# Representación topológica de retículos por medio de parejas filtro-ideal

**Andrés Chacón Capera**

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
2018

# Representación topológica de retículos por medio de parejas filtro-ideal

**Andrés Chacón Capera**

Trabajo final presentado como requisito parcial para optar al título de:
**Magíster en Ciencias Matemáticas**

Director:
Dr. Lorenzo Acosta Gempeler

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
2018

*Dedicado a mis padres.*

# Agradecimientos

Al profesor Lorenzo Acosta, por el tiempo utilizado en guiar la construcción de este trabajo. Pero estoy aún más agradecido con él, por haberme mostrado lo hermoso que es el mundo de los retículos (y del álgebra).

A mi familia quienes me han apoyado en todos los proyectos que me he propuesto.

Y a la Universidad Nacional de Colombia, por permitirme dar mis primeros pasos en la docencia mientras elaboraba este trabajo.

# Resumen

En este trabajo se estudia la representación topológica de Allwein-Hartonas para retículos acotados. Además, se construye otra representación, que consideramos original, parecida a la representación de Stone. Ambas representaciones usan las parejas filtro-ideal (disyuntas), y dan lugar a co-equivalencias entre categorías de retículos y categorías de espacios topológicos. Es de notar que estas representaciones se diferencian de otras representaciones precedentes por no usar el axioma de elección.

**Palabras clave:** Retículo, representación topológica, pareja filtro-ideal, preorden.

# Abstract

In this paper, the Allwein-Hartonas's topological representation for bounded lattices is studied. Moreover, another representation, what we consider original, similar to Stone's is constructed. Both representations use (disjoint) filter-ideal pairs, and they give rise to duality between categories of lattices and categories of topological spaces. It is to be noted that these representations differ from other previous representation by not using the axiom of choice.

**Keywords:** Lattice, topological representation, filter-ideal pair, preorder.

# Índice general

# Introducción

Se puede decir que la representación topológica de retículos inicia en [9] donde Stone da una representación para los retículos distributivos. Esta representación consiste en tomar, para un retículo distributivo, el conjunto de sus ideales primos y definir la función $\delta$ que a cada elemento del retículo lo envía al conjunto de los ideales primos que no lo contienen. La imagen de esta función sirve como base para una topología en el conjunto de los ideales primos. A esta topología (entre otros nombres) se le llama topología de Stone y al conjunto de los ideales primos dotado con esta topología se le llama el espectro primo del retículo.

Stone muestra que en el caso de los retículos distributivos acotados, el retículo puede ser recuperado (obteniendo un retículo isomorfo) de su espectro primo tomando los subconjuntos abiertos y compactos, logrando así una representación de los retículos distributivos acotados por medio de los que hoy son llamados espacios espectrales. En [1] se muestra que en el caso de que el retículo no necesariamente sea acotado el espacio que se obtiene es un espacio de Balbes-Dwinger y la forma de recuperar el retículo es tomar los subconjuntos fundamentales.

Stone realiza la representación sin tener en cuenta los morfismos, por lo tanto no es completa en el sentido de verla como una equivalencia (o co-equivalencia) entre categorías. En [1] se muestra que para tener una co-equivalencia de categorías basta trabajar con homomorfismos propios y funciones fuertemenete continuas, y así ya se tiene una representación completa para los retículos distributivos.

Los espacios de Balbes-Dwinger no son en general espacios de Hausdorff, y ya que algunos matemáticos prefieren trabajar con este tipo de espacios, Priestley en [7] busca hacer una representación donde los espacios resultantes sí sean de Hausdorff. Para ello se basa en el trabajo de Stone pero dota al conjunto de los ideales primos con una topología más fina. De esta forma logra que los nuevos espacios sean de Hausdorff. Lamentablemente con estos nuevos espacios ocurre que retículos no isomorfos pueden generar espacios homeomorfos con lo cual no habría una buena representación. Ante esta dificultad Priestley decide tener en cuenta la estructura natural de orden que tiene el conjunto de los ideales primos dada por la inclusión.

Para el caso de los retículos acotados Priestley muestra que los espacios resultantes son espacios compactos ordenados, donde el orden cumple cierta regla de compatibilidad con la topología. A estos espacios se les llama espacios de Priestley (ella los llama espacios de Stone ordenados). Se recupera el retículo original tomando los subconjuntos abiertos cerrados inferiores. En este caso, Pristley hace la representación completa, es decir, también tiene en cuenta los morfismos, que terminan siendo los homomorfismos acotados y las funciones continuas isótonas.

Las representaciones de Stone y de Priestley sirven en el caso distributivo. Urquhart en [10] busca generalizar la representación de Priestley al contexto de los retículos acotados. Para ello usa simultáneamente los filtros y los ideales en lo que él llama parejas maximales, y al conjunto de las parejas maximales le asigna una topología usando una función análoga a la usada en las anteriores representaciones. Al usar filtros e ideales el espacio generado no tiene un orden natural, sino que tiene dos pre-órdenes. Urquhart muestra la dualidad entre los retículos acotados y un tipo especial de espacios doblemente pre-ordenados que él llama $L$-espacios (llamados espacios de Urquhart en [6]).

Además, él muestra que en el caso distributivo se recupera la representación de Priestley con lo cual es efectivamente una generalización. Al igual que Stone, Urquhart solo hace la representación sobre los objetos. En su trabajo de maestría, Mancera ([6]) completa la representación de Urquhart, estableciendo una co-equivalencia de categorías.

Con esto se obtiene una representación casi general para los retículos (pues aún existe la condición de ser acotados) pero tanto esta como las anteriores representaciones usan recurrentemente teoremas que involucran el lema de Zorn, es decir, usan fuertemente el axioma de elección. Con el espíritu de hacer una representación que evitara el uso del axioma de elección Allwein y Hartonas en [2] imitan el trabajo de Urquhart pero tomando pares filtro-ideal (sin pedir que sean maximales). Ellos logran una representación completa (con morfismos) para retículos acotados.

En este trabajo se explicará de una forma detallada una representación equivalente a la dada por Allwein y Hartonas. Esta representación tiene una base para la topología muy parecida a la tomada por Priestley. Por otro lado, acercándonos más a lo realizado por Stone, se construirá otra representación donde la base de la topología es similar a la tomada por Stone.

Para ello en el capítulo 1 se darán las definiciones básicas sobre pre-órdenes y sobre conjuntos doblemente pre-ordenados que aparecerán recurrentemente en el resto del texto. Además se definirá una de las herramientas que más se usará: la adjunción en conjuntos ordenados.

En el capítulo 2 se estudiarán dos funciones que extienden la función $\delta$ usada por Stone a ideales y filtro no necesariamente primos y luego se estudiarán otro par de funciones que aparecerán de forma natural sobre los conjuntos doblemente pre-ordenados y que permitirán extraer retículos de los conjuntos doblemente pre-ordenados. Las cuatro funciones que se estudiarán en este capítulo son análogas a las utilizadas por Urquhart. Además se mostrará que en el caso de retículos finitos ya se puede obtener una representación sin necesidad de adicionar una topología.

Luego, en el capítulo 3 se construirá una primera representación, que consideramos original, tomando una topología similar a la trabajada por Stone, que sirve para todos los retículos. La representación será completa en el sentido de estudiarse no solo sobre los objetos de ciertas categorías si no también sobre sus morfismos, lo que conlleva a una co-equivalencia entre categorías de retículos y categorías de espacios topológicos.

En el capítulo 4 se construirá una segunda representación que, salvo algunas diferencias superficiales, es la representación de Allwein-Hartonas. Esta representación tiene la condición de trabajar con retículos acotados.

Por último, en el capítulo 5 se mostrarán algunas conexiones que hay entre las dos representaciones trabajadas en los capítulos 3 y 4, y las representaciones de Stone, Priestley y Urquhart.

Es importante resaltar que en este trabajo (y en [2]) no se usa el axioma de elección, pero si se utiliza el lema de la subbase de Alexander. En [4] se muestra que este lema es equivalente al teorema del ideal primo booleano (BPI) el cual no puede deducirse con los axiomas de Zermelo-Frankel pero es estrictamente más débil que el axioma de elección, es decir, el axioma de elección lo implica pero no se tiene el reciproco.

# Capítulo 1

# Preliminares

En este capítulo definiremos la noción de pre-orden y de retículo, los cuales serán dos de los objetos que se tratarán en el texto. También se definirá la noción de adjunción en conjuntos ordenados y operadores de clausura (dualmente, operadores de interior). Estas serán las herramientas más utilizadas en la sección 2.2. Además de las definiciones se darán los principales resultados que se usarán más adelante, pero no se harán las demostraciones de estos resultados, los cuales, en la gran mayoría de los casos, son fáciles de comprobar, y los que no, pueden ser consultados en [1].

Durante el resto del texto también se utilizarán algunas nociones básicas de topología y de categorías, que se espera que el lector conozca, por lo que no se agregarán en este capítulo.

Cuando tengamos un conjunto $X$ y $A \subseteq X$, al complemento de $A$ lo notaremos por $cA$. Si $f : X \to Y$ es una función y $B \subseteq Y$, la imagen recíproca de $B$ será notada $f^*(B)$. Además, si $A \subseteq X$, la imagen directa de $A$ será notada $f_*(A)$.

## 1.1. Pre-órdenes

Sean $X$ un conjunto y $R \subseteq X \times X$. $R$ es una relación de pre-orden si $R$ es reflexiva y transitiva. Si, además, $R$ es anti-simétrica, $R$ es relación de orden. Para las relaciones de pre-orden usaremos el símbolo $\leq$. En caso de que se estén trabajando varias relaciones de pre-orden sobre un mismo conjunto usaremos $\leq_1, ..., \leq_n$.

**Definición 1.1.** Sean $X$ un conjunto y $\leq_1, ..., \leq_n$ relaciones de pre-orden sobre $X$. Definimos, para todo $A \subseteq X$

1. $\uparrow_i A = \{x \in X | \exists a \in A, a \leq_i x\}$ y $\downarrow_i A = \{x \in X | \exists a \in A, x \leq_i a\}$.

2. Es claro que para todo $A \subseteq X$ se tiene que $A \subseteq \uparrow_i A \cap \downarrow_i A$. Si $A = \uparrow_i A$ diremos que $A$ es $\leq_i$-sup y si $A = \downarrow_i A$ diremos que es $\leq_i$-inf.
3. $X_{\uparrow_i} = \{A \subseteq X | A \text{ es } \leq_i -\text{sup } \}$ y $X_{\downarrow_i} = \{A \subseteq X | A \text{ es } \leq_i -\text{inf } \}$.
4. $May_i(A) = \{x \in X | \forall a \in A, a \leq_i x\}$ y $Miy_i(A) = \{x \in X | \forall a \in A, x \leq_i a\}$.
5. $Max_i(A) = A \cap May_i(A)$ y $Min_i(A) = A \cap Miy_i(A)$.
6. $Inf_i(A) = Max_i(Miy_i(A))$ y $Sup_i(A) = Min_i(May_i(A))$.

Si $x \leq_i y$ e $y \leq_i x$ se notará $x \equiv_i y$. Es fácil observar que $\equiv_i$ es una relación de equivalencia sobre $X$. Obsérvese que si $x, y \in Max_i(A)$ entonces $x, y \in A$ y $x, y \in May_i(A)$ con lo cual $x \leq_i y$ e $y \leq_i x$ es decir, $x \equiv_i y$. Así, $Max_i(A) \subseteq [x]_i$ donde $[x]_i$ es la clase de $x$ según la relación $\equiv_i$. En general no es cierto que si $x \equiv_i y$ y $x \in Max_i(A)$ se tenga que $y \in Max_i(A)$, pues puede ocurrir que $y \notin A$.

Si $x \in Max_i(A)$ y $x \equiv_i y$, sí es cierto que para todo $a \in A$, $a \leq_i x \leq_i y$ y por lo tanto $a \leq_i y$, es decir, $y \in May_i(A)$. Así pues, si $y \in A$ entonces $y \in Max_i(A)$. De lo anterior se tiene que si $A$ es $\leq_i$-sup o $\leq_i$-inf entonces $Max_i(A) = [x]_i$. Se puede hacer la misma observación para $Min_i(A)$: si $A$ es $\leq_i$-inf o $\leq_i$-sup y $x \in Min_i(A)$ entonces $Min_i(A) = [x]_i$. Sin ninguna condición sobre $B$, si $x \in Sup_i(B)$ entonces $Sup_i(B) = [x]_i$. De forma análoga, sin ninguna condición sobre $B$, si $x \in Inf_i(B)$ entonces $Inf_i(B) = [x]_i$.

En el caso en que $\leq$ sea relación de orden, $[x] = \{x\}$. Así, si $Sup(A) \neq \emptyset$, $Sup(A)$ tiene un solo elemento, a este único elemento lo llamaremos el supremo de $A$ y se notará $sup\ A$ ó $\bigvee A$. Si $A = \{x_1, ..., x_n\}$ se escribirá $\bigvee A = x_1 \vee ... \vee x_n$. Análogamente, si $Inf(A) \neq \emptyset$, $Inf(A)$ tiene un único elemento que se llamara el ínfimo de $A$, se notará $inf\ A$ ó $\bigwedge A$. En el caso de que $A = \{x_1, ..., x_n\}$ se escribirá $\bigwedge A = x_1 \wedge ... \wedge x_n$.

Si $A$ tiene supremo y $\bigvee A \in A$, diremos que $\bigvee A$ es el máximo de $A$. Si $A$ tiene ínfimo y $\bigwedge A \in A$, diremos que $\bigwedge A$ es el mínimo de $A$. Podría ocurrir que $Inf_i(A) = \emptyset$ para algunos $A \subseteq X$.

**Definición 1.2.** Sea $X$ un conjunto pre-ordenado. Si para todo $A \subseteq X$ se tiene que $Inf(A) \neq \emptyset$, se dirá que $X$ es completo con respecto a $\leq$.

**Definición 1.3.** Sean $X$ e $Y$ dos conjuntos pre-ordenados. Si $f : X \to Y$ es un función tal que, para todo $x, y \in X$

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y),$$

diremos que $f$ es una función isótona. Si además, el recíproco se tiene, es decir, para todo $x, y \in X$

$$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y),$$

diremos que $f$ es una inmersión.

Si $X$ e $Y$ son conjuntos ordenados y $f$ es una inmersión, entonces $f$ es inyectiva. El resultado no es cierto si $X$ e $Y$ solo son pre-órdenes.

**Definición 1.4.** Si $f : X \to Y$ es una inmersión biyectiva, diremos que $f$ es un isomorfismo de pre-órdenes (o de órdenes).

Sea $X$ un conjunto ordenado. Si $X$ tiene mínimo, lo notaremos 0. Si $X$ tiene máximo lo notaremos 1. Si $X$ tiene 0 y 1, diremos que $X$ es acotado.

**Definición 1.5.** Si $f : X \to Y$ es una función isótona, diremos que $f$ es acotada si cumple las siguiente dos condiciones:

1. Si $X$ tiene 0, entonces $Y$ tiene 0 y $f(0) = 0$.
2. Si $X$ tiene 1, entonces $Y$ tiene 1 y $f(1) = 1$.

## 1.2. Retículos y adjunción en conjuntos ordenados

Sea $L$ un conjunto ordenado no vacío. Diremos que $L$ es un retículo, si para todo $a, b \in L$, el conjunto $\{a, b\}$ tiene supremo e ínfimo, es decir, $a \wedge b$ y $a \vee b$ existen. En este caso $\wedge$ y $\vee$ se pueden ver como dos operaciones binarias en $L$ que resultan ser conmutativas, asociativas, idempotentes y que cumplen las siguientes condiciones llamadas leyes de absorción:

$$x \wedge (x \vee y) = x \quad y \quad x \vee (x \wedge y) = x,$$

para todo $x, y \in L$.

