PROBLEMA DE DIRICHLET ASOCIADO A UN OPERADOR DE DIFUSIÓN NO LOCAL CON FUENTE

Trabajo de Grado para optar el Título de Magister en Ciencias Matemáticas

Autor: Yaneth Rocio Hernández Becerra
Código:830319

Director: Profesor Mauricio Bogoya López

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
MAYO 2010

Índice general

INTRODUCCIÓN

Los problemas de Reacción-Difusión no lineales son importantes ya que este tipo de problemas modelan diferentes situaciones o fenómenos de difusión en biología, procesamiento de imágenes, sistemas de partículas y otros, por esta razón el interés de este trabajo es el estudio de una variación de una ecuación de difusión no local no lineal asociado a un modelo en una población con estructura espacial ya que la solución depende del tiempo y de una variable espacial $u = u(x,t)$, con dominio en $\mathbb{R}^N$ y $t \in [0,T)$ definido:

$$u_t(x,t) = (J * u - u)(x,t), \qquad x \in \Omega \tag{1}$$

Donde $J : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es la función continua, no-negativa, suave, simétrica, estrictamente decreciente, de soporte compacto en una bola unitaria con $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} J(x) = 1$.

La función $u(x,t)$ representa la densidad en un punto x y un instante t, $J(x-y)$ representa la distribución de probabilidad de que el individuo salte de la posición y a la posición x, $J * u(x,t)$ es la razón con la cual los individuos viajan a la posición x de otros lugares y la razón con la cual los individuos viajan de x a otros lugar es dada por $-u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} J(x-y)dy$.

La ecuación (1) presenta un comportamiento análogo a la ecuación clásica del calor, como por ejemplo que las soluciones estacionarias acotadas son constantes, tiene principio del máximo y las soluciones se propagan con velocidad infinita.

Otra ecuación clásica que se usa en modelos de difusión es la ecuación de los medios porosos ([1]), $u_t = \Delta u^m$ con $m > 1$ la cual posee propiedades similares con la ecuación del calor, pero fundamentalmente son diferentes ya que la primera tiene velocidad de propagación finita([1]).

Un modelo de difusión el cual es una variación de la ecuación (1) fue introducida y estudiada por Cortazar, Elgueta y Rossi ver ([5]) :

$$u_t(x,t) = \int_{\mathbb{R}} J\left(\frac{x-y}{u(y,t)}\right) dy - u(x,t) \tag{2}$$

En la cual el modelo de distribución de probabilidad de ir de la posición x a la posición y esta determinada por:

$$\begin{cases} J\left(\frac{x-y}{u(y,t)}\right) \frac{1}{u(y,t)} \text{ para } u(y,t) > 0 \\ \qquad 0 \text{ en otro lugar} \end{cases}$$

$\int_{\mathbb{R}} J\left(\frac{x-y}{u(y,t)}\right) dy$ representa la tasa de los individuos que viajan a la posición x de otros lugares y $-u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} J\left(\frac{x-y}{u(x,t)}\right) dy$ es la razón de los individuos viajan de x a cualquier otro lugar. Estas consideraciones en ausencia de fuentes externas llevan a que la densidad $u(x,t)$ satisface la ecuación (2) con dato inicial $u(x,0) = c + w(x,0)$ donde $c \geq 0$ y $w(x,0) \in L^1$ y no negativa. De la ecuación (2) se estudia existencia y unicidad de las soluciones con un principio de comparación para soluciones continuas y análisis de frontera libre. Luego Bogoya en ([3]) estudia la generalización de (2) en varias variables, con $N \geq 1$ generalizando la ecuación.

$$u_t(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(y,t)}\right) \frac{u(y,t)}{u^{N\alpha}(y,t)} dy - u(x,t) \tag{3}$$

Con condición inicial $u(x,0) = u_0$ no negativa y $0 < \alpha \leq \frac{1}{N}$. De esta ecuación se estudia la existencia y unicidad de las soluciones.

