,663999	0,972404	1,296763	0,553695
-0,6	0,622352	0,472676	0,501048	0,433883	0,663999	0,889957	1,186814	0,506749
-0,7	0,568762	0,453275	0,501048	0,433883	0,663999	0,818398	1,091386	0,466003
-0,8	0,523683	0,435672	0,501048	0,433883	0,663999	0,756067	1,008263	0,430511
-0,9	0,485238	0,419662	0,501048	0,433883	0,663999	0,701520	0,935522	0,399452
-1,0	0,452065	0,405057	0,501048	0,433883	0,663999	0,653543	0,871541	0,372133
-2,0	0,268711	0,308372	0,501048	0,433883	0,663999	0,378783	0,505132	0,215682
-3,0	0,191304	0,256508	0,501048	0,433883	0,663999	0,262085	0,349506	0,149233
-10,0	0,063529	0,141260	0,501048	0,433883	0,663999	0,079484	0,105997	0,045259

Cada uno de los valores en la columna eficacia debe ser multiplicada por el factor (1)

Tabla 3.4: Eficacias y ERA muestreando de la  $DLG(0, -1, -0,1, -0,018)$ .

Los resultados cuando se muestrea de la  $DLG(0, -1, -0,1, -0,018)$  son presentados en la Tabla 3.5. Ya que los valores de  $\lambda_3$  y  $\lambda_4$  son muy próximos, los resultados muestreando de esta distribución resultan similares a los casos de simetría considerados anteriormente. El mayor valor de eficacia para la prueba propuesta se alcanza para el valor de  $\lambda_3 = -0,1$ . Comparando la prueba propuesta con la prueba de Mood, esta alcanza mejores resultados cuando  $\lambda_3$  toma valores entre  $-0,4$  y  $0,1$ , con respecto a la prueba de Ansari-Bradley los

mejores resultados se obtienen para valores de  $\lambda_3$  entre  $-0,8$  y  $0,2$  mientras que para Klotz entre  $-0,4$  y  $0,1$ .

Muestreando de una DLG(0,-1,-0.1,-0.18)								
Lamda 3	Int Phi^2	Eff(V)	Eff(M)	Eff(AB)	Eff(K)	ERA(V,M)	ERA(V,AB)	ERA(V,K)
0,4	8,435531	0,652005	0,981333	0,910126	0,980500	0,441437	0,513214	0,442187
0,3	3,903372	0,842711	0,981333	0,910126	0,980500	0,737437	0,857343	0,738691
0,2	2,492683	0,938386	0,981333	0,910126	0,980500	0,914387	1,063064	0,915941
<b>0,1349</b>	<b>2,010224</b>	<b>0,973735</b>	<b>0,981333</b>	<b>0,910126</b>	<b>0,980500</b>	<b>0,984576</b>	<b>1,144666</b>	<b>0,986249</b>
0,1	1,820019	0,986882	0,981333	0,910126	0,980500	1,011342	1,175784	1,013061
<b>-0,000363</b>	<b>1,428841</b>	<b>1,008857</b>	<b>0,981333</b>	<b>0,910126</b>	<b>0,980500</b>	<b>1,056881</b>	<b>1,228728</b>	<b>1,058677</b>
<b>-0,0802</b>	<b>1,219302</b>	<b>1,014595</b>	<b>0,981333</b>	<b>0,910126</b>	<b>0,980500</b>	<b>1,068938</b>	<b>1,242746</b>	<b>1,070755</b>
<b>-0,1</b>	<b>1,176438</b>	<b>1,014869</b>	<b>0,981333</b>	<b>0,910126</b>	<b>0,980500</b>	<b>1,069516</b>	<b>1,243418</b>	<b>1,071334</b>
-0,2	0,998852	1,011149	0,981333	0,910126	0,980500	1,061689	1,234318	1,063494
-0,3	0,867688	1,001328	0,981333	0,910126	0,980500	1,041166	1,210458	1,042936
-0,4	0,766920	0,987716	0,981333	0,910126	0,980500	1,013052	1,177773	1,014774
-0,5	0,687110	0,971804	0,981333	0,910126	0,980500	0,980674	1,140130	0,982341
-0,6	0,622352	0,954573	0,981333	0,910126	0,980500	0,946205	1,100057	0,947814
-0,7	0,568762	0,936677	0,981333	0,910126	0,980500	0,911060	1,059197	0,912609
-0,8	0,523683	0,918556	0,981333	0,910126	0,980500	0,876149	1,018610	0,877639
-0,9	0,485238	0,900504	0,981333	0,910126	0,980500	0,842050	0,978967	0,843482
-1,0	0,452065	0,882717	0,981333	0,910126	0,980500	0,809115	0,940676	0,810491
-2,0	0,268711	0,732726	0,981333	0,910126	0,980500	0,557507	0,648156	0,558454
-3,0	0,191304	0,630013	0,981333	0,910126	0,980500	0,412161	0,479177	0,412861
-10,0	0,063529	0,360678	0,981333	0,910126	0,980500	0,135085	0,157050	0,135315