**Definición 1.6.** Sea $A \subseteq L$, $A \neq \emptyset$. Diremos que $A$ es un ideal de $L$ si es cerrado para $\vee$ y absorbente para $\wedge$. Es decir, si para todo $a, b \in A$ y para todo $c \in L$, $a \vee b \in L$ y $a \wedge c \in L$.

La segunda condición es equivalente a la siguiente: para todo $a \in L$ y para todo $c \in L$, si $c \leq a$, entonces $c \in L$.

De forma análoga, si $A \subseteq L$, $A \neq \emptyset$, diremos que $A$ es un filtro de $L$ si es cerrado para $\wedge$ y absorbente para $\vee$.

**Proposición 1.7.** Si la intersección de una familia de ideales es no vacía, entonces es un ideal. En particular, la intersección finita de ideales, es un ideal y si $L$ tiene 0, la intersección arbitraria de ideales, es un ideal. El resultado es también válido para filtros, cambiando 0 por 1.

**Definición 1.8.** Sea $A \subseteq L$, no vacío. Al menor ideal de $L$ que contiene a $A$, o equivalentemente, a la intersección de todos los ideales que contienen a $A$, lo llamaremos el ideal generado por $A$; a este ideal lo notaremos $(A]$. Al menor filtro de $L$ que contiene a $A$, lo llamaremos, el filtro generado por $A$ y se notará $[A)$.

Si $A = \{a\}$, escribiremos $(a]$ en vez de $(\{a\}]$ y $[a)$ en vez de $[\{a\})$.

**Proposición 1.9.** Sean $L$ un retículo y $A \subseteq L$. $x \in (A]$, si y sólo si, existen $a_1, ..., a_n \in A$ tales que $x \leq a_1 \vee ... \vee a_n$. Y, $x \in [A)$, si y sólo si, existen $a_1, ..., a_n \in A$ tales que $a_1 \wedge ... \wedge a_n \leq x$. En particular, $(a] =\downarrow a$ y $[a) =\uparrow a$.

**Definición 1.10.** Si $I$ es un ideal de $L$ y existe $a \in L$ tal que $I = (a]$ diremos que $I$ es un ideal principal, de forma análoga hablaremos de filtros principales.

**Proposición 1.11.** Si $L$ es finito, todo ideal (y todo filtro), es principal.

**Definición 1.12.** Sean $L, M$ retículos y $f : L \to M$. Diremos que $f$ es un homomorfismo de retículos, si para todo $a, b \in L$, $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ y $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$. Si, además, $f$ es biyectiva, diremos que $f$ es isomorfismo de retículos.

Cuando sea claro que se está hablando de retículos diremos simplemente homomorfismo.

Es fácil observar que si $f$ es isomorfismo de retículos, entonces $f$ es isomorfismo de órdenes. Además si $f : X \to Y$ es isomorfismo de órdenes, y uno de los conjuntos es retículo, el otro también lo es y $f$ es isomorfismo de retículos. Por otro lado, si $f : L \to M$ con $L$ y $M$ retículos, es inmersión, entonces $f$ es homomorfismo, y si $f$ es homomorfismo, entonces $f$ es isótona. Los recíprocos de estas últimas afirmaciones no son verdaderos.

**Proposición 1.13.** La composición de homomorfismos (acotados) es un homomorfismo (acotado), y si $L$ es un retículo, la función identidad de $L$ es un homomorfismo (acotado).

**Definición 1.14.** Un conjunto ordenado, para el cual todo subconjunto tiene ínfimo, o equivalentemente, todo subconjunto tiene supremo, lo llamaremos retículo completo. Todo retículo finito es completo, y todo retículo completo es acotado.

**Definición 1.15.** Si $X$ es un conjunto ordenado y existen $C$ retículo completo y $f : X \to C$ tales que $f$ es una inmersión acotada, decimos que $(C, f)$ es una compleción de $X$.

**Proposición 1.16.** Si $L$ es un retículo, las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. Para todo $a, b, c \in L$, $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$.

2. Para todo $a, b, c \in L$, $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$.

**Definición 1.17.** Si $L$ es un retículo que cumple alguna de las anteriores condiciones, se dirá que $L$ es distributivo.

**Definición 1.18.** Sean $X, Y$ conjuntos ordenados y $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ funciones. Diremos que $(f, g)$ es par adjunto si, para todo $x \in X$ y para todo $y \in Y$ se cumple que:

$$f(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq g(y).$$

Nótese que en este caso particular, $f$ y $g$ resultan ser isótonas.

**Definición 1.19.** Sea $X$ un conjunto ordenado y $f : X \to X$ una función isótona. Diremos que $f$ es un operador de clausura si para todo $x \in X$ se cumple que:

1. $x \leq f(x)$.
2. $f(f(x)) = f(x)$.

Si en la primera condición, se cambia $\leq$ por $\geq$, entonces se dice que $f$ es un operador de interior.

Los siguientes son los principales resultados que se usarán en la sección 2.2.

**Proposición 1.20.** Si $(f : X \to Y, g : Y \to X)$ es par adjunto, entonces:

1. $f \circ g \circ f = f$ y $g \circ f \circ g = g$.
2. $Im\ f = \{y \in Y | f(g(y)) = y\}$ e $Im\ g = \{x \in X | g(f(x)) = x\}$.
3. $f|_{Im\ g} : Im\ g \to Im\ f$ y $g|_{Im\ f} : Im\ f \to Im\ g$ son isomorfismos de orden, e inversos entre sí.
4. Si $A \subseteq X$ tiene supremo, entonces $f(sup(A)) = sup(f_*(A))$, es decir, $f$ preserva extremos superiores. Además, $g$ preserva extremos inferiores.
5. $g \circ f$ es operador de clausura y $f \circ g$ es operador de interior.

**Proposición 1.21.** Si $L$ es un retículo completo y $f : L \to L$ es un operador de clausura, entonces, $Im\ f$ es un retículo completo, donde $inf_{Im\ f}\ A = inf_L\ A$ y $sup_{Im\ f}\ A = f(sup_L\ A)$.

# Capítulo 2

# Las funciones fundamentales

En las representaciones de Stone [9], [1] y Priestley [7], [3], dado un retículo $L$, se utiliza una función $\delta$. Esta función, a cada elemento de $L$, le asigna el conjunto de ideales primos que no lo contienen. Al inicio de este capítulo se definirán dos funciones, una totalmente inspirada en dicha función $\delta$ y otra dual a la anterior. En la segunda sección del capítulo se definirán un par de funciones entre espacios doblemente pre-ordenados, las cuales son análogas a las usadas por Urquhart en [10].

## 2.1. Las funciones $u$ y $v$

Sean $L$ un retículo, $\mathcal{I}$ el conjunto de sus ideales y $\mathcal{F}$ el conjunto de sus filtros. Se definen las siguientes funciones.

$$u' : \quad \begin{aligned} L &\longrightarrow \wp(\mathcal{F}) \\ a &\longmapsto \{F \in \mathcal{F} | a \in F\} \end{aligned} \qquad\qquad v' : \quad \begin{aligned} L &\longrightarrow \wp(\mathcal{I}) \\ a &\longmapsto \{I \in \mathcal{I} | a \notin I\} \end{aligned}$$

Se tiene que

$$F \in u'(a \wedge b) \Leftrightarrow a \wedge b \in F \Leftrightarrow a \in F \ y \ b \in F \Leftrightarrow F \in u'(a) \ y \ F \in u'(b) \Leftrightarrow F \in u'(a) \cap u'(b)$$

Es decir

$$u'(a \wedge b) = u'(a) \cap u'(b)$$

De forma análoga

$$I \in v'(a \vee b) \Leftrightarrow a \vee b \notin I \Leftrightarrow a \notin I \ o \ b \notin I \Leftrightarrow I \in v'(a) \ o \ I \in v'(b) \Leftrightarrow I \in v'(a) \cup v'(b)$$

Es decir

$$v'(a \vee b) = v'(a) \cup v'(b)$$

Por otro lado si $a \neq b$ entonces $a \nleq b$ ó $b \nleq a$, sin pérdida de generalidad se puede tomar $a \nleq b$, con lo cual $b \notin [a)$, así $[a) \notin u'(b)$ y como $a \in [a)$ entonces $[a) \in u'(a)$ de donde se tiene que $u'(a) \neq u'(b)$. Además $a \notin (b]$ , así $(b] \in v'(a)$ y como $b \in (b]$ entonces $(b] \notin v'(b)$ de donde se tiene que $v'(a) \neq v'(b)$, por lo tanto $u'$ y $v'$ son 1-1.

Lo anterior muestra que los filtros permiten observar la estructura inferior del retículo y los ideales la estructura superior, de tal forma que al trabajar simultáneamente con ideales y filtros se esperararía poder observar la estructura del retículo $L$, para ello se toma el siguiente conjunto, $S(L) = \{(F, I) \in \mathcal{F} \times \mathcal{I} | F \cap I = \emptyset\}$. Los elementos de $S(L)$ reciben el nombre de par filtro-ideal, y se escribirán en la forma $x = (x_1, x_2)$.

Se definen ahora las siguientes funciones

$$u : \quad L \longrightarrow \wp(S(L)) \qquad\qquad v : \quad L \longrightarrow \wp(S(L))$$

$$a \longmapsto \{x \in S(L) | a \in x_1\} \qquad\qquad a \longmapsto \{x \in S(L) | a \notin x_2\}$$

La relación entre estas nuevas funciones y las anteriores está dada por:

$$x \in u(a) \Leftrightarrow x_1 \in u'(a)$$

$$x \in v(a) \Leftrightarrow x_2 \in v'(a)$$

De aquí se tiene que

$$x \in u(a \wedge b) \Leftrightarrow x_1 \in u'(a \wedge b) \Leftrightarrow x_1 \in u'(a) \cap u'(b) \Leftrightarrow x \in u(a) \cap u(b)$$

y

$$x \in v(a \vee b) \Leftrightarrow x_2 \in v'(a \vee b) \Leftrightarrow x_2 \in v'(a) \cup v'(b) \Leftrightarrow x \in v(a) \cap v(b)$$

Es decir, $u(a \wedge b) = u(a) \cap u(b)$ y $v(a \vee b) = v(a) \cup v(b)$.

De lo anterior se tiene que si $a \leq b$ entonces $u(a) \subseteq u(b)$ y $v(a) \subseteq v(b)$. Si $u(a) \subseteq u(b)$ se tienen dos opciones: $a = 0$, en cuyo caso trivialmente $a \leq b$, ó $a \neq 0$ luego existe $c \in L$ tal que $c \lneq a$; así $(c] \cap [a) = \emptyset$, es decir, $x = ([a), (c]) \in S(L)$; además $x \in u(a)$, de donde $x \in u(b)$, por lo tanto $b \in [a)$ y así $a \leq b$.

Análogamente, si $v(a) \subseteq v(b)$ se tienen dos opciones: $b = 1$, en cuyo caso trivialmente $a \leq b$, ó $b \neq 1$ luego existe $c \in L$ tal que $b \lneq c$; así $(b] \cap [c) = \emptyset$, es decir, $x = ([c), (b]) \in S(L)$; además, $x \notin v(b)$, de donde $x \notin v(a)$, por lo tanto $a \in (b]$ y así $a \leq b$.

De lo anterior se tiene que

$$u(a) \subseteq u(b) \Leftrightarrow a \leq b \Leftrightarrow v(a) \subseteq v(b)$$

Es decir, $u$ y $v$ son inmersiones de $L$ en $\wp(S(L))$, así $u$ y $v$ son isomorfismos de orden entre $L$, $Im\ u$ e $Im\ v$ y ya que $L$ es retículo, $Im\ u$ e $Im\ v$ son retículos. De estos hechos resaltamos como un resultado central de esta sección el siguiente teorema.

**Teorema 2.1.** Sea $L$ un retículo. $Im\ u$ e $Im\ v$ son retículos isomorfos a $L$, además los respectivos isomorfismos son $u$ y $v$.

Ahora bien, como $u$ y $v$ son inyectivas, quedan bien definidas las siguientes funciones

$$\begin{array}{rlcrl} \alpha: & Im\ u \longrightarrow Im\ v & \qquad & \beta: & Im\ v \longrightarrow Im\ u \\ & u(a) \longmapsto v(a) & & & v(a) \longmapsto u(a) \end{array}$$

Es claro que $\alpha^{-1} = \beta$ y como $u(a) \subseteq u(b)$ equivale a $v(a) \subseteq v(b)$, $\alpha$ y $\beta$ son isótonas; por lo tanto son isomorfismos. Por ello

$$u(a) \vee u(b) = u(a \vee b) = \beta(v(a \vee b)) = \beta(v(a) \cup v(b)) = \beta(\alpha(u(a)) \cup \alpha(u(b))).$$

De aquí se tiene que la estructura de retículo de $Im\ u$ está dada de la siguiente forma: si $A, B \in Im\ u$,

1. $A \vee B = \beta(\alpha(A) \cup \alpha(B))$
2. $A \wedge B = A \cap B$.

Como $\alpha$ y $\beta$ han sido definidas por medio de $u$ y $v$, para poder calcular $A \vee B$ se hace necesario conocer $v$ aún cuando es una operación en $Im\ u$. Por lo tanto, es conveniente dar otra forma de calcular $\alpha$ y $\beta$. Para ello se puede observar que

$$x \in v(a) \Leftrightarrow a \notin x_2 \Leftrightarrow [a) \cap x_2 = \emptyset \Leftrightarrow ([a), x_2) \in X \Rightarrow \exists y \in u(a)\ (x_2 \subseteq y_2).$$

La última implicación se tiene tomando $y = ([a), x_2)$. Además, si existe $y \in u(a)$ tal que $x_2 \subseteq y_2$, como $y \in u(a)$, $a \in y_1$ con lo cual $a \notin y_2$, $a \notin x_2$ y por lo tanto $x \in v(a)$. Es decir, se tiene la siguiente equivalencia

$$x \in \alpha(u(a)) \Leftrightarrow x \in v(a) \Leftrightarrow \exists y \in u(a)\ (x_2 \subseteq y_2)$$

Respecto a $\beta$ se tiene lo siguiente

$$x \notin u(a) \Leftrightarrow a \notin x_1 \Leftrightarrow x_1 \cap (a] = \emptyset \Rightarrow \exists y \notin v(a)\ (x_1 \subseteq y_1)$$

Donde la última implicación se tiene tomando $y = (x_1, (a])$. Además, si $y \notin v(a)$ es tal que $x_1 \subseteq y_1$, entonces $a \in y_2$, con lo cual $a \notin y_1$, $x \notin x_1$ y por lo tanto $x \notin u(a)$. De aquí se tiene que

$$x \notin u(a) \Leftrightarrow \exists y \notin v(a)\ (x_1 \subseteq y_1)$$

$$x \in \beta(v(a)) \Leftrightarrow x \in u(a) \Leftrightarrow \forall y \notin v(a)\ (x_1 \nsubseteq y_1).$$

Así $\alpha(u(a)) = \{x \in S(L) | \exists y \in u(a)(x_2 \subseteq y_2)\}$ y $\beta(v(a)) = \{x \in S(L) | \forall y \notin v(a)\ (x_1 \nsubseteq y_1)\}$. Esta forma de ver a $\alpha$ y $\beta$ trae varias ventajas. Por un lado permite calcular estas funciones solo conociendo los argumentos en vez de usar otra función y por otro lado permite extender los dominios de $\alpha$ y $\beta$ a todo $\wp(S(L))$, definiendo para $A \subseteq S(L)$

$$\alpha(A) = \{x \in S(L) | \exists y \in A\ (x_2 \subseteq y_2)\}$$

$$\beta(A) = \{x \in S(L) | \forall y \notin A\ (x_1 \nsubseteq y_1)\}.$$

## 2.2. Las funciones $\alpha$ y $\beta$

Para un retículo $L$ se ha asignado un conjunto $S(L)$ tal que de $\wp(S(L))$ se puede extraer un retículo isomorfo a $L$. Se puede buscar bajo qué condiciones un conjunto $X$ es el conjunto de los pares filtro-ideal de un retículo, o al menos isomorfo en algún sentido. Para comenzar, $S(L)$ es un conjunto con dos pre-órdenes: la contenencia con cada una de las componentes (que además se han utilizado fuertemente).

