Categorías intermedias, relaciones y residuación

JUAN FELIPE CARMONA
MATEMÁTICO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
MAYO DE 2010

Categorías intermedias, relaciones y residuación

JUAN FELIPE CARMONA
MATEMÁTICO

TRABAJO DE TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO DE
MASTER EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

DIRECTOR
FERNANDO ZALAMEA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
MAYO DE 2010

Título en español

Categorías intermedias, relaciones y residuación

Title in English

Intermediate categories, relations and residuation

Resumen: Exploramos la interpretación de las relaciones dentro de las categorías intermedias entre las categorias cartesianas y los logoi de Freyd, y estudiamos su conexión con las lógicas intermedias, principalmente con la intuicionista de primer orden. Con dichas herramientas mostramos una prueba alternativa del teorema de completitud para la lógica intuicionista. Finalmente anexamos una aplicación a la lógica de haces de Caicedo.

Abstract: We explore the interpretation of relations in the intermediate categories between the cartesian categories and the logoi of Freyd, and we study its conection with intermediate logics, mainly with the intuitionistic first order logic. With this tools we show an alternative proof of the intuitionistic logic completeness. Finally we study an aplication to Caicedo's logic of sheaves.

Palabras clave: Categorias intermedias, lógica intuicionista, haces.

Keywords: Intermediate Categories, intuitionistic logic, sheaves.

Nota de aceptación

Trabajo de tesis
nota
"Mención Meritoria"

Jurado
Andrés Villaveces Niño

Director
Fernando Zalamea

Bogota, D.C., mayo de 2010

Agradecimientos

Debo una visión categórica de las matemáticas, sin la cual este trabajo no hubiera sido posible, a los profesores Fernando Zalamea y Xavier Caicedo. La amplísima visión de todo el espectro matemático y la exactitud en el manejo de los conceptos que estos dos matemáticos poseen han sido la inspiración más importante, no solo para esta tesis, sino para toda mi carrera.

Infortunadamente, algo de disciplina y de puntualidad les quedé debiendo.

Índice general

Introducción

Entre las categorías cartesianas y los topos elementales de Lawvere existe un amplio espectro de categorías, las categorías intermedias de Freyd, cuya utilidad es doble. Por un lado, en ellas se puede codificar el concepto de relación binaria, junto con todas las propiedades que este concepto debe tener. Por otro lado, las categorías intermedias resultan ser modelos categóricos naturales para las lógicas intermedias entre la implicativa y la intuicionista de primer orden.

Este trabajo tiene tres objetivos. El primero consiste en describir en detalle dichas categorías intermedias (cartesianas, regulares, prelogoi y logoi) haciendo especial énfasis en la manera de interpretar las relaciones binarias junto con sus operaciones, desde la más elemental, la composición, hasta una de las más complejas, la residuación.

Esta descripción no es de ninguna manera original, pero se encuentra mucho más desglosada que en el texto original de Freyd. Más aún, un aporte que creemos relevante, es la demostración detallada del *teorema de representación de categorías regulares* que afirma que toda categoría regular se puede representar en una potencia de la categoría de conjuntos. Esta demostración aparece en el texto *Allegories, Categories* de Freyd, pero no con el detalle que lo hacemos acá, y no parece que haya sido escrita en otro texto.

Finalmente, pero dentro del mismo objetivo, notaremos que la operación de residuación es, sin duda alguna, la más importante. Y en ese espíritu investigaremos qué correspondencias categóricas existen para las estructuras algebricas residuadas.

El segundo objetivo consiste en mostrar cómo las categorías intermedias, en especial los logoi, sirven como semántica para la lógica intuicionista de primer orden. Para el cálculo proposicional intuicionista existen semánticas canónicas, como las álgebras de Heyting, que aparecen en diversos ámbitos de la matemática (abiertos de un espacio topológico, por ejemplo) pero que no son en general un álgebra de Boole. Así, aunque muchos matemáticos desconozcan el intuicionismo, podrán aceptar que el cálculo proposicional subyacente puede ser relevante (como teoría matemática). Por otro lado, la semántica más conocida para el intuicionismo son los modelos de Kripke, modelos que pueden considerarse aún más fortuitos y que muchos matemáticos pasarían por alto como exóticos. Complementando el panorama de semánticas alternativas, los trabajos de Freyd muestran que existen otros modelos de interés (al menos para el gusto del matemático actual) para la lógica intuicionista. En efecto, veremos que toda semántica categórica para el intuicionismo resulta ser un logos, y veremos que los logoi son ubicuos en matemáticas.

Finalmente, el tercer objetivo consiste en realizar un aporte a la lógica de haces con el aparato categórico que se ha desarrollado en la tesis, pues a lo largo del presente trabajo habremos notado que las categorías de haces conforman los ejemplo cruciales de categorías intermedias. La lógica interna de los haces ha sido ampliamente estudiada por Moerdjik, Mac Lane y Caicedo, entre otros. El trabajo de Caicedo va sin embargo más allá, entre otras cosas, porque el instrumentario categórico no es fácil de asimilar, y Caicedo ha podido capturar la esencia de la lógica categórica en el caso de los haces, librándola de excesos en el lenguaje categórico.

Para Zalamea, la lógica de haces de Xavier Caicedo es el resultado matemático más importante producido en Colombia. Zalamea le propuso al autor estudiar la doble negación de esta lógica como un residual autoadjunto. Al incursionar en el tema, el autor resultó envuelto en un problema totalmente alejado del inicial: encontrar la parte *clásica* que posee un haz de estructuras, si es posible. En la tesis se logra entonces mostrar que, condicionando el tamaño del haz, y con una aplicación del teorema de categoría de Baire, se puede deducir que una "gran parte" de la lógica del haz es clásica.

CAPÍTULO 1

Preliminares categóricos

1.1. Notación

Dada una categoría $\mathcal{C}$, denotamos por $Ob(\mathcal{C})$ la clase de sus objetos y, dados A y B elementos de $Ob(\mathcal{C})$, denotamos por $\mathcal{C}(A, B)$ el *conjunto* de morfismos con dominio A y codominio B.

A lo largo del texto usaremos las siguientes categorías: $\underline{Con}$, la categoría de conjuntos cuyos morfismos son las funciones; $\underline{Top}$ la categoría de espacios topológicos con las funciones continuas como morfismos; $\underline{Hau}$ la categoría de espacios de Hausdorff con las funciones continuas como morfismos; $\underline{Grp}$ la categoría de grupos con morfismos los homomorfimos de grupos; $\underline{Anl}$ la categoría de anillos con unidad, con los homomorfismos de anillos que preservan la unidad; $\underline{FP}$ la categoría de conjuntos cuyos morfismos son las funciones parciales; dado un orden parcial $\mathbb{P}$, la categoría $\mathcal{C}_{\mathbb{P}}$ tiene por objetos los objetos de $\mathbb{P}$ y los morfismos vienen dados por la relación de orden, es decir, existe un único morfismo con dominio a y codominio b si y solo si (syss, de ahora en adelante) $a \leq b$; finalmente, dado un monoide $(M, *)$ la categoría $\mathcal{C}_M$ tiene por único objeto M, por cada elemento $a \in M$ existe un morfimo $M \xrightarrow{a} M$, y la composición se define por $ab : M \xrightarrow{a*b} M$ (como caso particular M puede ser un grupo).

Usaremos, como en la mayoría de los textos, la notación de composición por derecha, es decir, si tenemos dos morfismos $f \in \mathcal{C}(A, B)$ y $g \in \mathcal{C}(B, C)$ entonces la composición de estos dos morfismos la denotamos por gf.

A menos que indiquemos lo contrario, todos los diagramas serán conmutativos.

1.2. Un par de categorías especiales

Definiremos muy brevemente la categoría de haces sobre un espacio topológico y la categoría funtorial, que serán un par de ejemplos importantes durante el trabajo. Advertimos que esta presentación es bastante esquemática y reducida, dada la importancia de estos dos ejemplos, pero esperamos que esta falencia sea compensada más adelante cuando veamos cómo estas categorías gozan de todas las buenas propiedades que vayamos introduciendo.

Dada una categoría $\mathcal{C}$ y dado $B \in Ob(\mathcal{C})$, definimos la *categoría cociente*, $\mathcal{C}/B$, de la siguiente forma:

$$Ob(\mathcal{C}/B) = \{f \in \mathcal{C}(A, B) \mid A \in Ob(\mathcal{C})\}$$
$$(\mathcal{C}/B)(f, g) = \{h \in \mathcal{C}(dom(f), dom(g)) \mid gh = f\}.$$

Esto nos permite construir, a partir de cualquier categoría $\mathcal{C}$, una nueva categoría $\mathcal{C}/B$ con objeto final id_B.

En particular, dada la categoría $\mathcal{HL}$ cuyos objetos son los espacios topológicos y cuyos morfismos son los homeomorfismos locales (funciones que para cada punto x de su dominio existen abiertos X y Y que contienen a x y a $f(x)$ respectivamente, tales que la función restringida a X es un homeomorfismo entre X y Y) y, dado un espacio topológico B, definimos la *categoría de haces sobre* B, $\mathcal{SH}(B)$, como el cociente $\mathcal{HL}/B$.

Decimos que una categoría es *pequeña* si su clase de objetos es un conjunto. Dada una categoría pequeña $\mathcal{A}$, definimos la categoría *funtorial* $\underline{Con}^{\mathcal{A}}$ que tiene por objetos los funtores de $\mathcal{A}$ en $\underline{Con}$ y por morfismos las transformaciones naturales.

Muchos objetos matemáticos interesantes se pueden ver desde una perspectiva funtorial. Si, por ejemplo, $\mathcal{A}$ es una categoría pequeña con un único objeto, entonces lo podemos ver como un monoide M, y por lo tanto $\underline{Con}^{\mathcal{A}}$ resulta ser la categoría de los M-conjuntos, cuyos objetos son conjuntos con una M-acción, y sus morfismos son funciones que preservan la acción. Si, por ejemplo, $\mathcal{A} = \{a \rightrightarrows b\}$ es la categoría con dos objetos y dos morfismos paralelos entre ellos, entonces $\underline{Con}^{\mathcal{A}}$ se puede ver como la categoría de grafos dirigidos. Dado un funtor $F \in \underline{Con}^{\mathcal{A}}$, su grafo viene dado por su conjunto de aristas $F(a)$ y su conjunto de vértices $F(b)$ donde las imágenes de los dos morfismos son las dos funciones que indican los vértices de salida y de llegada de cada arista.

Las categorías funtoriales y las categorías de haces son las categorías más importantes (ubicuidad, riqueza, representabilidad) en el ámbito de la lógica geométrica, pero sucede además que existe una conexión muy fuerte entre ellas, pues todo haz sobre un espacio topológico B puede verse como un funtor contravariante de $(\Omega(B), \subseteq)$ en $\underline{Con}$, donde $\Omega(B)$ es el conjunto de abiertos de B; y si un funtor contravariante de $\Omega(B)$ en B satisface cierta condición de pegamiento [6, p. 64] entonces se puede ver como un haz.

La teoría de haces es uno de los pilares de la matemática contemporánea: ha mostrado su aplicabilidad en las ecuaciones diferenciales (estudio de índices y coberturas de Leray), la geometría algebraica (conjeturas de Weil, demostradas por Grothendieck y Deligne), la topología algebraica (cohomología de Stone-Cech), el análisis complejo y la teoría de modelos (lógica de los haces de estructuras de Caicedo). Pero no solamente constituye una herramienta matemática de gran utilidad, sino que puede entenderse como eje de un cambio conceptual profundo entre las matemáticas modernas y las matemáticas contemporáneas. Por ejemplo, mientras que en la matemática moderna el objeto matemático se estudia como una estructura estática, en la matemática contemporánea los haces permiten realizar un *pegamiento* de estructuras (fijando un espacio topológico base que determina la coherencia del pegamiento), y ver esa amalgamación como una única estructura en *movimiento*.

1.3. Jerarquía de morfismos

Definición 1.1. Un morfismo $A \xrightarrow{f} B$ es:

Mono syss $\forall g, h(fg = fh \Rightarrow g = h)$.

Igualador syss $\exists g, h\ (gf = hf)$ y $\forall f_1(gf_1 = hf_1 \Rightarrow \exists! j(fj = f_1))$ (suerte de minimalidad: f es el mínimo morfismo que iguala a g y a h, pues cualquier otro morfismo que los iguale debe factorizarse a través de f).

Split Mono syss $\exists g(gf = id_A)$.

Iso syss $\exists g(gf = id_A \wedge fg = id_B)$.

Proposición 1.1. *Iso $\Rightarrow$ Split Mono $\Rightarrow$ Igualador $\Rightarrow$ Mono.*

El hecho de que en el teorema anterior ninguna implicación pueda invertirse muestra que la teoría de categorías permite visualizar información sintética invisible en la teoría de conjuntos, pues en $\underline{Con}$ mono, igualador y split mono son equivalentes a la inyectividad de la función.

Definición 1.2. Obtenemos las siguientes definiciones mediante dualización de las definiciones anteriores:

"f es *Epi*", es el enunciado dual de "f es Mono".

"f es *Coigualador*", es el dual de "f es Igualador".

"f es *Split Epi*", es el dual de "f es Split Mono".

Claramente el dual del enunciado "f es iso", es él mismo.

Proposición 1.2. *Iso $\Rightarrow$ Split Epi $\Rightarrow$ Coigualador $\Rightarrow$ Epi.*

Definición 1.3. Sean dos morfismos f y g con el mismo codominio, un (el) *pullback* de f y g consiste en un par de morfismos $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "\widetilde{g}"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

tal que para cualquier par de morfismos h_1 y h_2 donde $fh_1 = gh_2$ existe un único morfismo h que hace conmutar los triángulos del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
Q \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, bend left, "h_2"] \arrow[ddr, bend right, "h_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "\widetilde{g}"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}
$$

Diremos en tal caso que el par $(\widetilde{f}, \widetilde{g})$ es el pullback de (f, g).

Observación 1.1. *En la definición de pullback hemos puesto entre paréntesis (el), pues en realidad, aunque un par de mofismos puede tener varios pullbacks, es fácil mostrar que todos son iguales módulo isomorfismo.*

Definición 1.4. "$(\underline{f}, \underline{g})$ es el *pushout* de (f, g)", es el enunciado dual de "$(\underline{f}, \underline{g})$ es el pullback de (f, g)"

1.4. Funtores

Definición 1.5. Dado un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ decimos que:

F es *fiel* syss $\forall A, B \in Ob(\mathcal{C})$, la función $\mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{D}(FA, FB)$ es inyectiva.

F es *pleno* syss $\mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{D}(FA, FB)$ es sobre.

F es *representativo* syss $\forall D \in Ob(\mathcal{D})$ $\exists C \in Ob(\mathcal{C})$ y $\exists f : FC \to D$ tal que f es isomorfismo.

F es una *equivalencia* syss es fiel, pleno y representativo.

Definición 1.6. Una propiedad $p(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$ se dice *preservada* por un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ si siempre que $\mathcal{C}$ satisface $p(C_1, ...C_n, f_1, ...f_n)$ para alguna tupla (C_i) de objetos $\mathcal{C}$ y (f_i) alguna tupla de morfismos de $\mathcal{C}$, entonces $\mathcal{D}$ satisface $p(FC_1, ..., FC_n, Ff_1, ..., Ff_n)$. Se dice que es *reflejada* si siempre que $\mathcal{D}$ satisface $p(FC_1, ..., FC_n, Ff_1, ..., Ff_n)$ entonces $\mathcal{C}$ satisface $p(C_1, ..., C_n, f_1, ..., f_n)$.

Estos conceptos nos serán bastante útiles al momento de demostrar algunos teoremas, pues para demostrar un teorema (o propiedad) en alguna categoría específica, bastará hacerlo en otra categoría más manejable, y luego "trasladar el teorema" por un funtor.

