

**CONJUNTOS SINGULARES  $C^1$ -ROBUSTOS  
TRANSITIVOS PARA FLUJOS EN  
3-VARIEDADES CERRADAS**

Andrés Mauricio López Barragán  
Código: 830322

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
Bogotá D.C., 2010

**CONJUNTOS SINGULARES  $C^1$ -ROBUSTOS  
TRANSITIVOS PARA FLUJOS EN  
3-VARIEDADES CERRADAS**

Andrés Mauricio López Barragán  
Código: 830322

Trabajo de grado para optar al título de  
*Magister en ciencias matemáticas.*

**Dirigido por:**  
Serafín Bautista Díaz

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
Bogotá D.C., 2010

TÍTULO EN ESPAÑOL:

CONJUNTOS SINGULARES  $C^1$ -ROBUSTOS TRANSITIVOS PARA FLUJOS EN 3-VARIEDADES CERRADAS

TÍTULO EN INGLÉS:

$C^1$ -ROBUST TRANSITIVE SINGULAR SETS FOR 3-FLOWS CLOSED MANIFOLDS.

RESUMEN EN ESPAÑOL:

El objetivo principal de este trabajo es reescribir la estructura de todos los conjuntos -robustos transitivos que contienen singularidades para flujos sobre 3-variedades cerradas: ellos son parcialmente hiperbólicos, expanden volumen en la dirección central y son atractores ó repulsores.

RESUMEN EN INGLÉS:

The main goal of this work is rewrites the structure of all -robust transitive sets with singularities for flows on closed 3-manifolds: they are partially hyperbolic with volume expanding central direction, and are either attractors or repellers.

DESCRIPTORES O PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL:

Atractor geométrico de Lorenz, conjuntos singulares hiperbólicos, y conjuntos  $C^1$ -robustos transitivos.

DESCRIPTORES O PALABRAS CLAVES EN INGLES:

Lorenz geometric attractor, hiperbolic singular sets and  $C^1$ -robust transitives.

FIRMA DEL DIRECTOR:\_\_\_\_\_

Nombre completo del autor y año de nacimiento:

ANDRÉS MAURICIO LÓPEZ BARRAGÁN (1984)

*Dedicado a:*

Mi familia

### *Agradecimientos:*

Todos los logros alcanzados en mis 26 años de vida nunca hubiesen sido posibles sin el apoyo de mis padres y de dios, son las personas que mas admiro, mi madre la mujer mas emprendedora y trabajadora que conozco, y mi padre el hombre mas astuto y honesto que conozco, valores y aptitudes que gracias a ellos aprendí y herede. Durante el desarrollo del trabajo para obtener el título de maestría, se contó con el apoyo y total disposición del profesor y director de tesis Serafín Bautista Díaz, luego quiero presentar mis totales agradecimientos por todos sus aportes tanto cognoscitivos, como personales, y destacar su gran colaboración para mi formación profesional.

# Resumen

El atractor geométrico de Lorenz está en  $\mathcal{V}^1(M)$  (donde  $\mathcal{V}^1(M)$  es el conjunto de los flujos  $C^1$  sobre  $M$  tal que cada uno de estos elementos tiene una vecindad  $\mathcal{U}$  formado por flujos con todas sus órbitas periódicas y singularidades hiperbólicas). Así, para entender este conjunto, es necesario primero describir los conjuntos  $C^1$ -robustos transitivos con singularidades. El objetivo general es:

1. Verificar y dar forma a una estructura general para los conjuntos singulares transitivos bajo la hipótesis de que este conjunto es compacto, y además demostrar que este compacto es parcialmente hiperbólico y expande volumen en la dirección central, así para variedades tres dimensionales se avanzará en la caracterización de  $\mathcal{V}^1(M)$ .

Bajo la suposición que el conjunto  $\Lambda$  compacto está contenido propiamente en  $M$  variedad cerrada tres dimensional cerrada y tomando las definiciones necesarias para lograr construir la definición formal de  $C^1$ -singular transitivo, además si dotamos a este conjunto  $\Lambda$  con las hipótesis para ser  $C^1$ -singular transitivo en un campo vectorial en  $M$  el objetivo específico es:

1. Demostrar que las singularidades de  $\Lambda$  son Lorenz-like, para cualquiera,  $X$  o  $-X$ .
2. Demostrar que  $\Lambda$  es singular hiperbólico para cualquiera  $X$  o  $-X$ .
3. Demostrar que  $\Lambda$  es un atractor para cualquiera  $X$  o  $-X$ .

Así se tiene, entonces para el campo o para el opuesto del campo, que este conjunto  $\Lambda$  es singular hiperbólico el cual es un atractor, y cualquiera de sus singularidades cumple la definición de ser Lorenz-like lo cual ya esta dando propiedades importantes sobre este conjunto  $\Lambda$  y señala características del conjunto  $\vartheta^1(M)$ .

# Abstract

The geometric Lorenz attractor is in  $\mathcal{V}^1(M)$  (where  $\mathcal{V}^1(M)$  is the set of  $C^1$  flows such that each of these elements has a neighborhood  $\mathcal{U}$  formed by flows with all its periodic orbits and hyperbolic singularities). Thus, to understand this set, it is necessary to first describe the sets  $C^1$ -robust transitive singularities. The goal is:

1. Verify and shape an overall structure of singular sets transitive on the assumption that this set is compact, and moreover, prove that this is partially hyperbolic and compact volume expands in the direction central well for three dimensional varieties progress on the characterization  $\mathcal{V}^1(M)$ .

Under the assumption that of set  $\Lambda$  actual content in this compact variety  $M$  closed three dimensional camera and taking the necessary definitions to achieve build the formal definition of  $C^1$ -singular transitive, also if we provide this set  $\Lambda$  with assumptions for  $C^1$ -singular transitive vector field on  $M$

The specific objective is:

1. Show that the singularities of  $\Lambda$  are Lorenz-like, to anyone,  $X$  or  $-X$ .
2. Show that  $\Lambda$  is singular for any hyperbolic  $X$  or  $-X$ .
3. Show that  $\Lambda$  is an attractor for either  $X$  or  $-X$ .



This is, then for the field or to the opposite field, that this set  $\Lambda$  is singular which is a hyperbolic attractor, and any of its singularities satisfies be the definition of Lorenz-like which is already giving important properties on this set  $\Lambda$  and show characteristics of the set  $\vartheta^1(M)$ .

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>I</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Conceptos básicos . . . . .	1
1.2. Conjuntos singulares hiperbólicos . . . . .	3
1.3. Órbitas homoclínicas y heteroclínicas . . . . .	5
1.3.1. Bifurcaciones homoclínicas en sistemas tres-dimensionales . . . . .	7
1.3.2. Teoremas de shilnikov . . . . .	7
<b>2. Desarrollo del problema</b>	<b>10</b>
<b>3. TEOREMA CENTRAL</b>	<b>16</b>
3.1. Teorema central . . . . .	16
<b>Bibliografía</b>	<b>23</b>
<b>Índice</b>	<b>25</b>

# Introducción

El llamado atractor de Lorenz, dado por las soluciones del campo vectorial  $X(x, y, z) = (\alpha y - \alpha x, \beta x - y - xz, -\gamma z + xy)$  sobre  $\mathbb{R}^3$  donde  $\alpha, \beta, \gamma$  son parámetros reales es el punto de partida. Un atractor se define como un conjunto sumidero o attracting el cual contiene una órbita densa, dicho de otro modo, un atractor es un conjunto transitivo donde todas las órbitas positivas cercanas convergen a este. El atractor geométrico de Lorenz no es hiperbólico, sin embargo, presenta propiedades interesantes por ejemplo: es la clausura de sus órbitas periódicas, es transitivo, presenta sensibilidad con respecto a condiciones iniciales y es una *clase homoclínica*.(ver[2])

En recientes publicaciones se han estudiado nuevas clases de conjuntos robustos transitivos con singularidades.

Debido a estos resultados y con el interés de unificarlos, surge una pregunta natural: ¿Existe una estructura general para los conjuntos robustos transitivos?

Lo que se busca es responder a esta pregunta enfocándolo hacia conjuntos compactos, en tres variedades sin borde. Para esto se utilizarán ideas y técnicas de artículos de Carlos Arnoldo Morales, Maria José Pacífico, Enrique Ramiro Pujals junto con teoría relacionada con el tema[1],[2],[9],[10]. De este modo, el objetivo de la propuesta proporciona herramientas para caracterización de  $\vartheta^1(M)$  en variedades tres-dimensionales (donde  $\vartheta^1(M)$  es el conjunto de los flujos  $C^1$  sobre  $M$  tal que son todas sus órbitas periódicas y singularidades hiperbólicas).