Una tripla $(X, \leq_1, \leq_2)$, se dirá conjunto doblemente pre-ordenado si $\leq_1$ y $\leq_2$ son dos relaciones de pre-orden sobre $X$. Se pueden definir $\alpha, \beta : \wp(X) \longrightarrow \wp(X)$ de la siguiente manera

$$\alpha(A) = \{x \in X | \exists y \in A\ (x \leq_2 y)\}$$

$$\beta(A) = \{x \in X | \forall y \notin A\ (x \nleq_1 y)\}.$$

**Observación 2.2.** Se puede dar otra escritura a $\alpha$ y a $\beta$ que en la mayoría de casos es más cómoda, $\alpha(A) = \downarrow_2 A$ y, como $c\beta(A) = \{x \in X | \exists y \in cA(x \leq_1 y)\}$, entonces $c\beta(A) = \downarrow_1 (cA)$, de donde $\beta(A) = c\downarrow_1 (cA)$. De esta observación el siguiente resultado es evidente.

**Proposición 2.3.** Si $A \subseteq X$, entonces $\alpha(A) \in X_{\downarrow 2}$ y $\beta(A) \in X_{\uparrow 1}$.

**Proposición 2.4.** Sea $A \subseteq X$, $\alpha(A)$ es el menor elemento de $X_{\downarrow 2}$ que contiene a $A$ y $\beta(A)$ es el mayor elemento de $X_{\uparrow 1}$ que está contenido en $A$.

*Demostración.* Sea $B \in X_{\downarrow 2}$ tal que $A \subseteq B$. Si $x \in \alpha(A)$ entonces existe $y \in A$ tal que $x \leq_2 y$. Como $A \subseteq B$ se tiene que $y \in B$, con lo cual $x \in B$. Se concluye que $\alpha(A) \subseteq B$.

Sea $C \in X_{\uparrow 1}$ tal que $C \subseteq A$. Si $x \notin \beta(A)$ entonces existe $y \notin A$ tal que $x \leq_1 y$. Como $C \subseteq A$ se tiene que $y \notin C$, con lo cual $x \notin C$. Se concluye que $C \subseteq \beta(A)$. □

**Corolario 2.5.** Si $A \in X_{\uparrow 1}$ entonces $A = \beta(A)$ y si $A \in X_{\downarrow 2}$ entonces $A = \alpha(A)$. En particular, $\alpha(\emptyset) = \emptyset = \beta(\emptyset)$ y $\alpha(X) = X = \beta(X)$.

Con estos resultados podemos mostrar el siguiente resultado, que de haberse probado en la sección anterior su prueba sería mas extensa.

**Proposición 2.6.** $u$ y $v$ son homomorfismos acotados.

*Demostración.* Si $L$ tiene 1, entonces todo filtro tiene al 1, por lo tanto si $x \in S(L)$, $1 \in x_1$ con lo cual $x \in u(1)$, de donde $u(1) = S(L)$ y además $v(1) = \alpha u(1) = \alpha(S(L)) = S(L)$. Por otro lado, si $L$ tiene 0 todo ideal tiene al 0, por lo tanto si $x \in S(L)$, $0 \in x_2$ con lo cual $x \notin v(0)$, de donde $v(0) = \emptyset$ y además $u(0) = \beta(v(0)) = \beta(\emptyset) = \emptyset$. □

**Proposición 2.7.** $\alpha$ y $\beta$ son isótonas.

*Demostración.* Si $A \subseteq B$ y $x \in \alpha(A)$, existe $y \in A$ tal que $x \leq_2 y$, así $y \in B$ y por lo tanto $x \in \alpha(B)$, con lo cual $\alpha$ es isótona. Por otro lado, si $z \notin \beta(B)$ existe $w \notin B$ tal que $z \leq_1 w$, ya que $A \subseteq B$, $w \notin A$ y por lo tanto $z \notin \beta(A)$, con lo cual $\beta$ es isótona. □

**Proposición 2.8.** $\alpha$ es un operador de clausura y $\beta$ es un operador de interior.

*Demostración.* Ya se tiene que $A \subseteq \alpha(A)$ y que $\alpha$ es isótona, como $\alpha(A) \in X_{\downarrow 2}$ entonces $\alpha\alpha(A) = \alpha(A)$ y se tiene que $\alpha$ es operador de clausura.

Ya se tiene $\beta(B) \subseteq B$ y que $\beta$ es isótona, como $\beta(B) \in X_{\uparrow 1}$ entonces $\beta\beta(B) = \beta(B)$ y por lo tanto $\beta$ es operador de interior.

□

**Proposición 2.9.** $\alpha$ conmuta con uniones arbitrarias y $\beta$ conmuta con intersecciones arbitrarias.

*Demostración.*

$$\begin{aligned} x \in \alpha(\textstyle\bigcup_{i \in \mathcal{C}} A_i) &\Leftrightarrow (\exists y \in \textstyle\bigcup_{i \in \mathcal{C}} A_i)(x \leq_2 y) \\ &\Leftrightarrow (\exists i \in \mathcal{C})(\exists y \in A_i, x \leq_2 y) \\ &\Leftrightarrow (\exists i \in \mathcal{C})(x \in \alpha(A_i)) \\ &\Leftrightarrow x \in \textstyle\bigcup_{i \in \mathcal{C}} \alpha(A_i). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in \beta(\textstyle\bigcap_{i\in\mathcal{C}} B_i) &\Leftrightarrow (\forall y \notin \textstyle\bigcap_{i\in\mathcal{C}} B_i)(x \nleq_1 y) \\ &\Leftrightarrow (\forall y \in \textstyle\bigcup_{i\in\mathcal{C}} cB_i)(x \nleq_1 y) \\ &\Leftrightarrow (\forall i \in \mathcal{C})(\forall y \in cB_i, x \nleq_1 y) \\ &\Leftrightarrow (\forall i \in \mathcal{C})(x \in \beta(B_i)) \\ &\Leftrightarrow x \in \textstyle\bigcap_{i\in\mathcal{C}} \beta(B_i). \end{aligned}$$

□

**Proposición 2.10.** Si $A \in X_{\uparrow 1}$ y $B \in X_{\downarrow 2}$, entonces

$$\alpha(A) \subseteq B \Leftrightarrow A \subseteq \beta(B).$$

Es decir, $(\alpha\restriction_{X_{\uparrow 1}}, \beta\restriction_{X_{\downarrow 2}})$ es par adjunto.

*Demostración.* $\Rightarrow$)

$$x \notin \beta(B) \Rightarrow \exists y \notin B(x \leq_1 y) \Rightarrow \exists y \notin \alpha(A)(x \leq_1 y) \Rightarrow \exists y \notin A(x \leq_1 y) \Rightarrow x \notin A.$$

$\Leftarrow$)

$$x \in \alpha(A) \Rightarrow \exists y \in A(x \leq_2 y) \Rightarrow \exists y \in \beta(B)(x \leq_2 y) \Rightarrow \exists y \in B(x \leq_2 y) \Rightarrow x \in B.$$

□

Por la adjunción se tiene que si $A \in X_{\uparrow 1}$ entonces $A \subseteq \beta\alpha(A)$, de la misma forma si $B \in X_{\downarrow 2}$ entonces $\alpha\beta(B) \subseteq B$. Si $A$ es tal que $A = \beta\alpha(A)$ se dirá que $A$ es $\beta\alpha$-estable. Nótese que si $A$ es $\beta\alpha$-estable entonces $A \in X_{\uparrow 1}$ (ya que es imagen por medio de $\beta$) y si $B = \alpha\beta(A)$ se dirá que $B$ es $\alpha\beta$-estable y en este caso $B \in X_{\downarrow 2}$.

El conjunto de los subconjuntos $\beta\alpha$-estables de $X$ se notará $E_{\beta\alpha}(X)$ y el conjunto de los subconjuntos $\alpha\beta$-estables de $X$ se notará $E_{\alpha\beta}(X)$. Por el corolario 2.5 es claro que $\emptyset$ y $X$ pertenecen a $E_{\beta\alpha}(X)$ y a $E_{\alpha\beta}(X)$ (por lo tanto estos no son vacíos).

**Observación 2.11.** Por la adjunción se tiene que $Im\ \beta\restriction_{X_{\downarrow 2}} = E_{\beta\alpha}(X)$ y de la misma forma $Im\ \alpha\restriction_{X_{\downarrow 1}} = E_{\alpha\beta}(X)$. Además, $E_{\beta\alpha}(X)$ y $E_{\alpha\beta}(X)$ son isomorfos como conjuntos ordenados donde $\alpha$ y $\beta$ son los respectivos isomorfismos.

**Proposición 2.12.** $\beta\alpha\restriction_{X_{\uparrow 1}}: X_{\uparrow 1} \longrightarrow X_{\uparrow 1}$ es un operador de clausura.

*Demostración.* El resultado es inmediato del hecho que $(\alpha\restriction_{X_{\uparrow 1}}, \beta\restriction_{X_{\downarrow 2}})$ es par adjunto. □

**Corolario 2.13.** $\beta\alpha\restriction_{X_{\uparrow 1}}: X_{\uparrow 1} \longrightarrow E_{\beta\alpha}(X)$ es adjunto a izquierda de la inclusión $E_{\beta\alpha}(X) \hookrightarrow X_{\uparrow 1}$.

*Demostración.* Como $\beta\alpha\upharpoonright_{X_{\uparrow 1}}: X_{\uparrow 1} \longrightarrow X_{\uparrow 1}$ es un operador de clausura entonces $\beta\alpha\upharpoonright_{X_{\uparrow 1}}: X_{\uparrow 1} \longrightarrow Im\ \beta\alpha\upharpoonright_{X_{\uparrow 1}}$ es adjunto a izquierda de la inclusión $Im\ \beta\alpha\upharpoonright_{X_{\uparrow 1}} \hookrightarrow X_{\uparrow 1}$. Basta ver que $Im\ \beta\alpha\upharpoonright_{X_{\uparrow 1}} = E_{\beta\alpha}(X)$.

Por un lado $Im\ \beta\alpha\upharpoonright_{X_{\uparrow 1}} \subseteq Im\ \beta\upharpoonright_{X_{\downarrow 2}} = E_{\beta_\alpha}(X)$, por otro lado si $A \in E_{\beta\alpha}(X)$ entonces $A = \beta\alpha(A)$ y además $A \in X_{\uparrow 1}$ con lo cual $A \in Im\ \beta\alpha\upharpoonright_{X_{\uparrow 1}}$, es decir $Im\ \beta\alpha\upharpoonright_{X_{\uparrow 1}} = E_{\beta\alpha}(X)$. □

**Proposición 2.14.** Dado $(X, \leq_1, \leq_2)$ un conjunto doblemente pre-ordenado, $E_{\beta\alpha}(X)$ es un retículo completo donde las operaciones están dadas por $\bigwedge_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} A_i$ y $\bigvee_{i\in I} A_i = \beta\alpha\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$.

*Demostración.* Como $X_{\uparrow 1}$ es un retículo completo y $\beta\alpha\upharpoonright_{X_{\uparrow 1}}$ es un operador de clausura en $X_{\uparrow 1}$ entonces $Im\ \beta\alpha\upharpoonright_{X_{\uparrow 1}} = E_{\beta\alpha}(X)$ es un retículo completo donde las operaciones son

$$inf_{E_{\beta\alpha}}\{A_i\}_{i\in I} = inf_{X_{\uparrow 1}}\{A_i\}_{i\in I} = \bigcap_{i\in I} A_i$$

y

$$sup_{E_{\beta\alpha}}\{A_i\}_{i\in I} = \beta\alpha(sup_{X_{\uparrow 1}}\{A_i\}_{i\in I}) = \beta\alpha\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$$

.

□

**Corolario 2.15.** $E_{\alpha\beta}(X)$ es un retículo completo donde las operaciones están dadas por $\bigvee_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I} B_i$ y $\bigwedge_{i\in I} B_i = \alpha\beta\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)$.

*Demostración.* Como $E_{\beta\alpha}(X)$ es isomorfo a $E_{\alpha\beta}(X)$ entonces este último es un retículo completo donde

$$inf_{E_{\alpha\beta}}\{B_i\}_{i\in I} = \alpha(inf_{E_{\beta\alpha}}\{\beta(B_i)\}_{i\in I}) = \alpha(\bigcap_{i\in I}\beta(B_i)) = \alpha\beta(\bigcap_{i\in I}(B_i))$$

y

$$sup_{E_{\alpha\beta}}\{B_i\}_{i\in I} = \alpha(sup_{E_{\beta\alpha}}\{\beta(B_i)\}_{i\in I}) = \alpha\beta\alpha(\bigcup_{i\in I}\beta(B_i)) = \alpha(\bigcup_{i\in I}\beta(B_i))$$
$$= \bigcup_{i\in I}\alpha\beta(B_i) = \bigcup_{i\in I} B_i$$

. □

**Corolario 2.16.** Si $L$ es un retículo y $S(L)$ es el conjunto de los pares filtro-ideal, entonces $Im\ u$ es un subretículo de $E_{\beta\alpha}(S(L))$ e $Im\ v$ es un subretículo de $E_{\alpha\beta}(S(L))$.

**Corolario 2.17.** Si $L$ es un retículo, $(u, E_{\beta\alpha}(S(L)))$ es una compleción de $L$.

**Proposición 2.18.** Si $L$ es un retículo finito, entonces $Im\ u = E_{\beta\alpha}(S(L))$ y análogamente $Im\ v = E_{\alpha\beta}(S(L))$.

*Demostración.* Como $L$ es finito, todos los filtros y todos los ideales son principales. Así, si $A \in E_{\beta\alpha}(S(L))$, $A = \{([a_1),(b_1]),...,([a_n),(b_n])\}$ para algunos $a_i, b_i \in L$, sea $a = \bigvee_{i=1}^n a_i$ como $a \geq a_i$ para todo $i$ entonces $a \in [a_i)$ con lo cual $A \subseteq u(a)$. Por otro lado, si $x \in S(L)$ es tal que $x \in u(a_i)$ entonces $a_i \in x_1$ con lo cual $[a_i) \subseteq x_1$, como $([a_i),(b_i]) \in A$ y $A \in S(L)_{\uparrow 1}$ entonces $x \in A$, así $u(a_i) \subseteq A$, como esto ocurre para todo $i$ entonces $\bigvee_{i=1}^n u(a_i) \subseteq A$ y como $u$ es homomorfismo (el extremo superior se está tomando en $E_{\beta\alpha}(S(L))$) $\bigvee_{i=1}^n u(a_i) = u(\bigvee_{i=1}^n a_i) = u(a)$, de donde, $A = u(a)$. De lo anterior se concluye que $E_{\beta\alpha}(S(L)) \subseteq Im\ u$ y como la contenencia opuesta siempre se tiene entonces $Im\ u = E_{\beta\alpha}(S(L))$.

La prueba para $Im\ v$ es similar. □

Para terminar esta sección se dará un resultado que muestra un buen comportamiento de las inmersiones con respecto a $\alpha$ y a $\beta$.

**Proposición 2.19.** Sean $X$ e $Y$ conjuntos doblemente pre-ordenados y $f : X \to Y$ una función sobreyectiva. Si $f$ es inmersión con respecto a $\leq_2$, entonces $f_*$ conmuta con $\alpha$ y si $f$ es 1-1 e inmersión con respecto a $\leq_1$, entonces $f_*$ conmuta con $\beta$.