1.5. Representación de Cayley

Definición 1.7. Sea una categoría pequeña $\mathcal{A}$, su *representación de Cayley* es el funtor $C : \mathcal{A} \to \underline{Con}$ definido de la siguiente manera: $CA = \{f : X \to A \mid X \in Ob(\mathcal{A})\}$, y $C(A \xrightarrow{g} B)$ es la función que a cada morfismo $f \in CA$ le asigna $gf \in CB$.

Nota 1.1. La representación de Cayley es un funtor fiel, luego toda categoría pequeña es isomorfa a una subcategoría de $\underline{Con}$.

Teorema 1.1. *Toda sentencia elemental, cuantificada universalmente y verdadera en* $\underline{Con}$ *es verdadera en todas las categorías.*

Demostración. Sea ϕ una sentencia de este tipo. Si ϕ es verdadera en $\underline{Con}$ entonces es verdadera en cualquiera de sus subcategorías, luego es verdadera en cualquier categoría pequeña porque la representación de Cayley es un funtor inyectivo en objetos y en morfismos. Si ϕ no fuera verdadera en una categoría $\mathcal{C}$ entonces no sería verdadera en la subcategoría de $\mathcal{C}$ generada por los elementos que aparecen en el contraejemplo de ϕ. Pero esta categoría es pequeña, pues los objetos del contraejemplo son finitos luego los morfimos que los relacionan forman un conjunto. ■

CAPÍTULO 2

Categorías cartesianas

2.1. Relaciones

Definición 2.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sean $A, B \in Ob(\mathcal{C})$. Un (el) producto de A y B consiste en una tripla $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$, $A \times B \in Ob(\mathcal{C})$, $A \times B \xrightarrow{\pi_A} A$, $A \times B \xrightarrow{\pi_B} B$ tal que $\forall D \xrightarrow{f} A$, $\forall D \xrightarrow{g} B$, $\exists! D \xrightarrow{\phi} A \times B$ donde

$$\begin{tikzcd}
& D \arrow[d, "\phi"] \arrow[ddl, "f"'] \arrow[ddr, "g"] & \\
& A \times B \arrow[dl, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_B"'] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

Observación: El producto es único módulo isomorfismo, pues si $((A \times B)', \pi'_A, \pi'_B)$ es otro producto de A y B entonces

$$\begin{tikzcd}
& (A \times B)' \arrow[d, shift right, "\phi"'] \arrow[ddl, "\pi'_A"'] \arrow[ddr, "\pi'_B"] & \\
& A \times B \arrow[u, shift right, "\phi'"'] \arrow[dl, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_B"'] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

Se tiene $\phi'\phi = id_{(A\times B)'}$ y $\phi\phi' = id_{(A\times B)}$.

De igual forma podemos definir *el* producto de una familia de objetos $\mathcal{M} \subseteq Ob(\mathcal{C})$

como un objeto $\prod \mathcal{M}$ y una familia de morfismos $(\prod \mathcal{M} \xrightarrow{\pi_M} M)_{M \in \mathcal{M}}$ tal que para $\forall (D \xrightarrow{f_M} M)_{M \in \mathcal{M}}$ $\exists! D \xrightarrow{\phi} \prod \mathcal{M}$ tal que $\pi_M \phi = f_M$ para todo $M \in \mathcal{M}$.

Al igual que en conjuntos, podríamos definir una relación R entre A y B mediante un morfismo mono $R \xrightarrow{f} A \times B$. Sin embargo esta definición no es apropiada categóricamente, pues se desdibuja la información sintética acerca de R y conviene entonces introducir otra definición equivalente.

Definición 2.2. Un par mónico $R(r_1, r_2)$ entre A y B es un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[dr, "r_2"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

tal que, dados dos morfismos g y h, si $r_1 g = r_1 h$ y $r_2 g = r_2 h$ entonces $g = h$.

Definición 2.3. Dos pares mónicos $R(r_1, r_2)$, $R'(r'_1, r'_2)$ entre A y B son isomorfos si existe un isomorfismo $R \xrightarrow{f} R'$ tal que $r'_1 f = r_1$ y $r'_2 f = r_2$

Definición 2.4. Dado un par mónico R, una *relación* $[R]$ entre A y B es la clase de todos los pares mónicos isomorfos a R.

Definición 2.5. Un par mónico S *tabula* una relación $[R]$ si $S \in [R]$.

Denominamos $Rel(A, B)$ la clase de todas las relaciones entre A y B. Por facilidad en la notación denotamos una relación $[R]$ simplemente por alguna relación que la tabule, por ejemplo R. El interés de que se defina una relación como la clase de equivalencia de un par mónico y no simplemente como el par mónico se ve claramente en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1. *En* $\underline{Con}$*, sea* $R = \{2, 4, 6\}, A = B = \{1, 2, 3\}, r_1(x) = x/2, r_2(x) = 2$ *un par mónico, y sea* $R' = \{3, 6, 9\}, A = B = \{1, 2, 3\}, r_1(x) = x/3, r_2(x) = 2$*, otro par mónico; los pares mónicos* R *y* R' *son isomorfos y ambos tabulan la misma relación conjuntista* $[R] = [R'] = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$.

Definición 2.6. Dado $A \in Ob(\mathcal{C})$, un *subobjeto* de A es una clase de equivalencia de monomorfismos f con codominio A . Definimos la clase de los subobjetos de A como $Sub(A) = \{[f] : [f] \text{ es subobjeto de } A\}$. Diremos que $[f] \subseteq A$ si $[f] \in Sub(A)$.

Decimos que una categoría $\mathcal{C}$ está *bien potenciada* si para cada $A \in Ob(\mathcal{C})$, $Sub(A)$ es un conjunto. De ahora en adelante asumiremos que todas la categorías con las que trabajemos están bien potenciadas.

Dada una categoría cartesiana $\mathcal{C}$, definimos el funtor contravariante

$$\begin{array}{rccc} Sub: & \mathcal{C} & \longrightarrow & \underline{Con} \\ & A & \mapsto & Sub(A) \\ & f \downarrow & & \uparrow f^{-1} \\ & B & \mapsto & Sub(B) \end{array}$$

tal que si $[g]$ es un subobjeto de B, $f^{-1}([g]) = [\widetilde{f}]$ donde $(\widetilde{f}, \widetilde{g})$ es el pullback de (f, g).

Este funtor está bien definido pues veremos más adelante que toda categoría cartesiana posee pullbacks.

Teorema 2.1. *Existe una correspondencia biyectiva entre* $Sub(A \times B)$ *y* $Rel(A, B)$*. Además, esta correspondencia es natural, es decir, existe una transformación natural entre los funtores* $Sub(\_ \times B)$ *y* $Rel(\_, B)$*.*

Demostración. Dado un par mónico $R(r_1, r_2)$ entre A y B, por definición de producto existe un único morfismo $R \xrightarrow{r} A \times B$ tal que $\pi_1 r = r_1$ y $\pi_2 r = r_2$, y es fácil ver que r es mono por definición de par mónico. Por otro lado, dado un monomorfismo $R \xrightarrow{r} A \times B$, $R(\pi_1 r, \pi_2 r)$ es un par mónico. Por lo tanto esta correspondencia biyectiva entre pares mónicos de A y B y monos que entran a $A \times B$ genera una correspondencia biyectiva entre $Sub(A \times B)$ y $Rel(A, B)$.

El funtor $Rel(\_, B)$ se define de la manera obvia usando pullbacks (similar al funtor Sub) y resulta inmediata la naturalidad. ■

Freyd [1990] indicó cómo entender las relaciones en un ámbito categórico mediante dos caminos. El primero, evidenciando cuáles eran las propiedades que debía poseer una categoría para que sus relaciones se comportaran "bien", en el sentido de que heredaran las operaciones y propiedades básicas que tienen las relaciones conjuntistas, en particular la operación de composición. El segundo, axiomatizando un nuevo tipo de categorías cuyos morfismos en realidad capturan la idea intuitiva de relación, y no la de función como es usual. El primer camino es el que resumiremos en este trabajo, pues las categorías intermedias resultan ser el ambiente necesario y suficiente para que las operaciones y propiedades de las relaciones sean las que esperamos.

2.2. Categorías cartesianas

Definición 2.7. Una categoría es *cartesiana* si posee productos finitos e igualadores. (Nota: dependiendo de las aproximaciones, se define cartesiana sin requerir igualadores).

Proposición 2.1. *Sea* $\mathbb{P}$ *un cpo,* $\mathbb{P}$ *es un semiretículo inferior con* $\mathbf{1}$ *syss* $\mathcal{C}_{\mathbb{P}}$ *es cartesiana.*

Demostración. $\prod \emptyset = \mathbf{1}$, $\prod\{X_1, ..., X_n\} = inf\{X_1, ..., X_n\}$ y el igualador de dos morfismos $A \overset{\leq}{\underset{\leq}{\rightrightarrows}} B$ es $A \xrightarrow{\leq} A$. ■

Ejemplo 2.2. *$\underline{Con}$, $\underline{Hau}$, $\underline{Top}$, $\underline{Grp}$ y $\underline{Anl}$ son cartesianas. En efecto, los productos son los usuales en cada una, y, dados dos morfismos* $D \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} E$*, su igualador es* $C \xrightarrow{\subseteq} D$*, donde* $C = \{x \in D : f(x) = g(x)\}$*. (En $\underline{Grp}$ y $\underline{Anl}$, se tiene* $C = Ker(f - g)$*).*

Ejemplo 2.3. *$\underline{FP}$ es cartesiana:* $\emptyset = \prod \emptyset$*, el producto de A y B está dado por*

$$\begin{tikzcd}
 & A \sqcup AB \sqcup B \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

donde AB es el conjunto de parejas ordenadas usual. El igualador de $D \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} E$ está dado por $(D \backslash C) \xrightarrow{\subseteq} D$ donde $C = \{x : f(x) \neq g(x)\}$.

Ejemplo 2.4. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría pequeña, entonces la categoría funtorial $\underline{Con}^{\mathcal{C}}$ es cartesiana, el producto de dos funtores $F : \mathcal{C} \to \underline{Con}$ y $G : \mathcal{C} \to \underline{Con}$ es el funtor*

$$\begin{array}{rccl} F \times G : & \mathcal{C} & \longrightarrow & \underline{Con} \\ & C & \mapsto & FC \times GC \\ & f \downarrow & \mapsto & \downarrow Ff \times Gf \\ & D & \mapsto & FD \times GD \end{array}$$

y las proyecciones π_F y π_G son las transformaciones naturales dadas por las proyecciones usuales en conjuntos.

Observación 2.1. *Si una categoría tiene pullbacks y objeto final entonces tiene productos.*

Notemos que $\mathcal{HL}$ no es cartesiana, pues si existiera el producto entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ entonces habría un abierto de $\mathbb{R}$ homeomorfo a un abierto de $\mathbb{C}$. Sin embargo $\mathcal{HL}$ sí posee pullbacks. Para demostrarlo necesitaremos del siguiente lema.

Lema 2.1. *Sea $C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E$ en $\underline{Top}$, si g y gf son homeomorfismos locales, entonces f es homeomorfismo local.*

Demostración. Sea $c \in C$. Como gf es homeomorfismo local entonces $\exists V_1 \subseteq C$, $W_1 \subseteq E$ abiertos tal que $c \in V_1$ y $V_1 \xrightarrow{gf} W_1$ es homeomorfismo. Como g es homeomorfismo local $\exists V_2 \subseteq D$, $W_2 \subseteq E$ abiertos tal que $f(c) \in V_2$ y $V_2 \xrightarrow{g} W_2$ es homeomorfismo. Sea $V = (gf)^{-1}(W_1 \cap W_2)$, V es abierto y $V \xrightarrow{f} f(V)$ es homeomorfismo. ■

Teorema 2.2. *La categorías de haces $\mathcal{SH}(B)$ es cartesiana.*

Demostración. Veamos que $\mathcal{HL}$ posee pullbacks. Sea

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\widetilde{f}} & B \\ {\scriptstyle \widetilde{g}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A & \xrightarrow[f]{} & C \end{array}$$

el pullback de (f, g) en $\underline{Top}$ con f y g morfismos en $\mathcal{HL}$. Para ver que el pullback está en $\mathcal{HL}$ basta ver, en vista del lema anterior, que $f\widetilde{g}$ es morfismo de $\mathcal{HL}$. Sea $(x, y) \in P$; como f y g son homemorfismos locales podemos encontrar $U_1 \ni x$ abierto de A , $U_2 \ni y$ abierto de B y $V \ni f(x)(= g(y))$ abierto de C tal que $U_1 \xrightarrow{f} V$ y $U_2 \xrightarrow{g} V$ son homemorfismos. Veamos que $\widetilde{g}^{-1}(U_1)$ es homeomorfo a V. Dado un abierto W de $\widetilde{g}^{-1}(U_1)$, $W = W' \cap P$ para algún abierto W' de $U_1 \times U_2$, y $f\widetilde{g}(W) = f\pi_A(W') \cap g\pi_B(W')$ es abierto de V, por lo tanto $\widetilde{g}^{-1}(U_1) \xrightarrow{f\widetilde{g}} V$ es homemorfismo, y $f\widetilde{g}$ está en $\mathcal{HL}$.

Como $\mathcal{HL}$ posee pullbacks, entonces $\mathcal{SH}(B)$ también los posee, luego tiene productos (pues tiene objeto final), por lo tanto es cartesiana. ■

Nota 2.1. La demostración que presentamos de que $\mathcal{HL}$ posee pullbacks se puede simplificar si se plantea desde un punto de vista categórico adecuado. En efecto, sea

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "\widetilde{g}"'] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

un diagrama de pullback en $\underline{Top}$ donde g es un homemorfismo local (f cualquier función continua). Para ver que $\widetilde{g}$ es homemorfismo local, sea $p \in P$ y sea U un abierto que contiene a $\widetilde{f}(p)$ tal que $g|_U$ es un homemorfismo. Entonces el siguiente diagrama también es un pullback:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{f}^{-1}(U) \arrow[r, "\widetilde{f}|_{\widetilde{f}^{-1}(U)}"] \arrow[d, "\widetilde{g}|_{\widetilde{f}^{-1}(U)}"'] & U \arrow[d, "g|_U"] \\
g^{-1}(f(U)) \arrow[r, "f"'] & f(U)
\end{tikzcd}$$

donde g_U es un homemorfismo (isomorfismo en $\underline{Top}$). Pero como todo pullback en cualquier categoría preserva isomorfismos, entonces $\widetilde{g}|_{\widetilde{f}^{-1}(U)}$ es un homeomorfismo, por lo tanto $\widetilde{g}$ es un homemorfismo local.

2.3. Representación de categorías cartesianas

Definición 2.8. Una *representación cartesiana* es un funtor entre categorías cartesianas que preserva productos finitos e igualadores.

Observación 2.2. *Un funtor entre categorías cartesianas que preserva pullbacks y objeto final es una representación cartesiana.*

En esta sección presentaremos un análogo del teorema 1.1. Allí vimos que toda categoría pequeña se puede representar fielmente en $\underline{Con}$ y, por lo tanto, si una sentencia elemental universal es verdadera en $\underline{Con}$ es verdadera en todas las categorías. Notemos sin embargo que la representación de Cayley, aunque preserva (y refleja) pullbacks (y cubrimientos, ver capítulo 3), en general no preserva productos, pues la imagen del objeto final no siempre es un conjunto unitario, que son los objetos finales de $\underline{Con}$. Por lo tanto, debemos refinar un poco esta representación para poder extender el teorema a las sentencias elementales con predicados cartesianos (pullbacks, igualadores y objeto final).

Definición 2.9. Dada una categoría $\mathcal{C}$ y $B \in Ob(\mathcal{C})$, definimos el *funtor olvidadizo*

$$\Sigma : \mathcal{C}/B \to \mathcal{C}$$

que a cada $(A \xrightarrow{f} B) \in Ob(\mathcal{C}/B)$ le asigna $A \in Ob(\mathcal{C})$, y a cada morfismo f de $\mathcal{C}/B$, le asigna el mismo morfismo f del cual proviene en $\mathcal{C}$ (ver sección 1.2).