Además el autor demuestra que la solución (3) tiene un comportamiento análogo a la ecuación de medios porosos en el sentido de que la solución satisfacen la propiedad de propagación finita, es decir si el dato inicial $u(x,0) = u_0$ es de soporte compacto entonces la solución $u(x,t)$ es de soporte compacto.

Nosotros estudiaremos el problema Dirichlet asociado a (3) con presencia de fuente externa

$$\begin{aligned} u_t(x,t) = & \int_{\mathbb{R}^N} \left(J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(y,t)}\right) u^{1-N\alpha}(y,t) - J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(x,t)}\right) u^{1-N\alpha}(x,t)\right) dy + f(u(x,t)) \quad & , x \in \Omega \\ u(x,t) = 0 & & , x \notin \Omega \end{aligned} \tag{4}$$

La cual es considerada en R^N, con la condición inicial $u(x,0) \in L^1(\Omega)$ no-negativa, f una función no negativa que representa el termino de la fuente.
Del cual se tiene que si un individuo x sale del dominio Ω, el muere instantáneamente es decir la densidad $u(x,t) = 0$ para $x \notin \Omega$ esta condición determina que el problema es de Dirichlet.

Por consiguiente nuestro interés es analizar existencia, unicidad dependencia continua de la solución con respecto al valor inicial y explosión de las soluciones de la ecuación (4).

Por lo tanto el presente trabajo se organizó de la siguiente forma: El Capitulo I describen algunos preliminares con algunos conceptos y resultados los cuales son importantes para el desarrollo del trabajo, en el Capitulo II se hace el análisis de existencia y unidad de solucion es del problema aplicando las hipótesis del teorema del punto fijo de Banach y además se estudia un principio de comparación para las soluciones continuas del problema (4) el Capitulo III se hace el análisis de explosión observando si la solución explota en tiempo finito.

Capítulo 1

PRELIMINARES

A continuación presentamos algunas definiciones, teoremas y proposiciones que son importantes para el desarrollo del presente trabajo.

Definición 1. Sea E un espacio vectorial. Una **norma** en E es una función a valor real sobre E que satisface los siguientes propiedades:

1. $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$
2. Si $x \in E$ y $\|x\| = 0$ entonces $x = 0$
3. $\|\alpha.x\| = |\alpha| \, \|x\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y para todo $x \in E$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in E$

Definición 2. Sea $(x_n)_n$ una sucesión de un espacio normado se dice ser una **sucesión de cauchy** si sólo si para cada número real positivo ϵ existe un entero positivo N, que depende de ϵ tal que $\|x_m - x_n\| \leq \epsilon$ para todo $m, n \leq N$.

Definición 3. Un espacio lineal es **completo** si toda sucesión de Cauchy converge.

Definición 4. Un espacio lineal normado completo es llamado un espacio de **Banach**.

Definición 5. Sea un espacio vectorial normado completo $(Y, \|.\|)$, y una aplicación $L : Y \longrightarrow Y$ es una contracción sobre Y si existe C con $0 < C < 1$ tal que para todo $w, z \in Y$ se tiene que

$$\|L(w) - L(z)\| \leq C \|w - z\|.$$

Teorema 1 (teorema del Punto Fijo de Banach)**.** Sea Y un espacio de Banach, y $L : Y \longrightarrow Y$ un operador. Si L es una contracción entonces L tiene un único punto fijo, es decir existe $u \in Y$ tal que $L(u) = u$.

Definición 6. Una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto es convexa si cuando $x, y \in I$ y $0 < \lambda < 1$ entonces $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$

Teorema 2 (Desigualdad de Jensen)**.** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa $U \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y acotado. Sea $g : U \to \mathbb{R}$ una función medible entonces

$$f\left(\frac{1}{|U|}\int_U g dx\right) \leq \frac{1}{|U|}\int_U f(g) dx.$$

Teorema 3. Teorema de la Convergencia Monotona Sea $(f_k)_k$ una sucesión monótona creciente de funciones positivas medibles sobre X que convergen a una función f entonces

$$\int_X f d\mu = lim \int_X f_k d\mu$$

Capítulo 2

ANALISIS DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

El problema Dirichlet con presencia de fuente externa y con condición inicial $u(x,0) = u_0$ no negativa y $0 < \alpha \leq \frac{1}{N}$.