*Demostración.* Sea $A \subseteq X$.

$$\begin{aligned} y \in f_*(\alpha(A)) &\Leftrightarrow (\exists x \in \alpha(A))(y = f(x)) \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in X)(\exists w \in A, x \leq_2 w)(y = f(x)) \\ &\Leftrightarrow (\exists w \in A)(y \leq_2 f(w)) \\ &\Leftrightarrow (\exists z \in f_*(A))(y \leq_2 z) \\ &\Leftrightarrow y \in \alpha(f_*(A)), \end{aligned}$$

donde el tercer "$\Rightarrow$"se tiene por ser $f$ inmersión de $\leq_2$ y el tercer "$\Leftarrow$"se tiene por ser $f$ sobre y ser $f$ inmersión. De lo anterior, $f_*(\alpha(A)) = \alpha(f_*(A))$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} y \in f_*(\beta(A)) &\Leftrightarrow (\exists x \in \beta(A))(y = f(x)) \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in X)(\forall w \notin A, x \not\leq_1 w)(y = f(x)) \\ &\Leftrightarrow (\forall w \notin A)(y \not\leq_1 f(w)) \\ &\Leftrightarrow (\forall z \notin f_*(A))(y \not\leq_1 z) \\ &\Leftrightarrow y \in \beta(f_*(A)), \end{aligned}$$

donde el tercer "$\Rightarrow$"se tiene por ser $f$ inmersión de $\leq_1$, el tercer "$\Leftarrow$"se tiene por ser $f$ sobre y ser $f$ inmersión y el cuarto "$\Leftrightarrow$"se tiene por ser $f$ biyección. De lo anterior $f_*(\beta(A)) = \beta(f_*(A))$. □

**Corolario 2.20.** Sean $X$ e $Y$ conjuntos doblemente pre-ordenados. Si $f : X \to Y$ es biyección e inmersión en ambos pre-órdenes, entonces $f_* : E_{\alpha\beta}(X) \to E_{\alpha\beta}(Y)$ y $f_* : E_{\beta\alpha}(X) \to E_{\beta\alpha}(Y)$ son isomorfismos.

*Demostración.* Como $f$ es biyección e inmersión en ambos pre-órdenes, entonces $f_*$ conmuta con $\alpha$ y con $\beta$, además su inversa también tiene las mismas propiedades, por lo tanto $f_*$ envía y devuelve $\alpha\beta$-estables en $\alpha\beta$-estables y $\beta\alpha$-estables en $\beta\alpha$-estables. Además, como el orden está dado por la inclusión es claro que es una inmersión. $\square$

Nótese que la pregunta formulada al inicio de esta sección no ha sido completamente respondida, hasta el momento solo se ha mostrado la necesidad de trabajar con espacios doblemente pre-ordenados. En los capítulos 3 y 4 se terminará de responder esta pregunta de dos formas diferentes.

# Capítulo 3

# Una representación de tipo Stone

En el capítulo anterior se ha definido la función $v$ que es prácticamente la misma función $\delta$ usada en la representación de Stone en [1]. En esta representación, el conjunto de los ideales primos de $L$ se dota de una topología cuya sub-base es la imagen de $\delta$. Siguiendo este hecho, en este capítulo se dotará a $S(L)$ de una topología cuya sub-base es la imagen de $v$.

## 3.1. La topología $\tau$

En el capítulo anterior se observó que $Im\ v$ es un subretículo de $E_{\alpha\beta}(S(L))$. Para poder determinar totalmente los elementos de $Im\ v$ agregaremos una topología $\tau$ al conjunto $S(L)$ usando como sub-base $\{v(a)|a \in L\}$. Es claro que con esta topología los elementos de $Im\ v$ son abiertos.

**Proposición 3.1.** Los elementos de $Im\ v$ son compactos en $(S(L), \tau)$.

*Demostración.* Sean $a \in L$ y $v(a) \subseteq \bigcup_{b \in B} v(b)$ un cubrimiento por abiertos sub-básicos. Supongamos que $a \notin (B]$, entonces $x = ([a), (B]) \in S(L)$, además $x \in v(a)$ y $x \notin v(b)$ para todo $b \in B$, así $x \notin \bigcup_{b \in B} v(b)$ contradiciendo la contenencia. Por lo tanto $a \in (B]$ y entonces existen $b_1, ..., b_n \in B$ tales que $a \leq b_1 \vee ... \vee b_n$. Aplicando $v$ se obtiene que $v(a) \subseteq v(b_1 \vee ... \vee b_n) = v(b_1) \cup ... \cup v(b_n)$. Por lo tanto se ha obtenido un sub-recubrimiento finito y por el teorema de la sub-base de Alexander, $v(a)$ es compacto. $\square$

**Proposición 3.2.** $L$ tiene 1, si y sólo si, $(S(L), \tau)$ es compacto.

*Demostración.* $\Rightarrow$) Si $L$ tiene 1, $v(1) = S(L)$ y por lo tanto $S(L)$ es compacto.

$\Leftarrow$) Si $x \in S(L)$, $x_1 \neq \emptyset$ y $x_1 \cap x_2 = \emptyset$, con lo cual existe $a \in x_1$ y $a \notin x_2$. Así, $x \in v(a)$ y por lo tanto $S(L) \subseteq \bigcup_{a \in L} v(a)$. Como $S(L)$ es compacto existe un sub-cubrimiento finito $S(L) = v(a_1) \cup ... \cup v(a_n) = v(a_1 \vee ... \vee a_n)$. Por lo tanto $S(L) \in Im\ v$, con lo cual $Im\ v$ tiene 1 y como $Im\ v$ es isomorfo a $L$ entonces $L$ tiene 1. $\square$

Hasta ahora se tiene que todos los elementos de $Im\ v$ pertenencen $E_{\alpha\beta}(S(L))$ y además son abierto-compactos, el siguiente resultado es un recíproco parcial.

**Proposición 3.3.** Si $A \in E_{\alpha\beta}(S(L))$ es abierto-compacto no vacío entonces $A \in Im\ v$

*Demostración.* Si $A = S(L)$, por la proposición anterior $L$ tendría 1 y $S(L) = v(1)$. Si $A \neq S(L)$, como $A \neq \emptyset$ y $A$ es abierto, $A = \bigcup_{i \in \mathcal{C}} W_i$ donde cada $W_i$ es un abierto básico, es decir, es intersección finita de sub-básicos. Como $A$ es compacto, la unión se puede reducir a una unión finita,

$$A = W_1 \cup ... \cup W_n = (v(a_{11}) \cap ... \cap v(a_{1m_1})) \cup ... \cup (v(a_{n1}) \cap ... \cap v(a_{nm_n})).$$

Nótese que al distribuir se obtendrá una intersección finita de elementos de la forma $v(a_1^*) \cup ... \cup v(a_l^*) = v(a_1^* \vee ... \vee a_l^*)$ es decir, quedará una intersección finita de sub-básicos:

$$A = v(a_1') \cap ... \cap v(a_k').$$

Asi,

$$A = \alpha\beta(A) = \alpha\beta(v(a_1') \cap ... \cap v(a_k')) = \alpha(\beta v(a_1') \cap ... \cap \beta v(a_k')) = \alpha(u(a_1') \cap ... \cap u(a_k'))$$

$$= \alpha u(a_1' \wedge ... \wedge a_k') = v(a_1' \wedge ... \wedge a_k')$$

Con lo cual $A \in Im\ v$. $\square$

Se tiene que $\emptyset \in Im\ v$, si y sólo si $L$ tiene 0, cosa que no siempre ocurre, por lo tanto no siempre $\emptyset \in Im\ v$, pero $\emptyset$ siempre cumple con ser $\alpha\beta$-estable y abierto-compacto, con lo cual esta caracterización no sirve para $\emptyset$. Para ello se hace necesario ver qué ocurre con $(S(L), \tau)$ en el caso de que $L$ tenga 0.

**Proposición 3.4.** $L$ tiene 0, si y sólo si, la intersección de todos los abiertos no vacíos de $(S(L), \tau)$ es no vacía.

*Demostración.* $\Rightarrow$) Supongamos que $L$ tiene 0. Sea $b \in L$ con $b \neq 0$, $[b) \cap (0] = \emptyset$ con lo cual $x = ([b), (0]) \in S(L)$. Sea $A$ un abierto sub-básico no vacío de $(S(L), \tau)$. Entonces $A = v(a)$ con $a \neq 0$, y como $a \notin (0]$, $x \in v(a)$, así $x$ es un elemento de todo abierto sub-básico no vacío, y por lo tanto $x$ es un elemento de cualquier intersección finita de sub-básicos no vacíos. Entonces $x$ es un elemento de todos los abiertos no vacíos, con lo cual se concluye que la intersección de todos los abiertos no vacíos de $(S(L), \tau)$ es no vacía.

$\Leftarrow$) Supongamos que la intersección de todos lo abiertos no vacíos de $(S(L), \tau)$ es no vacía y que $L$ no tiene 0. Como $L$ no tiene 0, $Im\ v$ no tiene mínimo y por lo tanto $\emptyset \notin Im\ v$, así $v(a) \neq \emptyset$ para todo $a \in L$, con lo cual $v(a)$ es un abierto no vacío. Sea $x$ en la intersección de todos los abiertos no vacíos. $x \in v(a)$ para todo $a \in L$, pero $x_2$ es un ideal de $L$ por lo tanto es no vacío; si $b \in x_2$ se tiene que $x \notin v(b)$, contradicción. Por lo tanto $L$ tiene 0.

$\square$

Sea $X$ un espacio doblemente pre-ordenado. Diremos que $\emptyset$ es primordial si la intersección de todos los abiertos no vacíos de $X$ es no vacía. Un conjunto no vacío se dirá primordial si es $\alpha\beta$-estable y abierto-compacto. Al conjunto de los subconjuntos primordiales de $X$ se le notará $P(X)$. De las proposiciones anteriores se tiene que $Im\ v = P((S(L), \tau))$. De ahora en adelante el espacio $(S(L), \tau)$ lo escribiremos $S^\tau(L)$ y así $Im\ v = P(S^\tau(L))$.

Nótese que basta comprobar la condición de que $\emptyset$ sea primordial con una sub-base en vez de usar todos los abiertos. Si $P(X)$ es una sub-base de la topología de $X$, entonces la intersección de todos los primordiales es vacía.

**Proposición 3.5.** $S^\tau(L)$ es un espacio irreducible[1].

*Demostración.* Si $L$ tiene 0, entonces la intersección de todos los abiertos no vacíos es no vacío y en particular la intersección de dos abiertos no vacíos es no vacío. Si $L$ no tiene 0, sean $a_1, ..., a_n \in L$, $\bigwedge_{i=1}^n a_i \leq a_i$ para $1 \leq i \leq n$ con lo cual $v(\bigwedge_{i=1}^n a_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^n (v(a_i))$, y ya que $L$ no tiene 0, $v(\bigwedge_{i=1}^n a_i) \neq \emptyset$. Así, $\bigcap_{i=1}^n (v(a_i)) \neq \emptyset$ y entonces la intersección finita de abiertos sub-básicos no vacíos es no vacío. $\square$

## 3.2. La función $\Gamma$

Cuando se tienen dos espacios doblemente pre-ordenados se puede tener que estos sean indistinguibles como espacios doblemente pre-ordenados, es decir, que exista una función $f : X \to Y$ que es homeomorfismo e inmersión en ambos pre-órdenes. En este caso diremos que $f$ es isomorfismo y que $X$ e $Y$ son isomorfos.

En la anterior sección se mostró que dado un retículo $L$ se puede recuperar un retículo isomorfo a $L$ desde el espacio doblemente pre-ordenado $S^\tau(L)$tomando $P(S^\tau(L))$. En

[1] También llamado espacio hiper-conexo.

esta sección se buscará bajo qué condiciones un espacio doblemente pre-ordenado $X$ puede ser recuperado tomando $S^\tau(P(X))$, es decir, que $X$ y $S^\tau(P(X))$ sean isomorfos.

La primera observación importante es que $S^\tau(P(X))$ solo tiene sentido si $P(X)$ es un retículo, es más, si se desea que $X$ y $S^\tau(P(X))$ sean isomorfos es fácil observar que $P(X)$ debe ser un sub-retículo de $E_{\alpha\beta}(X)$.

**Proposición 3.6.** Sea $X$ un espacio doblemente pre-ordenado. $P(X)$ es un sub-retículo de $E_{\alpha\beta}(X)$, si y sólo si, $P(X)$ es cerrado para $\alpha\beta$-intersecciones, es decir, que si $A, B \in P(X)$ entonces $\alpha\beta(A \cap B) \in P(X)$.

*Demostración.* Ya que las operaciones en $E_{\alpha\beta}$ están dadas por $A \wedge B = \alpha\beta(A \cap B)$ y $A \vee B = A \cup B$, entonces $P(X)$ es un sub-retículo de $E_{\alpha\beta}$, si y sólo si, para todo $A, B \in P(X)$ se cumple que $\alpha\beta(A \cap B) \in P(X)$ y $A \cup B \in P(X)$, pero la segunda condición siempre se cumple ya que unión de dos abiertos-compactos es abierto-compacto. $\square$

En el resto de esta sección todos los espacios doblemente pre-ordenados cumplirán la condición anterior, además se supondrá que $P(X)$ es una sub-base para la topología de $X$.

Para buscar la forma más natural de definir una función de $X$ en $S^\tau(P(X))$ se puede observar que si $L$ es un retículo, ya que $L$ y $P(S^\tau(L))$ son isomorfos por medio de la función $v$, entonces $\Gamma : S^\tau(L) \to S^\tau P(S^\tau(L))$ definido por $\Gamma(F, I) = (v_*(F), v_*(I))$ es una biyección e inmersión en cada pre-orden. Una observación menos trivial y que se mostrará luego, es que esta función $\Gamma$ es homeomorfismo, con lo cual es un isomorfismo de espacios doblemente pre-ordenados.

Si $(F, I) \in S^\tau(L)$ entonces se pueden caracterizar $v_*(F)$ y $v_*(I)$, sin usar la función $v$. Recordando que si $A \in P(S^\tau(L))$ entonces $A = v(a)$ para algún $a \in L$ y que $v$ es biyección, se tiene que

$$\begin{aligned} A \in v_*(F) &\Leftrightarrow v(a) \in v_*(F) \\ &\Leftrightarrow a \in F \\ &\Leftrightarrow (F, I) \in u(a) = \beta(A) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} A \in v_*(I) &\Leftrightarrow v(a) \in v_*(I) \\ &\Leftrightarrow a \in I \\ &\Leftrightarrow (F, I) \notin v(a) = A \end{aligned}$$

Por lo tanto, si se toma $\Gamma_1(F, I) = \{A \in P(S^\tau(L)) | (F, I) \in \beta(A)\}$ y $\Gamma_2(F, I) = \{A \in P(S^\tau(L)) | (F, I) \notin A\}$, entonces $\Gamma(F, I) = (\Gamma_1(F, I), \Gamma_2(F, I))$. De esta forma, si se toma $X$ un espacio doblemente pre-ordenado es natural definir las siguientes funciones

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : \quad & X \longrightarrow \mathcal{F}(P(X)) \\ & x \longmapsto \{A \in P(X) | x \in \beta(A)\} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \Gamma_2 : \quad & X \longrightarrow \mathcal{I}(P(X)) \\ & x \longmapsto \{B \in P(X) | x \notin B\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma: \quad & X \longrightarrow S^{\tau}(P(X))\\ & x \longmapsto (\Gamma_1(x), \Gamma_2(x))\end{aligned}$$

**Proposición 3.7.** $\Gamma$ está bien definida, si y sólo si, $\bigcup_{A\in P(X)} \beta(A) = X$.

*Demostración.* Para todo $x \in X$, $\Gamma_2(x)$ es un ideal de $P(X)$: Si $A, B \in \Gamma_2(x)$ entonces $x \notin A \cup B$ y así $A \cup B \in \Gamma_2(x)$. Si además $C \in P(X)$ es tal que $C \subseteq A$ ,entonces $x \notin C$, con lo cual $C \in \Gamma_2(x)$. Por último, como la intersección de todos los primordiales es vacío, existe $A \in P(X)$ tal que $x \notin A$ y así $A \in \Gamma_2(x)$ por lo tanto $\Gamma_2(x) \neq \emptyset$. Se concluye que $\Gamma_2(x)$ es un ideal.

