ANÁLISIS DE LAS SOLUCIONES DE UN PROBLEMA DE NEUMANN ASOCIADO A UNA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN NO LOCAL CON TÉRMINO DE ABSORCIÓN

Claudia Patricia Mora Salinas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
Mayo de 2010

ANÁLISIS DE LAS SOLUCIONES DE UN PROBLEMA DE NEUMANN ASOCIADO A UNA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN NO LOCAL CON TÉRMINO DE ABSORCIÓN

Claudia Patricia Mora Salinas

Trabajo de tesis para optar al título de
Magister en Matemáticas

Director
Mauricio Bogoya López
Doctor en Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
Mayo de 2010

Índice general

Introducción

A menudo nos encontramos con fenómenos que involucran varias magnitudes que cambian con el tiempo, por tanto sus modelos incluyen varias variables dependientes del tiempo. Las ecuaciones diferenciales parciales que modelan el comportamiento de estos tipos de fenómenos poseen propiedades de linealidad o no linealidad dependiendo del proceso, ver [2].

Del estudio de estas ecuaciones, nos interesa saber si el problema está bien planteado es decir:
1. La ecuación tiene solución
2. Si la solución es única
3. Dependencia continua de la solución con respecto al valor inicial

El propósito de este trabajo será en una primera parte describir un espacio X_{t_0} y un operador T que garanticen la existencia, unicidad de la solución y la dependencia continua de esta con respecto a la condición inicial.

Luego de garantizar la existencia y unicidad de las soluciones nos enfocaremos en el analisis de un fenómeno conocido en la literatura inglesa como quenching, que se produce cuando existe un tiempo finito $T > 0$ tal que

$$\lim_{t \to T^-} \min u(x,t) = 0$$

Este fenómeno fue estudiado inicialmente por H. Kawarada en 1975 quien consi deró un problema parabolico unidimensional y determinó una longitud crítica en donde existe quenching. De la misma manera autores como Levine, Boni, Kouakou, Nabongo y otros han realizado aportes a esta teoría estudiando problemas lineales, semilineales, problemas parabólicos y con condiciones de frontera. Smith y Rammaha obtuvieron resultados para problemas hiperbólicos en varias dimensiones, ver [8]. Por su parte Theodore k Boni, Thibaut K. Kouakou en 2008 se enfocaron en ecuaciones semilineales de calor con potencial y condiciones de frontera Neumann, muestra que bajo ciertos supuestos la solución de la ecuación se apaga en tiempo finito, ver [12].

Del estudio de este fenómeno que se han planteado preguntas como

1. ¿Cuándo ocurre quenching?
2. ¿Ocurre quenching en un solo punto x_0?
3. ¿Cuál es la naturaleza del conjunto de quenching?
4. ¿Puede ocurrir quenching en tiempo finito?
5. ¿Qué ocurre después de quenching?

Nosotros nos limitaremos a resolver la primera de estas preguntas.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1.1. Antecedentes

Ecuaciones de la forma

$$u_t\,(x,t) = J * u - u\,(x,t) \tag{1.1}$$

han sido estudiadas por diversos autores [6, 9] como modelos de procesos de difusión, en dónde J es una función definida en $\mathbb{R}^N$ y de valor real, no negativa, suave, radialmente simétrica, estrictamente decreciente con $\int_{\mathbb{R}^N} J\,(x)\,dx$ =1, y de soporte compacto en la bola unitaria.

Este tipo de ecuaciones están relacionadas con la ecuación de difusión del calor $u_t = \triangle u$, ya que comparten características como el principio del máximo y si J es de soporte compacto, entonces satisface la propiedad de velocidad de propagación infinita, es decir si el dato inicial $u(x,0)$ >0 para $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, entonces $u(x,t)$ >0, para $(x,t) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times (0,\infty)$, [3].

Más adelante Rossi, Elgueta y Cortazar [5] estudian un modelo simple de difusión no local, no lineal en dónde la difusión en un punto depende de la densidad, como ocurre en la ecuación de medios porosos. En este caso $J\left(\frac{x-y}{u(y,t)}\right)\frac{1}{u(y,t)}$ representa la distribución de probabilidad de que un individuo pase del lugar y al lugar x cuando $u(y,t) > 0$ y 0 en otro caso. Además la razón con la cual los individuos llegan a la posición x desde cualquier lugar es $\int_{\mathbb{R}} J\left(\frac{y-x}{u(y,t)}\right)dy$ y $-u(x,t) = -\int_{\mathbb{R}} J\left(\frac{y-x}{u(x,t)}\right)dy$ la razón con la cual se van de la posición x a cualquier sitio. Esta consideración en ausencia de fuentes externas nos lleva al hecho de que la solución de la ecuación $u_t(x,t) = \int_{\mathbb{R}} J\left(\frac{x-y}{u(y,t)}\right) dy - u(x,t)$ es la densidad $u(x,t)$.