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Conceptos básicos

En todas partes,  $M$  denota una tres-variedad riemanniana cerrada ( compacta sin borde ) y  $\chi^r(M)$  es el conjunto de los  $C^r$ -campos vectoriales en  $M$ ,  $r \geq 1$ . Sea  $X$  un campo vectorial de clase  $C^r$ ,  $r \geq 1$  sobre  $M$ . Vamos a denotar también a  $X_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  el flujo generado por  $X$ . Decimos que este flujo es una aplicación  $X : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  donde  $X_0 = id_M$  y  $X_s \circ X_t = X_{s+t}$  para todo  $s, t \in \mathbb{R}$ .

Una *órbita* de  $X$  es el conjunto  $O = O_X(q) = \{X_t(q) : t \in \mathbb{R}\}$  para algún  $q \in M$ . Una *singularidad* de  $X$  es un punto  $\sigma \in M$  tal que  $X(\sigma) = 0$  (equivalentemente  $O_X(\sigma) = \{\sigma\}$ ). Una *órbita periódica* de  $X$  es una órbita  $O = O_X(p)$  tal que  $X_T(p) = p$  para algún número mínimo  $T > 0$  (equivalentemente  $O$  es compacto y  $O \neq \{p\}$ ). Una *órbita cerrada* de  $X$  es una singularidad o una órbita periódica de  $X$ .

El *conjunto omega límite* del punto  $p \in M$  es el conjunto  $\omega_X(p) = \{x \in M : x = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{t_n}(p), \text{ para alguna sucesión } t_n \rightarrow \infty\}$ . El *conjunto alfa límite* de un punto  $p$  es el conjunto  $\alpha_X(p) = \{x \in M : x = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{-t_n}(p), \text{ para alguna sucesión } t_n \rightarrow \infty\}$ . Un punto  $p \in M$  es llamado *no-errante* para  $X$  si para cada  $T > 0$  y cada vecindad  $U$  en  $M$  de  $p$  existe  $t > T$  tal que  $X_t(U) \cap U \neq \emptyset$ . El conjunto de puntos no-errantes de  $X$  es denotado por  $\Omega(X)$  o  $\Omega(X_t)$ .

Un conjunto compacto  $\Lambda \subset M$  es:

- *Invariante* si  $X_t(\Lambda) = \Lambda, \forall t \in \mathbb{R}$ ;
- *Transitivo* si  $\Lambda = \omega_X(p)$  para algún  $p \in \Lambda$ ;
- *No-trivial* si  $\Lambda$  no es una órbita cerrada de  $X$ ;
- *Singular* si  $Sing_X(\Lambda) \neq \emptyset$ ;
- *Aislado* si existe una vecindad compacta  $U$  de  $\Lambda$  tal que

$$\Lambda = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t(U)$$

( $U$  es llamado *bloque aislante*);

- *Sumidero* si este es aislado y tiene un bloque aislante  $U$  positivamente invariante, i.e.,

$$X_t(U) \subset U, \quad \forall t \geq 0;$$

- *Atractor* si este es un sumidero transitivo.

Recordemos algunas propiedades de los conjuntos *hiperbólicos*. Por la teoría de las variedades invariantes [7] se tiene que si  $\Lambda \subset M$  es un conjunto *hiperbólico* para  $X$ , entonces para todo  $p \in \Lambda$  los conjuntos

$$W^{ss}(p, X) = \{q \in M : d(X_t(q), X_t(p)) \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow \infty\}$$

$$W^{uu}(p, X) = \{q \in M : d(X_t(q), X_t(p)) \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow -\infty\}$$

son  $C^r$  *subvariedades* inmersas de  $M$ , Estas variedades son llamadas *variedad estable* e *inestable* fuertes del punto  $p$ , y son invariantes por el flujo  $X_t$ .

Para todo  $p \in \Lambda$  definimos

$$W^s(p, X) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W^{ss}(X_t(p), X)$$

y

$$W^u(p, X) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W^{uu}(X_t(p), X),$$

los *conjuntos estable* e *inestable* de un punto  $p$ . Cuando la órbita de  $p$  es compacta, entonces  $W^s(p, X)$  y  $W^u(p, X)$  representan las subvariedades *estable* e *inestable* de la órbita de  $p$ . Una *órbita cerrada* de  $X$  es hiperbólica si ella es hiperbólica como conjunto compacto invariante de  $X$ .

La *clase homoclínica* asociada a una órbita periódica hiperbólica  $O = O_X(p)$  de  $X$ , denotada por  $H_X(p)$ , es la clausura del conjunto de puntos de intersección transversal entre  $W^s(p, X)$  y  $W^u(p, X)$ , esto es,

$$H_X(p) = CL(W^s(p, X) \pitchfork W^u(p, X)).$$

Dado un conjunto invariante compacto  $\Lambda$  de  $X \in \mathcal{X}^r(M)$ ,  $P_X(\Lambda)$  y  $SingX(\Lambda)$  son los conjuntos de órbitas periódicas y de singularidades de  $X$  en  $\Lambda$ , respectivamente. Si  $p \in M$  y  $B \subset M$ ,  $O_X(p)$  y  $\bar{B}$  denota la órbita de  $p$  y la clausura de  $B$  respectivamente. Un conjunto invariante  $\Lambda$ , de  $X$  es aislado si existe un conjunto abierto  $U \supset \Lambda$  (bloque aislante) tal que  $\Lambda = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t(U)$ , y singular si  $Sing_X(\Lambda) \neq \emptyset$ .

Sea  $\mathcal{V}^1(M)$  el conjunto de los flujos  $C^1$  sobre  $M$  tal que cada uno de estos elementos tiene una vecindad  $U$  formado por flujos con todas sus órbitas periódicas y singularidades hiperbólicas.

## 1.2. Conjuntos singulares hiperbólicos

**Definición 1.1.** *Un conjunto compacto invariante  $\Lambda \subset M$  de  $X$  es hiperbólico si existe una descomposición continua de  $DX_t$ -invariante del fibrado tangente de  $M$  sobre  $\Lambda$  de*

la forma

$$TM = E^s \oplus E^X \oplus E^u,$$

tal que para algunas constantes  $K, \lambda > 0$  se tiene (Ver [6], [10]):

1.  $\|DX_t/E^s\| \leq Ke^{-\lambda t}, \forall t > 0$  (i.e.,  $E^s$  es el subfibrado  $(K, \lambda)$ -contrator);
2.  $\|DX_{-t}/E^u\| \leq Ke^{-\lambda t}, \forall t > 0$  (i.e.,  $E^u$  es el subfibrado  $(K, \lambda)$ -expansor);
3.  $E^X = \langle X \rangle$  (i.e.,  $E^X$  es la dirección del campo).

Una órbita cerrada de  $X$  es hiperbólica si ella es hiperbólica vista como un conjunto invariante de  $X$ . Un conjunto hiperbólico  $H$  es *tipo silla* si  $E_x^s \neq 0$  y  $E_x^u \neq 0$  para todo  $x \in H$ . El ejemplo más representativo de un conjunto hiperbólico tipo silla es de un flujo tres-dimensional obtenido por la herradura de Smale en  $S^2$ . [10]

**Definición 1.2.** Sea  $\Lambda \subset M$  un conjunto compacto invariante de  $X$ . Una descomposición continua de  $DX_t$ -invariante del fibrado tangente de  $M$  sobre  $\Lambda$ , de la forma

$$T_\Lambda M = E_\Lambda \oplus F_\Lambda,$$

es una descomposición dominada, si existen constantes positivas  $K, \lambda$  tal que

$$\frac{\|DX_t(x)/E_x\|}{m(DX_t(x)/F_x)} \leq Ke^{-\lambda t}, \quad \forall x \in \Lambda, \forall t > 0.$$

donde  $m(A) = \inf_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|}$ . (pseudonorma)

El subfibrado  $F$  es  $(K, \lambda)$ -dominado por el subfibrado  $E$ .

Vamos a asumir que una descomposición dominada, de dos subfibrados  $E$  y  $F$  son siempre no triviales.

De esta definición, se tiene que  $E_x \neq 0$  y  $F_x \neq 0$  para todo  $x \in \Lambda$ .

**Definición 1.3.** *Un conjunto compacto invariante  $\Lambda$  de  $X$  es parcialmente hiperbólico, si este exhibe una descomposición dominada*

$$T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^c$$

tal que  $E_\Lambda^s$  es un subfibrado  $(K, \lambda)$ -contrator, i.e.,

$$\|DX_t(x)/_{E_x^s}\| \leq Ke^{-\lambda t}, \quad \forall x \in \Lambda, \forall t > 0.$$

El subfibrado  $E_\Lambda^c$  es llamado el subfibrado central.