$\Gamma_1(x)$ y $\Gamma_2(x)$ son disyuntos: Si $A \in \Gamma_1(x)$, entonces $x \in \beta(A) \subseteq A$, con lo cual $A \notin \Gamma_2(x)$.

Para todo $x \in X$, $\Gamma_1(x)$ es un filtro de $P(X)$: Si $A, B \in \Gamma_1(x)$ entonces $x \in \beta(A) \cap \beta(B) = \beta(A \cap B)$ y como $\beta(A \cap B) = \beta\alpha\beta(A \cap B)$ se tiene que $x \in \beta\alpha\beta(A \cap B)$, así $\alpha\beta(A \cap B) \in \Gamma_1(x)$. Si además $C \in P(X)$ es tal que $A \subseteq C$, entonces $\beta(A) \subseteq \beta(C)$, con lo cual $x \in \beta(C)$ y por lo tanto $C \in \Gamma_1(x)$. De lo anterior, $\Gamma_1(x)$ es un filtro de $P(X)$, si y sólo si, es no vacío, es decir, si existe un $A \in P(X)$ tal que $x \in \beta(A)$.

Así, $\Gamma$ está bien definida, si y sólo si, para todo $x \in X$ existe $A \in P(X)$ tal que $x \in \beta(A)$, si y sólo si, $\bigcup_{A\in P(X)} \beta(A) = X$.

□

**Proposición 3.8.** $\Gamma$ es continua. Si además $\Gamma$ es 1-1, entonces es abierta sobre su imagen.

*Demostración.* Sea $A$ un abierto sub-básico de $S^{\tau}(P(X))$. Entonces $A = v(a)$ para algún $a \in P(X)$ y así,

$$\begin{aligned} x \in \Gamma^*(A) &\Leftrightarrow \Gamma(x) \in A = v(a)\\ &\Leftrightarrow a \notin \Gamma_2(x)\\ &\Leftrightarrow x \in a. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\Gamma^*(A) = a$, como $a \in P(X)$, a es abierto. Por lo tanto la función es continua. Además, de lo anterior se observa que para todo $a \in P(X)$, $\Gamma(a) = \Gamma\Gamma^*(v(a)) = v(a) \cap Im\, \Gamma$ el cual es un abierto de $Im\, \Gamma$. Si $\Gamma$ es 1-1, respeta uniones e intersecciones y ya que $P(X)$ es sub-base de $X$ entonces se tiene que todo abierto es enviado en un abierto de la imagen, por lo tanto la función $\Gamma$ es abierta sobre la imagen. □

**Proposición 3.9.** $\Gamma$ es isótona en ambos pre-órdenes.

*Demostración.* Sean $x, y \in X$ tales que $x \leq_1 y$. Si $A \in \Gamma_1(x)$, entonces $x \in \beta(A)$ y como $\beta(A) \in X_{\uparrow 1}$, entonces $y \in \beta(A)$, con lo cual $A \in \Gamma_1(y)$. Así, $\Gamma_1(x) \subseteq \Gamma_1(y)$ y por lo tanto $\Gamma(x) \leq_1 \Gamma(y)$.

Sean $x, y \in X$ tales que $x \leq_2 y$. Si $A \in \Gamma_2(x)$, entonces $x \notin A$ y como $A \in X_{\downarrow 2}$ entonces $y \notin A$, con lo cual $A \in \Gamma_2(y)$. Así, $\Gamma_2(x) \subseteq \Gamma_2(y)$ y por lo tanto $\Gamma(x) \leq_2 \Gamma(y)$. □

**Definición 3.10.** Sea $X$ un espacio doble-preordenado. Se dirá que $X$ es $\beta$-separado si cumple las siguientes propiedades:

1. Para todo $x, y \in X$, si $x \not\leq_1 y$ existe $A \in P(X)$ tal que $x \in \beta(A)$ e $y \notin \beta(A)$.
2. Para todo $x, y \in X$, si $x \not\leq_2 y$ existe $A \in P(X)$ tal que $x \notin A$ e $y \in A$.
3. Si $x =_1 y$ y $x =_2 y$ entonces $x = y$.

A los espacios doblemente pre-ordenados y $\beta$-separados los llamaremos $\beta$-DPOS. El siguiente resultado es evidente por la definición tan conveniente que se ha dado.

**Proposición 3.11.** $\Gamma$ es inmersión en ambos pre-órdenes, si y sólo si, $X$ cumple las primeras dos condiciones para ser $\beta$-separado. Si además $X$ cumple la tercera condición entonces $\Gamma$ es 1-1.

**Proposición 3.12.** Si $L$ es retículo entonces $S^\tau(L)$ es $\beta$-DPOS.

*Demostración.* Sean $x, y \in S^\tau(L)$. Si $x \not\leq_1 y$, entonces $x_1 \not\subseteq y_1$. Por lo tanto existe $a \in x_1$ tal que $a \notin y_1$, con lo cual $x \in u(a)$ e $y \notin u(a)$. Como $u(a) = \beta(v(a))$ y $v(a) \in P(S^\tau(L))$ se tiene la primera condición. Si $x \not\leq_2 y$, entonces $x_2 \not\subseteq y_2$, con lo cual existe $a \in x_2$ tal que $a \notin y_2$ y así $x \notin v(a)$ e $y \in v(a)$ cumpliendo la segunda condición.

La tercera condición es evidente. □

Antes de continuar con la sobreyectividad es bueno resaltar otras dos propiedades que posée $S^\tau(L)$.

**Definición 3.13.** Sea $X$ un espacio doblemente pre-ordenado. Diremos que $X$ es emparejado si para todo $x, y, z \in X$ cuando $x \leq_1 z$ e $y \leq_2 z$ existe $w \in X$ tal que $x \equiv_1 w$ e $y \equiv_2 w$.

**Definición 3.14.** Diremos que $X$ cumple la condición $\beta$-Balbes-Dwinger ($\beta$-B-D) si para cada par $W_1, W_2 \subseteq P(X)$ no vacíos, cuando $\bigcap_{A \in W_1} \beta(A) \subseteq \bigcup_{B \in W_2} B$ existen $W_1' \subseteq W_1$ y $W_2' \subseteq W_2$ finitos tales que $\bigcap_{A \in W_1'} \beta(A) \subseteq \bigcup_{B \in W_2'} B$.

**Proposición 3.15.** Si $L$ es un retículo, entonces $S^\tau(L)$ es emparejado y cumple la condición $\beta$-B-D.

*Demostración.* Emparejado: Si $x \leq_1 z$ e $y \leq_2 z$ significa que $x_1 \subseteq z_1$ e $y_1 \subseteq z_2$, como $z_1 \cap z_2 = \emptyset$ entonces $x_1 \cap y_2 = \emptyset$ con lo cual $w = (x_1, y_2) \in S(L)$ y cumple que $x \equiv_1 w$, $y \equiv_2 w$.

Condición $\beta$-B-D: Sean $W_1, W_2 \subseteq P(S^\tau(L))$ no vacíos tales que $\bigcap_{A \in W_1} \beta(A) \subseteq \bigcup_{B \in W_2} B$, sea $V_1 = \{a \in L | v(a) \in W_1\}$ y $V_2 = \{a \in L | v(a) \in W_2\}$ se tiene que

$$\bigcap_{a \in V_1} \beta(v(a)) \subseteq \bigcup_{b \in V_2} v(b),$$

es decir

$$\bigcap_{a \in V_1} u(a) \subseteq \bigcup_{b \in V_2} v(b).$$

Supongamos que $[V_1) \cap (V_2] = \emptyset$. Entonces $x = ([V_1), (V_2]) \in S^\tau(L)$ y además para todo $a \in V_1$, $a \in [V_1)$, de donde $x \in u(a)$, es decir, $x \in \bigcap_{a \in V_1} u(a)$. Por otro lado, para todo $b \in V_2$, $b \in (V_2]$, con lo cual $x \notin v(b)$, es decir, $x \notin \bigcup_{b \in V_2} v(b)$ contradiciendo la anterior contenencia. Se tiene entonces que $[V_1) \cap (V_2] \neq \emptyset$. Sea $c \in [V_1) \cap (V_2]$. Existen $a_1, ..., a_n \in V_1$ y $b_1, ..., b_m \in V_2$ tales que

$$a_1 \wedge ... \wedge a_n \leq c \leq b_1 \vee ... \vee b_m.$$

Así,

$$u(a_1 \wedge ... \wedge a_n) \subseteq u(b_1 \vee ... \vee b_m).$$

Entonces,

$$u(a_1) \cap ... \cap u(a_n) \subseteq \beta(v(b_1 \vee ... \vee b_m)) = \beta(v(b_1) \cup ... \cup v(b_m)) \subseteq v(b_1) \cup ... \cup v(b_m).$$

Tomando $W_1' = \{v(a_1), ..., v(a_n)\}$ y $W_2' = \{v(b_1), ..., v(b_m)\}$ se tiene que $W_1' \subseteq W_1$, $W_2' \subseteq W_2$ y $\bigcap_{A \in W_1'} \beta(A) \subseteq \bigcup_{B \in W_2'} B$. $\square$

**Observación 3.16.** Nótese que a la hora de hablar de la condición de emparejado solo se hace referencia a los pre-órdenes y no a la topología, por lo tanto si a $S(L)$ se le dotara de otra topología seguiría siendo emparejado.

**Proposición 3.17.** Sea $X$ un espacio doblemente pre-ordenado que cumple la condición $\beta$-B-D. Si $W_1$ es un filtro de $P(X)$ y $W_2$ es un ideal de $P(X)$ tales que $W_1$ y $W_2$ son disyuntos, entonces $\bigcap_{A \in W_1} \beta(A) \cap \bigcap_{B \in W_2} cB \neq \emptyset$.

*Demostración.* Supóngase que $\bigcap_{A \in W_1} \beta(A) \cap \bigcap_{B \in W_2} cB = \emptyset$. Entonces

$$\bigcap_{A \in W_1} \beta(A) \subseteq \bigcup_{B \in W_2} B.$$

Por la condición $\beta$-B-D se tiene que existen $A_1, ..., A_n \in W_1$ y $B_1, ..., B_m \in W_2$ tales que

$$\beta(A_1) \cap ... \cap \beta(A_n) \subseteq B_1 \cup ... \cup B_m,$$

luego,

$$\alpha(\beta(A_1) \cap ... \cap \beta(A_n)) \subseteq \alpha(B_1 \cup ... \cup B_m) = B_1 \cup ... \cup B_m,$$

donde la última igualdad se tiene ya que $B_1 \cup ... \cup B_m \in X_{2\downarrow}$. Como $W_1$ es filtro entonces $\alpha(\beta(A_1) \cap ... \cap \beta(A_n)) \in W_1$ y por lo tanto $B_1 \cup ... \cup B_m \in W_1$. Pero $W_2$ es ideal, con lo cual $B_1 \cup ... \cup B_m \in W_2$, contradiciendo el hecho de que $W_1$ y $W_2$ son disyuntos. Se concluye que $\bigcap_{A \in W_1} \beta(A) \cap \bigcap_{B \in W_2} cB \neq \emptyset$. □

**Corolario 3.18.** Sea $X$ un espacio doblemente pre-ordenado que cumple la condición $\beta$-B-D. Si $W_1$ es un filtro propio de $P(X)$ entonces $\bigcap_{A \in W_1} \beta(A) \neq \emptyset$ y si $W_2$ es un ideal propio de $P(X)$ entonces $\bigcap_{B \in W_2} cB \neq \emptyset$.

*Demostración.* Si $W_1$ es un filtro propio, existe un ideal disyunto (tomando el ideal generado por un elemento externo) y el resultado se tiene del resultado anterior. De forma análoga para $W_2$. □

**Proposición 3.19.** Sea $X$ un espacio $\beta$-DPOS, emparejado y que cumple la condición $\beta$-B-D. $\Gamma$ es sobreyectiva, si y sólo si, $\Gamma_1$ es sobreyectiva en los filtros propios de $P(X)$ y $\Gamma_2$ es sobreyectiva en los ideales propios de $P(X)$.

*Demostración.* $\Rightarrow$) Sean $W$ un filtro propio de $P(X)$ y $x \notin W$. Como $W \cap (x] = \emptyset$ entonces $(W, (x]) \in S^\tau(P(X))$. Como $\Gamma$ es sobreyectiva, existe $y \in X$ tal que $\Gamma(y) = (W, (x])$ con lo cual $\Gamma_1(y) = W$. Se concluye que $\Gamma_1$ es sobreyectiva en los filtros propios. De forma análoga se hace para $\Gamma_2$.

$\Leftarrow$) Sea $(W, V) \in S^\tau(P(X))$. Como $W \cap V = \emptyset$, por un lado, como ambos son no vacíos entonces ambos son propios, por otro lado, como $X$ cumple la condición $\beta$-B-D entonces $\bigcap_{A \in W} \beta(A) \cap \bigcap_{B \in V} cB \neq \emptyset$. Como $W$ y $V$ son propios, existen $x, y \in X$ tales que $\Gamma_1(x) = W$ y $\Gamma_2(y) = V$. Sea $z \in \bigcap_{A \in W} \beta(A) \cap \bigcap_{B \in V} cB$. Entonces $z \in \beta(A)$ para todo $A \in W$ con lo cual $W \subseteq \Gamma_1(z)$. Al mismo tiempo $z \notin B$ para todo $B \in V$ con lo cual $V \subseteq \Gamma_2(z)$.

Así $\Gamma_1(x) \subseteq \Gamma_1(z)$ y $\Gamma_2(y) \subseteq \Gamma_2(z)$, como $X$ es $\beta$-DPOS entonces $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$ son inmersiones en el primer pre-orden y en el segundo pre-orden respectivamente con lo cual $x \leq_1 z$ e $y \leq_2 z$. Por último, como $X$ es emparejado existe $w \in X$ tal que $x \equiv_1 w$ e $y \equiv_2 w$, con lo cual $\Gamma_1(x) = \Gamma_1(w)$ y $\Gamma_2(y) = \Gamma_2(w)$, es decir, $\Gamma(w) = (W, V)$. Se concluye que $\Gamma$ es sobreyectiva. □

**Proposición 3.20.** Sea $X$ un espacio $\beta$-DPOS que cumple la condición $\beta$-B-D. Se tienen los siguientes dos resultados:

1. $\Gamma_1$ es sobreyectiva en los filtros propios, si y sólo si, para todo $W$ filtro propio de $P(X)$, $Min_1(\bigcap_{A\in W}\beta(A)) \neq \emptyset$ .

2. $\Gamma_2$ es sobreyectiva en los ideales propios, si y sólo si, para todo $V$ ideal propio de $P(X)$, $Min_2(\bigcap_{B\in V} cB) \neq \emptyset$.

*Demostración.* 1.$\Rightarrow$) Sea $x \in X$ tal que $\Gamma_1(x) = W$. Entonces $x \in \beta(A)$ para todo $A \in W$ y así $x \in \bigcap_{A\in W}\beta(A)$. Por otro lado, si $y \in \bigcap_{A\in W}\beta(A)$, entonces $W \subseteq \Gamma_1(y)$, con lo cual $\Gamma_1(x) \subseteq \Gamma_1(y)$. Como $X$ es $\beta$-DPOS entonces $x \leq_1 y$ y así $x \in Min_1(\bigcap_{A\in W}\beta(A))$.

$\Leftarrow$) Sea $W$ un filtro propio y $x \in Min_1\left(\bigcap_{A\in W}\beta(A)\right)$. Ya que $\beta(A) \in X_{\uparrow 1}$ para cada $A \in W$, $\bigcap_{A\in W}\beta(A) \in X_{\uparrow 1}$ y así $\uparrow_1 x = \bigcap_{A\in W}\beta(A)$. Si $C \in \Gamma_1(x)$ entonces $x \in \beta(C)$. Recordando que $\beta(C) \in X_{1\uparrow}$, se tiene que $\bigcap_{A\in W}\beta(A) =\uparrow_1 x \subseteq \beta(C) \subseteq C$. Por la condición $\beta$-B-D existen $A_1, ..., A_n \in W$ tales que $\beta(A_1 \cap ... \cap A_n) \subseteq C$. Aplicando $\alpha$ a ambos lados se tiene que $\alpha\beta(A_1 \cap ... \cap A_n) \subseteq \alpha(C) = C$. La parte izquierda es el extremo inferior de elementos del filtro $W$, luego está en $W$ y por lo tanto $C \in W$.