Este modelo comparte algunas propiedades con la ecuación de medios porosos, entre ellas está la propiedad de propagación finita de la velocidad, es decir si el dato inicial es de soporte compacto, entonces la solución a cualquier tiempo es de soporte compacto.

Luego Bogoya, Ferreira y Rossi en [4] estudian el problema de Neumann asociado a (1.1), el cual es

$$u_t(x,t) = \int_{-L}^{L} J\left(\frac{x-y}{u(y,t)}\right) dy - J\left(\frac{x-y}{u(x,t)}\right) dy \tag{1.2}$$

en $[-L,L] \times [0,\infty)$ con dato inicial $u(x,0) = u_0(x)$. En este modelo se asume que ningún individuo puede salir o entrar del dominio $[-L,L]$. Como el flujo de individuos que entran o salen al dominio es nulo, se tienen entonces las condiciones de frontera de Neumann. Ellos demuestran existencia, unicidad de las soluciones y que las soluciones tienden al valor medio del dato inicial cuando $t \to \infty$.

Bogoya en [5] realiza el estudio de este tipo de ecuaciones para el caso euclidiano N-dimensional con $N \geq 1$ y con condiciones de frontera Neumann, Dirichlet. En este analiza existencia, unicidad y un principio de comparación para las soluciones en estos problemas, dentro de los cuales se encuentra

$$u_t(x,t) = \int_{\Omega} \left(J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(y,t)}\right) u^{1-N\alpha}(y,t) - J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(x,t)}\right) u^{1-N\alpha}(x,t) \right) dy, \tag{1.3}$$

en $\Omega \times [0,\infty)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ acotado y suave, una condición inicial no negativa $u(x,0) = u_0(x) \in L^1(\Omega)$ y $0 < \alpha \leq \frac{1}{N}$. En este modelo se asume que los individuos no pueden saltar del interior al exterior de Ω y viceversa, el flujo de individuos a través de la frontera es nulo, esto se conoce como condición de frontera Neumann.

1.2. Problema

Como consecuencia de lo establecido anteriormente nuestro interés es el estudio del problema de Neumann con término de absorción, el cual es

$$u_t(x,t) = \int_{\Omega} J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(y,t)}\right) u^{1-N\alpha}(y,t) dy - \int_{\Omega} J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(x,t)}\right) u^{1-N\alpha}(x,t) dy - f(u(x,t)) \tag{1.4}$$

en $\Omega \times [0, \infty)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y una condición inicial no negativa $u(x, 0) = u_0(x) \in L^1(\Omega)$. Asumimos a $u(x, t)$ como la densidad en el punto x en el tiempo t y J con las características ya mencionadas, $J : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función no negativa, suave, radialmente simétrica y estrictamente decreciente con $\int_{\mathbb{R}^N} J(x)\ dx = 1$, $N \geq 1$. Describimos además un término de absorción representado por una función f no negativa, creciente y Lipschitz.

Nos proponemos analizar la existencia y unicidad de las soluciones del problema (1.4) y el análisis del fenómeno de quenching de las soluciones para algunas funciones f específicas.

1.3. Conceptos generales

Para el desarrollo del trabajo necesitaremos algunos conceptos propios del análisis funcional y teoría de la medida que a continuación se mencionamos. Ver [7], [11], [1]

Espacio normado

Sea E un espacio vectorial sobre K. Una norma en E es una función real $\|.\| : E \to R$ definida sobre E, que satisface las siguientes condiciones, cualesquiera que sean x, $y \in E$ y el escalar $\alpha \in K$:

N1) $\|x\| \geq 0$, y, $\|x\| = 0$ si y solamente si $x = 0$.

N2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdad triangular).

Un espacio vectorial normado (o, simplemente, un espacio normado) es una pareja $(E, \|.\|)$, en donde E es un espacio vectorial sobre K y $\|.\|$ es una norma en E.