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \left(J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(y,t)}\right) u^{1-N\alpha}(y,t) - J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(x,t)}\right) u^{1-N\alpha}(x,t) \right) dy + f(u(x,t)) & ,x \in \Omega \\ u(x,t) = 0 & ,x \notin \Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

Donde $J : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es la función continua, no-negativa, suave, simétrica, estrictamente decreciente, de soporte compacto en una bola unitaria con $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} J(x) = 1$.

$$\begin{cases} J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(y,t)}\right) \frac{1}{u^{N\alpha}(y,t)} \text{ para } u(y,t) > 0 \\ \qquad\qquad 0 \text{ en otro lugar} \end{cases}$$

Representa la distribucion de probabilidad de ir de cualquier posición y a la posición fija x. Por lo tanto la rapidez con la cual los individuos que viajan a la posición y a la posición fija x es

$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(y,t)}\right) u^{1-N\alpha}(y,t)$. En forma analoga la rápidez con la cual el individuo en la posición fija x viaja a cualquier posición y está dada por $-u(x,t) = -\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\left(J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(x,t)}\right)\right) u^{1-N\alpha}(x,t)$. Se asume que f es una función no negativa creciente, convexa, con $\displaystyle\int_a^{\infty}\frac{ds}{f(s)} < \infty$ la cual representa el término fuente.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, si un individuo x sale del dominio Ω, el muere instantáneamente es decir la densidad $u(x,t) = 0$ para $x \notin \Omega$, esta condición determina las condiciones de Dirichlet.

Proposición 2.0.1. Para $t_0 > 0$ fijo, el espacio vectorial $Y = \left(C\left([0,t_0]; L^1(\Omega)\right), +, .\right)$ con la norma $|||z||| = \max\limits_{0\le t\le t_0} \|z(.,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$ es un espacio de Banach.

Demostración: Sea $z_n(x,t) \in Y$ una sucesión de Cauchy para un t fijo se tiene que dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $|||z_n(x,t) - z_k(x,t)||| < \epsilon$ para $n, k > N$

$$\|z_n(t) - z_k(t)\|_{L(\mathbb{R}^N)} \le \underset{0\le t\le t_0}{max} \int_{\mathbb{R}^N} |z_n(t) - z_k(t)|\, dx < \epsilon$$

por consiguiente $z_n(x,t)$ es una sucesión de cauchy en $L^1(\mathbb{R}^N)$ ya que este es un espacio normado completo entonces existe $z(x,t) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $\underset{n\to\infty}{lim} \|z_n(x,t) - z(x,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 0$ ya que $z : [0,t_0] \to L^1(\mathbb{R}^N)$ entonces

$$\|z_n(x,t) - z_k(x,t)\|_{L(\mathbb{R}^N)} \le |||z_n(x,t) - z_k(x,t)||| < \epsilon$$

para cada $t \in [0,t]$ si hacemos $k \to \infty$, para $n > n_0$ entonces $\|z_n(x,t) - z(x,t)\| \le \epsilon$ para $t \in [0,t_0]$. Por lo tanto z_n converge a z uniformemente en $[0,t_0]$, en particular z es continua. Ahora observamos que $z_n \to z$ en $Y = C([0,t_0]; L^1(\mathbb{R}^N))$ con $|||.|||$; para todo $\epsilon_t > 0$, existe $N \ge 0$ tal que $\|z_n(x,t) - z(x,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^\mathbb{N})} < \epsilon$ para $n \ge N$ $\|z_n(.,t) - z(.,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} < \epsilon_t$ escogiendo ϵ como el máximo de todos los ϵ_t se tiene que

$$\max_{0\le t\le t_0} \|z_n(x,t) - z(x,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} < \epsilon$$

Proposición 2.0.2. $Y_{t_0} = \{z \in Y \diagup z \geq 0\}$ el cual es un conjunto cerrado de Y.