De lo anterior $\Gamma_1(x) \subseteq W$. Por otro lado, como $x \in \bigcap_{A\in W}\beta(A)$ es claro que $W \subseteq \Gamma_1(x)$ con lo cual $\Gamma_1(x) = W$. Así, $W$ pertenece a la imagen de $\Gamma_1$. Se concluye que $\Gamma_1$ es sobreyectiva en los filtros propios.

La prueba de 2 es análoga. □

**Definición 3.21.** Sea $X$ un espacio doblemente pre-ordenado. Diremos que $X$ es un espacio reticular si cumple las siguientes condiciones:

1. $P(X)$ es una sub-base de la topología de $X$, cerrada para $\alpha\beta$-intersecciones y tal que $\bigcup_{A\in P(X)}\beta(A) = X$.

2. $X$ es $\beta$-DPOS, emparejado y cumple la condición $\beta$-B-D.

3. Para todo $W$ filtro propio de $P(X)$, $Min_1(\bigcap_{A\in W}\beta(A)) \neq \emptyset$ y para todo $V$ ideal propio de $P(X)$, $Min_2(\bigcap_{B\in v} cB) \neq \emptyset$.

**Proposición 3.22.** Si $L$ es un retículo, entonces $S^\tau(L)$ es un espacio reticular.

*Demostración.* 1. Sean $(F, I) \in S^\tau(L)$ y $a \in F$. Se tiene que $(F, I) \in u(a) = \beta(v(a))$ con lo cual $\bigcup_{A\in P(S(L))}\beta(A) = S^\tau(L)$. Las demás condiciones se tienen por la construcción de $S^\tau(L)$.

2. Se tiene por las proposiciones 3.12 y 3.15.

3. Al inicio de la sección se mostró que al definir $\Gamma$ para $S^\tau(L)$ esta es biyectiva, en particular sobreyectiva. Así por las proposiciones 3.19 y 3.20 se tienen las condiciones. □

De los resultados de esta sección se obtiene el siguiente teorema de forma inmediata.

**Teorema 3.23.** Si $X$ es un espacio reticular entonces $\Gamma$ es isomorfismo y por lo tanto $X$ es isomorfo a $S^\tau(P(X))$.

## 3.3. Las categorías

Se ha construido una forma de transformar un retículo $L$ en un espacio reticular $S^\tau(L)$ y de transformar un espacio reticular $X$ en un retículo $P(X)$, con lo cual se puede pensar en trabajar a $S^\tau$ y $P$ como funtores entre ciertas categorías. La primera categoría cuyos objetos sean los retículos y la segunda cuyos objetos sean los espacios reticulares. Así, falta definir cuales serían los morfismos de dichas categorías.

En un inicio es natural que los morfismos de los retículos sean homomorfismos de retículos, y que los morfismos de espacios reticulares sean funciones continuas, y siguiendo el camino tomado en las representaciones de Stone, Priestley y Urquhart, definir los funtores $S^\tau$ y $P$ de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, "h"'] & & S^\tau(L) \\ {} \arrow[r, phantom, "\mapsto"] & {} & {} \\ M & & S^\tau(M) \arrow[uu, "S^\tau(h)=(h^*,h^*)"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & & P(X) \\ {} \arrow[r, phantom, "\mapsto"] & {} & {} \\ Y & & P(Y) \arrow[uu, "P(f)=f^*"'] \end{tikzcd}$$

donde $(h^*, h^*)$ es obtener la imagen recíproca de $h$ en cada componente y $f^*$ es la imagen recíproca de $f$. Lamentablemente sin más condiciones estas funciones no están bien definidas. Así pues, es necesario dar condiciones extra sobre las funciones para que $S^\tau$ y $P$ sean efectivamente funtores.

Para el primer caso, se necesita que si $h : L \to M$ es un homomorfismo de retículos, $F$ es un filtro e $I$ un ideal de $M$ entonces $h^*(M)$ y $h^*(I)$ deben ser filtro e ideal de $L$ respectivamente. Es un hecho conocido que $h^*(M)$ es filtro, si y sólo si, es no vacío y de igual forma para los ideales. De lo anterior una condición necesaria para que $S^\tau(h)$ quede bien definido es que la imagen recíproca de todo filtro y de todo ideal de $M$ sea no vacía. A un homomorfismo $h$ que cumpla esta condición se le dirá homomorfismo largo. La siguiente proposición mostrará la razón de este nombre.

**Proposición 3.24.** Sea $h : L \to M$ un homomorfismo de retículos. $h$ es largo, si y sólo si, para todo $x \in M$ existen $y, z \in L$ tales que $h(y) \le x \le h(z)$.

*Demostración.* $\Rightarrow$) Sea $x \in M$. Como $h$ es largo, $h^*((x]) \neq \emptyset$. Si $y \in h^*((x])$, entonces $h(y) \in (x]$, con lo cual $y \le x$. De la misma forma se obtiene a $z$ tomando $h^*([x))$.

$\Leftarrow$) Sea $F$ un filtro de $M$. Si $x \in F$, existe $z \in L$ tal que $x \leq h(z)$. Como $F$ es filtro $h(z) \in F$ y así $z \in h^*(F)$, es decir, $h^*(F) \neq \emptyset$. De forma análoga se prueba para los ideales. $\square$

Tomaremos $\mathcal{R}_l$ la categoría cuyos objetos son retículos, sus morfismos son los homomorfismos largos y con la composición usual. Es claro que la identidad es un homomorfismo largo y que la composición de dos homomorfismos largos es homomorfismo largo. Además se puede observar que en el caso de trabajar con retículos acotados, los homomorfismo largos son los mismos homomorfismos acotados.

Para el segundo caso, es necesario que si $f : X \to Y$ es una función entre espacios reticulares, $f^*$ debe ser un homomorfismo de retículos. La primera condición debe ser que si $A \in P(Y)$ entonces $f^*(A) \in P(X)$, es decir, que $f$ devuelva primordiales en primordiales. Por otro lado si es un homomorfismo se debe cumplir que $f^*(\alpha\beta(A \cap B)) = \alpha\beta(f^*(A) \cap f^*(B))$ y $f^*(A \cup B) = f^*(A) \cup f^*(B)$ para todo $A, B \in P(Y)$, pero la última de estas condiciones siempre se cumple para la imagen recíproca.

**Definición 3.25.** Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios reticulares, diremos que $f$ es primordialmente continua si para todo $A, B \in P(Y)$ se cumplen las siguientes tres condiciones

1. $f^*(A) \in P(X)$
2. $f^*(\alpha\beta(A \cap B)) = \alpha\beta(f^*(A) \cap f^*(B))$
3. $f^*(\beta(A)) = \beta(f^*(A))$

Nótese que el nombre de continua está bien dado pues la primera condición asegura que $f$ es continua. La última condición se ha agregado por razones que se verán más adelante. Tomaremos $\mathcal{Q}$ la categoría cuyo objetos son espacios reticulares, sus morfismos son las funciones primordialmente continuas y con la composición usual. Es fácil ver que la identidad es uno de estos morfismos y la composición de dos de estas funciones es primordialmente continua.

**Proposición 3.26.** $S^\tau : \mathcal{R}_l \to \mathcal{Q}$ y $P : \mathcal{Q} \to \mathcal{R}_l$ son funtores contravariantes.

*Demostración.* Objetos: De la sección anterior se tiene que si $L \in Obj(\mathcal{R}_l)$ y $X \in Obj(\mathcal{Q})$ entonces $S^\tau(L) \in Obj(\mathcal{Q})$ y $P(X) \in Obj(\mathcal{R}_l)$.

Morfismos: Sea $h \in [L, M]_{\mathcal{R}_l}$, veamos que $S^\tau(h) : S^\tau(M) \to S^\tau(L)$ cumple las condiciones para ser una función primordialmente continua. Sean $A, B \in P(S(L))$, entonces

$A = v(a)$ y $B = v(b)$ para algunos $a, b \in L$.

$$\begin{array}{rcl} (x_1,x_2) \in (S^\tau(h))^*(A) & \Leftrightarrow & S^\tau(h)(x_1,x_2) \in A \\ & \Leftrightarrow & S^\tau(h)(x_1,x_2) \in v(a) \\ & \Leftrightarrow & (h^*(x_1),h^*(x_2)) \in v(a) \\ & \Leftrightarrow & a \notin h^*(x_2) \\ & \Leftrightarrow & h(a) \notin x_2 \\ & \Leftrightarrow & (x_1,x_2) \in v(h(a)). \end{array}$$

Así $(S^\tau(h))^*(v(a)) = v(h(a))$ y en particular $S^\tau(h)$ devuelve primordiales en primordiales cumpliendo la primera condición. Veamos que se cumple la segunda condición:

$$\begin{array}{rcl} (S^\tau(h))^*(\alpha\beta(A \cap B)) & = & (S^\tau(h))^*(\alpha\beta(v(a) \cap v(b))) \\ & = & (S^\tau(h))^*(v(a \wedge b)) \\ & = & v(h(a \wedge b)) \\ & = & v(h(a) \wedge h(b)) \\ & = & \alpha\beta(v(h(a)) \cap v(h(b))) \\ & = & \alpha\beta((S^\tau(h))^*(v(a)) \cap (S^\tau(h))^*(v(b))) \\ & = & \alpha\beta((S^\tau(h))^*(A) \cap (S^\tau(h))^*(B)). \end{array}$$

Por último observemos la tercera condición:

$$\begin{array}{rcl} (x_1,x_2) \in (S^\tau(h))^*(\beta(A)) & \Leftrightarrow & S^\tau(h)(x_1,x_2) \in \beta(A) \\ & \Leftrightarrow & S^\tau(h)(x_1,x_2) \in u(a) \\ & \Leftrightarrow & (h^*(x_1),h^*(x_2)) \in u(a) \\ & \Leftrightarrow & a \in h^*(x_1) \\ & \Leftrightarrow & h(a) \in x_1 \\ & \Leftrightarrow & (x_1,x_2) \in u(h(a)) \\ & \Leftrightarrow & (x_1,x_2) \in \beta(v(h(a))) \\ & \Leftrightarrow & (x_1,x_2) \in \beta((S^\tau(h))^*(v(a))) = \beta(S^\tau(h))^*(A). \end{array}$$

Así $(S^\tau(h))^*(\beta(A)) = \beta(S^\tau(h))^*(A)$. Entonces $S^\tau(h) \in [S^\tau(M), S^\tau(L)]_{\mathcal{Q}}$.

Además, por el comportamiento de la imagen recíproca es fácil observar que $S^\tau(g \circ h) = S^\tau(h) \circ S^\tau(g)$ y que $S^\tau(1_L) = 1_{S^\tau(L)}$.

Sea $f \in [X,Y]_{\mathcal{Q}}$. Por las condiciones dadas a $f$ ya se tiene que $P(f) = f^*$ es un homomorfismo de $P(Y)$ en $P(X)$, así que basta ver que se cumple la condición para ser largo, es decir, que para todo $A \in P(X)$ existen $B, C \in P(Y)$ tales que $f^*(C) \subseteq A \subseteq f^*(B)$. Sea $A \in P(X)$. En particular $A$ es compacto. Como $f$ es continua entonces $f(A)$ es compacto y además $f(A) \subseteq Y = \bigcup_{B \in P(Y)} B$ es un cubrimiento por abiertos. Así existen $B_1, ..., B_n \in P(Y)$ tales que $f(A) \subseteq B_1 \cup ... \cup B_n$. Pero ya que $B_1, ..., B_n \in P(Y)$, entonces $B = B_1 \cup ... \cup B_n \in P(Y)$. Por último se tiene que $A \subseteq f^*(f(A)) \subseteq f^*(B)$.

Si $\emptyset \in P(Y)$ entonces tomando $C = \emptyset$ se tiene que $f^*(C) \subseteq A$. Si $\emptyset \notin P(Y)$, entonces

$$\emptyset = \bigcap_{D \in P(Y)} D,$$

con lo cual

$$A \supseteq \emptyset = f^*(\emptyset) = f^*(\beta(\emptyset)) = f^*\left(\beta\left(\bigcap_{D \in P(Y)} D\right)\right) = \bigcap_{D \in P(Y)} f^*(\beta(D))$$
$$= \bigcap_{D \in P(Y)} \beta(f^*(D)).$$

Ya que para todo $D \in P(Y)$, $f^*(D) \in P(X)$ entonces se puede aplicar la condición $\beta$-B-D y así, existen $D_1, ..., D_n \in P(Y)$ tales que

$$A \supseteq \beta(f^*(D_1)) \cap ... \cap \beta f^*(D_n) = \beta(f^*(D_1 \cap ... \cap D_n)).$$

Aplicando $\alpha\beta$ a ambos lados se obtiene que

$$A = \alpha\beta(A) \supseteq \alpha\beta\beta(f^*(D_1 \cap ... \cap D_n)) = \alpha\beta(f^*(D_1 \cap ... \cap D_n)) = f^*(\alpha\beta(D_1 \cap ... \cap D_n)).$$

Tomando $C = \alpha\beta(D_1 \cap ... \cap D_n)$, $C \in P(Y)$ y $f^*(C) \subseteq A$. De lo anterior se concluye que $P(f) \in [P(Y), P(X)]_{\mathcal{R}_l}$.

Además por el comportamiento de la imagen recíproca es fácil observar que $P(g \circ f) = P(f) \circ P(g)$ y que $P(1_X) = 1_{P(X)}$.

□

**Proposición 3.27.** El funtor $S^\tau : \mathcal{R}_l \to \mathcal{Q}$ es una coequivalencia.

*Demostración.* Basta mostrar que los siguientes diagramas conmutan para todo $L, M \in Obj(\mathcal{R}_l)$, para todo $h \in [L, M]_{\mathcal{R}_l}$, para todo $X, Y \in Obj(\mathcal{Q})$ y para todo $f \in [X, Y]_{\mathcal{Q}}$.

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{v_L} & P(S^\tau(L)) \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P(S^\tau(h))} \\ M & \xrightarrow{v_M} & P(S^\tau(M)) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Gamma_L} & S^\tau(P(X)) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S^\tau(P(f))} \\ Y & \xrightarrow{\Gamma_Y} & S^\tau(P(Y)) \end{array}$$

Diagrama izquierdo: Sea $a \in L$.

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) \in P(S^\tau(h))(v_L(a)) \quad &\Leftrightarrow \quad (x_1, x_2) \in (S^\tau(h))^*(v_L(a)) \\ &\Leftrightarrow \quad (x_1, x_2) \in v_M(h(a)) \end{aligned}$$

Es decir, $(P(S^{\tau}(h)) \circ v_L)(a) = (v_M \circ h)(a)$. Como esto ocurre para todo $a \in L$ entonces $P(S^{\tau}(h)) \circ v_L = v_M \circ h$. Por lo tanto el diagrama izquierdo conmuta.

Diagrama derecho: Sea $x \in X$,

$$S^{\tau}(P(f))(\Gamma_X(x)) = S^{\tau}(P(f))(\Gamma_1(x), \Gamma_2(x)) = ((P(f))^*(\Gamma_1(x)), (P(f))^*(\Gamma_2(x)).$$

Como se tienen dos componentes, es preferible estudiar cada componente por separado.

$$\begin{aligned}
A \in (P(f))^*(\Gamma_1(x)) &\Leftrightarrow (P(f))(A) \in \Gamma_1(x) \\
&\Leftrightarrow f^*(A) \in \Gamma_1(x) \\
&\Leftrightarrow x \in \beta(f^*(A)) \\
&\Leftrightarrow x \in f^*(\beta(A)) \\
&\Leftrightarrow f(x) \in \beta(A) \\
&\Leftrightarrow A \in \Gamma_1(f(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A \in (P(f))^*(\Gamma_2(x)) &\Leftrightarrow (P(f))(A) \in \Gamma_2(x) \\
&\Leftrightarrow f^*(A) \in \Gamma_2(x) \\
&\Leftrightarrow x \notin f^*(A) \\
&\Leftrightarrow f(x) \notin A \\
&\Leftrightarrow A \in \Gamma_2(f(x))
\end{aligned}$$

De lo anterior $(S^{\tau}(P(f) \circ \Gamma_X)(x) = (\Gamma_1(f(x)), \Gamma_2(f(x))) = (\Gamma_Y \circ f)(x)$. Como esto ocurre para todo $x \in X$ el diagrama derecho conmuta.