Sucesión de Cauchy

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio normado. Decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy si dado $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que para toda n, $m \geq N$ se tiene que

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

Espacio de Banach

Sea E un espacio vectorial normado, decimos que E es un espacio de Banach si y solo si toda sucesión de Cauchy converge en E.

Función Lipschitz

Sea f una función definida en un espacio métrico E, se dice que f es Lipschitz si

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y), \tag{1.5}$$

en donde k es llamada constante de Lipschitz.

Contracción Sea $f : E \to E$ con E espacio métrico. Se dice que f es contracción si

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y), \tag{1.6}$$

con $0 < k < 1$

Teorema del punto fijo de Banach

Sea E un espacio métrico completo, $f : E \to E$ un operador. Si f es una contracción, entonces existe un único punto $u \in E$ tal que $f(u) = u$.

Teorema del cambio de variable

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y $g{:}\Omega \to \mathbb{R}^N$ una función inyectiva continuamente diferenciable, tal que $detg'(x) \neq 0$ para todo $x \in \Omega$. Si $f{:}g(\Omega) \to \mathbb{R}$ es una función integrable, entonces

$$\int_{g(\Omega)} f = \int_{\Omega} (f \circ g)|detg'|.$$

Teorema de la convergencia monótona generalizado)

Sea (f_k) una sucesión monótona (creciente o decreciente) de funciones medibles. Si alguna de las funciones de estas sucesiones es integrable, entonces las dos expresiones, $lim \int f_k$ y $\int lim f_k$, existen y

$$lim \int f_k = \int lim f_k$$

CAPÍTULO 2

ANÁLISIS DEL PROBLEMA

2.1. Existencia y unicidad de la soluciones

La existencia y unicidad de la solución del problema (1.4) esta garantizada por el teorema del punto fijo de Banach, para esto definiremos un espacio y un operador adecuados.

Sean t_0 positivo y pequeño, $X = C\left([0,t_0]\,;L^1\left(\Omega\right)\right)$ demostraremos que X, es un espacio de Banach con la norma $|||w||| = \max\limits_{0\leq t\leq t_0} \|w(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)}$

Veamos que $|||w||| = \max\limits_{0\leq t\leq t_0} \|w(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)}$ es norma.

1.$|||w||| \geq 0$ y $|||w||| = 0$ si y solamente si $w = 0$.

Ya que $||w(\cdot,t)||_{L^1(\Omega)} \geq 0$ para cada $0 < t < t_0$ tenemos asegurada la no negatividad de $|||w(\cdot,t)|||$.
Además, si $\max\limits_{0\leq t\leq t_0} \|w(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} = 0$ implica que $||w(\cdot,t)||_{L^1(\Omega)} = 0$, por lo tanto $w(\cdot,t) = 0$.
De la misma manera, si $w(\cdot,t) = 0$ entonces $\max\limits_{0\leq t\leq t_0} \|w(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} = 0$.

2. $|||\lambda w||| = |\lambda|\, |||w|||$.

$$
\begin{aligned}
|||\lambda w||| &= \max_{0\leq t\leq t_0} \|\lambda w(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} \\
&= \max_{0\leq t\leq t_0} |\lambda| \, \|w(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} \\
&= |\lambda| \max_{0\leq t\leq t_0} \|w(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} = |\lambda|\, |||w|||
\end{aligned}
$$

3. Usando la desigualdad triangular de la norma en $L^1\left(\Omega\right)$ y propiedades del máximo

obtenemos la desigualdad triangular para $|||w|||$, en efecto

$$\begin{aligned} |||w_1 + w_2||| &= \max_{0\leq t\leq t_0} \|w_1(\cdot,t) + w_2(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq \max_{0\leq t\leq t_0} \Big(\|w_1(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} + \|w_2(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} \Big) \end{aligned}$$

luego

$$|||w_1 + w_2||| \leq |||w_1||| + |||w_2||| \,.$$

Veamos ahora la completez de nuestro espacio $X = C([0,t_0]; L^1(\Omega))$, con t_0 pequeño y positivo.