Cada uno de los valores en la columna eficacia debe ser multiplicada por el factor (1 )

Tabla 3.5: Eficacias y ERA muestreando de la DLG(0, -0,1, -0,00075, -0,03).

# Capítulo 4

## Conclusiones y Recomendaciones.

Se obtuvo una familia de funciones generadoras de puntajes para el problema de escala dependiente de los parámetros de la densidad de la  $DLG(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  empleada para su construcción, restringiendo el espacio de variación de estos parámetros para garantizar que la función obtenida este bien definida y por motivos de delimitación del problema.

Para medir la calidad de la prueba propuesta  $V$  se recurrió a la comparación de esta con las pruebas de Mood, Ansari-Bradley y Klotz diseñadas para el mismo fin. Dicha comparación se realizó a través de la Eficiencia Relativa Asintótica ( $ERA$ ). Se obtuvo una expresión para la eficacia de la prueba como función de los parámetros de la  $DLG$ , que incluso aproximó muy bien las eficacias de las pruebas de Mood, Ansari-Bradley y Klotz al muestrear de poblaciones con diferentes distribuciones.

Las eficacias calculadas para la familia de pruebas propuestas y las  $ERAs$  de las mismas respecto a las pruebas con que se comparó, permiten confirmar el hecho de que, cuando coinciden los valores de los parámetros de la  $DLG$

que definen la prueba con los que aproximan la distribución de la población de donde se muestrea, se alcanzan los valores de eficacia más grandes y los valores de la *ERA* favorecen la prueba propuesta. Esto, junto con los resultados obtenidos a través de las eficacias permite verificar que las pruebas construidas, efectivamente son *PRLMP* para el caso de escala en dos muestras.

Para cada uno de los casos en donde se muestrea de distribuciones simétricas (normal, logística y doble exponencial), entorno al valor de  $\lambda_3$  que define la *PRLMP* se conforman regiones en donde las eficacias de la familia de pruebas propuestas resultan mayores a las eficacias de las pruebas con que se comparó, en estas regiones las ERAs resultaron valores mayores a uno.

Para las poblaciones muestreadas con distribuciones asimétricas (McWilliams (1990)), cuando el grado de asimetría aumentó las eficacias disminuyeron, no solo para la familia de pruebas propuestas, sino también para las pruebas con las que se comparó (Mood, Ansari-Bradley y Klotz). Esto parece indicar que como la familia de estadística de puntajes se construyó con base en distribuciones con densidades simétricas, al muestrear de poblaciones con distribuciones asimétricas el comportamiento de la estadística desmejora de acuerdo al grado de asimetría.

Para los casos de distribuciones muestreadas asimétricas (McWilliams (1990)), cuando los valores de  $\lambda_3$  y  $\lambda_4$  fueron próximos, la prueba con mayor eficacia coincidió con aquella generada con el valor de  $\lambda_3$  utilizado para generar la distribución muestreada. No ocurrió lo mismo cuando los valores de  $\lambda_3$  y  $\lambda_4$  fueron marcadamente diferentes la prueba que alcanzó la mayor eficacia no fue aquella generada con el valor de  $\lambda_3$  que fue utilizada para generar la distribución

muestreada.

Algunas recomendaciones que surgen con respecto al desarrollo de este trabajo y que podrían ser continuación del mismo son:

Se observó que al muestrear de las distribuciones simétricas en el siguiente orden: normal, logística y doble exponencial, los valores de las eficacias disminuyeron tanto para la familia de pruebas propuestas como para las pruebas con que se comparó. En este orden de distribuciones muestreadas el apuntamiento de las mismas aumenta pareciendo indicar que las eficacias disminuyen dependiendo del apuntamiento de las distribuciones muestreadas. Un trabajo a realizar es muestrear de diferentes distribuciones controlando sus distintos momentos de tal forma que se pueda concluir respecto al apuntamiento de la distribución muestreada.