Lema 2.2. *Sea $\mathcal{D}$ una categoría con objeto final 1, y sea $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un funtor tal que $F(1) = B$. Entonces existe un único funtor $F' : \mathcal{D} \to \mathcal{C}/B$ tal que $F = \Sigma F'$ y $F'(1) = id_B$.*

Demostración. Definimos F' por $F'D = FD \xrightarrow{F1_D} F1$, donde $1_D : D \to 1$. La unicidad se obtiene de la segunda condición sobre F'. ■

Sea $\mathcal{C}$ una categoría cartesiana pequeña y sea $C : \mathcal{C} \to \underline{Con}$ su representación de Cayley. Si 1 es el objeto final de $\mathcal{C}$, podemos identificar $C1$ con $B = Ob(\mathcal{C})$. Luego por el lema anterior podemos factorizar C como $\mathcal{C} \xrightarrow{C'} \underline{Con}/B \xrightarrow{\Sigma} \underline{Con}$.

Lema 2.3. *C' es una representación cartesiana fiel.*

Demostración. Basta ver, por la observación anterior, que es fiel y que preserva pullbacks y objeto final. Es fiel pues C es fiel; preserva pullbacks pues C los preserva y es fácil ver que Σ los refleja; por construcción preserva objeto final. ■

Recordemos que el objetivo de estas representaciones consiste en poder reducir el estudio de propiedades de categorías cartesianas arbitrarias a propiedades de la categoría de los conjuntos, la cual es más manejable (o por lo menos estamos más familiarizados con ella). Por lo tanto C' no es propiamente la representación que estamos buscando, y necesitamos estudiar cómo se relacionan $\underline{Con}/B$ y $\underline{Con}$.

Definición 2.10. Sea B un conjunto, definimos la *categoría de funciones* $\underline{Con}^B$, cuyos objetos son las funciones $f : B \to \underline{Con}$, y sus morfismos $f \xrightarrow{h} g$ son familias de funciones $h = (h_b : f(b) \to g(b))_{b \in B}$.

Primero que todo notemos que $\underline{Con}/B$ definida anteriormente es equivalente (según la definición 1.5) a la categoría de funciones con dominio B, $\underline{Con}^B$. La equivalencia está dada por el funtor

$$\begin{array}{rccl} F: & \underline{Con}/B & \longrightarrow & \underline{Con}^B \\ & f & \mapsto & Ff \\ & h\downarrow & & \downarrow Fh = (h|_{f^{-1}(b)})_{b\in B} \\ & g & \mapsto & Fg \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{rccl} Ff: & B & \longrightarrow & \underline{Con} \\ & b & \mapsto & f^{-1}b \end{array}$$

Luego toda categoría cartesiana pequeña puede ser fielmente representada en una potencia de $\underline{Con}$ mediante el funtor FC'.

En general, si tenemos un funtor $F : \mathcal{C} \to \underline{Con}^B$ podemos pensar este funtor como la unión de sus funtores coordenados $(F_b)_{b \in B}$

$$\begin{array}{rccl} F_b: & \mathcal{C} & \longrightarrow & \underline{Con} \\ & C & \mapsto & FC(b) \\ & f\downarrow & \mapsto & \downarrow Ff|_{FC(b)} \\ & D & \mapsto & FD(b) \end{array}$$

donde $Ff|FC(b)$ es la función Ff restringida al conjunto $FC(b)$.

Lema 2.4. *Si el funtor $F : \mathcal{C} \to \underline{Con}^B$ es una representación cartesiana fiel entonces los funtores $(F_b)_{b \in B}$ son una familia colectivamente fiel de representaciones cartesianas.*

Demostración. Si F preserva objeto final es porque $F(1) = id_B$ es decir que $F_b(1) = \{b\}$, luego F_b preserva objeto final. Las otras propiedades se verifican fácilmente. ■

En el caso que estamos estudiando, los funtores coordenados de FC' resultan ser los funtores representables.

Definición 2.11. Dada una categoría $\mathcal{C}$ y $A \in Ob(\mathcal{C})$, definimos el *funtor representable*

$$\begin{array}{rccc} (A, \_) : & \mathcal{C} & \longrightarrow & \underline{Con} \\ & B & \mapsto & \mathcal{C}(A, B) \\ & f \downarrow & \mapsto & \downarrow (A, f) \\ & C & \mapsto & \mathcal{C}(A, C) \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{rccc} (A, f) : & \mathcal{C}(A, B) & \longrightarrow & \mathcal{C}(A, C) \\ & g & \mapsto & fg \end{array}$$

Notemos que $FC'(B) : B \to \underline{Con}$ es la función que, a cada objeto A de $\mathcal{C}$, le asigna el conjunto $(A, \_)(B) = \mathcal{C}(A, B)$, y $FC'(f)$ es la función que, a cada morfismo f, le asigna la función (A, f). Luego los funtores coordenados de FC' en realidad son los funtores representables $FC'_B = (B, \_)$, cada uno de los cuales es entonces una representación cartesiana, y son colectivamente fieles, es decir, la unión de todos es fiel. Este resultado puede extenderse a categorías cartesianas arbitrarias (no necesariamente pequeñas), pues los funtores representables están definidos para cualquier categoría, luego si no fueran representaciones cartesianas o no fueran colectivamente fieles, no lo serían en una subcategoría cartesiana pequeña.

Definición 2.12. El *lenguaje de las categorías cartesianas* es el lenguaje de las categorías, añadiéndole nuevos símbolos de predicado para productos, igualadores y objeto final.

Definición 2.13. Un *predicado primitivo cartesiano* es un predicado primitivo en el lenguaje de categorías cartesianas.

Definición 2.14. Una *sentencia de Horn cartesiana* es una sentencia de la forma

$$(p_1 \wedge ... \wedge p_n) \to q$$

cuantificada universalmente, donde $p_1, .., p_n, q$ son predicados primitivos cartesianos.

Teorema 2.3. *Toda sentencia de Horn cartesiana verdadera en $\underline{Con}$ es verdadera en todas las categorías cartesianas.*

Demostración. Supongamos que, en una categoría cartesiana $\mathcal{C}$, la sentencia de Horn cartesiana $(p_1 \wedge ... \wedge p_n) \to q$ no es válida. Entonces $\mathcal{C}$ satisface $p_1, ..., p_n$ pero no q. Por la fidelidad colectiva de los funtores representables, para algún $A \in Ob(\mathcal{C})$ el funtor $(A, \_)$ lleva el contraejemplo a $\underline{Con}$, donde se sigue satisfaciendo $p_1, ..., p_n$ pero no q. ■

CAPÍTULO 3

Categorías regulares

3.1. Imágenes y cubrimientos

Definición 3.1. Sea $A \xrightarrow{f} B$ un morfismo factorizable vía un monomorfismo (es decir, existen g y h morfismos, h mono tal que $hg = f$). Definimos $im(f) \in Sub(B)$, la *imagen* de f, como la clase del mínimo mono h mediante el cual se factoriza f, es decir, si existen g_1 y h_1 morfismos con h_1 mono tal que $f = h_1 g_1$ entonces

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"] \arrow[ddr, "g_1"'] & & B \\
& C \arrow[ur, "h"'] \arrow[d] & \\
& C' \arrow[uur, "h_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Observación 3.1. *No todas las categorías poseen imágenes. Por ejemplo, en la categoría asociada al monoide* $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \cdot)$ *el morfismo* $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{(1,0)} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *tiene la factorización* $(1,0) = (1,0)(1,p)$ *donde para cualquier* $p \neq 0$, $(1,p)$ *es mono (y es fácil ver que son los únicos monomorfismos que factorizan a* $(1,0)$*). Sin embargo el conjunto de los* $(1,p)$ *no tiene mínimo ya que, para cualquier* $(1,p)$*, si escogemos* $p' > p$ *no existe* (x,y) *tal que* $(1,p) = (x,y)(1,p')$.

Definición 3.2. Sea $A \xrightarrow{f} B$ un morfismo con imagen, decimos que f es un *cubrimiento* si $im(f) = [id_B]$.

Definición 3.3. Sea $F = \{f_i\}$ una familia de morfismos con un mismo codominio B. F es un *cubrimiento* de B, si el mínimo subobjeto de B por el cual se pueden factorizar todas las f_i simultáneamente es $[id_B]$.

3.2. Categorías regulares

Hemos visto que las categorías cartesianas son el ambiente natural para definir relaciones. Sin embargo, si queremos poder *componer* relaciones tendremos que requerir que la categoría posea pullbacks e imágenes, y si, además, deseamos que esa composición sea *asociativa*, tendremos que asumir una condición adicional de *regularidad*. El teorema central de este capítulo nos mostrará que el ambiente minimal para que la composición de relaciones sea asociativa se encuentra en las categorías regulares. De hecho, en una categoría cartesiana, la composición de relaciones es asociativa si y solamente si la categoría es regular.

Lema 3.1. *Toda categoría cartesiana posee pullbacks.*

Demostración. Dados dos morfismos $A \xrightarrow{f} C$ y $B \xrightarrow{g} C$, construimos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "i"] \arrow[ddl, "\pi_A i"'] \arrow[ddr, "\pi_B i"] & \\
 & A \times B \arrow[dl, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_B"'] & \\
A \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\
 & C &
\end{tikzcd}$$

donde i es el igualador de $f\pi_A$ y $g\pi_B$. Es fácil ver que el cuadrado exterior es un diagrama de pullback. ■

Definición 3.4. Una categoría $\mathcal{C}$ es regular si es cartesiana, posee imágenes, y los pullbacks preservan cubrimientos.

Definición 3.5. En una categoría cartesiana con imágenes, sean $R(r_1, r_2)$ una relación entre A y B, y $S(s_1, s_2)$ una relación entre B y C. Construimos la *composición* de R y S mediante el siguiente diagrama que vamos a explicar:

$$\begin{tikzcd}
 & & RS \arrow[r, "im{[f]}"] & A \times C & \\
 & & P \arrow[u, "f'"] \arrow[ur, "f"'] \arrow[dl, "\widetilde{s_1}"'] \arrow[dr, "\widetilde{r_2}"] & & \\
 & R \arrow[dl, "r_1"] \arrow[dr, "r_2"'] & & S \arrow[dl, "s_1"] \arrow[dr, "s_2"'] & \\
A & & B & & C
\end{tikzcd}$$

La construcción se hace siguiendo estos pasos:

1. Construimos el pullback $(\widetilde{r_2}, \widetilde{s_1})$ de (r_2, s_1).
2. Por definición de entradas en el producto $A \times C$ existe un único morfismo f tal que $\pi_A f = r_1 \widetilde{s_1}$ y $\pi_C f = s_2 \widetilde{r_2}$.
3. Factorizamos f a través de su imagen: $im[f]f' = f$.
4. $im[f]$ es un subobjeto de $A \times C$, luego por el teorema 2.1 éste determina la relación $RS(\pi_A im[f], \pi_C im[f])$, que definimos como la composición de R y S.

La composición de relaciones que usaremos es la inversa de la usual: si R es una relación entre A y B, y S una relación entre B y C entonces denotamos su compuesta por RS.

Definición 3.6. Dada una relación
$$\begin{tikzcd}
 & R \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[dr, "r_2"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$
su relación opuesta R° está dada por
$$\begin{tikzcd}
 & R^\circ \arrow[dl, "r_2"'] \arrow[dr, "r_1"] & \\
B & & A
\end{tikzcd}$$

Dado un morfismo $A \xrightarrow{f} B$, podemos asociarle a este morfismo la relación determinada por el par mónico
$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "id_A"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$
El contexto nos permite denotar a esta relación también por f. Nótese que, dados dos morfismos $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} C$, la composición de sus relaciones fg es la relación asociada al morfismo gf.

Definición 3.7. Una relación *tabula* un morfismo si el par mónico que asociamos al morfismo pertenece a la relación.

Observación 3.2. *Una relación* $R(r_1, r_2)$ *tabula un morfismo syss* r_1 *es iso.*

Observación 3.3. *En una categoría regular se tiene que para toda relación* $R(r_1, r_2)$, $R = r_1{}^\circ r_2$.

Lema 3.2. *En una categoría regular, todo pullback de cubrimientos es pushout.*

Demostración. Sea

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "\widetilde{g}"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

diagrama de pullback con f y g cubrimientos, sean h e i morfismos tal que

$$\begin{tikzcd} & (P)' \arrow[dl, "\widetilde{g}"'] \arrow[dr, "\widetilde{f}"] & \\ A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & C & B \arrow[l, "g"'] \arrow[dl, "i"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

y consideremos la relación $R = (f^\circ h) \cap (g^\circ i)$.

En <u>*Con*</u> esta relación es una función: en efecto, dado un punto p en C, existe $(x_1, x_2) \in P$ tal que $f(x_1) = p$ y $g(x_2) = p$ pues f y g son cubrimientos (sobreyectivas en <u>*Con*</u>), y por hipótesis $h\widetilde{g}(x_1, x_2) = i\widetilde{f}(x_1, x_2)$. Si llamamos a este último elemento y tenemos que xRy. Ahora, si y no fuera único entonces existiría $(x_1', x_2') \in P$ donde $f(x_1') = p$, $g(x_2') = p$, $y' = h\widetilde{g}(x_1', x_2') = i\widetilde{f}(x_1', x_2')$ y $y \neq y'$, pero entonces $y = h\widetilde{g}(x_1, x_2')$ y $y' = i\widetilde{f}(x_1, x_2')$, contradiciendo el hecho de que $h\widetilde{g} = i\widetilde{f}$.

Por lo tanto, tenemos el siguiente diagrama en <u>*Con*</u>

$$\begin{tikzcd} & (P)' \arrow[dl, "\widetilde{g}"'] \arrow[dr, "\widetilde{f}"] & \\ A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & C \arrow[d, "R"] & B \arrow[l, "g"'] \arrow[dl, "i"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

Por otro lado, se puede ver que el predicado "la relación R tabula un morfismo" es regular (por el lema 3.3) . Así, por el corolario 3.1 de la siguiente sección, el pushout en <u>*Con*</u> se refleja en cualquier categoría regular. Finalmente, es fácil ver que, dentro de la categoría regular, si existe tal morfismo R, entonces es único. Por lo tanto el diagrama es un pushout. ■

La prueba del teorema anterior puede malinterpretarse: no estamos diciendo que los pushout se reflejen de <u>*Con*</u> en las categorías regulares (lo cuál no es cierto en general), lo único que reflejamos fue la propiedad de que la relación construida es un morfismo. Luego, ya dentro de la categoría, se demuestra que éste es único bajo la hipotesis que los morfismos del pullback son cubrimientos.

Teorema 3.1. *En una categoría con imágenes, todo coigualador es cubrimiento, y si además la categoría posee pullbacks y los pullbacks preservan cubrimientos todo cubrimiento es coigualador.*

Demostración. Sea $f = coeq(g, h)$ y sea $ij = f$ la factorización de f donde $i = im(f)$. Como $fg = fh$ entonces $ijg = ijh$, y como i es mono entonces $jg = jh$. Por ser f coigualador existe un único morfismo k tal que $kf = j$, por lo tanto $ikf = ij = f$. Como f en particular es epi tenemos que $ik = id$, y además $iki = i$ e i es mono, luego $ki = id$. Por tanto i es iso, es decir, f es cubrimiento. Sea ahora una categoría con pullbacks y sea f un cubrimiento, basta entonces considerar el pullback:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Como todo pullback de cubrimientos es pushout en una categoría regular, f resulta ser el coigualador de p_1 y p_2. ■

Las relaciones entre un par de objetos A y B están en correspondencia con $Sub(A \times B)$, y este a su vez es un conjunto ordenado: $[f] \leq [g]$ si existe h (automáticamente mono) tal que $hf = g$. Notemos además que en toda categoría cartesiana este orden es un semirretículo inferior, donde el inf de dos subobjetos es el pullback.