Para  $x \in \Lambda$  y  $t \in \mathbb{R}$  sea  $J_t^c(x)$  el valor absoluto del determinante de la transformación lineal

$$DX_t(x)/_{E_x^c} : E_x^c \rightarrow E_{X_t(x)}^c.$$

Decimos que un conjunto  $\Lambda$  parcialmente hiperbólico *expande volumen* (o  $(K, \lambda)$ -*expande volumen*) en el subfibrado central, si

$$J_t^c(x) \geq K^{-1}e^{\lambda t}, \quad \forall x \in \Lambda, \forall t > 0.$$

### 1.3. Órbitas homoclínicas y heteroclínicas

Consideremos el sistema dinámico definido por la EDO

$$\dot{x} = X(x), x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

donde  $X$  es suave. Sea  $x_0, x_{(1)}, x_{(2)}$  puntos de equilibrio del sistema.

**Definición 1.4.** *Una órbita  $\Gamma_0$  empezando en un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  es llamada homoclínica al punto de equilibrio  $x_0$  del sistema (1.1) si  $X_t(x) \rightarrow x_0$  cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ .*

**Definición 1.5.** *Una órbita  $\Gamma_0$  empezando en un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  es llamada heteroclínica a los puntos de equilibrio  $x_{(1)}$  y  $x_{(2)}$  del sistema (1.1) si  $X_t(x) \rightarrow x_{(1)}$  cuando  $t \rightarrow -\infty$  y  $X_t(x) \rightarrow x_{(2)}$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .*



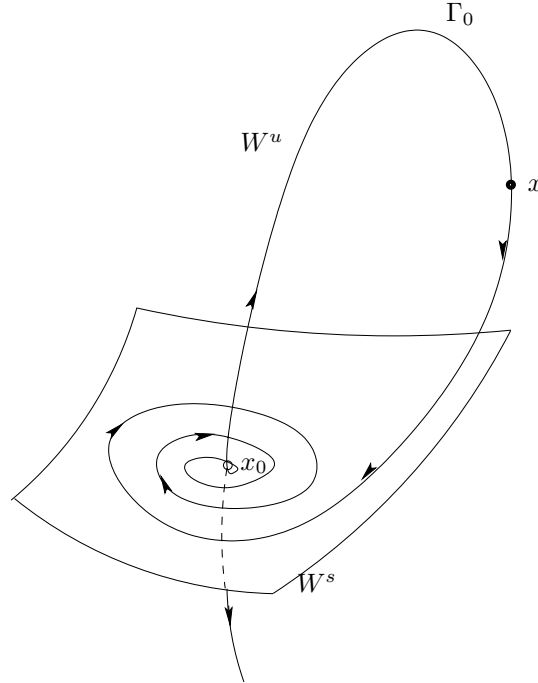


Figura 1.1: Órbita homoclínica.

Para nuestro caso, las órbitas a trabajar están en un espacio 3-dimensional y las representaciones de las mismas están plasmadas en las figuras 1.1 y 1.2.

Dado lo anterior debemos caracterizar el comportamiento de las variedades estable e inestable cerca a bifurcaciones en sistemas 3-dimensionales con mayor detalle. Consideremos un sistema en  $\mathbb{R}^3$  con una órbita homoclínica  $\Gamma_0$  asociado a un punto  $x_0$ . Asumimos que  $\dim(W^u) = 1$  (Caso contrario, tomamos la dirección contraria del tiempo), e introducimos una sección transversal  $\Sigma$  con coordenadas  $(\xi, \eta)$  como en la figura (1.3). Supongamos que  $\xi = 0$  corresponde a la intersección de  $\Sigma$  con la variedad estable de  $x_0$ . Esta construcción puede ser realizada para todo sistema suficientemente cerca. Sea un punto  $(\xi^u, \eta^u)$  corresponde a la intersección de  $W^u$  con  $\Sigma$ . Entonces,

**Definición 1.6.** *El escalar  $\beta = \xi^u$  es llamada una función split.*

Notamos que  $\beta = 0$  provee una condición para la bifurcación homoclínica en  $\mathbb{R}^3$ .

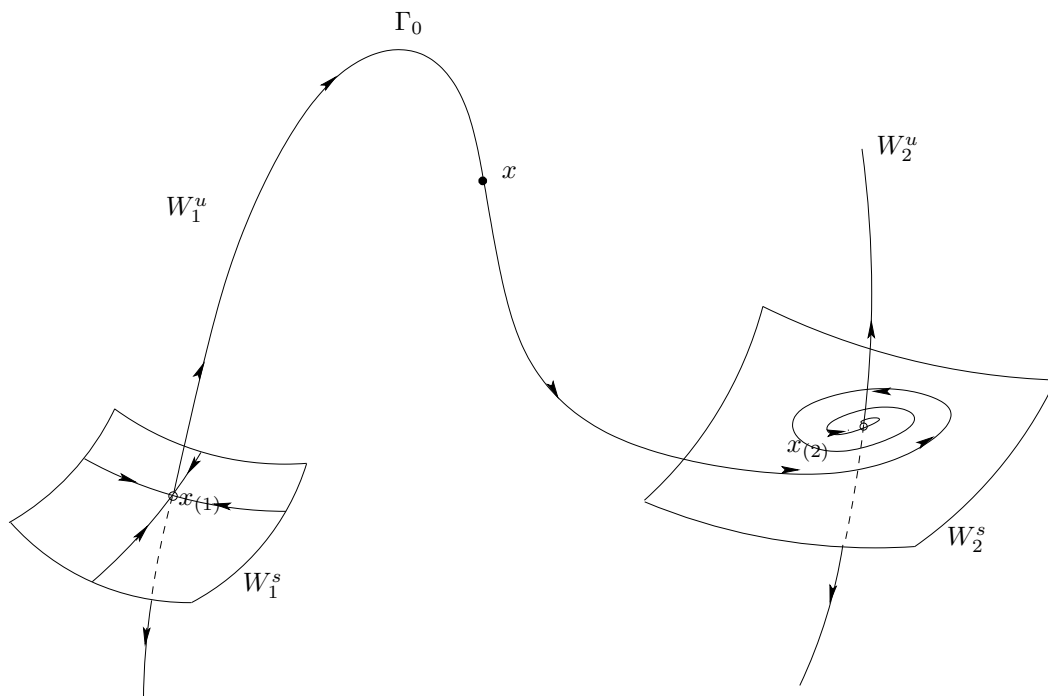


Figura 1.2: Órbita heteroclínica

### 1.3.1. Bifurcaciones homoclínicas en sistemas tridimensionales

### 1.3.2. Teoremas de shilnikov

**Definición 1.7.** *Los valores propios con parte real negativa que están más cercanos al eje imaginario son llamados **valores principales**, y el correspondiente espacio es llamado **espacio principal**.*

**Definición 1.8.** *La cantidad de sillas  $\sigma$  es la suma del valor propio positivo y la parte real del valor propio principal.*

Por lo tanto  $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2$  para un nodo y  $\sigma = \lambda_1 + \text{Re}(\lambda_{2,3})$  para un foco-silla. En nuestro caso trabajaremos solo el caso en el cual la singularidad es un foco-silla, así tenemos:

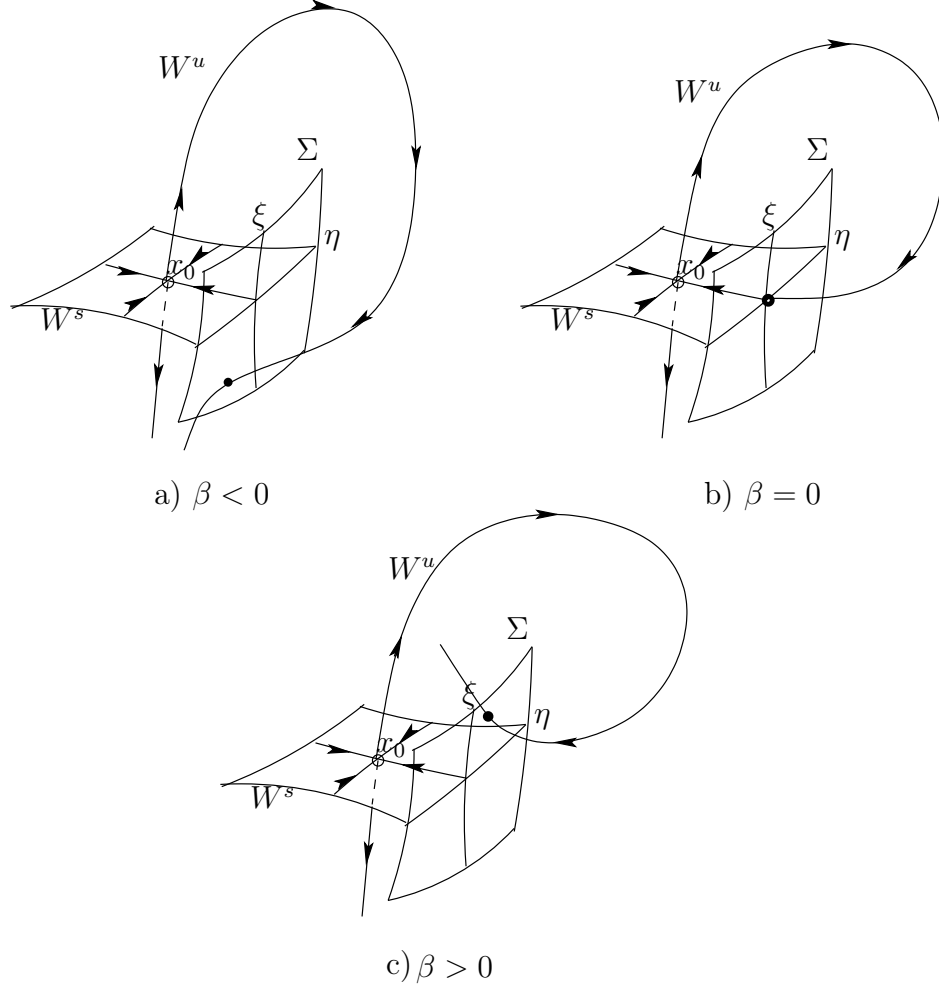


Figura 1.3: Función Split en el caso 3-dimensional

**Teorema 1.9.** (*Foco-silla*,  $\sigma_0 < 0$ ) *Suponga un sistema 3-dimensional*

$$\dot{x} = X(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

*con  $X$  función suave, tiene en  $\alpha = 0$  un punto de equilibrio foco-silla  $x_0 = 0$  con valores propios  $\lambda_1(0) > 0 > \text{Re}\lambda_{2,3}(0)$  y una órbita homoclínica  $\Gamma_0$ . Asuma que se satisfacen las siguientes condiciones:*

- $\sigma = \lambda_1(0) + \text{Re}\lambda_{2,3}(0) < 0$ ;
- $\lambda_2(0) \neq \lambda_3(0)$ ;

- $\beta'(0) \neq 0$ , donde  $\beta(\alpha)$  es la función split.

Entonces el sistema (1.2) tiene un único ciclo límite  $L_\beta$  estable en una vecindad  $U_0$  de  $\Gamma_0 \cup \{x_0\}$  para todo  $\beta > 0$  suficientemente pequeño.

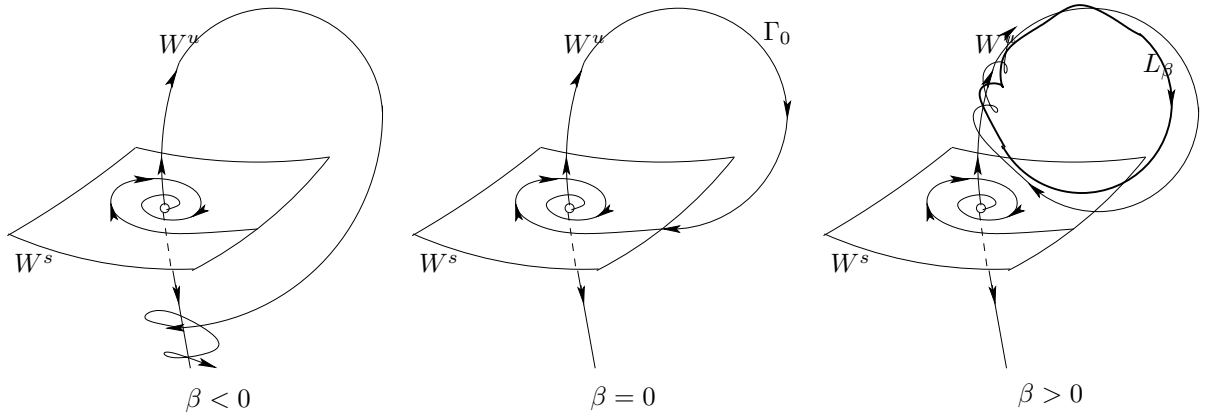


Figura 1.4: Bifurcación homoclínica de foco-silla con  $\sigma_0 < 0$ .

**Teorema 1.10.** (*Foco-silla*,  $\sigma_0 > 0$ ) Suponga un sistema tres-dimensional

$$\dot{x} = X(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

con  $X$  función suave, tiene en  $\alpha = 0$  un punto de equilibrio foco-silla  $x_0 = 0$  con valores propios  $\lambda_1(0) > 0 > \text{Re}\lambda_{2,3}(0)$  y una órbita homoclínica  $\Gamma_0$ . Asuma que se satisfacen las siguientes condiciones:

- $\sigma = \lambda_1(0) + \text{Re}\lambda_{2,3}(0) > 0$ ;
- $\lambda_2(0) \neq \lambda_3(0)$ .

Entonces el sistema (1.3) tiene un número infinito de ciclos límite silla en una vecindad  $U_0$  de  $\Gamma_0 \cup \{x_0\}$  para todo  $|\beta|$  suficientemente pequeño.

## Capítulo 2

### Desarrollo del problema

La motivación para este trabajo es el llamado atractor de Lorenz [12], dado por las soluciones del campo vectorial sobre  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{cases} x' = \alpha y - \alpha x \\ y' = \beta x - y - xz \\ z' = -\gamma z + xy \end{cases}$$

donde  $\alpha, \beta, \gamma$  son parámetros reales no negativos. Experimentos mejorados numéricamente por Lorenz para  $\alpha = 10, \beta = 28$ , y  $\gamma = 8/3$ , sugieren la existencia de un atractor robusto extraño (sensible), hacia el cual tienden todas las trayectorias positivas empezando en una vecindad del origen  $(0, 0, 0)$ , el cual es una singularidad para el sistema y parte del atractor. Sorprendentemente tres décadas y media después de este notable trabajo, aún no sabemos si las soluciones de las ecuaciones de arriba tienen realmente un atractor extraño para los valores  $\alpha, \beta, \gamma$ . Sin embargo esto fue probado ser cierto ([13]) para el flujo en hoy día llamado el *atractor geométrico de Lorenz*: este exhibe un conjunto atractor transitivo con una singularidad en un camino robusto. Recordemos que un conjunto invariante para el flujo es transitivo si este es el  $\varpi$ -límite de una de sus órbitas.

En recientes publicaciones se han estado exhibiendo nuevas clases de conjuntos robustos transitivos con singularidades. También, se exhiben mecanismos a través de los cuales

la suspensión de ciertos atractores expansores de los dos-discos pueden ser deformados hacia un atractor robusto extraño con singularidades que no es equivalente a un atractor geométrico de Lorenz ni a ningún otro ejemplo conocido.

En vista de estos resultados e intentando unificarlos, surge una pregunta natural: ¿existe una estructura general para los conjuntos robustos transitivos? Doering (ver [3]) prueba en uno de sus artículos que cuando  $\Lambda = M$ ,  $M$  una variedad cerrada tres dimensional, entonces  $\Lambda$  no contiene singularidades y el flujo es Anosov, es decir, que  $\Lambda = M$  es hiperbólico. Así asumimos que  $\Lambda$  está contenido propiamente en  $M$ . En este caso,  $\Lambda$  tiene singularidades o no. Si las tiene, es bien conocido que cada conjunto no puede tener una estructura hiperbólica; la presencia de una singularidad en la clausura de órbitas periódicas es una obstrucción para esto. Recordemos que un conjunto, compacto invariante  $\Lambda \subset M$  es hiperbólico si el fibrado tangente de  $M$  bajo  $\Lambda$  admite una descomposición,  $E^u \oplus E^X \oplus E^s$ , donde  $E^X$  es tangente al flujo  $X_t$  y, para alguna métrica Riemanniana sobre  $M$ ,  $E^u$  y  $E^s$  son, respectivamente, exponencialmente expansor y contractor por la derivada  $DX_t$ . El fibrado  $E^u$  (respectivamente  $E^s$ ) es llamado fibrado inestable (respectivamente fibrado estable).

Este trabajo reconstruye la respuesta a esta pregunta en un camino positivo para compactos, 3-variedades sin borde. Es más,  $\Lambda$  es parcialmente hiperbólico y expande volumen en la dirección central. Lo cual es que,  $T\Lambda$  puede ser escrito como  $E^s \oplus E^{cu}$ ,  $E^s$  siendo un fibrado uniformemente contractor uno-dimensional que domina  $E^{cu}$ , y  $E^{cu}$  expande volumen. Esta definición fue independientemente presentada en una conferencia asistida por el primer autor de este artículo (*L.P Shilnikov*). Mas aún, si  $\Lambda$  tiene singularidades, entonces cada una es hiperbólica y  $\Lambda$  es cualquier un atractor o un repulsor para el flujo. Recordemos que  $E^s$  es uniformemente contractor para el flujo si existe un real positivo  $T$  y  $c < 1$  tal que  $\|DX_T/E^s\| < c$ ;  $E^s$  domina  $E^{cu}$  si existe  $c < 1$  y un número real  $T$  tal que  $\|DX_T/E^s\| \|DX_{-T}/E^{cu}\| < c$ , y  $E^{cu}$  está expandiendo volumen si existe  $c > 1$  y  $T > 0$  tal que  $|\det(DX_T/E^{cu})| > c$ . Aquí el  $\det(A)$  significa el determinante de  $A$ .