Demostración: ya que sucesión de funciones positivas converge a una función positiva y bajo las condiciones de convergencia uniforme por lo tanto se tiene z es continua cuando $z_n \to z$ en la norma.

Para garantizar la existencia y unicidad de la ecuación en el espacio Y_{t_0} se observa si se tienen las hipótesis necesarias para usar el Teorema del punto fijo.

A continuación deduciremos el operador, para tal fin tomamos (2.1)

$$u_t(x,t) + \int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(x,t)}\right) u^{1-N\alpha}(x,t)dy = \int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(y,t)}\right) u^{1-N\alpha}(y,t)dy + f(u(x,t))$$

al multiplicar por e^t se obtiene

$$e^t\left(u_t + \int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(x,t)}\right) u^{1-n\alpha}(x,t)dy\right) = e^t \int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(y,t)}\right) u^{1-n\alpha}(y,t)dy + e^t f(u)$$

integrando obtenemos

$$e^s u(x,s)|_0^t = \int_0^t e^s \int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}\,(y,s)}\right) u^{1-N\alpha}(y,s)dyds + \int_0^t e^s f(u(x,s))ds$$

$$e^t u(x,t) = \int_0^t e^s \int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(y,s)}\right) u^{1-N\alpha}(y,s)ds + \int_0^t e^s f(u(x,s))ds + u(x,0)$$

$$u(x,t) = \int_0^t e^{s-t} \int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(y,s)}\right) u^{1-N\alpha}(y,s)ds + \int_0^t e^{s-t} f(u(x,s))ds + e^{-t}u(x,0)$$

2.1. Operador

Nuestro operador

$L : Y_{t_0} \to Y_{t_0}$ como:

$$L_{w_o}(w(x,t)) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t e^{s-t} \int_{\mathbb{R}^N} J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(y,s)}\right) w^{1-N\alpha}(y,s)dyds + \int_0^t e^{s-t} f(w(x,s))ds & \\ \qquad +e^{-t}w_0 & ,x \in \Omega \\ \qquad 0 & ,x \notin \Omega \end{cases} \tag{2.2}$$

2.2. Lema

Iniciaremos nuestro estudio para una función Lipschitz con cosntante de Lipschitz $K > 0$, y luego por un argumento de convergencia lo estenderemos a una función general f.

Lema 2.2.1. Sea $w_0, z_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ funciones no negativas con $w, z \in Y_{t_0}$ y f lipschitz, entonces

$$|||L_{w_0} - L_{z_0}||| \leq (1 - e^{-t_0})(1 + K)\, |||z - w||| + \|w_0 - z_0\|_{L^1(\Omega)}$$

Demostración: Sean $w,\ z \in Y_{t_0}$, tenemos que

$$\begin{aligned} &\|L_{w_0}(w) - L_{z_0}(z)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \int_{R^N} \left| \int_0^t e^{s-t} \int_{R^N} J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(y,s)}\right) w^{1-N\alpha}(y,s) - J\left(\frac{x-y}{z^\alpha(y,s)}\right) z^{1-N\alpha}(y,s)dyds \right| dx \\ &+ \int_{R^N} e^{-t} \left| e^s \int_0^t f(w(x,s)) - f(z(x,s))ds \right| dx - e^{-t} \int_{R^N} |w_0 - z_0|\, dx, \end{aligned}$$

Considerando $x \in \Omega$ ya que si $x \notin \Omega$ la función es nula

$$\begin{aligned} &\|L_{w_0}(w) - L_{z_0}(z)\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq \underbrace{\int_0^t e^{s-t} \int_\Omega \int_\Omega \left| J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(y,s)}\right) w^{1-N\alpha}(y,s) - J\left(\frac{x-y}{z^\alpha(y,s)}\right) z^{1-N\alpha}(y,s) \right| dydxds}_{I_1} \\ &+ \int_0^t e^{s-t} \int_\Omega |f(w(x,s)) - f(z(x,s))|\, dsdx - e^{-t}\, \|w_0 - z_0\|_{L(\Omega)} \end{aligned}$$