Si R y S son dos relaciones entre A y B, decimos que $R \subseteq S$ si el subobjeto de $A \times B$ asociado a R es menor o igual al subobjeto asociado a S.

Definición 3.8. Sea R una relación entre A y B, decimos que R es *entera* si $id_A \subseteq RR^o$, y decimos que R es *simple* si $R^oR \subseteq id_B$.

Lema 3.3. *En una categoría regular, dada la relación*

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

se tiene que

1. f es cubrimiento syss R es entera.
2. f es mono syss R es simple.
3. R tabula un morfismo syss es entera y simple.

Demostración.

1. Sea R entera. Tenemos entonces los siguientes diagramas

$$
\begin{tikzcd}
 & & RR^\circ \arrow[r, "im[h]"] & A \times A & \\
 & & P \arrow[u, "c"] \arrow[ur, "<f\widetilde{g_1}, f\widetilde{g_2}>=h"'] \arrow[dl, "\widetilde{g_1}"'] \arrow[dr, "\widetilde{g_2}"] & & \\
 & R \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & & R^\circ \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A & & B & & A
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, "\phi"] \arrow[ddl, "id_A"'] \arrow[ddr, "id_A"] & \\
 & RR^o \arrow[dl, "\pi_A im[h]"] \arrow[dr] & \\
A & & A
\end{tikzcd}
$$

donde ϕ es mono, y $\pi_A h = f\widetilde{g_1}$. Como id_A es cubrimiento entonces $\pi_A im[h]\phi$ es cubrimiento, por lo tanto $\pi_A im[h]$ es cubrimiento. Como c es cubrimiento entonces $\pi_A im[h]c = \pi_A h = f\widetilde{g_1}$ es cubrimiento y, por ende, f lo es también.

2. Sea R simple. Entonces

$$\begin{tikzcd}
 & & R^\circ R \arrow[r, "im[h]"] & B\times B & \\
 & & P \arrow[u, "c"] \arrow[ur, "<g\widetilde{f_1},g\widetilde{f_2}>=h"'] \arrow[dl, "\widetilde{f_1}"'] \arrow[dr, "\widetilde{f_2}"] & & \\
 & R^\circ \arrow[dl, "g"] \arrow[dr, "f"] & & R \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"'] & \\
B & & A & & B
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & R^\circ R \arrow[d, "\phi"] \arrow[ddl, "r_1"'] \arrow[ddr, "r_2"] & \\
 & B \arrow[dl, "id_B"] \arrow[dr, "id_B"'] & \\
B & & B
\end{tikzcd}$$

(ϕ mono). Como se tiene que $r_1 = r_2$ entonces $r_1c = r_2c$, luego $g\widetilde{f_1} = g\widetilde{f_2}$. Por definición de par mónico, $f\widetilde{f_1} = f\widetilde{f_2}$ fuerza entonces $\widetilde{f_1} = \widetilde{f_2}$, y es fácil ver que esto sucede solamente si f es mono.

La otra implicación es trivial, basta notar que si f es mono entonces $\widetilde{f_1} = \widetilde{f_2}$.

3. La relación R tabula un morfismo syss f es iso syss f es coigualador y mono, pero estamos en categorías regulares donde coigualador es equivalente a cubrimiento. ■

3.3. Representación de categorías regulares

Demostraremos en esta sección que toda sentencia de Horn regular verdadera en <u>Con</u> es verdadera en toda categoría regular.

Definición 3.9. En una categoría regular $\mathcal{C}$, el *soporte* de un objeto A, $spt(A)$ es la imagen de $A \to 1$, donde 1 es el objeto final de $\mathcal{C}$. Decimos que A tiene *buen soporte* si su soporte es $[id_1]$, es decir, si $A \to 1$ es un cubrimiento.

Definición 3.10. Un objeto A es *punteado* si la colección de morfismos de 1 a A es un cubrimiento de A.

Definición 3.11. Una categoría regular es *capital* si todo objeto con buen soporte es punteado.

Ejemplo 3.1. *$\underline{Grp}$ no es una categoría capital. El grupo unitario $\{e\}$ es el objeto final de $\underline{Grp}$ y todo morfismo sobre $\{e\}$ es un cubrimiento, luego todo objeto tiene buen soporte. Sin embargo, el grupo de los racionales $(\mathbb{Q}, +)$ no es punteado, pues el único morfismo $\{e\} \xrightarrow{f} (\mathbb{Q}, +)$ envía e en 0, pero este morfismo no es un cubrimiento, pues $im[f] = [f] \neq [id_{\mathbb{Q}}]$.*

Ejemplo 3.2. *$\underline{Con}$, $\underline{Top}$, $\underline{Hau}$, son categorías capitales.*

Sea $\mathcal{C}$ una categoría con productos finitos, y $B \in Ob(\mathcal{C})$. Consideremos el funtor

$$(B \times \_) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}.$$

Como la imagen del objeto final de $\mathcal{C}$ por este funtor es isomorfo a B, por el lema 2.2 podemos factorizar este funtor como

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{C}/B \xrightarrow{\Sigma} \mathcal{C}.$$

Lema 3.4.

1. *Si $\mathcal{C}$ es regular entonces $\mathcal{C}/B$ también es regular.*
2. *Δ es una representación de categorías regulares.*
3. *Δ es fiel syss B tiene buen soporte.*

Demostración.

1. $\mathcal{C}/B$ es cartesiana, pues las imágenes de los morfismos en $\mathcal{C}/B$ son las mismas que en $\mathcal{C}$, y como la construcción de los pullbacks en $\mathcal{C}/B$ es la misma construcción que se hace en $\mathcal{C}$ entonces los pullbacks preservan cubrimientos.
2. El funtor $(B \times \_)$ preserva pullbacks, y el funtor Σ los refleja, luego Δ preserva pullbacks. Como además preserva el objeto final, por la observación 2.2 Δ es una representación cartesiana. Por otro lado, como Σ refleja cubrimientos es suficiente mostrar que $(B \times \_)$ preserva cubrimientos para ver que Δ los preserva.

   En toda categoría el siguiente diagrama es un pullback

$$\begin{tikzcd}
B \times A_1 \arrow[r, "id_B \times f"] \arrow[d] & B \times A_2 \arrow[d] \\
A_1 \arrow[r, "f"'] & A_2
\end{tikzcd}$$

   Luego si f es cubrimiento, por regularidad $id_B \times f$ también es cubrimiento.

3. ($\Leftarrow$) Como Σ es fiel, entonces Δ es fiel siempre y cuando $(B \times \_)$ sea fiel. Como B tiene buen soporte, del siguiente pullback vemos que, por regularidad, $B \times A \to A$ es un cubrimiento:

$$\begin{tikzcd} B \times A \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ B \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

Por otro lado, el funtor $(B \times \_)$ preserva y refleja isos, pues si un morfismo $A' \xrightarrow{f} A$ genera un iso $B \times A' \xrightarrow{id_B \times f} B \times A$ entonces f es mono (hecho fácil de comprobar), y además del pullback

$$\begin{tikzcd} B \times A' \arrow[r, "id_B \times f"] \arrow[d, "\pi_{A'}"'] & B \times A \arrow[d, "\pi_A"] \\ A' \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

se deduce que f es cubrimiento, pues como π_A y $id_B \times f$ son cubrimientos, entonces $\pi_A(id_B \times f) = f\pi_{A'}$ es cubrimiento y, por tanto, f lo es. Luego, f es cubrimiento y mono, es decir, iso. Así, $(B \times \_)$ preserva y refleja isos. Además, naturalmente preserva igualadores. Pero un funtor entre categorías con igualadores que posea estas propiedades (preservar y reflejar isos, y preservar igualadores) es fiel, pues si un morfismo f es el igualador de dos morfismos g y h, y es isomorfismo, entonces $g = h$.

($\Rightarrow$) Supongamos, por contradicción, que B no tiene buen soporte. Existe entonces un subobjeto propio U de 1 tal que $B \to U \to 1$, lo que induce un isomorfismo $B \times U \to B \times 1$. Como Σ refleja isos, entonces $\Delta U \to \Delta 1$ es isomorfismo, contradiciendo el hecho de que Δ refleja isos.

■

Notemos que, por el numeral 3 del lema anterior, si B es un objeto bien soportado de una categoría regular $\mathcal{C}$ entonces podemos asumir que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}/B$ y que la contenencia es una representación regular.

Demostraremos que toda categoría regular pequeña se puede sumergir en una categoría capital mediante una construcción que requiere del axioma de elección, aunque es posible dar una prueba un poco más complicada que no lo requiere (véase [2, p. 76]).

Definición 3.12. Sea $\mathcal{K}$ una categoría cuyos objetos son categorías regulares pequeñas (no necesariamente todas) y cuyos morfismos son representaciones regulares fieles (tampoco necesariamente todas).

Decimos que $\mathcal{K}$ satisface la *condición de equivalencia* si para cada $\mathcal{C} \in Ob(\mathcal{K})$ y todo funtor de equivalencia $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, se tiene que $\mathcal{D} \in Ob(\mathcal{K})$ y $(\mathcal{C} \to \mathcal{D}) \in \mathcal{K}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

$\mathcal{K}$ satisface la *condición de partición* si para cada $\mathcal{C} \in Ob(\mathcal{K})$ y para cada $A \in Ob(\mathcal{C})$ con buen soporte, se tiene que $\mathcal{C}/A \in Ob(\mathcal{K})$ y $(\mathcal{C} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{C}/A) \in \mathcal{K}(\mathcal{C}, \mathcal{C}/A)$.

$\mathcal{K}$ satisface la *condición de la unión* si, dadas una categoría $\mathcal{D}$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}$ una familia de subcategorías de $\mathcal{D}$ tal que

1. Para cada $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \in \mathcal{F}$ existe $\mathcal{C}'' \in \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}''$ y $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}''$
2. $\mathcal{D} = \bigcup \mathcal{F}$
3. Si $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \in \mathcal{F}$, y $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$ entonces $(\mathcal{C} \overset{\subseteq}{\to} \mathcal{C}') \in \mathcal{K}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$

entonces $\mathcal{D} \in Ob(\mathcal{K})$ y $(\mathcal{C} \overset{\subseteq}{\to} \mathcal{D}) \in \mathcal{K}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ para todo $\mathcal{C} \in \mathcal{F}$.

Observación 3.4. *La categoría de todas las categorías regulares pequeñas cumple las tres condiciones anteriores.*

Veremos que toda categoría regular se puede sumergir en una categoría regular capital usando una construcción al estilo Henkin de teoría de modelos. De hecho, construiremos una cadena ascendente de categorías tal que, a medida que ascendamos en la cadena, cada categoría sea "capital" con respecto a la anterior. La unión de esa cadena resultará entonces una categoría capital. Por la condición de la unión tendremos la submersión que buscamos.

Definición 3.13. Sea $\mathcal{C} \overset{\subseteq}{\to} \mathcal{C}'$, y sea $F = \{f_i\}_i$ una colección de morfismos de $\mathcal{C}'$ con mismo codominio $B \in Ob(\mathcal{C})$. Decimos que F es un cubrimiento de B *relativo* a $\mathcal{C}$ si el único subobjeto $[h]$ de B (con h en $\mathcal{C}$) que factoriza a todos los f_i simultaneamente es $[id_B]$.

Decimos que $\mathcal{C} \overset{\subseteq}{\to} \mathcal{C}'$ es una *capitalización relativa* si para todo objeto $B \in Ob(\mathcal{C})$ bien soportado en $\mathcal{C}$, el conjunto $\mathcal{C}'(id_1, B)$ es un cubrimiento de B relativo a $\mathcal{C}$. En tal caso decimos que *B está bien punteado en $\mathcal{C}'$ con respecto a $\mathcal{C}$.*

De ahora en adelante trabajaremos con una categoría $\mathcal{K}$ fija que cumpla las tres condiciones recién definidas. (Para efectos prácticos podemos pensar en $\mathcal{K}$ como la categoría de todas las categorías regulares pequeñas con representaciones regulares por morfismos).

Lema 3.5. *Para toda $\mathcal{C}$ en $\mathcal{K}$ existe $\mathcal{C}'$ en $\mathcal{K}$ tal que $\mathcal{C} \overset{\subseteq}{\to} \mathcal{C}' \in \mathcal{K}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ es una capitalización relativa.*

Demostración. Daremos una prueba de este hecho usando el axioma de elección, aunque éste no sea necesario (ver [2]). Construimos inductivamente una cadena ascendente de categorías de la siguiente forma:

1. $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$.
2. Dada $\mathcal{C}_\alpha$ sea B el primer elemento bien soportado de $\mathcal{C}$ que no está bien punteado en $\mathcal{C}_\alpha$ (en caso de no haberlo, $\mathcal{C}_\alpha$ ya es una capitalización relativa de $\mathcal{C}$), y definimos $\mathcal{C}_{\alpha+1} = \mathcal{C}_\alpha / B$.
3. Para β ordinal límite, definimos $\mathcal{C}_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} \mathcal{C}_\alpha$.

Recordemos que la contenencia $\mathcal{C}_\alpha \subseteq \mathcal{C}_\alpha/B$ está dada por el funtor Δ. Veamos que ΔB es un objeto bien punteado en $\mathcal{C}_{\alpha+1} = \mathcal{C}_\alpha/B$ con respecto a $\mathcal{C}_\alpha$. El objeto final de $\mathcal{C}_\alpha/B$ es el morfismo $B \xrightarrow{id_B} B$, luego $h =< id_B, id_B >$ es un morfismo en $\mathcal{C}_{\alpha+1}(1_{\mathcal{C}_{\alpha+1}}, \Delta(B))$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "<id_B,id_B>"] \arrow[d, "id_B"'] & B \times B \arrow[dl, "\pi_1"] \\ B & \end{tikzcd}$$

Si $B' \xrightarrow{f} B$ es un mono tal que $g\Delta f = h$ para algún $g \in \mathcal{C}_{\alpha+1}(1_{\mathcal{C}_{\alpha+1}}, \Delta(B'))$, entonces

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "id_B"'] \arrow[dr, "h"] & B' \times B \arrow[d, "<f,id_B>"] \\ B & B \times B \arrow[l, "\pi_1"] \end{tikzcd}$$

luego $fg = id_B$, es decir, f es isomorfismo. Por lo tanto h es un cubrimiento de B relativo a $\mathcal{C}_\alpha$.

Finalmente, notemos que la cadena ascendente debe detenerse en algún ordinal γ pues $\mathcal{C}$ es una categoría pequeña, luego la clase de objetos bien soportados es un *conjunto*. Con ello se tiene que $\mathcal{C} \xrightarrow{\subseteq} \mathcal{C}_\gamma$ es una capitalización relativa. ∎

Las condiciones de $\mathcal{K}$ son necesarias para que el funtor Δ sea un morfismo y además para que podamos considerarlo como la contenencia. El axioma de elección solamente fue usado para bien ordenar los objetos bien soportados de $\mathcal{C}$.

Lema 3.6. *Toda categoría regular pequeña puede ser fielmente representada en una categoría capital.*

Demostración. Dada $\mathcal{C}$ sea $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ y sea $\mathcal{C}_n \xrightarrow{\subseteq} \mathcal{C}_{n+1}$ la capitalización relativa.

La categoría $\bigcup\limits_{n<\omega} \mathcal{C}_n$ es capital. ∎

Teorema 3.2 (Henkin, Lubkin, Freyd)**.** *Toda categoría regular pequeña puede ser fielmente representada en una potencia de la categoría de conjuntos.*

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ una categoría regular y $B \in Ob(\mathcal{C})$. Definimos

$$T_B : \mathcal{C} \to \underline{Con}$$

como el funtor

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{C}/B \xrightarrow{\subseteq} Cap(\mathcal{C}/B) \xrightarrow{(1,\_)} \underline{Con}$$

donde $Cap(\mathcal{C}/B)$ es una categoría capital que contiene a $\mathcal{C}/B$ y la contenencia es una representación fiel (existe por el lema anterior).