Sea $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X, donde

$$\begin{aligned} w_n &: [0,t_0] \to L^1(\Omega) \\ t &\to w(\cdot,t) \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todos los $m, n \geq N$

$$|||w_n(x,t) - w_m(x,t)||| < \varepsilon$$

$$||w_n(x,t_i) - w_m(x,t_i)|| \leq \max_{0\leq t\leq t_0} \|w_n(x,t) - w_m(x,t)\| = |||w_n(x,t) - w_m(x,t)||| < \varepsilon$$

Para t_i fijo entre 0 y t_0 $(w_n(t_i))_{n\in\mathbb{N}}$ en $L^1(\Omega)$ converge, ya que $L^1(\Omega)$ es completo, entonces

$$w_n(x,t_i) \to w(x,t_i)$$

Variando t tenemos que

$$|||w_n - w||| = \max_{0\leq t\leq t_0} \|w_n(\cdot,t) - w(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} \to 0,\ n \to \infty.$$

Además como $|||\cdot|||$ es la norma uniforme, entonces w es continua.

Por lo tanto, w_n converge a w en X.

Sea $X_{t_0} = \{w \in C([0,t_0]; L^1(\Omega))/0 \leq w \leq k\ ctp,\ k \geq 2||w_0||\}$, un subconjunto de X, veamos que X_{t_0} es cerrado.

Sea $(w_n)_n$ una sucesión de X_{t_0} convergente a w. Por definición de convergencia de sucesiones, dado un $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \geq \mathbb{N}$ se tiene $|||w_n - w||| = \max_{0\leq t\leq t_0} \|w(\cdot,t) - w(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} < \varepsilon$ como la convergencia es uniforme, entonces el límite de la sucesión es también una función continua, positiva y acotada, por lo tanto X_{t_0} es cerrado.

2.2. Operador

A continuación obtendremos nuestro operador, para tal fin integramos la ecuación (1.4) en $[0,t]$

$$\int_0^t u_s(x,s)ds = \int_0^t \int_\Omega \left(J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(y,s)}\right) u^{1-N\alpha}(y,s) - J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(x,s)}\right) u^{1-N\alpha}(x,s)\right) dyds$$
$$- \int_0^t f(u(x,s))\, ds$$

$$u(x,t)-u(x,0) = \int_0^t \int_\Omega \left(J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(y,s)}\right) u^{1-N\alpha}(y,s) - J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(x,s)}\right) u^{1-N\alpha}(x,s)\right) dyds$$
$$- \int_0^t f(u(x,s))\, ds$$

de donde obtenemos el operador $T_{w_0} : X_{t_0} \to X_{t_0}$ definido por

$$T_{w_o}w(x,t) = \int_0^t \int_\Omega \left(J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(y,t)}\right) w^{1-N\alpha}(y,t) - J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(x,t)}\right) w^{1-N\alpha}(x,t)\right) dyds$$
$$- \int_0^t f(w(x,t))\, ds + w_0(x) \tag{2.1}$$

T está bien definido

Mostraremos que $T_{w_o}w(x,t) \in X_{t_0}$, para esto veremos primero que $T_{w_o}w(x,t) < k$.

Dadas las características de no negatividad f y J, podemos afirmar que

$$T_{w_o}w(x,t) \leq \int_0^t \int_\Omega \left(J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(y,t)}\right) w^{1-N\alpha}(y,t)\right) dyds + w_0(x)$$

Como $w \in X_{t_0}$, entonces

$$J\left(\tfrac{x-y}{w^\alpha(y,t)}\right) < J\left(\tfrac{x-y}{k^\alpha}\right)$$

Luego

$$T_{w_o}w(x,t) \leq \int_0^t \int_\Omega J\left(\frac{x-y}{k^\alpha}\right) k^{1-N\alpha} dyds + w_0(x)$$

Para la expresión $\displaystyle\int_\Omega J\left(\frac{x-y}{k^\alpha}\right) k^{1-N\alpha} dy$ consideremos el cambio de variable $\xi = \frac{x-y}{k^\alpha}$ entonces

$$\int_\Omega J\left(\frac{x-y}{k^\alpha}\right) k^{1-N\alpha} dy = \int_{\Omega *} J(\xi) k^{1-N\alpha} k^{N\alpha} d\xi$$

en donde $\Omega*$ es la imagen de Ω bajo el cambio de variable, entonces

$$T_{w_o}w(x,t) \le kt_0 + w_0(x) \le k/2 + k/2 = k.$$

Veamos ahora que $T_{w_o}w(x,t) \ge 0$

$$T_{w_o}w(x,t) \ge \int_0^t \int_\Omega J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(y,t)}\right) w^{1-N\alpha}(y,t)\,dyds - kt_0 - \int_0^t f(k)ds + w_0(x)$$

$$T_{w_o}w(x,t) \ge \int_0^t \int_\Omega J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(y,t)}\right) w^{1-N\alpha}(y,t)\,dyds - kt_0 - f(k)t + w_0(x)$$

dado que $-t \ge -t_0$ obtenemos

$$T_{w_o}w(x,t) \ge \int_0^t \int_\Omega J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(y,t)}\right) w^{1-N\alpha}(y,t)\,dyds - t_0(k+f(k)) + w_0(x)$$