Para analizar I_1 se definen los conjuntos

$$B^+(s) = \{y \in \Omega \mid w(y,s) \geq z(y,s)\} \quad , \quad B^-(s) = \{y \in \Omega \mid w(y,s) < z(y,s)\}$$

Si $y \in B^-(s)$, $\qquad J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(y,s)}\right) w^{1-N\alpha}(y,s) - J\left(\frac{x-y}{z^\alpha(y,s)}\right) z^{1-N\alpha}(y,s) < 0$

Si $y \in B^+(s)$, $\qquad J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(y,s)}\right) w^{1-N\alpha}(y,s) - J\left(\frac{x-y}{z^\alpha(y,s)}\right) z^{1-N\alpha}(y,s) \geq 0$

Inicialmente obtenemos la integral I_1 en $B^+(s)$

$$\int_\Omega \int_{B^+(s)} J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(y,s)}\right) w^{1-N\alpha}(y,s) - J\left(\frac{x-y}{z^\alpha(y,s)}\right) z^{1-N\alpha}(y,s) dydx$$

Considerando los cambios de variables:

$$\gamma = \frac{x-y}{w^\alpha(y,s)}, \eta = \frac{x-y}{z^\alpha(y,s)}$$

$$detH(\gamma) = \frac{1}{w^{N\alpha}(y,s)}, detH(\eta) = \frac{1}{z^{N\alpha}(y,s)}$$

Al aplicar el teorema de fubini, el teorema cambio de variable y $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} J(\gamma)d\gamma = 1, \int_{\mathbb{R}^N} J(\eta)d\eta = 1.$

$$\int_{B^+} \int_\Omega J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(y,s)}\right) \frac{w(y,s)}{w^{N\alpha}(y,s)} dxdy - \int_{B^+} \int_\Omega J\left(\frac{x-y}{z^\alpha(y,s)}\right) \frac{z(y,s)}{z^{N\alpha}(y,s)} dxdy = \int_{B^+} (w(y,s) - z(y,s))dy$$

En forma análoga se obtiene la integral sobre $B^-(s)$ por lo que obtenemos:

$$\int_\Omega \int_\Omega \left| J\left(\frac{x-y}{w^\alpha(y,s)}\right) w^{1-N\alpha}(y,s) - J\left(\frac{x-y}{z^\alpha(y,s)}\right) z^{1-N\alpha}(y,s) \right| dydx =$$

$$\int_{B^-} (z(y,s) - w(y,s))\, dy + \int_{B^+} (z(y,s) - w(y,s))\, dy = \int_\Omega |w(y,s) - z(y,s)| dy.$$

Como f es una función Lipschitz, se tiene que

$$\int_\Omega |f(w(y,s)) - f(z(y,s))|\, dy \leq K \int_\Omega |w(y,s) - z(y,s)| dy.$$

Resumiendo se tiene que

$$\begin{aligned}
&\|L_{w_0}(w) - L_{z_0}(z)\|_{L^1(\Omega)} \\
&\qquad \leq \int_0^t e^{(s-t)} \int_\Omega |w(y,s) - z(y,s)| dy ds \\
&\qquad +K \int_0^t e^{(s-t)} |w(y,s) - z(y,s)| dy ds + e^{(s-t)} ||w - z||_{L^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Integrando y tomando el máximo sobre $[0, t_0]$ se tiene:

$$|||L_{w_0} - L_{z_0}||| \leq (1 - e^{-t_0})(1 + K)\, |||z - w||| + \|w_0 - z_0\|_{L^1(\Omega)}.$$

2.3. Teorema de Existencia y Unicidad

Teorema 4. Para toda función nonegativa $u_0 \in L^1(\Omega)$ y f lipschitz entones existe una única solución u del problema (2.1).