$\square$

De ahora en adelante esta representación la llamaremos, **Representación Primordial**.

# Capítulo 4

# La representación de Allwein-Hartonas

La principal diferencia entre la representación se Stone y la de Priestley es la topología que le asignan al conjunto de los ideales primos. La topología asociada por Priestley es más fina que la usada por Stone. Mientras Stone utiliza la imágen de $\delta$ como una sub-base, Priestley utiliza la misma sub-base pero, además agrega los complementos de estos elementos. En este capítulo usaremos la misma idea de Priestley y volveremos más fina la topología usada en el capítulo anterior. Para ello seguiremos tomando la imagen de $v$ pero, además agregaremos los complementos de la imagen de $u$. Esto nos permitira determinar completamente a $Im\ u$ en el caso de retículos acotados.

## 4.1. La topología $\mu$

En el capítulo 2 se observó que $Im\ u$ es un sub-retículo de $E_{\beta\alpha}(S(L))$. Para poder determinar totalmente a los elementos de $Im\ u$, agregaremos una topología al conjunto $S(L)$ usando como sub-base $\mathcal{S} = \{cu(a)|a \in L\} \cup \{\alpha(u(b))|b \in L\}$. A esta topología la llamaremos $\mu$ y a $(S(L), \mu)$ lo notaremos $S^{\mu}$. En un espacio doblemente pre-ordenado diremos que un conjunto $A$ es $\alpha$-abierto, si $\alpha(A)$ es abierto. Con esto es claro que los elementos de $Im\ u$ cumplen con ser $\beta\alpha$-estables, cerrados y $\alpha$-abiertos. Basta ver el recíproco para que $Im\ u$ quede completamente determinado.

Los dos siguientes resultados que son los que caracterizaran a $Im\ u$ son bastante técnicos y se obtienen modificando ligeramente resultados fuertemente usados en [10].

**Proposición 4.1.** Si $L$ es acotado $S^{\mu}(L)$ es un espacio compacto.

*Demostración.* Sea $F$ una familia de abiertos sub-básicos, tal que ninguna sub-familia finita cubre a $S^\mu(L)$. Si $F$ es vacío es claro que no cubre a $S^\mu(L)$, por lo tanto, se supondrá que $F$ no es vacío. Sean $F_1 = \{a \in L | cu(a) \in F\}$ y $F_2 = \{b \in L | \alpha(u(a)) \in F\}$. Si $F_1 \neq \emptyset \neq F_2$, para todo par de conjuntos finitos no vacíos $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq F_1$ y $\{b_1, ..., b_m\} \subseteq F_2$ (recordando que $\alpha(u(a)) = v(a)$) se tiene que $\bigcup(cu(a_i)) \cup \bigcup v(b_j)$ no cubre a $S^\mu(L)$, por lo tanto existe $x \in S^\mu(L)$ tal que $x \notin \bigcup(cu(a_i)) \cup \bigcup v(b_j)$ es decir, $x \in \bigcap u(a_i) \cap \bigcap(cv(b_j))$. Así, para $i = 1, ..., n$ y $j = 1, ..., m$, se tiene que $x \in u(a_i)$ y $x \notin v(b_j)$, de donde, $a_i \in x_1$ y $b_j \in x_2$.

Como $x_1 \cap x_2 = \emptyset$ entonces $a_1 \wedge ... \wedge a_n \nleq b_1 \vee ... \vee b_m$, y ya que esto ocurre con cualquier selección finita de $a_i$ y $b_j$ entonces $[F_1) \cap (F_2] = \emptyset$, es decir, $y = ([F_1), (F_2]) \in S^\mu(L)$. Por otro lado, si $cu(a) \in F$, $a \in F_1$, con lo cual $y \in u(a)$ y si $v(b) \in F$, $b \in F_2$, con lo cual $y \notin v(b)$. Así que $y \notin \bigcup F$ y por lo tanto $F$ no es un cubrimiento de $S(L)$.

Si $F_2 = \emptyset$ (claramente $F_1 \neq \emptyset$) se toma de nuevo $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq F_1$ con $n \geq 1$. Existe $x \in S^\mu(L)$ tal que $x \notin \bigcup(cu(a_i))$, por lo tanto $x \in \bigcap(u(a_i))$ y así $a_i \in x_1$ para $i = 1, ..., n$. De esto $a_1 \wedge ... \wedge a_n \in x_1$ y como $0 \in x_2$ entonces $a_1 \wedge ... \wedge a_n \neq 0$, de donde $0 \notin [F_1)$ y el elemento que no es cubierto es $([F_1), \{0\})$. Haciendo las cuentas análogas se tiene que si $F_1 = \emptyset$ entonces el elemento que no se cubre es $(\{1\}, (F_2])$.

□

Una familia $F$ de conjuntos $\beta\alpha$-estables, cerrados y $\alpha$-abiertos en un espacio doblemente pre-ordenado $X$ se llama familia de separación si para todo $x, y \in X$ tales que $x \nleq_1 y$ existe $Z \in F$ tal que $x \in Z$ e $y \notin Z$. El conjunto $Im\ u$ es una familia de separación en $S^\mu(L)$ pues si $x \nleq_1 y$ entonces $x_1 \nsubseteq y_1$, así existe $a \in x_1$ tal que $a \notin y_1$ de donde $x \in u(a)$ e $y \notin u(a)$.

**Proposición 4.2.** Si $X$ es un espacio doblemente pre-ordenado compacto, $F$ es una familia de separación cerrada para las operaciones $\wedge$ y $\vee$, y $W$ es un conjunto $\beta\alpha$-estable, cerrado y $\alpha$-abierto con $W \neq X$ y no nulo, entonces $W \in F$.

*Demostración.* Sean $x \in W$ e $y \notin \alpha(W)$ (existen por ser $W \neq X$ y no vacío), como $W \subseteq \alpha(W)$, $y \notin W$, con lo cual $x \nleq_1 y$ (pues $W$ es $\leq_1$-sup), por lo tanto existe $Z_{xy} \in F$ tal que $x \in Z_{xy}$ e $y \notin Z_{xy}$, así $c\alpha(W) \subseteq \bigcup_{y \notin \alpha(W)} cZ_{xy}$. Cada uno de los $Z_{xy}$ es cerrado, por lo que se tiene un cubrimiento por abiertos, $c\alpha(W)$ es cerrado, por lo tanto compacto y entonces el cubrimiento se puede reducir a uno finito.

Sean $y_1, ..., y_m$ tales que $c\alpha(W) \subseteq \bigcup_{i=1}^m cZ_{xy_i}$, con lo cual, $\bigcap_{i=1}^m Z_{xy_i} \subset \alpha(W)$, tomando $Z_x = \bigcap_{i=1}^m Z_{xy_i} = \bigwedge_{i=1}^m Z_{xy_i}$se tiene que $Z_x \subseteq \alpha(W)$. Además, como $x \in Z_{xy_i}$ para $i = 1, ..., m$, entonces $x \in Z_x$, por lo tanto, $W \subseteq \bigcup_{x \in W} Z_x \subseteq \bigcup_{x \in W} \alpha(Z_x)$. Esto es de nuevo un cubrimiento abierto pues cada $Z_x \in F$ y por lo tanto es $\alpha$-abierto, y como $W$ es cerrado, es compacto y se puede obtener un sub-cubrimiento finito.

Sean $x_1, ..., x_n$ tales que $W \subseteq \bigcup_{x=1}^{n} \alpha(Z_{x_i})$ y tomando $Z = \bigvee_{i=1}^{n} Z_{x_i}$ se tiene $W \subseteq \bigcup_{x=1}^{n} \alpha(Z_{x_i}) \subseteq \bigvee_{x=1}^{n} \alpha(Z_{x_i}) = \alpha(Z)$, de donde $\alpha(W) \subseteq \alpha\alpha(Z) = \alpha(Z)$, $\beta\alpha(W) \subseteq \beta\alpha(Z)$ y así $W \subseteq Z$. Además, como $Z_{x_i} \subseteq \alpha(W)$, entonces $\alpha(Z_{x_i}) \subseteq \alpha(W)$, de donde $\alpha(Z) = \bigvee_{x=1}^{n} \alpha(Z_{x_i}) \subseteq \alpha(W)$, es decir, $\alpha(Z) \subseteq \alpha(W)$ con lo cual $Z \subseteq W$. Se conluye que $W = Z \in F$. $\square$

Si $L$ es acotado, $S^{\mu}(L)$ e $Im\ u$ cumplen las hipótesis de la anterior proposición. Entonces todo conjunto $\beta\alpha$-estable, cerrado y $\alpha$-abierto tal vez salvo $S(L)$ y $\emptyset$ hace parte de $Im\ u$. Pero $u(0) = \emptyset$ y $u(1) = S(L)$, por lo tanto se tiene que $Im\ u$ son los conjuntos $\beta\alpha$-estables, cerrados y $\alpha$-abiertos. Si $X$ es un espacio doblemente pre-ordenado, tomaremos $E(X)$ el conjunto de los $\beta\alpha$-estables, cerrados y $\alpha$-abiertos, y así tenemos que $Im\ u = E(S^{\mu}(L))$.

## 4.2. La función $\gamma$

Dado un retículo acotado se ha recuperado $Im\ u$ tomando $ES^{\mu}(L)$. La tarea ahora es buscar bajo cuales condiciones el espacio doblemente pre-ordenado $X$ es isomorfo a $S^{\mu}E(X)$. Es claro que en primer lugar $S^{\mu}E(X)$ solo tiene sentido si $E(X)$ es un retículo, y mas específicamente un subretículo de $E_{\alpha\beta}(X)$. La siguiente proposición es evidente por la definición de sub-retículo.

**Proposición 4.3.** Sea $X$ un espacio doblemente pre-ordenado. $E(X)$ es sub-retículo de $E_{\alpha\beta}(X)$, si y sólo si, para todo $A, B \in E(X)$ se tiene que $A \cap B, \beta\alpha(A \cup B) \in E(X)$.

Por otro lado como $\emptyset, X \in E(X)$ entonces $E(X)$ es un retículo acotado con lo cual $S^{\mu}E(X)$ es compacto. Si se espera que $X$ sea isomorfo a $S^{\mu}E(X)$ entonces $X$ debe ser compacto, así, en el resto de la sección, todos los espacios doblemente pre-ordenados cumplirán las condiciones anteriores, es decir, que $E(X)$ es cerrado para intersecciones y $\alpha\beta$-uniones, $X$ es compacto y además que $cE(X) \cup \alpha E(X)$ es una sub-base para lo topología de $X$, donde $cE(X) = \{cA | A \in E(X)\}$ y $\alpha E(X) = \{\alpha(A) | A \in E(X)\}$.

De forma análoga a la construcción de la función $\Gamma$ se define $\gamma$, notando que al trabajar sobre $Im\ u$ en vez de $Im\ v$ se cambian los papeles de $\beta$ y $\alpha$.

$$\gamma_1 : \quad X \longrightarrow \mathcal{F}(E(X)) \qquad\qquad \gamma_2 : \quad X \longrightarrow \mathcal{I}(E(X))$$
$$x \longmapsto \{A \in E(X) | x \in A\} \qquad\qquad x \longmapsto \{B \in E(X) | x \notin \alpha(B)\}$$

$$\gamma : \quad X \longrightarrow S^{\mu}E(X)$$
$$x \longmapsto (\gamma_1(x), \gamma_2(x))$$

**Proposición 4.4.** $\gamma$ está bien definida, es decir, $\gamma_1(x)$ y $\gamma_2(x)$ son filtro e ideal de $E(X)$ respectivamente y además $\gamma_1(x) \cap \gamma_2(x) = \emptyset$.

*Demostración.* $\gamma_1(x)$ es filtro: Sean $A, B \in \gamma_1(x)$, entonces $x \in A$ y $x \in B$. Por lo tanto $x \in A \cap B$ y así $A \cap B \in \gamma_1(x)$. Además, si $C \in E(X)$ y $A \subseteq C$ entonces $x \in C$, con lo cual $C \in \gamma_1(x)$. $\gamma_1(x) \neq \emptyset$ pues $X \in \gamma_1(x)$.

$\gamma_2(x)$ es ideal: Sean $A, B \in \gamma_2(x)$, entonces $x \notin \alpha(A)$ y $x \notin \alpha(B)$ y así $x \notin \alpha(A) \cup \alpha(B)$. Como $\beta(\alpha(A) \cup \alpha(B)) \subseteq \alpha(A) \cup \alpha(B)$ entonces $x \notin \beta(\alpha(A) \cup \alpha(B)) = A \vee B$, con lo cual $A \vee B \in \gamma_2(x)$. Además si $C \in E(X)$ y $C \subseteq A$ entonces $\alpha(C) \subseteq \alpha(A)$ con lo cual $x \notin \alpha(C)$ y así $c \in \gamma_2(x)$. $\gamma_2(x) \neq \emptyset$ pues $\emptyset \in \gamma_2(x)$.

Por último si $A \in \gamma_1(x)$ entonces $x \in A \subseteq \alpha(A)$, con lo cual $x \in \alpha(A)$, de donde $A \notin \gamma_2(x)$. Se concluye que $\gamma_1(x) \cap \gamma_2(x) = \emptyset$. □

**Proposición 4.5.** $\gamma$ es continua. Además si $\gamma$ es 1-1 entonces es abierta sobre la imagen.

*Demostración.* Basta probar que los abiertos sub-básicos de $S^{\mu}E(X)$ se devuelven en abiertos, es decir, que si $A \in E(X)$ entonces $\gamma^{-1}(cu(A))$ y $\gamma^{-1}(\alpha(u(A)))$ son abiertos.

$\gamma^{-1}(cu(A))$:

$$\begin{aligned} x \in \gamma^{-1}(cu(A)) &\Leftrightarrow \gamma(x) \in cu(A) \\ &\Leftrightarrow \gamma(x) \notin u(A) \\ &\Leftrightarrow A \notin \gamma_1(x) \\ &\Leftrightarrow x \notin A \\ &\Leftrightarrow x \in cA \end{aligned}$$

Es decir, $\gamma^{-1}(cu(A)) = cA$ y como $A \in E(X)$ entonces es cerrado, por lo tanto $\gamma^{-1}(cu(A))$ es abierto.

$\gamma^{-1}(\alpha u(A))$:

$$\begin{aligned} x \in \gamma^{-1}(\alpha u(A)) &\Leftrightarrow \gamma(x) \in \alpha u(A) \\ &\Leftrightarrow \gamma(x) \in v(A) \\ &\Leftrightarrow A \notin \gamma_2(x) \\ &\Leftrightarrow x \in \alpha(A) \end{aligned}$$

Es decir, $\gamma^{-1}(\alpha u(A)) = \alpha(A)$ y como $A \in E(X)$ entonces es $\alpha$-abierto, por lo tanto $\gamma^{-1}(\alpha u(A))$ es abierto.

Además, de lo anterior se tiene que si $A \in E(X)$ entonces $\gamma(cA) = cu(A) \cap Im\ \gamma$ y $\gamma(\alpha(A)) = \alpha u(A) \cap Im\ \gamma$, así $\gamma$ envía sub-básicos en abiertos de la imagen. Si $\gamma$ es 1-1 entonces respeta uniones e intersecciones y por lo tanto envía abiertos en abiertos de la imagen. □

**Proposición 4.6.** $\gamma$ es isótona en ambos pre-órdenes.

*Demostración.* Basta recordar que si $A \in E(X)$ entonces es $\beta\alpha$-estable y por lo tanto es $\leq_1$-sup y además $\alpha(A)$ es $\leq_2$-inf.