Dado que t_0 es muy pequeño, la expresión del lado derecho de la desigualdad anterior es no negativa, luego $T_{w_o}w(x,t) \ge 0$.
Por lo tanto $0 \le T_{w_0}w(x,t) \le k$

2.3. Lema

Sean w_0, z_0 funciones no negativas tales que $w_0, z_0 \in L^1(\Omega)$, f Lipschitz y $w, z \in X_{t_0}$, entonces existe una constante $C = C(t_0) > 0$ tal que

$$|||T_{w_0} - T_{z_0}||| \le C\,|||w-z||| + \|w_0 - z_0\|_{L^1(\Omega)} \tag{2.2}$$

Demostración

Sean $w, z \in X_{t_0}$

$$||T_{w_0}(w)(x,t) - T_{z_0}(z)(x,t)||_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |T_{w_0}(w)(x,t) - T_{z_0}(z)(x,t)|\,dx$$

$$\begin{aligned}
\le \; & \int_0^t \int_\Omega \left| \int_\Omega \left[J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(y,s)}\right) w^{1-N\alpha}(y,s) - J\left(\frac{x-y}{z^\alpha(y,s)}\right) z^{1-N\alpha}(y,s) \right] dy \right| dxds + \\
& \int_0^t \int_\Omega \left| \int_\Omega \left[J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(x,s)}\right) w^{1-N\alpha}(x,s) - J\left(\frac{x-y}{z^\alpha(x,s)}\right) z^{1-N\alpha}(x,s) \right] dy \right| dxds + \\
& \int_0^t \int_\Omega |f(w(s,x)) - f(z(s,x))|\,dxds + \int_\Omega |w_0(x) - z_0(x)|\,dx
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que f Lipschitz tenemos

$$|f(w(s,x)) - f(z(s,x))| \le k\,|w(s,x) - z(s,x)|\,.$$

Reemplazando en la ecuación anterior

$$\begin{aligned}
\leq & \int_0^t \int_\Omega \int_\Omega \left| \left[J\left(\frac{x-y}{w^\alpha (y,s)} \right) w^{1-N\alpha}(y,s) - J\left(\frac{x-y}{z^\alpha (y,s)} \right) z^{1-N\alpha}(y,s) \right] \right| dydxds \\
& + \int_0^t \int_\Omega \int_\Omega \left| J\left(\frac{x-y}{w^\alpha (x,s)} \right) w^{1-N\alpha}(x,s) - J\left(\frac{x-y}{z^\alpha (x,s)} \right) z^{1-N\alpha}(x,s) \right| dydxds \\
& + \int_0^t \int_\Omega k \left| w(s,x) - z(s,x) \right| dxds + \int_\Omega \left| w_0(x) - z_0(x) \right| dx
\end{aligned}$$

Sean

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_\Omega \int_\Omega \left| J\left(\frac{x-y}{w^\alpha (y,s)} \right) w^{1-N\alpha}(y,s) - J\left(\frac{x-y}{z^\alpha (y,s)} \right) z^{1-N\alpha}(y,s) \right| dydx \\
I_2 &= \int_\Omega \int_\Omega \left| J\left(\frac{x-y}{w^\alpha (x,s)} \right) w^{1-N\alpha}(x,s) - J\left(\frac{x-y}{z^\alpha (x,s)} \right) z^{1-N\alpha}(x,s) \right| dydx \\
I_3 &= \int_0^t \int_\Omega k \left| w(s,x) - z(s,x) \right| dxds \\
I_4 &= \int_\Omega \left| w_0(x) - z_0(x) \right| dx
\end{aligned}$$

Para las integrales I_1, I_2, tomemos los conjuntos $A^+(s) = \{ y \in \Omega / w(y,s) \geq z(y,s) \}$ $A^-(s) = \{ y \in \Omega / w(y,s) < z(y,s) \}$ entonces para