Demostración: Veamos que L esta bien definido es decir $L_{w_0} : Y(t_0) \longrightarrow Y\,(t_0)$ lo cual es inmediato ya que por definición $0 \leq w$, $0 \leq J$, $0 \leq w_0$ y $0 \leq f$ como producto de funciones positivas es positiva e integral de funciones positivas es positiva por lo tanto
$0 < \int_0^t e^{s-t} \int_\Omega J \left(\frac{x - y}{w^\alpha(y,s)} \right) w^{1-N\alpha}(y,s) ds + \int_0^t e^{s-t} f(w(x,s)) ds + e^{-t} w_0$
por lo que $L_{w_0}(w) \in Y_{t_0}$. En el Lema anterior, tomando $u_0 = w_0 = z_0$ y eligiendo $C = [1 - e^{-t_0}](1 + K) < 1$ se tiene que L es una contracción, luego por el Teorema del Punto Fijo de Banach L tiene un único punto fijo $u \in Y_{t_0}$, el cual es la única solución del problema (2.1).

Observación 1. Las soluciones de la ecuación (2.1) depende continuamente del dato inicial en el siguiente sentido. Si u y v son soluciones de (2.1) con condiciones iniciales $u_0,\ v_0$ respectivamente, entonces existe una constante $C_1 = C_1(t_0, J, K)$ tal que

$$|||u - v||| \le C_1 \left\| u_0 - v_0 \right\|_{L^1(\Omega)}$$

Demostración: Sean u y v son soluciones de (2.1) con condiciones iniciales u_0, v_0 respectivamente, por lo tanto $L_{u_0}(u) = u$ y $L_{v_0}(v) = v$, reemplazando en el Lema (1) se tiene que

$$|||u - v||| \le [1 - e^{-t_0}](1 + K) \left\| u - v \right\|_{L^1(\Omega)} + \left\| u_0 - v_0 \right\|_{L^1(\Omega)}$$

de lo cual se tiene que

$$|||u - v||| \le C_1 \left\| u_0 - v_0 \right\|_{L^1(\Omega)}$$

donde $C_1 = \dfrac{1}{1 - [1 - e^{-t_0}](1 + K)}$

Observación 2. la función u es una solución de la ecuación (2.1) si y solo si

$$u = \begin{cases} \int_0^t e^{s-t} \int_\Omega J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(y,s)}\right) u^{1-N\alpha}(y,s)dyds + \int_0^t e^{s-t} f((u(x,s))ds + e^{-t}u_0 & ,x \in \Omega \\ 0 & ,x \notin \Omega \end{cases} \tag{2.3}$$

Demostración: $\Rightarrow$) Si u es solución de la ecuación (2.1) entonces u es un punto fijo de $L_{u_0}(u)$

$L_{u_0}(x, t) = u(x, t)$

$\Leftarrow$) Sea $x \in \Omega$ y

$$u = \int_0^t e^{s-t} \int_\Omega J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(y,s)}\right) u^{1-N\alpha}(y,s)dyds + \int_0^t e^{s-t} f(u(x,s))ds + e^{-t}u_0$$

Al derivar con respeto a t se obtenemos $u_t(x,t) = \displaystyle\int_\Omega \left(J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(y,t)}\right) u^{1-n\alpha}(y,t) - J\left(\frac{x-y}{u^\alpha(x,t)}\right) u^{1-n\alpha}(x,t) \right)$ $f(u(x,t))$

2.4. Principio de Comparación

Teorema 5 (Principio de Comparación)**.** Sea u y v son soluciones continuas del problema (2.1) con datos iniciales $u(x,0), v(x,0)$ respectivamente para todo $x \in \Omega$ $u(x,0) \leq v(x,0)$ entonces $u(x,t) \leq v(x,t)$ para $(x,t) \in (\Omega \times [0,t_0])$

Demostración: Sean u_0, v_0 son funciones de soporte compacto y de clase C^1, ademas existe $\delta > 0$ tal que $u(x,0) + \delta < v(x,0)$ razonando por contradicción supongamos que la conclusión no se tiene; entones existe un tiempo $t_0 > 0$ y un punto $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0,t_0) = v(x_0,t_0)$ y $u(x,t) \leq v(x,t)$ para todo $(x,t) \in (\Omega \times [0,t_0])$

Se considera el conjunto $G = \{x_0 \in \Omega / u(x,t_0) = v(x,t_0)\}$. como $x_0 \in G$ entonces $G \neq \emptyset$ G es cerrado.