Sea  $\vartheta^1(M)$  el conjunto de los flujos  $C^1$  sobre  $M$  tal que cada uno de estos elementos tiene una vecindad  $\mathcal{U}$  formado por flujos con todas sus órbitas periódicas y singularidades siendo hiperbólicas. Note que  $\vartheta^1(M)$  es la versión flujo de  $\mathcal{F}^1(M)$ . Es conocido que  $\mathcal{F}^1(M)$  coincide con el conjunto de los difeomorfismos hiperbólicos de  $M$ . El ejemplo exhibido en el artículo de (J. Guckenheimer, R. Williams, Structural Stability of Lorenz attractors), (*ver [13]*) dice que este no es el caso en la estructura de flujos: el atractor geométrico de Lorenz está en  $\vartheta^1(M)$ . Así, para entender este conjunto, es necesario primero describir los conjuntos  $C^1$ -robustos transitivos con singularidades. De este modo, nuestro resultado proporciona un paso en la dirección de la caracterización de  $\vartheta^1(M)$  para variedades 3-dimensionales. En dimensiones más altas el estudio de  $\vartheta^1(M)$  está abierto. Un resultado importante aquí es uno en el cual se está mostrando la existencia de atractores Lorenz-like con una (única) singularidad con cualquier número de direcciones expansoras.

También señalamos que este artículo es parte de un programa más ambicioso idealizado por Palis, un punto alto es la siguiente conjetura: para un conjunto denso en el interior de los hiperbólicos, todo elemento tiene un número finito de atractores, cualquiera robusto o un menor persistente (medida de Lebesgue positiva en forma parametrizada) cuya unión de las cuencas de atracción tiene probabilidad total.

Digamos nuestros resultados más precisamente. En todas partes,  $M$  denota una 3-variedad cerrada y  $\chi^r(M)$  es el conjunto de los  $C^r$ -campos vectoriales en  $M$ ,  $r \geq 1$ . Dado un conjunto invariante compacto  $\Lambda$  de  $X \in \chi^r(M)$ ,  $P_X(\Lambda)$  y  $Sing_X(\Lambda)$  son los conjuntos de órbitas periódicas y de singularidades en  $X$  en  $\Lambda$ , respectivamente. Si  $p \in M$  y  $B \subset M$ ,  $O_X(p)$  y  $\bar{B}$  denota la órbita de  $p$  y la clausura de  $B$  respectivamente. Un conjunto invariante  $\Lambda$ , de  $X$  es aislado si existe un conjunto abierto  $U \supset \Lambda$  (bloque aislante) tal que  $\Lambda = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t(U)$ , y singular si  $Sing_X(\Lambda) \neq \emptyset$ .

El atractor geométrico de Lorenz (cualquiera expansor o contractor) y una herradura singular (cualquiera expansor o contractor) son ejemplos de conjuntos transitivos singulares. (*ver [13]*)

**Definición 2.1.** *Un conjunto compacto singular invariante  $\Lambda$  de  $X \in \chi^r(M)$  es singular hiperbólico si este es parcialmente hiperbólico, expande volumen en la dirección central y cualquier  $\sigma \in \text{Sing}_X(\Lambda)$  es hiperbólico.*

**Definición 2.2.** *Un conjunto transitivo aislado  $\Lambda$  de  $X \in \chi^r(M)$  es  $C^1$ -Robusto Transitivo si existe un bloque aislante  $U$  de  $\Lambda$  tal que  $\Lambda(Y) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} Y_t(U)$  es un conjunto transitivo para todo  $Y \in C^r$  cercano a  $X$ . [1]*

El ejemplo mas conocido de un conjunto robusto singular transitivo es el expansor geométrico Atractor de Lorenz [11]. El contractor geométrico Atractor de Lorenz y la herradura singular ( cualquiera expandiendo o contrayendo ) no son conjuntos  $C^1$ -robustos singulares transitivos . Denotamos  $\text{Sing}(X) = \text{Sing}_X(M)$ .

**Definición 2.3.** *Decimos que  $\sigma \in \text{Sing}(X)$  es Lorenz-like si los valores propios de  $DX(\sigma)$  son reales y satisfacen  $\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < -\lambda_3 < \lambda_1$ .*

**Observación 2.4.** *Note que la condición de que los valores propios sean Lorenz-like implican las condiciones para que el conjunto a tratar sea parcialmente hiperbólico, esto quiere decir que en el fibrado tangente obtenemos que el valor propio  $\lambda_2$  que es el mas negativo es la dirección del espacio estable en la descomposición, es decir, es la dirección de  $E^s$ , y tomándolo en la dimensión tres el valor propio  $\lambda_3$  y  $\lambda_1$  nos arrojan el espacio central, es decir, en la descomposición  $E^{cu}$  es un plano, donde  $E^s$  es contractor (condición de  $\lambda_2$ ),  $E^s$  domina a  $E^{cu}$  (condición de  $\lambda_2 < \lambda_3$ ), y  $E^{cu}$  expande volumen (condición  $-\lambda_3 < \lambda_1$ ).*

**Lema 2.5.** *Sea  $X \in \mathcal{U}_{\Lambda,U}$  el conjunto abierto de en  $\chi^r(M)$  . Entonces  $X$  no tiene fuentes o sumideros en  $U$ , y cualquier  $p \in \text{Per}(\Lambda_U(U))$  es hiperbólico.*

Note que los atractores robustos no pueden ser aproximados por  $C^1$ -campos vectoriales presentando puntos periódicos atractores o puntos periódicos repulsores, lo cual implica que sobre 3-variedades cerradas, cualquier punto periódico en un atractor robusto es hiperbólico de tipo silla.



**Lema 2.6.** *Sea  $Y \in \mathcal{U}_{\Lambda,U}$ ,  $\mathcal{U}_{\Lambda,U}$  conjunto abierto en  $\chi^r(M)$  y  $\sigma \in \text{Sing}(\Lambda_Y(U))$ . Entonces,*

1. *Los valores propios de  $\sigma$  son reales.*
2. *Si  $\lambda_2(\sigma) \leq \lambda_3(\sigma) \leq \lambda_1(\sigma)$  son los valores propios de  $\sigma$ , entonces*

$$\lambda_2(\sigma) \leq 0 \leq \lambda_1(\sigma)$$

3. *Si  $\Lambda_i(\sigma)$  son como arriba, entonces*

- I.  $\lambda_3(\sigma) < 0$  entonces  $-\lambda_3(\sigma) < \lambda_1(\sigma)$

- II.  $\lambda_3(\sigma) > 0$  entonces  $-\lambda_3(\sigma) > \lambda_2(\sigma)$

**Demostración.** Probaremos (1). Razonando por el absurdo, supongamos que existe  $Y \in \mathcal{U}_{\Lambda,U}$  y  $\sigma \in \text{Sing}(\Lambda_Y(U))$  con un valor propio complejo  $\rho$ . Asumiremos que  $\sigma$  es hiperbólico. Como la  $\dim(M) = 3$  el valor propio restante  $\lambda$  de  $\sigma$  es real. Dado que  $\sigma$  es hiperbólico solo se generan los siguientes dos casos,  $\text{Re}(\rho) < 0 < \lambda$  o  $\lambda < 0 < \text{Re}(\rho)$ . Sin pérdida de generalidad asumimos el primer caso dado que solo sería necesario tomar el flujo hacia atrás. Mas aún podemos asumir que  $Y$  es  $C^\infty$  y

$$\frac{\lambda}{-\text{Re}(\rho)} \neq 1 \tag{2.1}$$

Por el (conecting-lemma) (3.3) podemos asumir que hay un loop homoclínico  $\Gamma \subset \Lambda_Y(U)$  asociado  $\sigma$ . Entonces  $\Gamma$  es una bifurcación de shilnikov (1.2). Dado lo anterior y por (2.1), existe un  $C^1$ -campo vectorial  $Z$  arbitrario  $C^1$ -cercaño a  $Y$ , es decir  $Z \in \mathcal{U}_{\Lambda,U}$  exhibiendo un sumidero o una fuente en  $\Lambda_Z(U)$ . Esto genera una contradicción dado el lema (2.5). Luego la afirmación (1) está probada.