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_\Omega \int_{A^+(s)} \left[J\left(\frac{x-y}{w^\alpha (y,s)} \right) w^{1-N\alpha}(y,s) - J\left(\frac{x-y}{z^\alpha (y,s)} \right) z^{1-N\alpha}(y,s) \right] dydx \\
& + \int_\Omega \int_{A^-(s)} \left[J\left(\frac{x-y}{z^\alpha (y,s)} \right) z^{1-N\alpha}(y,s) - J\left(\frac{x-y}{w^\alpha (y,s)} \right) w^{1-N\alpha}(y,s) \right] dydx
\end{aligned}$$

Tomemos los cambios de variables $\tau = \frac{x-y}{w^\alpha(y,s)}$, y $\xi = \frac{x-y}{z^\alpha(y,s)}$, entonces

$$I_1 = \int_{A^+(s)} \left(\int_{\Omega^*} J(\tau) \left| \frac{\partial (x)}{\partial (\tau)} \right| + \int_{\Omega^{**}} J(\xi) \left| \frac{\partial (x)}{\partial (\xi)} \right| \right) dy$$

en donde Ω^* y Ω^{**} son las imagenes de Ω bajo los cambios de variable.

$$I_1 = \int_{A^+(s)} \left[\int_{\Omega^*} J(\tau) w^{\alpha N}(y,s) w^{1-N\alpha}(y,s) d\tau - \int_{\Omega^{**}} J(\xi) z^{\alpha N} z^{1-\alpha N}(y,s) d\xi \right] dy +$$

$$\int_{A^-(s)} \left[\int_{\Omega^{**}} J(\xi) z^{\alpha N} z^{1-\alpha N}(y,s) d\xi - \int_{\Omega^*} J(\tau) w^{\alpha N}(y,s) w^{1-N\alpha}(y,s) d\tau \right] dy$$

$$= \int_{A^+(s)} \left[\int_{\Omega^*} J(\tau) w(y,s) d\tau - \int_{\Omega^{**}} J(\xi) z(y,s) d\xi \right] dy +$$

$$\begin{aligned}
&\int_{A^-(s)}\left[\int_{\Omega^{**}} J(\xi)\, z(y,s)\, d\xi - \int_{\Omega^*} J(\tau)\, w(y,s)\, d\tau\right] dy \\
&= \int_{A^+(s)}\left[w(y,s)\int_{\Omega^*} J(\tau)\, d\tau - z(y,s)\int_{\Omega^{**}} J(\xi)\, d\xi\right] dy + \\
&\int_{A^-(s)}\left[z(y,s)\int_{\Omega^{**}} J(\xi)\, d\xi - w(y,s)\int_{\Omega^*} J(\tau)\, d\tau\right] dy \\
&\leq \int_{A^+(s)} \left[w(y,s) - z(y,s)\right] dy + \int_{A^-(s)} \left[z(y,s) - w(y,s)\right] dy \\
&= \int_{\Omega} \left|w(y,s) - z(y,s)\right| dy
\end{aligned}$$

De la misma manera

$$I_2 \leq \int_{\Omega} \left|w(x,s) - z(x,s)\right| dx$$

Ahora para I_3

$$\int_0^t \int_{\Omega} k\left|z(x,s) - w(x,s)\right| dxds = k\int_0^t \int_{\Omega} |w(x,s) - z(x,s)| dxds$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \left|T_{w_0}(w)(x,t) - T_{z_0}(z)(x,t)\right| dx \\
&\leq 2\int_0^t \int_{\Omega} \left|w(y,s) - z(y,s)\right| dyds + k\int_0^t \int_{\Omega} \left|w(x,s) - z(x,s)\right| dxds \\
&+ \int_{\Omega} \left|w_0(x) - z_0(x)\right| dx
\end{aligned}$$

Tomando el máximo en $0 < t \leq t_0$ se tiene

$$|||T_{w_0} - T_{z_0}||| \leq C\, |||w - z||| + \left\|w_0 - z_0\right\|_{L^1(\Omega)}, \text{ con } C = (2+k)t_0$$

2.4. Teorema (Existencia y Unicidad)

Teorema. Para cada $u_0 \in L^1(\Omega)$ y f Lipschitz no negativa existe una única solución u de (1.4), tal que $u \in C([0,t_0]; L^1(\Omega))$

Demostración Anteriormente se verificó que efectivamente $T_{w_0} : X_{t_0} \to X_{t_0}$. Ahora tomando $z_0 = w_0$ en la desigualdad del Lema 2.3, y para t_0 suficientemente pequeño tal que $c < 1$, se tiene que T es contracción, luego por teorema del punto fijo de Banach, existe un único punto fijo u de T_{u_0} el cual es la solución de la ecuación (1.4), donde $u \in C([0,t_0]; L^1(\Omega))$.