Si $x_1 \in G$ tenemos

$0 \leq (u-v)_t(x_1,t_0) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(J\left(\frac{x_1-y}{u^\alpha(y,t_0)}\right) u^{1-N\alpha}(y,t_0) - J\left(\frac{x_1-y}{v^\alpha(y,t_0)}\right) v^{1-N\alpha}(y,t_0) \right)$, $x \in \Omega$

lo cual implica $u(y,t_0) = v(y,t_0)$ para todo $y \in B_\epsilon(x_1)$, entonces G es abierto. Por lo anterior se tiene $G = \Omega$ lo cual es una contradicción entonces $u(.,t_0) \in L^1(\Omega)$. Ahora quitemos que $u(x,0), v(x,0)$ son funciones de clase C^1 de soporte compacto en este sentido consideramos $u_n(x,0), v_n(x,0)$ sucesión de funciones de clase C^1 de soporte compacto tal que $u_n(x,0) \to u(x,0)$ y $v_n(x,0) \to v(x,0)$ en $L^1(\Omega)$ cuando $n \to \infty$. Consideremos u_n, v_n soluciones de la ecuación (2.1) sucesión de funciones de clase C_1 de soporte con datos iniciales $u_n(x,0), v_n(x,0)$ respectivamente. Por el argumento anterior $u_n(x,t) < v_n(x,t)$ ademas sea $u_{n+1}(x,t) < u_n(x,t)$ y $v_{n+1}(x,t) < v_n(x,t)$, por la observación (2) y el teorema de la convergencia monótona se sigue que $u_n(x,t) \to u(x,t)$ y $v_n(x,t) \to v(x,t)$ en L_1 cuando $n \to \infty$

Teorema 6. Para todo $u_0 \in L^1(\Omega)$ función no negativa, para todo f positiva creciente, convexa, existe un $T > 0$ y una única solución u del problema (2.1) tal que $u \in C([0,T]; L^1(\Omega))$

Demostración: Sea $(f_n)_n$ una sucesión creciente de funciones lipschizt, es decir, $f_n \leq f_{n+1}$. Además asuma que $f_n(s) = f(s)$ en $[0,n]$. Sea u_n una única solución del problema con fuente f_n y dato inicial $u_n(x,0)$. Asumiendo que los datos iniciales satisfacen $u_n(x,0) < u_{n+1}(x,0)$ y $u_n(x,0)$ converge uniformemente a $u(x,0)$.

Por el teorema principio de comparación se tiene que $u_n(x,t) < u_{n+1}(x,t)$ entonces existe $u(x,t)$ que puede ser ∞ en algún punto tal que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$

Sea $T = sup \left\{ t / \sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} u(x,t) < \infty \right\} > 0.$

Haciendo tender $n \to \infty$ en la Observación (2) y aplicando el teorema de la Convergencia Monotona se obtiene que u es solución del (2.1) con dato inicial $u(x,0)$ y fuente $f(u)$.

Capítulo 3

ANALISIS DE EXPLOSION

Una propiedad interesante de estos problemas es el análisis de las singularidades de la solución de un problema asociado a un dato inicial suave, especialmente para los cuales la teoría de existencia, unicidad y dependencia continua son establecidas en un intervalo de tiempo pequeño, es decir si la singularidad se presenta cuando la variable tiende a infinito cuando el tiempo se aproxima a un valor $T > 0$ y T finito, esto es conocido como fenómeno de explosión

Definición 7 (Explosión)**.** Se dice que la solución u(x,t) de un problema explota en un instante T si existe un tiempo $T > 0$, tal que $u(x,t)$ esta definida para todo $t \in [0,t)$, pero $\underset{t\to T}{lim}\ \underset{x\in\Omega}{sup}\ u(x,t){=}\infty$

Teorema 7. Sea u solución de (2.1), $u \in L^\infty$ con f una función positiva creciente, convexa y $\displaystyle\int_0^\infty \frac{ds}{f(s)} < \infty$ entonces $u(x,t)$ explota en tiempo finito $T > 0$.