Debemos ver que el funtor $(1, \_)$ es una representación regular, y basta entonces verificar que preserva cubrimientos. Como los cubrimientos en $\underline{Con}$ son las funciones sobreyectivas, dado

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

donde $A \to B$ es cubrimiento, entonces habrá que encontrar $1 \xrightarrow{g} A$ tal que

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[d, "h"] \arrow[dl, "g"'] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Ahora bien, por un lado notemos que como $A \to B$ es cubrimiento y la categoría es regular, entonces en el siguiente pullback

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "\widetilde{h}"'] & 1 \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

$\widetilde{f}$ es cubrimiento, y basta que $\widetilde{f}$ tenga inversa por derecha, es decir que exista un morfismo $1 \to P$. Si $\widetilde{f}$ fuera mono, entonces sería iso y ya se tendría el resultado. Si no es mono, tenemos:

$$
\begin{tikzcd}
& P \arrow[d] \arrow[ddl, "id_P"'] \arrow[ddr, "id_P"] & \\
& P \times P \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
P \arrow[dr, "\widetilde{f}"] & & P \arrow[dl, "\widetilde{f}"'] \\
& 1 &
\end{tikzcd}
$$

Luego $P \xrightarrow{<id_P, id_P>} P \times P$ es un subobjeto propio, y, como P es bien soportado y los pullbacks preservan cubrimientos, $P \times P$ es bien soportado también. Por tanto es bien punteado y existe un morfismo $1 \to P \times P$, y así existe también un morfismo $1 \to P$.

Esto quiere decir que el funtor $(1\_)$ es una representación regular, por lo tanto T_B también lo es. Ahora, definimos el funtor

$$T : \mathcal{C} \to \underline{Con}^{Ob(\mathcal{C})}$$

tal que

$$
\begin{array}{rccl}
T(A): & Ob(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \underline{Con} \\
& A & \mapsto & \{T_B(A) : B \in Ob(\mathcal{C})\} \\
& f & \mapsto & \{T_B f : B \in Ob\mathcal{C}\}.
\end{array}
$$

Este funtor es una representación regular pues sus coordenadas lo son. Para ver que es fiel bastaría probar que la familia $\{T_B\}_{B \in Ob(\mathcal{C})}$ es colectivamente fiel, pero de hecho puede probarse algo más fuerte, a saber, que la familia $\{T_B\}_{B \subseteq 1}$ también resulta ser colectivamente fiel (es decir que si dos morfismos f y g de $\mathcal{C}$ son diferentes, entonces para algún T_B donde B es subobjeto de 1 $T_B f \neq T_B g$). Sean entonces $f, g : B \to C$ distintos, y sea $h : B' \to B$ su igualador; h es un subobjeto propio y por lo tanto $\Delta B' \xrightarrow{\Delta h} \Delta B$ es propio en $\mathcal{C}/spt(B)$. Además ΔB está bien soportado, y por lo tanto está bien punteado en $Cap(\mathcal{C}/spt(B))$. Existe entonces un morfismo $1 \to B$ que no se factoriza a través de B', es decir $(1, B') \subsetneq (1, B)$. Como la representación es regular, esta preserva igualadores, y por tanto el igualador de las funciones $T_B f$ y $T_B g$ es una contenencia estricta. Esto implica $T_B f \neq T_B g$. ∎

Esta representación tiene por consecuencia inmediata el siguiente corolario, que se demuestra exactamente igual que en el caso de las categorías cartesianas.

Corolario 3.1. *Toda sentencia de Horn en los predicados de categorías regulares verdadera en la categoría de conjuntos es verdadera en todas las categorías regulares.*

3.4. La categoría de relaciones

Teorema 3.3. *Sea $\mathcal{C}$ categoría cartesiana con imágenes. $\mathcal{C}$ es regular syss la composición de relaciones es asociativa.*

Demostración. Por el corolario anterior, como la composición de relaciones es asociativa en <u>*Con*</u> entonces es asociativa en cualquier categoría regular.

Viceversa, supongamos que la composición es asociativa. Notemos primero que si un morfismo f es cubrimiento entonces $f^{\circ}f = id$ (por la misma definición de composición). Dados f y g morfismos en $\mathcal{C}$ con mismo codominio y con f cubrimiento, por un lado tenemos que $g(f^{\circ}f) = g$, luego necesitamos que $(gf^{\circ})f$ sea un morfismo, por lo tanto en la construcción de gf° vemos que π_1 debe ser iso:

$$\begin{tikzcd}
 & & P \arrow[d, "\phi"] \arrow[ddl, "\widetilde{f}"'] \arrow[ddr, "\widetilde{g}"] & & \\
 & & gf^{\circ} \arrow[dl, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & & \\
 & A \arrow[dl, "id_A"] \arrow[dr, "g"'] & & C \arrow[dl, "f"] \arrow[dr, "id_C"'] & \\
A & & B & & C
\end{tikzcd}$$

Pero como ϕ es cubrimiento entonces $\widetilde{f}$ también debe ser cubrimiento, lo que asegura que los pullbacks preservan cubrimientos. ∎

Como en categorías regulares la composición es asociativa, sobre cada categoría regular bien potenciada podemos construir una nueva categoría de relaciones, que llamaremos $Rel(\mathcal{C})$. Notemos que la categoría $Rel(\mathcal{C})$ tiene los mismos objetos que $\mathcal{C}$ pero en general menos morfismos, pues no toda relación tabula un morfismo. En esas condiciones, podemos construir un funtor canónico $\mathcal{C} \xrightarrow{\subseteq} Rel(\mathcal{C})$ que asigna a cada morfismo la relación que lo tabula.

Teorema 3.4. *Para toda categoría regular $\mathcal{C}$, $Rel(\mathcal{C})$ cumple las siguientes propiedades:*

1. $R(S \cap T) \subseteq RS \cap RT$
2. *(Modularidad)* $(RS \cap T) \subseteq (R \cap TS)S^{\circ}$

Demostración. La relación $R \subseteq S$ se tiene syss $R \cap S = R$, y esta última es una sentencia de Horn. Las dos propiedades del teorema se pueden escribir entonces como sentencias de Horn y, como son válidas en <u>*Con*</u> (chequeo elemental del álgebra de relaciones conjuntistas), son válidas en $Rel(\mathcal{C})$. ∎

Los axiomas para las alegorías (categorías de relaciones) propuestos por Freyd incluyen estas dos propiedades junto con otros 10 axiomas naturales (como la conmutatividad de la intersección o la asociatividad de la composición). Su importancia en el estudio de las alegorías no podrá ser apreciado en este trabajo, pero vale la pena anotar que juegan un papel fundamental en el estudio de la lógica interna de una categoría regular, que explicaremos con algo de detalle en el último capítulo.

CAPÍTULO 4

Prelogoi

4.1. Retículos de relaciones

Dado $A \in Ob(\mathcal{C})$, definimos en $Sub(A)$ un orden parcial de la siguiente forma: $[f] \leq [g]$ si existe j (mono) tal que $gj = f$. No es difícil ver que el orden está bien definido. Tenemos el siguiente lema:

Lema 4.1. *Dada $\mathcal{C}$ categoría con pullbacks y $A \in Ob(\mathcal{C})$, $Sub(A)$ es semirretículo inferior.*

Demostración. $inf\emptyset = id_A$. Dados $[f], [g] \in Sub(A)$, sea $(\widetilde{f}, \widetilde{g})$ el pullback de (f, g); veamos que $[f] \wedge [g] = [g\widetilde{f}] = [f\widetilde{g}]$. Como los pullbacks transfieren monos y composición de monos es mono, la operación está bien definida. Sea $[h] \leq [f]$, $[h] \leq [g]$; entonces existen j_1 j_2 tal que $fj_1 = h$ y $gj_2 = h$, por lo tanto, por definición de pullback, existe j (mono) tal que $\widetilde{f}j = j_2$ y $\widetilde{g}j = j_1$, es decir, $f\widetilde{g}j = g\widetilde{f} = h$, luego $[h] \leq [f] \wedge [g]$. ■

Definición 4.1. Un *prelogos* es una categoría regular $\mathcal{C}$ tal que para cada objeto A de $\mathcal{C}$, $Sub(A)$ es un retículo y para cada morfismo $f : A \to B$, $f^{-1} : Sub(B) \to Sub(A)$ es un homomorfismo de retículos.

La definición de prelogos hace referencia a conceptos conjuntistas, sin embargo podemos dar una definición equivalente de naturaleza categórica.

Definición 4.2. Un prelogos es una categoría cartesiana con imágenes y en la cual los pullbacks transfieren cubrimientos finitos; esto es, dado un cubrimiento $\{f_i\}$ de B y un morfismo $A \xrightarrow{f} B$, entonces la familia $\{\widetilde{f_i}\}$ producida por el pullback

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{f_i}"'] & B \arrow[d, "f_i"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

es un cubrimiento de A.

Lema 4.2. *Las definiciones anteriores son equivalentes.*

Lema 4.3. *En todo prelogos existe objeto inicial.*

Demostración. Por definición, $Sub(1)$ es un retículo, luego tiene mínimo: llamémoslo 0 y veamos que 0 es el objeto inicial (siendo rigurosos, 0 es la clase de un morfismo que tiene como dominio un objeto inicial que por comodidad también llamaremos 0). Si $P_A : A \to 1$, entonces $P_A^{-1}(0)$ es el mínimo subobjeto de A; si existiera un morfismo $A \to 0$ entonces $P_A^{-1}(0) = A$, y lo mismo sucede con $A \times A$, por lo tanto $A \xrightarrow{<id_A, id_A>} A \times A$ es entera y A es un objeto cuasi-terminal (es decir, para cada otro objeto C existe máximo un morfismo $C \to A$). Como está contenido en 0 entonces es isomorfo a 0.

En general $P_A^{-1}(0)$ es isomorfo a 0 para todo A, por lo tanto existe un morfismo $0 \xrightarrow{0_A} A$, y es único pues si hubiera dos morfismos morfismos distintos, su igualador sería propio. Como 0 no tiene subobjetos propios, 0_A es único y 0 es objeto inicial. ■

Ejemplo 4.1. *Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial, $\mathcal{C}_\mathbb{P}$ es pre-logos syss $\mathbb{P}$ es retículo distributivo.*

Si $\mathcal{C}_\mathbb{P}$ es prelogos, entonces $\mathbb{P}$ tiene elemento máximo 1 y por lo tanto $\mathbb{P}$ corresponde a los subobjetos de 1, por lo tanto es un retículo. Para ver que es distributivo, basta ver que para cada trío de elementos m, n, o, se tiene que

$$m \wedge (n \vee o) = (m \wedge n) \vee (m \wedge o).$$

Pero como para $m \xrightarrow{\leq_m} 1$, ${\leq_m}^{-1} : Sub(1) \to Sub(m)$ es homomorfismo de retículos, entonces

$$\begin{aligned} m \wedge (n \vee o) &= {\leq_m}^{-1}(n \vee o) \\ &= {\leq_m}^{-1}(n) \vee {\leq_m}^{-1}(o) \\ &= (m \wedge n) \vee (m \wedge o) \end{aligned}$$

La otra implicación es fácil de ver usando las ecuaciones anteriores.

Como vamos a trabajar con relaciones vistas como subobjetos del producto cartesiano, conviene denotar por $R \cap S$ al ínfimo de R y S, y $R \cup S$ al supremo de R y S. De igual forma, no haremos distinción entre un subobjeto y el dominio de uno de los morfismos de su clase (pues todos esos dominios son isomorfos), y usaremos la misma notación para el sup y el inf que acabamos de mencionar.

Lema 4.4. *Dados A y B subobjetos de algún objeto M, el siguiente pullback:*

$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & A \cup B \end{tikzcd}$$

es pushout (es decir, si un par de monomorfismos conforman un cubrimiento, entonces su pullback es a su vez pushout).

Demostración. Sean f y g dos monomorfismos que cubren a C y sean h_1 y h_2 morfismos tal que

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, "\widetilde{g}"'] \arrow[dr, "\widetilde{f}"] & \\
A \arrow[dr, "f"] \arrow[ddr, "h_1"'] & & B \arrow[dl, "g"'] \arrow[ddl, "h_2"] \\
& C & \\
& D &
\end{tikzcd}$$

Si vemos los morfismos como relaciones, tenemos que las siguientes ecuaciones son verdaderas (usando la regularidad de la categoría). Recordemos que la composición de relaciones se escribe por derecha.

1. $ff^\circ = id_A$ y $gg^\circ = id_B$.
2. $fg^\circ = \widetilde{g}^\circ \widetilde{f}$
3. Las relaciones h_1, h_2 y $\widetilde{g}h_1$ son enteras y simples (ver lema 3.3).

Además, como f y g son un cubrimiento de C tenemos que $f^\circ f \cup g^\circ g = id_C$. Definamos $R = f^\circ h_1 \cup g^\circ h_2$, y veamos que R tabula un morfismo. Por un lado tenemos que

$$\begin{aligned}
id_C &\subseteq (f^\circ id_A f) \cup (g^\circ id_B g) \\
&\subseteq f^\circ h_1 {h_1}^\circ f \cup g^\circ h_2 {h_2}^\circ g \\
&\subseteq (f^\circ h_1 \cup g^\circ h_2)({h_1}^\circ f \cup {h_2}^\circ g) \\
&\subseteq RR^\circ
\end{aligned}$$

luego R es entera. Por otro lado, R es simple:

$$\begin{aligned}
R^\circ R &\subseteq ({h_1}^\circ f \cup {h_2}^\circ g)(f^\circ h_1 \cup g^\circ h_2) \\
&\subseteq {h_1}^\circ f f^\circ h_1 \cup {h_1}^\circ f g^\circ h_2 \cup {h_2}^\circ g f^\circ h_1 \cup {h_2}^\circ g g^\circ h_2 \\
&\subseteq {h_1}^\circ h_1 \cup {h_1}^\circ \widetilde{g}^\circ \widetilde{f} h_2 \cup {h_2}^\circ \widetilde{f}^\circ \widetilde{g} h_1 \cup {h_2}^\circ h_2 \\
&\subseteq id_A \cup (\widetilde{g}h_1)^\circ \widetilde{f} h_2 \cup (\widetilde{f} h_2)^\circ \widetilde{g} h_1 \cup id_B \\
&\subseteq id_A \cup (\widetilde{g}h_1)^\circ \widetilde{g} h_1 \cup (\widetilde{g} h_1)^\circ \widetilde{g} h_1 \cup id_B \\
&\subseteq id_D
\end{aligned}$$

Con la definición dada de R, es fácil ver que $Rf = h_1$ y $Rg = h_2$, así como también es inmediato el hecho de que R es único pues f y g son un cubrimiento de D. ■

Es importante notar que la construcción de R es la obvia si pensamos de manera conjuntista. Sin embargo, no hubiéramos podido usar los teoremas de representación que tenemos hasta el momento pues el predicado "ser el pushout de dos morfismos" no es un predicado regular.

4.2. Representación de prelogos

Definición 4.3. Una *representación de prelogos* es una representación regular que además preserva uniones finitas.

En esta sección indicamos los pasos claves de la demostración del siguiente teorema. Sin embargo dejamos los pasos sin demostrar, pues para el total entendimiento de éstos se requeriría un estudio de las alegorías más amplio del que podemos abarcar en esta tesis.

Teorema 4.1. *Todo prelogos pequeño se puede representar fielmente en una potencia de la categoría de conjuntos.*

De aquí se deduce, como en capítulos previos, que toda sentencia de Horn en los predicados de prelogoi, verdadera en $\underline{Con}$ es verdadera en todo prelogos.