Respecto al muestreo de poblaciones con distribuciones asimétricas, debido a que en el desarrollo del trabajo apenas se tomaron muestras de dos de estas distribuciones, un trabajo adicional que surge sería considerar el muestreo de muchas más de estas distribuciones guardando, por ejemplo, una relación de la forma  $\lambda_3 = k\lambda_4$  con  $k$  constante e indexar estas distribuciones muestreadas a partir de sus momentos de orden 3 y 4 y observar que cambios surge con las eficacias y las eficiencias.

Ya que en la construcción de la estadística para la prueba se consideró, en la función de puntajes, la utilización de distribuciones provenientes de la *DLG* simétricas, esto es, se hizo  $\lambda_3 = \lambda_4$ . Se podría construir la estadística para la prueba considerando una relación de tipo lineal entre los parámetros  $\lambda_3$  y  $\lambda_4$ , por ejemplo  $\lambda_3 = k\lambda_4$  con  $k$  constante, y analizar sus propiedades.

De manera más general se podría considerar los atributos de una prueba construida con base en una estadística, no teniendo en cuenta restricción sobre los parámetros de la *DLG* en la función de puntajes, salvo los que se deben tener presentes en la teoría para generar apropiadas distribuciones. De esta forma la estadística de puntajes estaría dada como función de  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ .

# Apéndice A

## Demostraciones de algunos teoremas.

**Demostración. (Teorema 2).** Bajo el modelo del problema de escala, ya que  $X_1, \dots, X_m$  proviene de la distribución  $F(x)$  y  $Y_1, \dots, Y_n$  de la distribución  $F_Y(x/\tau)$ , bajo  $H_0$ , la muestra combinada  $X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n$  proviene de  $F(x)$ , por tanto, si  $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_N)$  con  $N = m + n$  es su vector de rangos, éste se distribuye uniformemente en el conjunto  $\mathfrak{R}$ .

**Demostración. (Lema 4).** Para el valor esperado se tiene

$$E[a(R_i)] = \sum_{k=1}^N a(k)P[R_i = k] = \bar{a}$$

mientras que para la varianza

$$\begin{aligned} \text{Var}[a(R_i)] &= \sum_{k=1}^N (a(k) - E[a(R_i)])^2 P[R_i = k] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (a(k) - \bar{a})^2 \end{aligned}$$

para la covarianza, si  $i \neq j$ ,

$$\text{Cov}[a(R_i), a(R_j)] = \sum_{h \neq k}^N \sum_{k=1}^N \{a(h) - \bar{a}\} \{a(k) - \bar{a}\} P[R_i = h, R_j = k]$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{N(N-1)} \sum_{h \neq k}^N \sum_{k=1}^N \{a(h) - \bar{a}\} \{a(k) - \bar{a}\} \\
 &= \frac{1}{N(N-1)} \left\{ \left[ \sum_{k=1}^N (a(k) - \bar{a}) \right]^2 - \sum_{k=1}^N (a(k) - \bar{a})^2 \right\} \\
 &= \frac{-1}{N(N-1)} \sum_{k=1}^N (a(k) - \bar{a})^2,
 \end{aligned}$$

ya que  $\sum_{k=1}^N (a(k) - \bar{a}) = 0$ .

**Demostración. (Lema 5)** Con base en el Lema 4,

$$\begin{aligned}
 EV &= \sum_1^n E[a(R_i)] \\
 &= nE[a(R_i)] = n\bar{a}
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \text{Var}V &= \text{Var} \sum_1^n a(R_i) \\
 &= n\text{Var}[a(R_i)] + \frac{2n(n-1)}{2} \text{Cov}[a(R_i), a(R_j)] \\
 &= \frac{n}{N} \sum_{i=1}^N (a(i) - \bar{a})^2 - \frac{n(n-1)}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (a(i) - \bar{a})^2
 \end{aligned}$$

con lo que el teorema queda demostrado.