Así podemos organizar los valores propios  $\lambda_1(\sigma), \lambda_2(\sigma), \lambda_3(\sigma)$  de  $\sigma$  de la siguiente forma

$$\lambda_2(\sigma) \leq \lambda_3(\sigma) \leq \lambda_1(\sigma).$$

Por el Lema (2.5) tenemos que  $\lambda_2(\sigma) < 0$  y  $\lambda_1(\sigma) > 0$ . Luego la afirmación (2) esta probada.

Ahora la prueba para (3), razonamos por el absurdo, supongamos que no se tiene (3I), de este modo se prueba que dado lo anterior se tiene que existe un  $C^1$ -campo vectorial  $Z$  arbitrario  $C^1$ -cercano a  $Y$ , es decir  $Z \in \mathcal{U}_{\Lambda,U}$  exhibiendo un sumidero en  $\Lambda_Z(U)$  y si suponemos que no se tiene (3II), entonces existe un  $C^1$  campo vectorial  $Z$  arbitrario  $C^1$ -cercano a  $Y$ , es decir  $Z \in \mathcal{U}_{\Lambda,U}$  exhibiendo una fuente en  $\Lambda_Z(U)$ . Lo anterior es una contradicción como antes, luego la afirmación (3) esta probada.

■

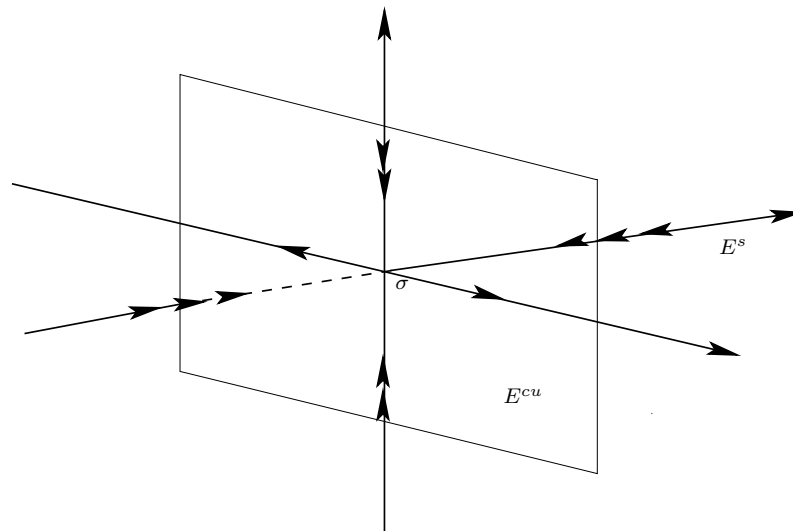


Figura 2.1: Gráfica asociada a  $\sigma$  con la propiedad Lorenz-like.

# Capítulo 3

## TEOREMA CENTRAL

Nuestro resultado es el siguiente:

### 3.1. Teorema central

**Teorema 3.1.** *Sea  $\Lambda$  un conjunto  $C^1$ -robusto singular transitivo de  $X \in \chi^r(M)$ . Entonces cualquiera para  $X$  o  $-X$ ,  $\Lambda$  es un conjunto singular hiperbólico el cual es un atractor y cualquiera de estas singularidades son Lorenz-like.*

#### **Demostración.**

Sea  $\Lambda$  un conjunto  $C^1$ -robusto singular transitivo de  $X \in \chi^r(M)$ . Dado un bloque aislante  $U$  de  $\Lambda$ , denote por  $\mathcal{U}_{\Lambda,U}$  el conjunto abierto en  $\chi^1(M)$  tal que  $\Lambda(Y,U) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} Y_t(U)$  es transitivo para cada  $Y \in \mathcal{U}_{\Lambda,U}$ .

Denotamos por  $\Lambda_Y = \Lambda(Y,U)$ ,  $P_Y = P(\Lambda_Y)$ , y  $Sing(\Lambda_Y) = Sing_Y(\Lambda_Y)$  siempre que no haya confusión posible. Un elemento *attracting hiperbólico crítico* (respectivamente *repulsor*) de un campo vectorial  $X$  es llamado *sumidero* de  $X$  (respectivamente *fuelle*). Para dar inicio a la prueba tendremos en cuenta los siguientes dos lemas:

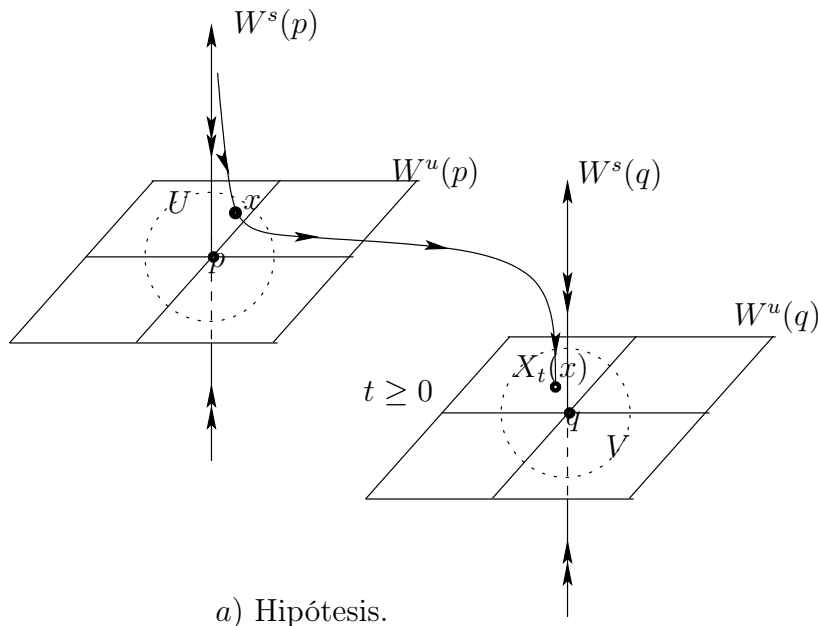
Recordemos el lema 2.5 de la sección anterior que enuncia,

**Lema 3.2.** *Sea  $Y \in \mathcal{U}_{\Lambda,U}$ . Entonces  $Y$  no tiene ni fuentes ni sumideros en  $U$  y  $p \in P_Y$  es hiperbólico.*

(Este resultado es inmediato dada la hipótesis que  $\Lambda(Y,U) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} Y_t(U)$  es transitivo para cada  $Y \in \mathcal{U}_{\Lambda,U}$ . Además note que que los atractores robustos no pueden ser aproximados por campos vectoriales preservando puntos periódicos atractores o repulsores, lo cual implica que en 3-variedades cerradas cualquier punto periódico viviendo en un atractor robusto es hiperbólico de tipo silla.)

Usaremos el siguiente resultado conocido (ver [14])

**Lema 3.3.** ( *$C^1$  – connecting lema*) - *Sea  $X \in \chi^1(M)$  y  $p, q \in \text{Sing}(X)$  fijos. Asuma que para cualquier par de vecindades  $U, V$  de  $p$  y  $q$ , respectivamente, existe un punto  $x \in U$  y un  $t \geq 0$  tal que  $X_t(x) \in V$ . Entonces, existe  $Y$   $C^1$ -cerca a  $X$  tal que si  $p_Y$  y  $q_Y$  son las continuaciones de  $p$  y  $q$  respectivamente, entonces  $W^u(p_Y) \cap W^s(q_Y) \neq \emptyset$ .*



Ahora dividiremos la prueba en tres pasos:

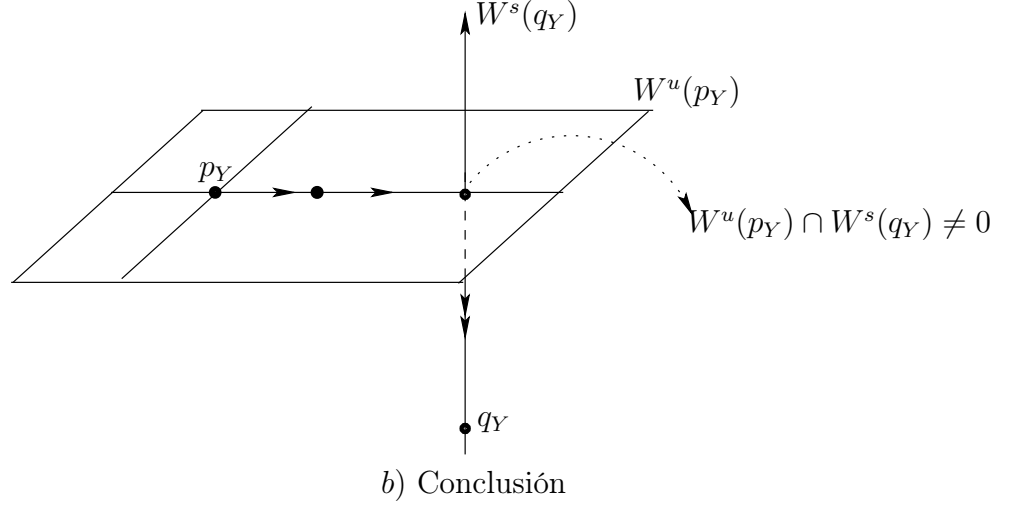


Figura 3.1: Representación

**Paso 1.** Las singularidades de  $\Lambda$  son Lorenz-like para cualquiera  $X$  o  $-X$ .

Los valores propios  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  para cualquier  $\sigma \in \text{Sing}(\Lambda_Y)$  son reales por el Lema 3.2, por el Lema 3.3 y por el lema 2.6. Si, escribimos  $\lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_1$ , entonces  $-\lambda_2, \lambda_1 > 0$  por el Lema 2.6. Si,  $\sigma \in \text{Sing}(\Lambda_Y)$  es hiperbólico,  $\Lambda_Y \cap W^{ss}(\sigma) = \{\sigma\}$  si  $\dim W^s(\sigma) = 2$ . (Respectivamente  $\Lambda_Y \cap W^{uu}(\sigma) = \{\sigma\}$  si  $\dim W^u(\sigma) = 2$ ). Así, las singularidades hiperbólicas en  $\Lambda_Y$  tienen el mismo número de valores propios (índice), para cada  $Y \in \mathcal{U}_{\Lambda, U}$ . Dada una singularidad no hiperbólica  $\sigma_0 \in \Lambda_Y$ , entonces  $\sigma_0$  es un nodo silla (desde una  $C^1$  perturbación de  $Y$ ), así, en su despliegue obtenemos dos singularidades con diferente índice, lo cual es una contradicción. Así, todas las singularidades son hiperbólicas en  $\text{Sing}(\Lambda_Y)$  con el mismo índice. Entonces podemos escribir  $\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < \lambda_1$  (cambiando  $X$  por  $-X$  si es necesario) y  $-\lambda_3 < \lambda_1$  se deduce por el Lema 3.3. Así, el primer paso está completo.

**Paso 2.**  $\Lambda$  es singular hiperbólico para  $X$  o  $-X$ .

Asuma que  $\dim W^s(\sigma) = 2$  para cualquier  $\sigma \in \text{Sing}(\Lambda_Y)$ . Probaremos que  $\Lambda_Y$  es singular hiperbólico para  $Y$  cercano a  $X$ . Asumimos para la prueba que  $\bar{P}(\Lambda_Y) = \Lambda_Y$ . El caso general se logra usando los métodos en (ver [3]). Para lograr la prueba dividimos

este paso en tres partes:

**Parte 1.** *La división:*

Para empezar, dado  $p \in P_Y$  es hiperbólico, tenemos que  $TP_Y = \tilde{E}^s \oplus E^X \oplus \tilde{E}^u$ , donde  $\tilde{E}^s$  es la variedad estable,  $\tilde{E}^u$  es la variedad inestable y  $E^X$  es tangente a la dirección del flujo. Partimos de que  $\tilde{E}^{cu} = E^X \oplus \tilde{E}^u$  y definimos bajo  $P_Y$  la siguiente división:

$$E^{cu} = E^X \oplus \tilde{E}^u, \quad E^s = \tilde{E}^s$$

La idea es extender continuamente esta división a  $\bar{P}_Y$  y probar que esta extensión satisface la definición 2.1. Debemos observar que la presencia de una singularidad en  $\bar{P}_Y$  podría ser una obstrucción para la extensión. Es más, cerca a una singularidad, el ángulo entre  $E^u$  y la dirección del flujo o entre  $\tilde{E}^s$  y la dirección del flujo podía ser cero. Vamos a introducir algunas definiciones y resultados ya probados que usaremos.

**Definición 3.4.** *Un punto  $x \in M \setminus \text{Sing}(Y)$  es  $\delta$  – fuertemente cerrable si existe  $Z \in \mathcal{U}_{\Lambda, U}$ ,  $z \in M$ , y  $T > 0$ ,  $L > 0$  tal que  $Z_T(z) = z$ ,  $Y = Z$  en  $M \setminus B_\delta(Y_{[-L, 0]}(x))$  y  $\text{dist}(Z_t(z), Y_t(x)) < \delta$  para todo  $0 \leq t \leq T$ .*

Aquí  $B_\delta(Y_{[-L, 0]}(x))$  es la  $\delta$ -vecindad a lo largo del segmento de órbita  $\{Y_t(x), -L \leq t \leq 0\}$ . Denotamos por  $\Sigma(Y)$  el conjunto de puntos de  $M$   $\delta$  – fuertemente cerrable.

**Teorema 3.5.** *(Lema de clausura ergódica para flujos, ver [4], [5]).*

Sea  $\mu$  cualquier medida de probabilidad  $Y$ -invariante. Entonces

$$\mu(\text{Sing}(Y) \cup \Sigma(Y)) = 1.$$

Ahora, probaremos que  $E^s \oplus E^{cu}$  extiende a  $\bar{P}_Y$ . Para esto, por un resultado en (ver [4]), es suficiente probar que la división bajo  $P_Y$  definida anteriormente es una división dominada. Así, nos resta probar:

**Teorema 3.6.** *Para todo  $p \in P_Y$ , existe  $\lambda < 1$  y  $T > 0$  así que  $\|DY_T/E^s\| \cdot \|DY_{-T}/E^{cu}\| < \lambda$ .*

Dados dos subespacios  $A$  y  $B$  denotamos por  $\angle(A, B)$  el ángulo entre  $A$  y  $B$ .

Sea  $\delta > 0$  y definimos

$$C_\delta(\text{Sing}(\Lambda_Y)) = \bigcup_{\sigma \in \text{Sing}(\Lambda_Y)} B_\delta(\sigma)$$

donde  $B_\delta(\sigma)$  es la bola de radio  $\delta$  y centro en  $\sigma$ .

El Teorema 3.6 es una consecuencia del hecho que para cada  $p \in P_Y$ ,  $p \notin C_\delta(\text{Sing}(\Lambda_Y))$ , el ángulo entre  $E_p^s$  y  $E_p^{cu}$  es uniformemente acotado fuera de cero. (Es decir, el ángulo formado para cualquier  $p$  es siempre distinto de cero). Para verificarlo debemos primero probar que  $\angle(E_p^s, E_p^{cu})$  es acotado fuera de cero para órbitas periódicas, cuyas órbitas lejanas están fuera de las singularidades y para cada órbita periódica convergiendo a una singularidad. Lejos de las singularidades es una consecuencia del hecho que  $\angle(\tilde{E}_p^s, \tilde{E}_p^{cu})$  es acotado fuera de cero, el lema de clausura ergódica (Teorema 3.5) y (ver [5]). Para órbitas convergiendo a una singularidad  $\sigma$ , esta es una consecuencia del hecho que  $E_p^s \rightarrow E_\sigma^s$  y  $E_p^{cu} \rightarrow E_\sigma^{cu}$ . Para probar estos hechos haremos uso de lo siguientes tres lemas que son comentados brevemente.

El primero es una herramienta fundamental y sigue del hecho que  $\Lambda_Y$  es  $C^1$ -robusto. El segundo dice, que si el ángulo entre un vector  $v$  y  $E_\sigma^s$  es acotado fuera de cero, entonces, a través del paso cerca de  $\sigma$ ,  $DX_t(v)$  toma la dirección del flujo. El tercero dice que, fuera de una vecindad de las singularidades, el ángulo entre las variedades estable e inestable a lo largo de las órbitas periódicas es acotado fuera de cero. Sólo anotaremos precisamente el primero:

**Lema 3.7.** *Dado  $\delta > 0$ , existe  $\alpha = \alpha(\delta) > 0$  y  $T_\delta > 0$  tal que si  $p \in P_Y$ ,  $\angle(E_p^s, E_p^{cu}) < \alpha$  y  $t_p = \min\{s; Y_r(p) \notin C_\delta(\text{Sing}(\Lambda_Y)), |r| < s\}$ , entonces  $t_p < T_\delta$ .*

La prueba de este teorema es una consecuencia del teorema 3.5 y el hecho que tenemos hiperbolicidad lejos fuera de las singularidades. Así, la extensión de  $E^s \oplus E^{cu}$  a  $\bar{P}_Y = \Lambda_Y$

existe y aún esta denotada por  $E^s \oplus E^{cu}$ . Claramente,  $E^s \oplus E^{cu}$  es dominada y entonces nos resta probar que  $E^s$  es contracting y  $E^{cu}$  expande volumen.