Definición 4.4. Un prelogos es *positivo* si para cada par de objetos A y B existe un par de monomorfismos $A \xrightarrow{f} C$ y $B \xrightarrow{g} C$ tal que su pullback es

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "\widetilde{g}"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Hecho 4.1. *Todo prelogos se puede representar fielmente en un prelogos positivo.*

Demostración. (Idea general) Dada una categoría regular $\mathcal{C}$, consideramos su alegoría asociada $\mathcal{D} = Rel(\mathcal{C})$; a cada par de objetos A y B en $\mathcal{D}$ le asignamos una relación 0_{AB} si el conjunto de relaciones entre ellos es vacío, y construimos la alegoría $\mathcal{D}^+$ cuyos objetos son sucesiones finitas de $Ob(\mathcal{D})$ y sus morfismos son las matrices de morfismos de $\mathcal{D}$. Los morfismos de $\mathcal{D}^+$ conforman un prelogos positivo que contiene a $\mathcal{C}$ y la contenencia es una representación de prelogos. ■

Hecho 4.2. 1. *Si $\mathcal{C}$ es un prelogos positivo entonces $\mathcal{C}/B$ también lo es, y el funtor*

$$\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/B$$

es una representación de prelogos.

2. *Todo prelogos positivo es fielmente representable en un prelogos positivo capital.*

3. *Todo prelogos positivo capital pequeño es fielmente representable en una potencia de la categoría de conjuntos.*

El anterior hecho enumera la sucesión de pasos que debemos seguir para demostrar el teorema principal. El lector puede consultar la demostración de estos hechos en [2, pp. 103–209].

CAPÍTULO 5

Logoi

5.1. Morfismos adjuntos

Definición 5.1. Un *logos* es un prelogos $\mathcal{C}$ tal que para cada morfismo $f : A \to B$, $f^{-1} : Sub(B) \to Sub(A)$ tiene adjunto derecho $\forall_f : Sub(A) \to Sub(B)$, es decir, $f^{-1}(B') \subseteq A'$ ssi $B' \subseteq \forall_f(A')$.

En <u>Con</u> tenemos que $\forall_f(A') = \{b \in B : \forall a \in A(f(a) = b \Rightarrow a \in A')\}$ (suerte de cilindrificado general).

Definición 5.2. Un *álgebra de Heyting* es una estructura del tipo $(A, \wedge, \vee, \to)$ donde $(A, \wedge, \vee)$ es un retículo distributivo con 0, y $\to$ es una operación binaria en A que cumple la siguiente propiedad

$$\forall abc \ \ a \wedge b \leq c \ \Leftrightarrow \ b \leq (a \to c).$$

Observación 5.1. $(a \to c) = max\{b : a \wedge b \leq c\}$.

En realidad, un álgebra de Heyting se puede definir como un retículo con 0 y con la propiedad descrita, pues se puede demostrar que esta propiedad implica la distributividad (y la existencia de un máximo).

Ejemplo 5.1. *Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial, $\mathcal{C}_{\mathbb{P}}$ es un logos syss $\mathbb{P}$ es un álgebra de Heyting.*

Si $\mathcal{C}_{\mathbb{P}}$ es un logos entonces es un prelogos, luego $\mathbb{P}$ es un retículo distributivo. Dados m y n elementos de $\mathbb{P}$ y dado $m \xrightarrow{\leq_m} 1$, definimos $(m \to n) = \forall_{\leq_m}(m \wedge n)$, es decir, $(m \to n) = \forall_{\leq_m}(\leq_m^{-1}(n))$. Veamos que cumple la propiedad deseada: para o en $\mathbb{P}$,

$$\begin{aligned} m \wedge n \leq o &\Leftrightarrow m \wedge n \leq (m \wedge o) \\ &\Leftrightarrow m \wedge n \leq (\leq_m^{-1}(o)) \\ &\Leftrightarrow n \leq (\forall_{\leq_m}(\leq_m^{-1}(o))) \\ &\Leftrightarrow n \leq (m \to o) \end{aligned}$$

Viceversa, si $\mathbb{P}$ es un álgebra de Heyting, para el morfismo $m \xrightarrow{\leq_{mn}} n$ definimos $\forall_{\leq_{mn}} : Sub(m) \to Sub(n)$ mediante $\forall_{\leq_{mn}}(u) = (m \to u) \wedge n$ (donde $u \subseteq m$). Veamos que $\forall_{\leq_{mn}}$ es el adjunto derecho de $\leq_{mn}^{-1}$. Sean $p, q \in Ob(\mathcal{C}_{\mathbb{P}})$, $p \subseteq n$ y $q \subseteq m$,

$$\begin{aligned} \leq_{mn}^{-1}(p) \subseteq q &\Leftrightarrow m \wedge p \ \leq q \\ &\Leftrightarrow p \leq (m \to q) \\ &\Leftrightarrow p \leq (m \to q) \wedge n \ (\textit{pues } p \leq n) \\ &\Leftrightarrow p \subseteq (\forall_{\leq_{mn}}(q)) \end{aligned}$$

5.2. Representación de Stone

Mencionaremos en esta sección diversos teoremas de representación para logos, que, a diferencia de los teoremas de representación anteriores, presentan propiedades geométricas más específicas e interesantes para el presente trabajo. Las demostraciones de los siguientes teoremas se pueden consultar en [2, pp. 125–136, 228–231].

Teorema 5.1. *1. Todo logos contable puede ser fielmente representado en una potencia contable de $Sh(\mathbb{R})$. 2. Todo logos contable con un objeto final coprimo puede ser fielmente representado en $Sh(\mathbb{R})$.*

Teorema 5.2. *Para todo logos pequeño $\mathcal{C}$ existe una categoría pequeña $\mathcal{A}$ y una representación fiel $\mathcal{C} \to \underline{Con}^{\mathcal{A}}$.*

Teorema 5.3 (Representación de Stone)**.** *Para todo logos pequeño $\mathcal{C}$ existe un espacio topológico X y una reprepresentación fiel*

$$\mathcal{C} \to \mathcal{SH}(X).$$

Más aun, X se puede escoger compacto, totalmente disconexo y sin puntos aislados. Si $\mathcal{C}$ es contable entonces X puede escogerse, por ejemplo, como el conjunto de Cantor, el conjunto de los racionales o el conjunto de los irracionales.

Poder representar todo logos en una categoría de haces muestra la gran importancia de éstas. Más adelante cuando revisemos la lógica de haces y la lógica interna de las categorías en los capítulos 7 y 8, veremos las conexiones intrínsecas que se presentan en estas lógicas via los teoremas de representación.

En particular, los teoremas de representación son la clave para demostrar la completitud de las lógicas internas de las categorías intermedias (regulares, prelogoi y logoi).

5.3. Residuales

Definición 5.3. Dadas dos relaciones con el mismo codominio $R(A, C)$ y $S(B, C)$, el residual de R con S, denominado $(R/S)(A, B)$ es una relación tal que para cualquier otra relación $T(A, B)$, $TS \subseteq R$ ssi $T \subseteq R/S$.

Ejemplo 5.2. *En Con, dadas dos relaciones* $R \subseteq A \times C$ *y* $S \subseteq B \times C$, $R/S = \{(a,b) \in A \times B \mid \forall c \in C(bRc \to aRc)\}$.

Lema 5.1. *En una categoría regular, sea*

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

una relación y $C \xrightarrow{f} B$ *un morfismo, entonces* R/f *existe y es igual a* Rf°.

Demostración. Por el corolario 3.1 basta demostrarlo en Con. Sea T una relación, debemos mostrar que

$$Tf \subseteq R \Leftrightarrow T \subseteq Rf^\circ$$

($\Rightarrow$):

$$\begin{aligned} (x,y) \in T &\Rightarrow (x, f(y)) \in Tf \\ &\Rightarrow (x, f(y)) \in R \\ &\Rightarrow (x,y) \in Rf^\circ \ (\text{pues}(f(y),y) \in f^\circ) \end{aligned}$$

($\Leftarrow$):

$$\begin{aligned} (x, f(y)) \in Tf &\Rightarrow (x,y) \in T \\ &\Rightarrow (x,y) \in Rf^\circ \\ &\Rightarrow (x, f(y)) \in R \ (\text{usando que } f \text{ es función}). \end{aligned}$$

■

Lema 5.2. *Sean* R, S_1 *y* S_2 *relaciones en una categoría regular, si* $(R/S_1)/S_2$ *existe, entonces* $R/(S_2S_1)$ *existe y es igual a* $(R/S_1)/S_2$.

Demostración.

$$\begin{aligned} T(S_2S_1) \subseteq R &\Leftrightarrow (TS_2)S_1 \subseteq R \\ &\Leftrightarrow TS_2 \subseteq R/S_1 \\ &\Leftrightarrow T \subseteq (R/S_1)/S_2 \end{aligned}$$

■

Lema 5.3. *En un prelogos, sean* $R \subseteq A \times B$ *una relación y* $C \xrightarrow{f} B$ *un morfismo, entonces* $Rf^\circ = \forall_{(id_A, f)}(R)$, *donde* $A \times C \xrightarrow{(id_A, f)} A \times B$.

Demostración. Sea

$$\begin{tikzcd}
\forall_{(id_A,f)}(R) \arrow[r, "\widetilde{(id_A,f)}"] \arrow[d, "\widetilde{(r_1,r_2)}"'] & R \arrow[d, "(r_1,r_2)"] \\
A \times C \arrow[r, "(id_A,f)"] \arrow[d, "\pi_C"] & A \times B \arrow[d, "\pi_B"'] \\
C \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

Tanto el cuadrado superior como el inferior son pullbacks, luego el rectángulo grande es pullback, y además este pullback corresponde al pullback de la construcción de Rf°:

$$\begin{tikzcd}
 & & Rf^\circ \arrow[dl, "\widetilde{(id_A,f)}"'] \arrow[dr, "\pi_C\widetilde{(r_1,r_2)}"] & & \\
 & R \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[dr, "r_2"] & & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "id_C"] & \\
A & & B & & C
\end{tikzcd}$$

Luego $Rf^\circ = \forall_{(id_A,f)}(R)$. ■

Teorema 5.4. *Si $\mathcal{C}$ es un logos, entonces tiene residuales.*

Demostración. Sean $R \subseteq A \times C$ y $S(s_1, s_2) \subseteq B \times C$, buscamos R/S. Como $S = s_1{}^\circ s_2$, por los lemas anteriores basta encontrar $(R/s_2)/s_1{}^\circ = (Rs_2{}^\circ)/s_1{}^\circ = (id_A, s_2)^{-1}(R)/s_1{}^\circ$. Por la propiedad de adjunción en el prelogos, sabemos que

$$(id_A, s_1)^{-1}(T) \subseteq Rs_2{}^\circ \Leftrightarrow T \subseteq \forall_{(id_A,s_1)}(Rs_2{}^\circ)$$

Luego $R/S = \forall_{(id_A,s_1)}(Rs_2{}^\circ)$. ■

CAPÍTULO 6

Residuación

6.1. Estructuras algebraicas residuales

Definición 6.1. Sean P y Q dos órdenes parciales. Un par residuado (f, f') consiste en un par de funciones $f : P \to Q$, $f' : Q \to P$, tal que f' es el adjunto derecho de f, es decir, $f(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq f'(y)$. En tal caso decimos que f' es el residual de f.

Definición 6.2. Sea P un orden parcial. Un *operador de clausura* $\gamma : P \to P$ es una función expansiva, monótona e idempotente, es decir: $p \leq \gamma(p)$, $p \leq q \Rightarrow \gamma(p) \leq \gamma(q)$ y $\gamma(\gamma(p)) = \gamma(p)$. Dualmente, un *operador de interior* $\delta : P \to P$ es una función contractiva monótona e idempotente.

Observación 6.1. *Sea $\gamma : P \to \gamma(P)$ un operador de clausura y sea $i : \gamma(P) \to P$ la inclusión. Entonces i es el residual de γ.*

Proposición 6.1. *Sea $f : P \to Q$, $f' : Q \to P$ un par residuado. Entonces f y f' son monótonas, $f'f$ es un operador de clausura y ff' es un operador de interior.*

Dado un orden parcial P y $X \subseteq P$, denotamos por $\bigvee X$ al supremo de X y por $\bigwedge X$ a su ínfimo (en caso de que existan).

Proposición 6.2. *Sean P, Q órdenes parciales dotados de un par residuado (f, f'), y sean $X \subseteq P$ y $Y \subseteq Q$.*

1. *Si $\bigvee X$ existe entonces $\bigvee f(X) = f(\bigvee X)$.*
2. *Si $\bigwedge Y$ existe entonces $\bigwedge f'(Y) = f(\bigwedge Y)$.*

Demostración. Por monotonía, $f(\bigvee X)$ es cota superior de $f(X)$. Sea y una cota superior de $f(X)$, entonces para todo $x \in X$, $f(x) \leq y$, luego $x \leq f'(y)$, por lo tanto $\bigvee X \leq f'(y)$ y $f(\bigvee X) \leq y$. El numeral dos es análogo. ■

Definición 6.3. Sean P, Q y R órdenes parciales, una operación binaria $P \times Q \xrightarrow{\cdot} R$ es residuada si para cada $p \in P$ y $q \in Q$ las funciones $Q \xrightarrow{\cdot p} R$ (operar por izquierda con p) y $P \xrightarrow{\cdot q} R$ (operar por derecha con q) son residuadas.

Esto se puede traducir en que existen dos funciones $\backslash : P \times R \to Q$ y $/ : R \times Q \to R$ tales que

$$p \cdot q \leq r \Leftrightarrow p \leq r/q \Leftrightarrow q \leq p \backslash r$$

(llamaremos a estas funciones división por izquierda y división por derecha respectivamente).

Definición 6.4. Un *grupoide ordenado* es una estructura de la forma $(G, \cdot, \leq)$ tal que $\cdot$ es una operación binaria en G, $(G, \leq)$ es un orden parcial y

$$\forall pp'qq' \; p \leq p' \text{ y } q \leq q' \Rightarrow p \cdot q \leq p' \cdot q'$$

Un *grupoide residuado* es una estructura de la forma $(G, \cdot, \backslash, /, \leq)$ donde $(G, \cdot, \leq)$ es un orden parcial ordenado, y $\cdot$ está residuada mediante $\backslash$ y $/$.

Un *grupoide r-residuado* (grupoide residuado reticulado) es un grupoide residuado tal que su orden asociado es un retículo.

Análogamente podemos definir semigrupos, monoides o grupos (r-)residuados.

Teorema 6.1. *Sea G un grupoide residuado y $X, Y \subseteq G$.*

1. *Si $\bigvee X$ y $\bigvee Y$ existen, entonces*

$$\bigvee X \cdot \bigvee Y = \bigvee_{x \in X,\, y \in Y} x \cdot y$$

2. *Si $\bigvee X$ y $\bigwedge Y$ existen, entonces*

$$z \backslash (\bigwedge Y) = \bigwedge_{y \in Y} z \backslash y, \qquad (\bigwedge Y)/z = \bigwedge_{y \in Y} y/z$$

$$(\bigvee X) \backslash z = \bigwedge_{x \in X} x \backslash z, \qquad z/(\bigvee X) = \bigwedge_{x \in X} z/x$$

6.2. Algunas correspondencias categóricas

Vimos en el capítulo 5 que en un logos, por definición, la función $f^{-1} : Sub(A) \to Sub(B)$ tiene adjunto derecho. Sin embargo, como veremos en el siguiente lema, basta que la categoría sea regular para que tenga adjunto izquierdo (es decir, que exista una función de la cual sea adjunto derecho).

Definición 6.5. Sea $A \xrightarrow{f} B$. Definimos

$$\begin{array}{rccc} \exists_f : & Sub(A) & \longrightarrow & Sub(B) \\ & \alpha & \mapsto & im(f \circ \alpha) \end{array}$$

El porqué del nombre de esta función se aclara si pensamos conjuntísticamente: si $X \subseteq A$, entonces $\exists_f(X) = \{x \in B : \exists y \in X \text{ tal que } f(y) = x\}$ (la situación no es exactamente así, pues el subobjeto que representa X no es el conjunto X propiamente dicho, sino toda la clase de conjuntos equipotentes a X, cada uno dotado de la función que los biyecta; pero este detalle técnico no vuelve imprecisa la intuición que nos proporciona el ejemplo).