2.5. Observación

u es solución de (1.4) si y solamente si

$$u(x,t) = \int_0^t \int_\Omega \left(J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(y,t)}\right) u^{1-N\alpha}(y,t) - J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(x,t)}\right) u^{1-N\alpha}(x,t) \right) dyds - \int_0^t f(u(x,t))\, ds + u_0(x)$$

2.6. Observación

Las soluciones de la ecuación (1.4) dependen continuamente de la condición inicial, en el sentido que si u y v son soluciones de la ecuación, entonces existe una constante $C^* = C^*(t_0)$, tal que

$$\max_{0\le t\le t_0} \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} \le C^* \|u(\cdot,0) - v(\cdot,0)\|_{L^1(\Omega)} \tag{2.3}$$

Demostración En efecto si u y v son soluciones, entonces son puntos fijos del operador T_{u_0} y T_{v_0}. Así reemplanzando en la desigualdad (2.2) del lema 2.3 se tiene que

$$|\|u-v\|| \le C\,|\|u-v\|| + ||u_0 - v_0||_{L^1(\Omega)}$$

$$|\|u-v\|| - C\,|\|u-v\|| \le ||u_0 - v_0||_{L^1(\Omega)}$$

$$(1-C)\,|\|u-v\|| \le ||u_0 - v_0||_{L^1(\Omega)}$$

$$|\|u-v\|| \le \tfrac{1}{(1-C)} ||u_0 - v_0||_{L^1(\Omega)}$$

con $C* = \frac{1}{(1-C)}$.

2.7. Principio de comparación

Sean u y v soluciones continuas de la ecuación (1.4). Si $u(x,0) \le v(x,0)$, para todo $x \in \Omega$, entonces $u(x,t) \le v(x,t)$, para todo $(x,t) \in \Omega \times [0,t_0]$.

Demostración Sean $u(x,0) < v(x,0)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $u(x,0)+\delta < v(x,0)$, supongamos que $u(x,0), v(x,0) \in C^1$. Si la conclusión no se tiene, existe $t_0 > 0$ y $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0,t_0) = v(x_0,t_0)$ y $u(x,t) \leq v(x,t)$ para todo $(x,t) \in \Omega \times [0,t_0]$

Sea $G = \{x \in \Omega / u(x,t_0) = v(x,t_0)\}$, el cual es no vacio ya que $x_0 \in G$, además es cerrado. Sea $x_1 \in G$, entonces

$$
\begin{aligned}
0 &\leq (u-v)_t(x_1,t_0) = u_t(x_1,t_0) - v_t(x_1,t_0) \\
&= \int_\Omega \left[J\left(\frac{x_1-y}{u^\alpha(y,t_0)}\right) u^{1-N\alpha}(y,t_0) - J\left(\frac{x_1-y}{u^\alpha(x_1,t_0)}\right) u^{1-N\alpha}(x_1,t_0) \right] dy - f(u(x_1,t_0)) \\
&\quad - \int_\Omega \left[J\left(\frac{x_1-y}{v^\alpha(y,t_0)}\right) v^{1-N\alpha}(y,t_0) - J\left(\frac{x_1-y}{v^\alpha(x_1,t_0)}\right) v^{1-N\alpha}(x_1,t_0) \right] dy + f(v(x_1,t_0)) \\
&= \int_\Omega \left[J\left(\frac{x_1-y}{u^\alpha(y,t_0)}\right) u^{1-N\alpha}(y,t_0) - J\left(\frac{x_1-y}{u^\alpha(x_1,t_0)}\right) u^{1-N\alpha}(x_1,t_0) \right] dy - \\
&\quad \int_\Omega \left[J\left(\frac{x_1-y}{v^\alpha(y,t_0)}\right) v^{1-N\alpha}(y,t_0) - J\left(\frac{x_1-y}{v^\alpha(x_1,t_0)}\right) v^{1-N\alpha}(x_1,t_0) \right] dy \\
&\leq 0
\end{aligned}
$$

de donde $u(y,t_0) = v(y,t_0)$ para todo $y \in B(x_1,r)$. Por lo tanto G es un conjunto abierto, por consiguiente G es vacio o es todo Ω. Por lo tanto $G = \Omega$ lo cual es absurdo.