Demostración: Sea u solución (2.1) de como u se anula fuera de Ω se define

$$M(t) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x,t)dx$$

derivando con respecto a t

$$M^{'}(t) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_t(x,t)dx$$

al reemplazar

$$M^{'}(t) = \frac{1}{|\Omega|}\left[\int_{\Omega}\int_{\Omega} J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(y,t)}\right)u^{1-N\alpha}(y,t)dydx - \int_{\Omega} u(x,t)dx + \int_{\Omega} f(u(x,t))dx\right]$$

$$M^{'}(t) = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}\left[\int_{\Omega} J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(y,t)}\right)u^{1-N\alpha}(y,t)dy - u(x,t) + f(u(x,t))\right]dx$$

ya que

$$\int_{\Omega} u(x,t)dx = \int_{\Omega} J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(x,t)}\right)u^{1-N\alpha}(x,t)dy$$

se obtiene

$$M^{'}(t) = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}\int_{\Omega}\left(J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(y,t)}\right)u^{1-N\alpha}(y,t) - J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(x,t)}\right)u^{1-N\alpha}(x,t)\right)dydx + \int_{\Omega} f(u(x,t))dx$$

Como

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega} J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(y,t)}\right)u^{1-N\alpha}(y,t) - J\left(\frac{x-y}{u^{\alpha}(x,t)}\right)u^{1-N\alpha}(x,t)dydx = 0$$

Se deduce que

$$M^{'}(t) = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} f(u(x,t))dx$$

A continuación por la desigualdad de Jensen se tiene que:

$$\frac{1}{|\Omega|}\left[\int_{\Omega} f(u(x,t))dx\right] \geq f\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}(u(x,t))dx\right)$$

$$M^{'}(t) \geq f(M(t))$$

integrando

$$\int_0^t \frac{dM}{f\,(M)} \geq \int_0^t ds$$

Lo anterior implica que que $M(t)$ explota en tiempo finito por consiguiente u explota en tiempo finito. leq $v(x,t)$ para $(x,t) \in (\Omega \times [0,t_0])$

Corolario 3.0.1. Sea u solución de la ecuación (2.1) con $f(u) = e^u$, $f(u) = u^p$ con $p > 1$, $f(u) = (1+u)ln^p(1+u)$ con $p > 1$ entonces u explota en tiempo finito.

Bibliografía

[1] Aronson D. G. The porous medium equation, in Nonlinear Difusion Problems,A. Fasano and M.Primicerio eds. Lecture Notes in Math. 1224, Springer Verlag, (1986).

[2] Bates P., and Chen. Spectral analysis and multidimensional stability of travelling waves for nonlocal Allen-Cahn equation. J. Math. Anal. Appl.,273, 45-57, (2002).

[3] Bogoya M., Ferreira R, and Rossi J.D. Newmann Boundary conditions for a nonlocal nonlinear difusion operator. Continuos and Discrete Models. Proceedings of the American Mathematical Society. Vol. 135(12), 3837-3846, (2007).

[4] Bogoya M. Blow up for a nonlocal nonlinear diffusion equation with source. Preprint

[5] Cortazar C., Elgueta M. and Rossi J. D. A nonlocal difusion equation whose soltions develop a free boundary. Annales Henri Poincaré. Vol 6(2), 269-281, (2005).

[6] Fife P. Some nonclassical ternds in parabolic and parabolic-like evolutions. Trends in nonlinear analysis, 153-191, Springer, Berlin, 2003.

[7] Groisman P. and Rossi J. D. Asymptotic behaviour for a numerical approximation of a parabolic problem with blowing up solutions. Journal of Computational and Applied Mathematics. Vol. 135, 135-155, (2001).

[8] Vasquez J. L. An introduction to the mathematical theory of the porous medium equation. In "Shape optimization and free boundaries"(M.C. Delfour eds.), Dordrecht, Boston and Leiden. 347-389, 1992.