Lema 6.1. *Sea $A \xrightarrow{f} B$ un morfismo de una categoría regular, entonces f^{-1} es el adjunto derecho de $\exists_f$.*

Corolario 6.1. *La función f^{-1} preserva ínfimos arbitrarios, en particular es un homomorfismo de los semirretículos inferiores $Sub(B)$ y $Sub(A)$.*

Demostración. Se deduce de la proposición 6.2 (o también de que f^{-1}, al poseer adjunto izquierdo, preserva límites). ■

Teorema 6.2 (Identidad de Frobenius)**.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría regular, $A \xrightarrow{f} B$ un morfismo y $A' \xrightarrow{\alpha} A$, $B' \xrightarrow{\beta} B$ dos subobjetos, entonces $\exists_f(A' \wedge f^{-1}B') = \exists_f A' \wedge B'$.*

Demostración. Notemos que $A' \wedge f^{-1}B'$ se obtiene mediante el pullback de $f\alpha$ y β:

$$\begin{tikzcd}
A' \wedge f^{-1}B' \arrow[r] \arrow[d] & f^{-1}B' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[d, "\beta"] \\
A' \arrow[r, "\alpha"'] & A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Por otro lado, factorizando $f\alpha$ tenemos

$$\begin{tikzcd}
A' \wedge f^{-1}B' \arrow[d] & & B' \arrow[d, "\beta"] \\
A' \arrow[r] & \exists_f A' \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

donde $A' \to \exists_f A'$ es un cubrimiento y $\exists_f A' \to B$ es mono. Si completamos el pullback intermedio obtenemos

$$
\begin{tikzcd}
A' \wedge f^{-1}B' \arrow[r] \arrow[d] & \exists_f A' \wedge B' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[d, "\beta"] \\
A' \arrow[r, "\alpha"'] & A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
$$

donde $A' \wedge f^{-1}B' \to \exists_f A' \wedge B'$ es un cubrimiento, por ser la categoría regular. Además tenemos que $\exists_f A' \wedge B' \to B'$ es mono, y como β es mono, entonces $\exists_f A' \wedge B' \to B$ es mono, luego $A' \wedge f^{-1}B' \to \exists_f A' \wedge B' \to B$ es una factorización cubrimiento-mono. Por unicidad de las imágenes $\exists_f (A' \wedge f^{-1}B') = \exists_f A' \wedge B'$. ■

Veamos cuáles propiedades generales de la residuación podemos aplicar a los logoi. Tenemos, por un lado, que en todo logos $(f^{-1}, \forall_f)$ y $(\exists_f, f^{-1})$ forman pares residuados, luego por la proposición 6.1 dado un morfismo $C \to D$, $\exists_f f^{-1}$ y $\forall_f f^{-1}$ constituyen un operador de clausura y un operador de interior, respectivamente, sobre C. Además, por otro lado, la residuación actúa a nivel de relaciones en los logoi como vemos en el siguiente lema.

Lema 6.2. *En logos, la operación de composición*

$$\circ : Rel(A, B) \times Rel(B, C) \to Rel(A, C)$$

es residuada.

Demostración. Ya vimos que existe la división por derecha en el teorema 5.3. Basta definir la división por izquierda de la siguiente forma

$$R \setminus S := (S^\circ / R^\circ)^\circ$$

Veamos que cumple la propiedad de residuación:

$$
\begin{aligned}
T \subseteq R \setminus S &\Leftrightarrow T^\circ \subseteq S^\circ / R^\circ \\
&\Leftrightarrow T^\circ R^\circ \subseteq S^\circ \\
&\Leftrightarrow RT \subseteq S
\end{aligned}
$$

■

Corolario 6.2. *Si A es un objeto de un logos, entonces $(Rel(A, A), \circ, \setminus, /)$ es un r-monoide residuado.*

CAPÍTULO 7

La lógica interna

Así como en la lógica clásica, existe un teorema de completitud para la lógica intuicionista de primer orden que afirma que una sentencia se deduce en el cálculo deductivo de Heyting syss vale en todos los modelos de Kripke. En esta sección demostraremos un teorema de completitud análogo, pero con respecto a modelos categóricos, más específicamente con respecto a los modelos de haces sobre un espacio topológico.

7.1. Sintaxis

En los cursos de lógica matemática se suele trabajar con estructuras con único universo fijo. Sin embargo, es usual toparse con estructuras que poseen más de un úniverso, por ejemplo, los espacios vectoriales, los módulos, espacios proyectivos, etc. En ciertas situaciones resulta por tanto más natural trabajar la lógica desde esta perspectiva, un camino más conveniente para explorar la lógica categórica.

Introducimos en esta sección las bases de la lógica intuicionista de primer orden (con varias suertes).

De ahora en adelante trabajaremos con una colección infinita de símbolos (no necesariamente contable) $X_1, X_2, ...$ (llamadas *suertes*) y, para cada suerte, introduciremos un conjunto infinito de variables. Representaremos $x_i, y_i, z_i...$ las variables de suerte X_i.

Definición 7.1. Un *lenguaje formal* es una tupla $\mathcal{L} = (SimbLog, V, R, F, C)$ donde $SimbLog = \{\to, \vee, \wedge, \forall, \exists, =, \perp\}$, V es el conjunto de variables definido anteriormente (infinitas por cada suerte), R y F son funciones con dominio las tuplas finitas de suertes, y C es una función cuyo dominio es el conjunto de suertes.

$R(X_1, ..., X_n)$ es el conjunto de símbolos de relación en la tupla $(X_1, ..., X_n)$.

$F(X_1, ..., X_n, Y)$ es el conjunto de símbolos de función que, por comodidad, denotaremos como $f : X_1 \times ... \times X_n \to Y$.

$C(X_i)$ es el conjunto de constantes de suerte X_i.

Definición 7.2. Los *términos* en un lenguaje $\mathcal{L}$ se definen inductivamente:

1. Las variables $x_i, y_i, ...$ y las constantes de $C(X_i)$ son términos de tipo X_i.
2. Si $t_1, ..., t_n$ son términos de tipo $X_1, ..., X_n$ respectivamente, y $f : X_1 \times ... \times X_n \to Y$ es un símbolo de función, entonces $ft_1, ..., t_n$ es un término de tipo Y.

Definición 7.3. Definimos las fórmulas del lenguaje también de manera inductiva:

1. El símbolo $\perp$ es una fórmula.
2. Si t_i y t_j son términos del mismo tipo X_i, entonces $t_i = t_j$ es una fórmula.
3. Si $t_1, ..., t_n$ son términos de tipo $X_1, ..., X_n$ respectivamente, y $R \in R(X_1, ..., X_n)$, entonces $R(t_1, ..., t_n)$ es una fórmula.
4. Si φ y ψ son fórmulas, entonces $\varphi \to \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$ son fórmulas.
5. Si φ es una fórmula de tipo X_i y x_i es una variable, entonces $\exists x_i \varphi$ y $\forall x_i \varphi$ son fórmulas.

La expresión $\neg\varphi$ es la abreviación de $\perp \to \varphi$.

Describiremos ahora el cálculo deductivo intuicionista H.

1. Dadas φ, ψ y γ fórmulas y t un término, los siguientes son *axiomas* de H.

Axiomas proposicionales:

I. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

II.$(\varphi \to (\psi \to \gamma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \gamma))$

III. $\varphi \wedge \psi \to \varphi$

IV. $\varphi \wedge \psi \to \psi$

V. $\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$

VI.$\varphi \to (\varphi \vee \psi)$

VII. $\psi \to (\varphi \vee \psi)$

VIII.$(\varphi \to \gamma) \to ((\psi \to \gamma) \to (\varphi \vee \psi \to \gamma))$

IX. $\perp \to \varphi$

Axiomas de predicados.

I. $\forall x \varphi(x) \to \varphi(t)$

II $\varphi(t) \to \exists x \varphi(x)$

(en ambos casos t es un término del mismo tipo de la variable x, libre para x).

Reglas de inferencia.

I. $\varphi, \varphi \to \psi \vdash_H \psi$

Si x no es variable libre de φ entonces

II. $\varphi \to \psi \vdash_H \varphi \to \forall x\psi(x)$

III. $\psi \to \varphi \vdash_H \exists x\psi(x) \to \varphi$

(en las tres reglas anteriores, leáse $\vdash_H$ como “deduce intuicionisticamente”; de ahora en adelante simplemente diremos “deduce”, pues no no saldremos del marco de la lógica intuicionista).

Definición 7.4. Una *teoría* es un conjunto de fórmulas $T = \{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$.

Decimos que una teoría T *deduce* φ, $T \vdash_H \varphi$, si existe una cadena finita de fórmulas $\varphi_1, \varphi_2..., \varphi_n$ tal que $\varphi_n = \varphi$, y tal que cada φ_i es un axioma, una fórmula de T, o se deduce de las anteriores por las reglas de inferencia. A dicha cadena finita la llamaremos *demostración* de φ.

La expresión $T \vdash_H \varphi_1 \equiv \varphi_2$ es la abreviación de $T \vdash \varphi_1 \to \varphi_2$ y $T \vdash \varphi_2 \to \varphi_1$.

7.2. Semántica

En esta sección explicaremos como construir una semántica categórica para teorías de la lógica intuicionista de primer orden.

Sea T una teoría dada. Definimos una categoría $\mathcal{A}_T$ cuyos objetos son tuplas de suertes X (incluyendo la tupla vacía), y cuyos morfismos son de la forma $X \xrightarrow{[\varphi(x,y)]} Y$, donde x y y son las variables libres de una fórmula φ, de tipo X y Y respectivamente, y donde

$$[\varphi] = \{\psi(x', y') : T \vdash_H \varphi \equiv \psi \text{ y las variables libres de } \psi,$$

$$x', y', \text{ son de tipo } X, Y, \text{ respectivamente } \}.$$

Definimos la composición de dos morfismos $X \xrightarrow{[\varphi(x,y)]} Y$, $Y \xrightarrow{[\psi(y,z)]} Z$ como el morfismo

$$X \xrightarrow{[\exists y\varphi(x,y) \wedge \psi(y,z)]} Y$$

Nótese que los morfismos son fórmulas en dos tuplas de variables, y, en general, una fórmula no es funcional, luego esta categoría se asemeja más a una categoría de relaciones que a una categoría de funciones. En efecto, esta categoría resulta ser una alegoría pretabular de división. Antes de entrar en detalles, basta que el lector entienda que una *alegoría* es una categoría que captura el concepto de relaciones, *pretabular* significa que cada relación está contenida en otra relación que se puede tabular por un par mónico, y *de división* significa que la operación de composición tiene residuación en en el sentido de la definición 5.3.

Definición 7.5. Una *alegoría* $\mathcal{R}$ es una categoría con una operación unaria $^\circ$, una relación binaria $\cap$ entre morfismos con mismo dominio y codominio $\mathcal{R}(A, B)$, y que cumple las siguientes propiedades.

1. Si $R \in \mathcal{R}(A, B)$ entonces $R^\circ \in \mathcal{R}(B, A)$

2. $R^{\circ\circ} = R$
3. $R \cap R = R$ (Idempotencia)
4. $R \cap S = S \cap R$ (Conmutatividad)
5. $R \cap (S \cap T) = (R \cap S) \cap T$ (Asociatividad)
6. $(RS)^\circ = S^\circ R^\circ$
7. $R(S \cap T) \subseteq RS \cap RT$
8. $RS \cap T \subseteq (R \cap TS^\circ)S$ (Modularidad)

Entendemos por $R \subseteq S$ la abreviación de $R \cap S = R$. Llamaremos *relaciones* a los morfismos de una alegoría, para no confundir con el nombre usual en categorías. Nótese que, salvo las dos últimas, más sofisticadas, todas las propiedades de las alegorías son las que se esperan elementalmente de una categoría de relaciones.

Definición 7.6. Una relación $R(A, B)$ es

1. *Entera* si $id_A \subseteq RR^\circ$.
2. *Simple* si $R^\circ R \subseteq id_B$.
3. *Morfismo* si es entera y simple.

Definición 7.7. Una relación R es *tabular* si existen morfismos f y g tal que $f^\circ g = R$. Una relación es *pretabular* si está contenida en una relación tabular.

Definición 7.8. Una alegoría es *pretabular* si todo morfismo es pretabular.

Definición 7.9. Una representación de alegorías es un funtor que preserva las operaciones $^\circ$ y $\cap$.

Teorema 7.1 (Freyd)**.** *Toda categoría pretabular se puede representar fiel y plenamente en una categoría tabular.*

Demostración. Daremos aquí la idea intuitiva de la demostración, los detalles se pueden consultar en [2, pp. 210–212]. Una endorelación $R(A, A)$ es correflexiva si $R \subseteq id_A$. Es fácil ver que todas las identidades son correflexivas, y que todas las correflexivas son idempotentes. Tenemos entonces una inclusión $Ob(\mathcal{R}) \subseteq Cor$ entre clases de idempotentes.

Por otro lado, a partir de una clase de idempotentes I se puede construir una nueva categoría $Split(I)$ cuyos objetos son las relaciones de I y cuyos morfismos son las relaciones

$$R(A, A) \xrightarrow{S(A,B)} T(B, B)$$

tal que $RS = S = ST$

Si aplicamos $Split$ a la contenencia tenemos que

$$Split(Ob(\mathcal{R})) \subseteq SplitCor.$$

Como $Split(Ob(\mathcal{R})) = \mathcal{R}$ tenemos una inmersión de $\mathcal{R}$ en $SplitCor$. Al ser $\mathcal{R}$ pretabular, $SplitCor$ es pretabular, y, además, las correflexivas son tabulares. Pero se puede demostrar que si una alegoría pretabular tiene todas sus correflexivas tabulares, entonces es tabular. ■

Corolario 7.1. *Toda alegoría pretabular se puede representar fielmente en una alegoría de la forma* $Rel(\mathcal{C})$ *donde* $\mathcal{C}$ *es una categoría regular.*

Definición 7.10. Una alegoría es de *división* si tiene una operación binaria adicional $\cup$, un elemento mínimo en $\mathcal{R}(A,B)$ que llameremos 0_{AB} , y una operación de división / tales que

1. $\cup$ y $\cap$ forman un retículo distributivo en cada conjunto $\mathcal{R}(A,B)$.

2. Si $R(A,C)$, $S(B,C)$ son dos relaciones con mismo codominio C, entonces $R/S(A,B)$ está bien definida y cumple la propiedad de residuación: para toda $T(A,B)$

$$T \subseteq R/S \Leftrightarrow TS \subseteq R.$$

Teorema 7.2. *Para toda teoría* T*,* A_T *es una alegoría pretabular de división.*

Demostración. La unión $R \cup S$ está dada por $R \vee S$ la intersección $R \cap S$ por el conectivo $R \wedge S$, y 0 está dado por $\perp$.

La división R/S está dada por la fórmula $\forall z(R(x,z) \leftrightarrow S(x,z))$.

Usando el cálculo deductivo descrito en la sección 7.1 se pueden verificar las propiedades, para ver los detalles de las cuentas veáse [7, pp. 56–58]. ■

Corolario 7.2. *Para toda teoría* T*,* A_T *se puede representar plena y fielmente en una alegoría de la forma* $Rel(\mathcal{C})$*, donde* $\mathcal{C}$ *es un logos.*

7.3. Completitud

En la sección anterior mostramos cómo, para cada teoría T, es posible construir una alegoría A_T que modela a la teoría (algunos autores llaman a esta alegoría la alegoría sintáctica o libre), y vimos cómo esta alegoría se puede representar plena y fielmente en la alegoría de relaciones de un logos.

A continuación usaremos todo el aparato mostrado hasta el momento para demostrar un teorema de completitud para la lógica intuicionista.

Notemos primero que toda fórmula φ es equivalente a la fórmula $\top \to \varphi$. Luego toda fórmula puede escribirse en la forma $\varphi \to \psi$, y, además, podemos escoger φ' y ψ' de tal forma que $\vdash_H (\varphi \to \psi) \equiv (\varphi' \to \psi')$ pero con la condición que φ' y ψ' tengan las mismas variables libres (esto se hace introduciendo variables mudas, de la forma $y' = y'$). Por lo tanto podemos asumir que toda teoría T es un conjunto de fórmulas de la forma $\varphi \to \psi$ donde φ y ψ tienen las mismas variables libres.