Si $u(x,0)$ y $v(x,0)$ son continuas, consideremos dos sucesiones decrecientes en C^1 $u_n(x,0)$ y $v_n(x,0)$ tales que $u_n(x,0) \to u(x,0)$ y $v_n(x,0) \to v(x,0)$ en $L^1(\Omega)$ cuando $n \to \infty$, además $u_n(x,0) \leq v_n(x,0)$. Sean u_n y v_n las soluciones con las condiciones iniciales $u_n(x,0)$ y $v_n(x,0)$, y por el análisis anterior se tiene que $u_n(x,t) < v_n(x,t)$. Ahora, por la observación 2.5 y el teorema de la convergencia monotona se tiene que $u_n(x,t) \to u(x,t), \quad v_n(x,t) \to v(x,t)$ cuando $n \to \infty$.

CAPÍTULO 3

EXTINCIÓN O APAGAMIENTO DE LAS SOLUCIONES

3.1. Comportamiento de las soluciones

3.1.1. Definición

Sea u una solución de (1.4), decimos que u se extingue (quenching) en tiempo finito T si existe $T > 0$ tal que

$$\lim_{t \to T^-} \min u(x,t) = 0 \tag{3.1}$$

3.1.2. Teorema

Sea u una solución de (1.4) con condición inicial $0 < u_0 \leq M$. Si

$$\int_0^1 \frac{ds}{f(s)} < \infty,$$

entonces existe un tiempo finito tal que u se extingue.

Demostración Sea $h(t)$ la solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$h'(t) = -f(h(t)), \quad t > 0; \quad h(0) = M. \tag{3.2}$$

Como $\displaystyle\int_0^1 \frac{ds}{f(s)} < \infty$ se tiene que la solución $h(t)$ se extingue en tiempo finito, [10]. Además se tiene que $h(t)$ es solución de la ecuación (1.4). Sea $u(x,t)$ la solución de (1.4) con condición inicial $u_0 \leq M = h(0)$ para todo $x \in \Omega$, luego por el Principio de Comparación 2.7 se tiene que $u(x,t) \leq h(t)$ para todo $(x,t) \in \Omega \times [0, t_0]$, por consiguiente existe un tiempo $T > 0$ tal que la solución se extingue en T.

3.1.3. Corolario

Sea u solución de (1.4) con condición inicial $0 < u_0 \leq M$ y con término de absorción $f(u) = u^p, \quad 0 < p < 1,\ f(u) = e^u \quad o \quad f(u) = (1+u)\ln^p(1+u)$ *con* $0 < p < 1$ entonces existe $T > 0$ tal que u se extingue en tiempo finito T.

Bibliografía

[1] Robert Bartle. *The Elements of Integration*. Jhon Wiley and Sons, inc, 1966.

[2] Mauricio Bogoya. *El Fenómeno de Explosión de las Soluciones en E. D.P.* XXII Coloquio Distrital de Matemáticas y Estad1994.

[3] Mauricio Bogoya. A nonlocal nonlinear diffusion equation in higer space dimensions. Jornal of Mathematical Analysis and Applications 2008, 344.

[4] R Ferreira Bogoya, Mauricio and J. Rossi. Neumann boundary conditions for a nonlocal nonlinear diffusion operator. continuos and discrete models. Proc. Amer. Math. Soc.

[5] Elgueta M y Rossi J. D. Cortazar C. A nonlocal difusion equation whose solutions develop a free boundary. 2005.

[6] Paul Fife. *Some Nonclassical Trends in Parabolic and Parabolic-like Evolutions*. Dept of Matematics, University if Utah.

[7] Lesmes Jaime Ignacio. *Elementos de Analisis Funcional*. uniandes, 2002.

[8] M Kirk and Catherine A. Roberts. *A Review of Quenching Results in the contex of nonlinear Volterra equations*. Mathematical analysis, 2003.

[9] X. Ren P Fife, P. Bates and X. Wang. *Traveling waves in a convolution model for phase transitions*. Arch. Ration. Mech Anal, vol 138, n° 2 edition, 1997.

[10] Kurdyumov Samarskii Alexander, Galaktionov Victor. *Blow-up in quasilinear parabolic equation*. Ed Walter de Gruyter-New York, 1995.

[11] Michael Spivak. *Calculus on manifolds*. Addison-Wesley Publishing Company, pub-AW:adr, 1995.

[12] Thibaut K Kouakou Theodore k, Boni. *Continuity of the quenching time in a semilinear heat equation with a potential*. Revista Colombiana de Matemáticas, vol 43.