**Demostración. (Teorema 15)** Usando las condiciones de regularidad y el Teorema (25), se tiene, para  $\epsilon > 0$  y para  $n$  suficientemente grande,

$$\left| P_{\theta_n}(V_n \geq k_n) - 1 + \Phi\left(\frac{k_n - \mu_n(\theta)}{\sigma_n(\theta)}\right) \right| < \epsilon, \quad (\text{A.1})$$

para todo  $\theta$  en una vecindad de 0. Expandiendo  $\mu_n(\theta)$  en torno a cero se tiene

$$\mu_n(\theta) = \mu_n(0) + \theta \mu'_n(\theta^*)$$

donde  $0 < \theta^* < \theta$ . Por tanto el argumento de  $\Phi$  se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{k_n - \mu_n(\theta)}{\sigma_n(\theta)} &= \frac{k_n - \mu_n(0) - \theta \mu'_n(\theta^*)}{\sigma_n(\theta)} \\ &= \frac{k_n - \mu_n(0)}{\sigma_n(\theta)} - \frac{\theta \mu'_n(\theta^*)}{\sigma_n(\theta)}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Por la convergencia uniforme de la condición 2, para  $n$  suficientemente grande,  $\theta_n = \theta/n^{1/2}$  estará en la vecindad de 0 y podrá ser insertada en (A.2). Multiplicando y dividiendo el lado derecho de (A.2) por  $\sigma_n(0)$  y reemplazando  $\theta$  por  $\theta_n$  se tiene

$$\frac{k_n - \mu_n(0)}{\sigma_n(0)} \left( \frac{\sigma_n(0)}{\sigma_n(\theta_n)} \right) - \frac{\theta}{\sqrt{n}} \frac{\mu'_n(\theta^*)}{\sigma_n(0)} \left( \frac{\sigma_n(0)}{\sigma_n(\theta_n)} \right),$$

donde  $0 < \theta^* < \theta$ . Ahora se tiene por (1.9), que cuando  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{k_n - \mu_n(0)}{\sigma_n(0)} \left( \frac{\sigma_n(0)}{\sigma_n(\theta_n)} \right) \rightarrow \frac{k_n - \mu_n(0)}{\sigma_n(0)} \rightarrow Z_\alpha$$

y por la condición 4 de regularidad

$$\frac{\theta}{\sqrt{n}} \frac{\mu'_n(\theta^*)}{\sigma_n(0)} \left( \frac{\sigma_n(0)}{\sigma_n(\theta_n)} \right) \rightarrow \theta \frac{\mu'_n(\theta^*)}{\sqrt{n} \sigma_n(0)} \rightarrow \theta c.$$

Por tanto (1.8) se sigue reemplazando  $\theta$  por  $\theta_n$  en (A.1).

**Demostración. (Teorema 17)** Ya que  $x = F^{-1}(y)$ , se tiene que  $y = F(x)$ .

Derivando respecto a  $x$ , encontramos

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

o

$$f(x) = \frac{dy}{d(F^{-1}(y))} = \frac{1}{\frac{d(F^{-1}(y))}{dy}}. \quad (\text{A.3})$$

Como se conoce la forma de  $F^{-1}(y)$  por (1) se encuentra directamente que

$$\frac{d(F^{-1}(y))}{dy} = \frac{d}{dy} \left( \lambda_1 + \frac{y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_4}}{\lambda_2} \right) = \frac{\lambda_3 y^{\lambda_3-1} + \lambda_4 (1-y)^{\lambda_4-1}}{\lambda_2}, \quad (\text{A.4})$$

y así, reemplazando la parte derecha de (A.4) en (A.3) se obtiene,

$$f(x) = \frac{\lambda_2}{\lambda_3 y^{\lambda_3-1} + \lambda_4 (1-y)^{\lambda_4-1}}.$$

# Apéndice B

## Algunas definiciones y teoremas.

**Definición 23** (*Densidades Absolutamente Continuas.*) Una densidad  $f(x)$  se dice que es absolutamente continua sobre un número finito de intervalos, si para todo  $C > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta = \delta(C, \varepsilon)$  tal que para cada conjunto finito de intervalos disjuntos  $(a_k, b_k)$  la relación

$$\sum_{k=1}^n |b_k - a_k| < \delta \text{ y } -C < a_k, b_k < C$$

implica

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

**Teorema 24**  $F(x)$  es absolutamente continua sobre intervalos finitos si y solo si existe una función  $F'(x)$  integrable sobre intervalos finitos y tal que

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx, \quad -\infty < a < b < \infty. \quad (\text{B.1})$$

Adicionalmente se sabe que  $F'(x)$  representa la derivada de  $F(x)$  casi en toda partes. Sin embargo, lo contrario no siempre es cierto, es decir, la existencia de la derivada no necesariamente implica (B.1), a no ser de que  $F(x)$  sea absolutamente continua.