**Parte 2.**  $E^s$  es contracting.

Asuma, que existe una sucesión  $p_n \in P_Y$  tal que  $E_{p_n}^s$  no contrae. Sea  $p$  tal que  $p_n \rightarrow p$  cuando  $n \rightarrow \infty$  (Esto quiere decir, la sucesión de órbitas asociadas a  $p_n$  tienden a la órbita de  $p$ ). Tenemos que, la continuidad de la división obtenida anteriormente implica que  $E^s$  no es contracting a lo largo de la órbita  $O_Y(p)$ . Por el lema de clausura ergódica para flujos,  $p$  puede ser fuertemente aproximado por órbitas periódicas. De nuevo por la continuidad de la división, tenemos que  $E^s$  no contrae a lo largo de estas órbitas periódicas. Por  $C^1$ -perturbaciones obtenemos un campo vectorial  $Y \in \mathcal{U}_{\Lambda, U}$  con una órbita repulsora, contradiciendo el Lema 3.2.

**Parte 3.**  $E^{cu}$  expande volumen.

Si  $E^{cu}$  no expande volumen, por el lema de clausura ergódica para flujos, obtenemos una órbita periódica  $p \in P_Y$  tal que  $E^{cu}$  no es suficientemente expansora a lo largo de órbita de  $p$ . Como  $E^{cu} = [Y(p)] \oplus (E_p^u)$  y  $[Y(p)]$  es el espacio propio asociado a él, obtenemos que,  $E^u$  no expande suficiente a lo largo de la órbita de  $p$ . Por una pequeña  $C^1$ -perturbación obtenemos un campo vectorial  $Y \in \mathcal{U}_{\Lambda, U}$  presentando una órbita atractora cerca a  $p$ , contradiciendo el Lema 3.2.

Debido a todo lo anterior el paso 2 esta completo.

**Paso 3.**  $\Lambda$  es una atractor para  $X$  o  $-X$ .

Dando marcha atrás al flujo si es necesario, podemos asumir que  $\Lambda_Y$  es parcialmente hiperbólico expandiendo volumen en la dirección central y todas sus singularidades son Lorenz-like para  $Y$  cerca a  $X$ . Probemos que,  $\Lambda_Y$  es un atractor para  $Y$  cerca a  $X$  (y tomemos  $\Lambda = \Lambda_X$  para  $X$ ). Supongamos que este no lo es, entonces, existe una sucesión de órbitas periódicas  $x_n \rightarrow x \in \Lambda_Y$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y  $t_n \geq 0$  tal que  $Y_{t_n}(x_n) \notin U$ .



Entonces, existen dos posibilidades para la órbita de  $x$ ,  $O(x)$ :  $\sigma \in \bar{O}(x)$  para algún  $\sigma \in \text{Sing}(Y)$ , o, existe  $\delta > 0$  tal que  $\bar{O}(x) \cap C_\delta(\text{Sing}(\Lambda_Y)) = \emptyset$ .

En el primer caso, tomando una pequeña sección transversal  $\Sigma$  por  $W^s(\sigma)$  y denotando por  $l = W^s(\sigma) \cap \Sigma$ , tenemos curvas  $B_n$  cruzando  $\Sigma$  con  $\text{dist}(B_n, l) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , tal que  $Y_{t_n}(B_n) \cap U = \emptyset$ . Realizaremos una pequeña perturbación de  $Y$  obteniendo  $X$  con  $W^u(\sigma_X) \cap W^s(\sigma_X) \neq \emptyset$  y tal que exista mínimo una curva  $B_n(X)$  suficientemente cerca a  $l$  con la propiedad que  $Y_{t_n}(B_n(X)) \cap U = \emptyset$ . Tomaremos otra pequeña perturbación  $\bar{X}$  de  $Y$  de tal manera que  $W^u(\sigma_{\bar{X}}) \in B_n(\bar{X})$ , implicando que el conjunto  $\omega$ -límite de  $W^u(\sigma_{\bar{X}})$  está en el complemento de  $U$ , en un sentido robusto. Así,  $\sigma_X \notin \bar{P}_{\bar{X}}$ , lo cual es una contradicción.

En el segundo caso, por el teorema de la clausura ergódica, podemos asumir que  $x$  es fuertemente cerrable. Como en lo anterior, existen curvas  $B_n$  y  $t_n$  tal que  $Y_{t_n}(B_n) \cap \bar{U} = \emptyset$  y  $\text{dist}(B_n, W^s(x)) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Sea  $p \in \Lambda_Y$  una órbita periódica fuertemente cerrable a  $O(x)$ . Entonces  $O(p) \cap B_\delta(\sigma) = \emptyset$  para cualquier  $\sigma \in \text{Sing}(Y)$  y así está bien definido  $W_\epsilon^u(x)$  para un  $\epsilon$  pequeño. Podemos tomar una pequeña perturbación  $\bar{Y}$  de tal manera que existe  $n$  con  $\bar{Y}_{t_n}(B_n) \cap \bar{U} = \emptyset$ , y tal que  $W_\epsilon^u(p) \cap B_n \neq \emptyset$ . Esto implica, que existen curvas  $S_n$  acumulándose en  $W_\epsilon^u(p)$  y  $t_n \geq 0$  tal que  $\bar{Y}_{t_n}(S_n) \cap \bar{U} = \emptyset$ . Ahora la transitividad de  $\Lambda_{\bar{Y}}$  y el connecting-lemma implican, como antes, que podemos perturbar  $\bar{Y}$  tal que el conjunto  $\omega$ -límite de la variedad inestable de la correspondiente singularidad está fuera de  $\bar{U}$  en un sentido transitivo, lo cual es una contradicción.

De este modo, el paso tres está completo y por ende, el teorema está demostrado.

■

# Bibliografía

- [1] C. Morales, M.J. Pacifico and E.R. Pujals, *On  $C^1$  robust singular transitive sets for three-dimensional flows*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 326 (1998), No.1, 81-86.
- [2] S. Bautista, *The Geometric Lorenz is a Homoclinic Class*, Boletín De Matemáticas Volúmen 11 Nueva Serie N0.1 (2004), 69-78.
- [3] C.I. Doering, *Persistently transitive vector fields on three dimensional manifolds*, Dynamical Systems and Bifurcation Theory, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 160 (1987), 59-89.
- [4] R. Mañé, *Persistent manifolds are normally hiperbolic*, Trans. Amer. Math. Soc., 246 (1978), 261-283.
- [5] L. Wen, *On the  $C^1$ -stability conjecture for flows*, J. Differ. Eq., 129 (1995), 334-357.
- [6] B. Hasselblatt, A. Katok, *Introduction to the modern theory of dynamical systems. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol 54, Cambridge University Press, Cambridge,(1995), xviii+802pp. ISBN: 0-521-34187-6.
- [7] M.W. Hirsch, C.C. Pugh, and M. Shub, *Invariant manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 583, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1997, ii+149.

- [8] J. Milnor, *On the concept of attractor*, Comm. Math. Phys. 99 (1985), No.2, 177-195.
- [9] C. Morales and E.R. Pujals, *Singular strange attractors on the boundary of Morse-smale systems*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 30 (1997), No.6, 693-717.
- [10] J. Palis and F. Takens, *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations. Fractal dimensions and infinitely many attractors*, Cambridge University Press, Cambridge,(1993), Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 35. x+234pp. ISBN: 0-521-39064-8.
- [11] W. Tucker, *The Lorenz attractor exists*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math 328 (1999), No.12, 1197-1202.
- [12] E. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmospheric Sci., 20 (1963), 130-141.
- [13] J. Guckenheimer, R. Williams, *Structural stability of Lorenz attractors*, Publ. Math. IHES, 50 (1979), 59-72.
- [14] S. Hayashi, *Connecting invariant manifolds and the solution of the  $C^1$  stability and  $\Omega$ -stability conjectures for flows*, Ann. Math. 145 (1997), 81-137.

# Índice alfabético

- Órbita, 1
- Órbita Cerrada, 1, 3
- Órbita Periódica, 1
- Órbitas homoclínicas y heteroclínicas, 5
  
- Atractor Lorenz, 10
  
- Bifurcaciones de shilnikov, 7
- Bloque aislante, 2
  
- Ciclo estable, 9
- Clase homoclínica, 3
- Conjunto Aislado, 2
- Conjunto alfa límite, 1
- Conjunto Atractor, 2
- Conjunto Hiperbólico, 3
- Conjunto invariante, 2
- Conjunto No-trivial, 2
- Conjunto omega límite, 1
- Conjunto Parcialmente hiperbólico, 5
- Conjunto Singular, 2
- Conjunto Sumidero, 2
- Conjunto transitivo, 2
  
- Descomposición
  - Dominada, 4
  
- Espacio Principal, 7
- Expande volumen, 5
  
- Función Split, 6
  
- Heteroclínica, 5
- Homoclínica, 5
  
- Punto No-errante, 1
  
- Shilnikov, 7
- Singularidad, 1
  
- Valores principales, 7
- variedad, 2
- variedad estable, 2
- variedad inestable, 2