Definición 7.11. Sea $\mathcal{R}$ una alegoría. Una *unidad* λ es un objeto tal que

1. La relación id_λ es la máxima en $(\mathcal{R}(\lambda,\lambda), \subseteq)$.

2. Para cualquier otro objeto A existe una relación $A \xrightarrow{R} \lambda$.

Una alegoría es *unitaria* si tiene unidad.

Definición 7.12. Una representación *unitaria* de alegorías es una representación que preserva la unidad.

Definición 7.13. Decimos que una teoría T *implica* una fórmula $\varphi \to \psi$ en una alegoría unitaria $\mathcal{E}$, $T \models_{\mathcal{E}} (\varphi \to \psi)$, si para cualquier representación unitaria $M : A_T \to \mathcal{E}$ se tiene que $M(\varphi) \subseteq M(\psi)$. Para una categoría $\mathcal{C}$, $T \models_{\mathcal{C}} (\varphi \to \psi)$ significará $T \models_{Rel(\mathcal{C})} (\varphi \to \psi)$.

Teorema 7.3 (Completitud)**.** *Sea T una teoría contable, entonces*

$$T \models_{Sh(\mathbb{R})} \varphi \Leftrightarrow T \vdash_H \varphi.$$

Demostración. ($\Leftarrow$) Es evidente a partir de la definición de implicación.

($\Rightarrow$) Usando el teorema 5.2, la alegoría A_T está fielmente representada en $Rel(Sh(\mathbb{R}))$. Si $T \models_{Sh(\mathbb{R})} \varphi$ entonces $T \models_{A_T} \varphi$, luego $T \vdash_H \varphi$. ∎

Gracias el teorema de representación de Stone, en el teorema anterior podemos reemplazar $\mathbb{R}$ por cualquier espacio métrico sin puntos aislados, o por cualquier espacio compacto totalmente desconectado sin puntos aislados. Por ejemplo, el espacio de Cantor, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, etc.

CAPÍTULO 8

Lógica de haces

En este capítulo final expondremos algunos resultados que surgieron al tratar de explorar la lógica de haces con las herramientas que hemos adquirido hasta el momento. Más específicamente, quisimos explorar qué consecuencias tenía la doble negación de la lógica de haces al verla como un autoadjunto

$$\neg\neg x \leq y \Leftrightarrow x \leq \neg\neg y$$

donde la implicación de izquierda a derecha vale siempre, y la inversa vale si $y = \neg\neg y$.

8.1. Semántica puntual

Definición 8.1. Sea $E \xrightarrow{p} X$ un haz. Una *sección* es una función continua $\sigma : U \subseteq X \to E$, donde U es abierto y $p \circ \sigma = id_U$.

Lema 8.1. *1. Las imágenes de las secciones forman un base de E.*

2. Si dos secciones σ_1 y σ_2 coinciden en un punto $x \in X$, entonces coinciden en un abierto U que contiene a x.

Definición 8.2. Sea $E \xrightarrow{P} X$ un haz. Para $x \in X$, llamaremos $E_x = p^{-1}(x)$ la *fibra* sobre x.

Notemos que la topología inducida sobre cada fibra es discreta.

Para la definición precisa de haz de estructuras veáse [1, p. 573]. Por el momento solo necesitamos saber que un haz de estructuras es un haz donde cada fibra es una estructura clásica $\mathfrak{A}_x = (E_x, R_x, ..., f_x, ..., c_x, ...)$, de tal forma que las estructuras están amalgamadas de manera coherente sobre el haz.

El estudio de la lógica de haces persigue un principio filosófico muy concreto: el de la *continuidad veritativa*, donde, de la verdad de una afirmación en un punto, se desea deducir la verdad de la misma afirmación en un entorno del punto.

Con el principio de la continuidad veritativa en mente, la siguiente definición de semántica puntual resulta bastante natural.

Definición 8.3. Sea $\mathfrak{A}$ un haz de estructuras de tipo τ. Definimos por inducción la relación: $\mathfrak{A}$ fuerza $\varphi(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ en x para secciones $\sigma_1, ..., \sigma_n$ definidas en x; en símbolos:

$$\mathfrak{A} \Vdash_x \varphi(\sigma_1, ..., \sigma_n)$$

1. Si φ es atómica y $t_1, ..., t_k$ son términos de tipo τ:

   $\mathfrak{A} \Vdash_x (t_1 = t_2)(\sigma_1, ..., \sigma_n) \Leftrightarrow t_1(\sigma_1(x), ..., \sigma_n(x) = t_2(\sigma_1(x), ..., \sigma_n(x))$

   $\mathfrak{A} \Vdash_x R(t_1, ..., t_k)(\sigma_1, ..., \sigma_n) \Leftrightarrow (t_1[\sigma_1(x), ..., \sigma_n(x)], ..., t_n[\sigma_1(x), ..., \sigma_n(x)]) \in R_x$
2. $\mathfrak{A} \Vdash_x (\varphi \wedge \psi)(\sigma_1, ..., \sigma_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \Vdash_x \varphi(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ y $\mathfrak{A} \Vdash_x \psi(\sigma_1, ..., \sigma_n)$
3. $\mathfrak{A} \Vdash_x (\varphi \vee \psi)(\sigma_1, ..., \sigma_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \Vdash_x \varphi(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ o $\mathfrak{A} \Vdash_x \psi(\sigma_1, ..., \sigma_n)$
4. $\mathfrak{A} \Vdash_x \neg\varphi(\sigma_1, ..., \sigma_n) \Leftrightarrow$ existe abierto $U \ni x$, para todo $y \in U(\mathfrak{A} \nVdash_y \varphi(\sigma_1, ..., \sigma_n))$
5. $\mathfrak{A} \Vdash_x (\varphi \to \psi)(\sigma_1, ..., \sigma_n) \Leftrightarrow$ existe abierto $U \ni x$ tal que para todo $y \in U$

   si $\mathfrak{A} \Vdash_y \varphi(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ entonces $\mathfrak{A} \Vdash_y \psi(\sigma_1, ..., \sigma_n)$
6. $\mathfrak{A} \Vdash_x \exists v\varphi(v, \sigma_1, ..., \sigma_n) \Leftrightarrow$ existe σ tal que $\mathfrak{A} \Vdash_x \varphi(\sigma, \sigma_1, ..., \sigma_n)$
7. $\mathfrak{A} \Vdash_x \forall v\varphi(v, \sigma_1, ..., \sigma_n) \Leftrightarrow$ existe abierto $U \ni x$ tal que para todo $y \in U$

   y toda σ definida en y, se tiene $\mathfrak{A} \Vdash_y \varphi(\sigma, \sigma_1, ..., \sigma_n)$.

De la definición se obtiene directamente el siguiente teorema.

Teorema 8.1.

$\mathfrak{A} \Vdash_x \varphi(\sigma_1, ..., \sigma_n) \Leftrightarrow$ *existe abierto* $U \ni x$ *tal que para todo* $y \in U$ $\mathfrak{A} \Vdash_y \varphi(\sigma_1, ..., \sigma_n)$.

Ejemplo 8.1. *Las leyes de la lógica clásica no son forzadas en los haces. Un ejemplo minimal para visualizar este hecho consiste en considerar el haz*

$$\mathfrak{A} = (\mathbb{R} \cup \{a\} \xrightarrow{p} \mathbb{R}),$$

donde los abiertos $\mathbb{R} \cup \{a\}$ *son los abiertos de* $\mathbb{R}$ *junto con los conjuntos de la forma* $U \setminus \{0\} \cup \{a\}$, *donde* U *es un abierto que contiene a* 0, *y donde* p *es la función idéntica sobre* $\mathbb{R}$ *extendida mediante* $p(a) = 0$.

En efecto, si σ *y* μ *son las dos secciones globales tales que* $\sigma(0) = 0$ *y* $\mu(0) = a$, *podemos ver que la fórmula* $(\sigma = \mu) \vee \neg(\sigma = \mu)$ *no es forzada en 0, y por lo tanto no vale la ley del tercio excluido. De hecho, no vale* $\mathfrak{A} \Vdash_0 (\sigma = \mu)$ *pues* $\sigma(0) \neq \mu(0)$, *y tampoco vale* $\mathfrak{A} \Vdash_0 \neg(\sigma = \mu)$ *pues para cualquier entorno* U *de* 0 *existe* $y \in U$ *tal que* $\mathfrak{A} \Vdash_y (\sigma = \mu)$.

Este hecho se debe precisamente a que el haz no es Hausdorff. Un ejercicio sencillo permite demostrar que la ley del tercio excluido para la igualdad está íntimamente ligada con la estructura topológica de las fibras, y se tiene:

$$\forall u, v\ (u = v) \vee \neg(u = v) \Leftrightarrow \exists \text{ vecindad } U \ni x \text{ tal que } p^{-1}(x) \text{ es de Hausdorff.}$$

Veamos que la lógica también está relacionada con el espacio base.

Teorema 8.2. $\mathfrak{A} \Vdash_0 \neg\neg\varphi(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ *syss existe un abierto* $U \ni x$ *tal que* $\{y \in U : \mathfrak{A} \Vdash_y \varphi(\sigma_1, ..., \sigma_n)\}$ *es denso en* U.

Demostración. Se tiene directamente de las definiciones. ■

Gracias a este teorema, se tiene que, en el ejemplo 8.1, $\mathfrak{A} \Vdash_0 \neg\neg(\sigma = \tau)$. Por lo tanto no vale la ley de la doble negación.

Observemos que si $\mathfrak{A}$ es un haz de estructuras entonces, para cada x en el espacio base y para cada tupla $\sigma_1, ..., \sigma_n$ de secciones definidas en x, podemos definir un orden sobre el conjunto de fórmulas en n variables de la siguiente manera

$$\varphi \leq \psi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \Vdash_x \varphi(\sigma_1, ..., \sigma_n) \rightarrow \psi(\sigma_1, ..., \sigma_n)$$

(en realidad obtenemos un preorden, pero se transforma en orden módulo equivalencia de fórmulas).

Como mencionamos al principio del capítulo, queremos estudiar la negación como residual autoadjunto, es decir:

$$\neg\neg\varphi \leq \psi \Leftrightarrow \varphi \leq \neg\neg\psi.$$

Si aceptamos que todas las leyes de la lógica intuicionista valen en la lógica de haces, entonces siempre tenemos que $\varphi \leq \neg\neg\varphi$. Sin embargo, hemos visto que no se tiene la desigualdad inversa $\neg\neg\varphi \leq \varphi$. De hecho, en un conjunto de fórmulas F, si la doble negación actuara como residual autoadjunto entonces obtendríamos que para toda $\varphi \in F$, $\varphi \equiv \neg\neg\varphi$.

8.2. Las fibras clásicas y el teorema de Baire

Definición 8.4. La lógica sobre una fibra $p^{-1}(x)$ es clásica syss todas las leyes clásicas son forzadas en x.

Observación 8.1. *La lógica sobre una fibra* $p^{-1}(x)$ *es clásica syss la ley de la doble negación es forzada en* x *para todas las fórmulas, pues la lógica clásica se obtiene a partir la lógica intuicionista añadiendo la ley de la doble negación y las leyes intuicionistas siempre son forzadas en todos los haces.*

Quisiéramos ver bajo qué condiciones sobre el haz podemos encontrar fibras de tal forma que la doble negación sea autoadjunta sobre los puntos, es decir, bajo qué condiciones la fibra es clásica.

En general esta situación no se tiene, por ejemplo en el haz de gérmenes de funciones continuas real valuadas, la lógica no es clásica en ninguna fibra.

Sin embargo, esto se debe a la cantidad de secciones que existen. Mostraremos a continuación que si podemos controlar el tamaño de secciones sobre un haz cuya base sea un espacio métrico completo, entonces siempre podremos encontrar un conjunto denso de fibras clásicas.

Teorema 8.3 (Teorema de Baire)**.** *Sea E un espacio métrico completo. Entonces la intersección enumerable de abiertos densos es un conjunto denso.*

Demostración. Veáse por ejemplo [4, p. 96] ■

Corolario 8.1. *Si $\mathfrak{A}$ es un haz sobre un espacio métrico completo X y el conjunto de secciones es enumerable, entonces el conjunto de fibras donde la lógica es clásica es denso.*

Demostración.

Sea $\varphi(x_1, ..., x_n)$ una fórmula y $\sigma = \sigma_1, ..., \sigma_n$ una tupla de secciones definidas (exactamente) sobre un abierto $U \ni x$. Los conjuntos $\{y \in U : \mathfrak{A} \Vdash_y \varphi(\sigma_1, ..., \sigma_n)\}$ y $\{y \in U : \mathfrak{A} \Vdash_y \neg\neg\varphi(\sigma_1, ..., \sigma_n)\}$ son abiertos, y el primero es denso en el segundo. Por lo tanto el conjunto ${N'_\varphi}^\sigma = \{y \in U : \mathfrak{A} \Vdash_y (\neg\neg\varphi \to \varphi)(\sigma_1, ..., \sigma_n)\}$ es un abierto denso en U. Entonces ${N_\varphi}^\sigma = {N'_\varphi}^\sigma \cup U'$, donde U' es el pseudocomplemento de U, es un abierto denso en X. Como el conjunto de secciones es enumerable, tenemos una colección enumerable de abiertos densos $N = \{{N_{\varphi_j}}^{\sigma_k}\}_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ cuya intersección es la colección de puntos donde la ley de la doble negación es forzada para todas las fórmulas. Por el teorema de Baire este conjunto es denso. ■

Se deduce inmediatamente que si el espacio base es finito, entonces la lógica del haz es clásica.

Los espacios métricos completos son finitos o son de cardinalidad no enumerable. Por tanto, otra consecuencia del teorema de Baire para la lógica de haces es que, bajo las condiciones del corolario, el conjunto de fibras donde la lógica es clásica no solamente es denso, sino también no enumerable. Sin embargo, el corolario no dice nada acerca de las fibras donde la lógica no es clásica, por lo cual, en principio, no parecería haber ninguna limitación para que el conjunto de fibras no clásicas fuera también denso. No obstante, no hemos encontrado ningún ejemplo donde esto ocurra, y los ejemplos considerados nos permiten proponer la siguiente conjetura: *bajo las condiciones del corolario anterior, el conjunto de fibras no clásicas es "nunca denso".*

En [1, p. 578], Caicedo demuestra que sobre el haz de gérmenes de funciones holomorfas sobre el plano complejo se fuerza la ley del tercio excluido ($\varphi \vee \neg\varphi$) para las fórmulas atómicas, pero es claro que hay una cantidad no contable de secciones. Este ejemplo sugiere, aunque no lo muestra, que el recíproco del corolario no es cierto.

Bibliografía

[1] Caicedo, X., "Lógica de los haces de estructuras", *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* XIX (74) (1995): 569-585.

[2] Freyd, P., Scedrov, A., *Categories, Allegories*, Amsterdam: North Holland, 1990.

[3] Galatos, N., Jipsen, P., Kowalsky, T., Ono, H., *Residuated Lattices: An Algebraic Glimpse at Substructural Logics*, Amsterdam: Elsevier, 2007.

[4] Ivorra, C., *Análisis* (en http://www.uv.es/ivorra/Libros/Libros.htm).

[5] Mac Lane, S., *Categories for the Working Mathematician*, New York: Springer, 1971.

[6] Mac Lane, S., Moerdjik, I., *Sheaves in Geometry and Logic, a First Introduction to Topos Theory*, New York: Springer, 1992.

[7] Santamaría, F., *Lógicas y categorías intermedias*, Tesis de Magister, Universidad Nacional de Colombia, 2007.

[8] Zalamea, F., *Teoría de Categorías - Notas de Clase*, Preprint, Universidad Nacional de Colombia, 2008.