**Teorema 25 (Berry-Esseen.)** Suponga  $X_1, \dots, X_n$  son i.i.d. con  $EX_i = \mu$ ,  $VarX_i = \sigma^2$ ,  $0 < \sigma^2 < \infty$  y  $E|X_i - \mu|^3 = \rho^3$ ,  $0 < \rho^3 < \infty$ . Entonces para todo  $n$

$$\left| P\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \leq t\right) - \Phi(t) \right| \leq \frac{c\rho^3}{\sqrt{n}\sigma^3}$$

donde  $c$  es una constante numérica independiente de  $n$ .

**Teorema 26** Suponga que la función  $h(x, \theta)$  es absolutamente continua como función de  $\theta \in \Omega$ , un intervalo abierto. Suponga que  $(\partial/\partial\theta)h(x, \theta)$  existe y es acotada por  $q(x)$  para todo  $\theta \in \Omega$ . Suponga  $\int(\partial/\partial\theta)h(x, \theta)dx$  y  $\int q(x)dx$  existen. Entonces  $(\partial/\partial\theta) \int h(x, \theta)dx = \int(\partial/\partial\theta)h(x, \theta)dx$ . En estadística la versión de este teorema supone que  $E(\partial/\partial\theta)h(x, \theta)$  y que  $Eq(x)$  ambos existen. Entonces

$$\frac{d}{d\theta} Eh(X, \theta) = E \frac{\partial}{\partial\theta} h(X, \theta)$$

se puede deducir de este teorema.

# Bibliografía

- Aranda, M. and Corzo, J. (2002). Aproximación de la potencia asintótica de la prueba del rango signado de wilcoxon. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, XXVI(101):555–563.
- Burden, R. L. and Faires, J. D. (1985). *Análisis Numérico*. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Capon, J. (1961). Asymptotic efficiency of certain locally most powerful rank test. *Annals Mathematical Statistics*, 38(32):88–100.
- Dalgaard, P. (2002). *Introductory Statistics with R*. Springer.
- Gibbons, J. D. and Chakraborti, S. (1992). *Nonparametric Statistical Inference*. Marcel Dekker, Inc, third edition.
- Hettmansperger, T. (1984). *Statistical Inference Based on Ranks*. Jhon Wiley & Sons.
- Hájek, J., Sidák, Z., and Sen, P. K. (1999). *Theory of Rank Test*. Academic Press, second edition.

- Hoeffding, W. (1951). Optimum nonparametric test. In *Proceedings of the second Berkeley Symposium*, pages 83–92.
- Karian, Z. A. and Dudewicz, E. J. (2000). *Fitting Statistical Distributions: The generalized Lambda Distribution and Generalized Bootstrap methods*. Chapman & Hall/CRC.
- Klotz, J. (1962). Nonparametric test for scale. *Annals Mathematical Statistics*, (33):498–512.
- Lehmann, E. L. (1998). *Nonparametrics Statistical Methods Based on Ranks*. Prentice Hall, Inc.
- Maritz, J. S. (1995). *Distribution-free Statistical Methods*. Chapman & Hall, second edition.
- Mathews, J. H. and Fink, K. D. (2000). *Métodos Numericos con MATLAB*. Prentice Hall.
- McWilliams, T. (1990). A distribution-free test for symmetry based on a runs statistic. *Journal of the American Statistical Association*, 85(412):1130–1133.
- Mood, Graybill, and Boes (1984). *Introduction to the Theory of Statistics*. McGraw-Hill, third edition.
- R Development Core Team (2006). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0.

Ramberg, J., Tadikamalla, P., Dudewicz, E., and Mykytka, E. (1979). A probability distribution and its uses in fitting data. *Technometrics*, 21(412):201–214.

Randles, R. H. and Wolfe, D. A. (1979). *Introduction to The Theory of Nonparametric Statistics*. John Wiley & Sons.

Ross, S. (2002). *A First Course in Probability*. Prentice Hall, Inc.

Sprent, P. and Smeeton, N. C. (2001). *Applied Nonparametric Statistical Methods*. Chapman & Hall/CRC.