Si $x \leq_1 y$ y $A \in \gamma_1(x)$ entonces $x \in A$, con lo cual $y \in A$ y así $A \in \gamma_1(y)$, de donde $\gamma_1(x) \subseteq \gamma_1(y)$, es decir, $\gamma(x) \leq_1 \gamma(y)$. Por otro lado, si $x \leq_2 y$ y $A \in \gamma_2(x)$ entonces $x \notin \alpha(A)$ con lo cual $y \notin \alpha(A)$ y así $A \in \gamma_2(y)$, de donde $\gamma_1(x) \subseteq \gamma_2(y)$, es decir, $\gamma(x) \leq_2 \gamma(y)$. $\square$

Las siguientes condiciones (análogas a las dadas para ser $\beta$-DPOS) se dan de forma conveniente para que la función $\gamma$ sea inmersión y 1-1.

**Definición 4.7.** Sea $X$ un espacio doblemente pre-ordenado. Se dirá que $X$ es doble separado si cumple las siguientes propiedades:

1. Para todo $x, y \in X$, si $x \nleq_1 y$ existe $A \in E(X)$ tal que $x \in A$ e $y \notin A$.
2. Para todo $x, y \in X$, si $x \nleq_2 y$ existe $A \in E(X)$ tal que $x \notin \alpha(A)$ e $y \in \alpha(A)$.
3. Si $x \equiv_1 y$ y $x \equiv_2 y$ entonces $x = y$.

A los espacios doblemente pre-ordenados y doble separados los llamaremos DPOS, la siguiente proposición es evidente.

**Proposición 4.8.** $\gamma$ es inmersión en ambos pre-órdenes, si y sólo si, $X$ cumple las primeras dos condiciones para ser DPOS. Si además $X$ cumple la tercera, entonces $\gamma$ es 1-1.

**Proposición 4.9.** Si $L$ es un retículo (no necesariamente acotado), entonces $S^\tau(L)$ es un DPOS.

*Demostración.* Sean $x, y \in S(L)$ tales que $x \nleq_1 y$, es decir, $x_1 \nsubseteq y_1$. Existe $a \in x_1$ tal que $a \notin y_1$, con lo cual $x \in u(a)$ e $y \notin u(a)$. Como $u(a) \in ES(L)$ se tiene la primera condición para ser DPOS. Si en cambio $x \nleq_2 y$ significa que $x_2 \nsubseteq y_2$ con lo cual existe $a \in x_2$ tal que $a \notin y_2$. De esto $x \notin v(a)$ e $y \in v(a)$. Como $v(a) = \alpha(u(a))$ se tiene la segunda condición.

Por último si $x \equiv_1 y$ significa que $x_1 = y_1$ y si $x \equiv_2 y$ entonces $x_2 = y_2$, de donde, si se tiene que $x \equiv_1 y$ y $x \equiv_2 y$ entonces $x = y$. $\square$

Para buscar bajo qué condiciones $\gamma$ es sobreyectivo seguiremos un camino similar al utilizado para $\Gamma$, así pues usaremos resultados análogos a las proposiciones 3.17, 3.19, 3.20 y al corolario 3.18. En varios casos omitiremos las pruebas pues se obtienen repitiendo las pruebas del capítulo anterior con ligeros cambios. Empezamos recordando que $S^\tau E(X)$ es emparejado y si $\gamma$ fuera un isomorfismo, obligatoriamente $X$ debería ser emparejado.

**Proposición 4.10.** Sean $X$ un espacio doblemente pre-ordenado compacto. Si $W_1$ es un filtro de $E(X)$ y $W_2$ es un ideal de $E(X)$ tales que $W_1$ y $W_2$ son disyuntos, entonces $\bigcap_{A\in W_1} A \cap \bigcap_{B\in W_2} c\alpha(B) \neq \emptyset$.

*Demostración.* Primero veremos que el resultado es válido para intersecciones finitas. Como $X$ es compacto y resaltando que si $A \in W_1$ y $B \in W_2$ entonces $A$ y $B$ son cerrados, se tendría probada la proposición. Supongamos que

$$A_1 \cap ... \cap A_n \cap c\alpha(B_1) \cap ... \cap c\alpha(B_m) = \emptyset$$

entonces

$$A_1 \cap ... \cap A_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \alpha(B_i).$$

Aplicando $\beta$ a ambos lados se tiene que

$$A_1 \cap ... \cap A_n = \beta(A_1 \cap ... \cap A_n) \subseteq \beta\alpha \bigcup_{i=1}^{n} B_i.$$

El lado derecho es el extremo superior de elementos en el ideal $W_2$, luego está en $W_2$ y así el lado izquierdo también. Pero el lado izquierdo es el extremo inferior de elementos del filtro $W_1$ y por lo tanto está en $W_1$, contradiciendo que $W_1$ y $W_2$ son disyuntos. $\square$

**Corolario 4.11.** Sea $X$ un espacio doblemente pre-ordenado compacto. Si $W_1$ es un filtro propio de $E(X)$, entonces $\bigcap_{A\in W_1} A \neq \emptyset$ y si $W_2$ es un ideal propio de $E(X)$, entonces $\bigcap_{B\in W_2} c\alpha(B) \neq \emptyset$.

**Proposición 4.12.** Sea $X$ un espacio doblemente pre-ordenado compacto, DPOS y emparejado. $\gamma$ es sobreyectiva, si y sólo si, $\gamma_1$ es sobreyectiva en los filtros propios de $E(X)$ y $\gamma_2$ es sobreyectiva en los ideales propios de $E(X)$.

**Proposición 4.13.** Sea $X$ un espacio doblemente pre-ordenado compacto y DPOS. Se tienen los siguientes dos resultados

1. $\gamma_1$ es sobreyectiva en los filtros propios, si y sólo si, para todo $W$ filtro propio de $E(X)$, $Min_1(\bigcap_{A\in W_1} A) \neq \emptyset$.

2. $\gamma_2$ es sobreyectiva en los ideales propios, si y sólo si, para todo $V$ ideal propio de $E(X)$, $Min_2(\bigcap_{B\in V} c\alpha(B)) \neq \emptyset$.

*Demostración.* La implicación $\Rightarrow$) se obtiene repitiendo 3.20, para $\Leftarrow$) si vale la pena mostrar la prueba ya que cambian respecto a 3.20.

Sean $W$ un filtro propio y $x \in Min_1\left(\bigcap_{A\in W} A\right)$. Ya que $A \in X_{\uparrow 1}$ para cada $A \in W$, entonces $\bigcap_{A\in W} A \in X_{\uparrow 1}$ y así $\uparrow_1 x = \bigcap_{A\in W} A$. Si $C \in \gamma_1(x)$, entonces $x \in C$ y ya que

$C \in X_{\uparrow 1}$ se tiene que $\bigcap_{A\in W} A \subseteq C \subseteq \alpha(C)$, de donde $c\alpha(C) \subseteq \bigcup_{A\in W} cA$. Como $c\alpha(C)$ es cerrado, cada $cA$ es abierto y $X$ es compacto, entonces se puede reducir a una unión finita, es decir, $c\alpha(C) \subseteq cA_1 \cup ... \cup cA_n$. Aplicando complemento y luego $\beta$ obtenemos que

$$A_1 \cap ... \cap A_n = \beta(A_1 \cap ... \cap A_n) \subseteq \beta\alpha(C) = C.$$

El lado izquierdo es el extremo inferior de elementos del filtro $W$ y por lo tanto está en el filtro y así $C \in W$, con lo cual $\gamma_1(x) \subseteq W$. La contenencia $W \in \gamma_1(x)$ es evidente y por lo tanto $W = \gamma_1(x)$, es decir $W \in Im\ \gamma_1$ y así $\gamma_1$ es sobreyectiva en los filtros propios.

La prueba de 2 es análoga.

□

**Definición 4.14.** Sea $X$ un espacio doblemente pre-ordenado. Diremos que $X$ es un espacio de Allwein-Hartonas (AH) si cumple las siguientes condiciones:

1. $E(X)$ es cerrado para intersecciones y $\beta\alpha$-uniones.
2. $cE(X) \cup \alpha E(X)$ es una sub-base para la topología de $X$.
3. $X$ es compacto, DPOS y emparejado.
4. Para todo $W$ filtro propio de $E(X)$, $Min_1(\bigcap_{A\in W} A) \neq \emptyset$ y para todo $V$ ideal propio de $E(X)$, $Min_2(\bigcap_{B\in V} c\alpha(B)) \neq \emptyset$.

**Proposición 4.15.** Sea $L$ un retículo acotado. $S(L)$ es completo con respecto a $\leq_1$ y a $\leq_2$. Aún más, si $A, B \in E(S^{\mu}(L))$ con $A \neq \emptyset$ y $B \neq S(L)$ entonces $Min_1(A) \neq \emptyset$ y $Min_2(c\alpha(B)) \neq \emptyset$.

*Demostración.* Sea $A \subseteq S(L)$. $F = \bigcap_{(F,I)\in A} F$ e $I = \bigcap_{(F,I)\in A} I$ son filtro propio e ideal propio respectivamente. Así $(F, \{0\}) \in Inf_1(A)$ y $(\{1\}, I) \in Inf_2(A)$. Concluimos que $S(L)$ es completo en ambos pre-órdenes.

Si $A, B \in E(X)$ con $A \neq \emptyset$ y $B \neq S(L)$ entonces $A = u(a)$ y $B = u(b)$ para algunos $a, b \in L$, con $a \neq 0$ y $b \neq 1$. Recordando que $u(a) = \{(F, I) \in S(L) | a \in F\}$ y $c\alpha(u(b)) = cv(b) = \{(F, I) \in S(L) | b \in I\}$, es claro que $([a), \{0\}) \in Min_1(A)$ y $(\{1\}, (b]) \in Min_2(c\alpha(B))$. □

**Proposición 4.16.** Sea $L$ un retículo, $S^{\mu}(L)$ es un espacio AH.

*Demostración.* 1 y 2 se tienen por la construcción de $S^{\mu}(L)$.

3. Se tiene por las proposiciones 4.1, 4.9 y 3.15.

4. Sea $W$ un filtro propio. Tomamos $P = \{x \in S(L) | \forall A \in W, Min_1(A) \leq_1 x\}$, nótese que $P \neq \emptyset$ pues $(\{1\}, \{0\}) \in P$ y además como $S(L)$ es completo con respecto a $\leq_1$, $Inf_1(P) \neq \emptyset$. Por la misma forma en que se define $P$ se tiene que para todo $A \in W$, $Min_1(A) \subseteq Miy_1(P)$ con lo cual $Min_1(A) \leq_1 Inf_1(P)$ y así $Inf_1(P) \subseteq P$, lo que es lo mismo que $Inf_1(P) = Min_1(P)$. Por último veamos que relación hay entre $P$ y $\bigcap_{A \in W} A$.

$$\begin{aligned} x \in P & \Leftrightarrow \forall A \in W, Min_1(A) \leq_1 x \\ & \Leftrightarrow \forall A \in W, x \in A \\ & \Leftrightarrow x \in \textstyle\bigcap_{A \in W} A. \end{aligned}$$

Así pues, $P = \bigcap_{A \in W} A$ y $\emptyset \neq Inf_1(P) = Min_1(P) = Min_1(\bigcap_{A \in W} A)$. La prueba para los ideales es análoga. □

De los resultados de esta sección se obtiene el siguiente teorema de forma inmediata.

**Teorema 4.17.** Si $X$ es un espacio AH entonces $\gamma$ es isomorfismo y por lo tanto $X$ es isomorfo a $S^\mu(E(X))$.

## 4.3. Las categorías

Se ha construido una forma de transformar un retículo acotado $L$ en un espacio AH $S^\mu(L)$ y de transformar un espacio AH $X$ en un retículo acotado $E(X)$, con lo cual se puede pensar en trabajar a $S^\mu$ y $E$ como funtores entre ciertas categorías. La primera categoría cuyos objetos sean los retículos acotados y la segunda cuyo objetos sean los espacios AH, así pues falta definir cuales serían los morfismos de dichas categorías.

En un inicio es natural que los morfismos de los retículos acotados sean homomorfismos de retículos acotados, y que los morfismos de espacios AH sean funciones continuas. Siguiendo lo realizado en el capítulo anterior se definen los funtores $S^\mu$ y $E$ de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, "h"'] & \mapsto & S^\mu(L) & & X \arrow[d, "f"'] & \mapsto & E(X) \\ M & & S^\mu(M) \arrow[u, "S^\mu(h)=(h^*,h^*)"'] & & Y & & E(Y) \arrow[u, "E(f)=f^*"'] \end{tikzcd}$$

En el primer caso el funtor siempre está bien definido. En efecto, se necesita que si $h : L \to M$ es un homomorfismo de retículos acotados, $F$ es un filtro e $I$ un ideal de $M$ entonces $h^*(M)$ y $h^*(I)$ deben ser filtro e ideal de $L$ respectivamente, pero esto siempre se cumple pues la imagen recíproca de todo filtro tiene al 1 y la imagen recíproca de todo ideal tiene al 0.

Tomaremos $\mathcal{R}_0^1$ la categoría cuyos objetos son retículos acotados, sus morfismos son los homomorfismos acotados y con la composición usual. Es claro que la identidad es un homomorfismo acotado y que la composición de dos homomorfismos acotados es homomorfismo acotado.

En el segundo caso, sin más condiciones sobre $f$, el funtor no está bien definido. Si $f : X \to Y$ es una función entre espacios AH, $f^*$ debe ser un homomorfismo de retículos. La primera condición debe ser que si $A \in E(Y)$ entonces $f^*(A) \in E(X)$. Por otro lado, si es un homomorfismo se debe cumplir que $f^*(\beta\alpha(A \cup B)) = \beta\alpha(f^*(A) \cup f^*(B))$ y $f^*(A \cap B) = f^*(A) \cap f^*(B)$ para todo $A, B \in E(Y)$, pero la última de estas condiciones siempre se cumple para la imagen recíproca.

Si queremos que $f^*(A) \in E(X)$ entonces $f^*(A)$ debe ser cerrado, $\beta\alpha$-estable y $\alpha$-abierto. Lo primero se tendría en el caso de ser $f$ continua, lo segundo se tendría por la condición que hace de $f^*$ un homomorfismo pues $\beta\alpha(f^*(A)) = f^*(\beta\alpha(A)) = f^*(A)$ y para que lo último se cumpla basta pedir que $f^*(\alpha(A)) = \alpha(f^*(A))$ pues al ser $f$ continua el término de la izquierda es abierto.

**Definición 4.18.** Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios AH, diremos que $f$ es $\beta\alpha$-continua si para todo $A, B \in E(Y)$ se cumplen las siguientes condiciones

1. $f$ es continua.
2. $f^*(\beta\alpha(A \cup B)) = \beta\alpha(f^*(A) \cup f^*(B))$.
3. $f^*(\alpha(A)) = \alpha(f^*(A))$.

Tomaremos $\mathcal{W}$ la categoría cuyo objetos son espacios AH, sus morfismos son las funciones $\beta\alpha$-continuas y con la composición usual. Es fácil ver que la identidad es uno de estos morfismos y la composición de dos de estas funciones es $\beta\alpha$-continua.

**Proposición 4.19.** $S^\mu : \mathcal{R}_0^1 \to \mathcal{W}$ y $E : \mathcal{W} \to \mathcal{R}_0^1$ son funtores contravariantes.

*Demostración.* Objetos: De la sección anterior se tiene que si $L \in Obj(\mathcal{R}_0^1)$ y $X \in Obj(\mathcal{W})$ entonces $S^\mu(L) \in Obj(\mathcal{W})$ y $E(X) \in Obj(\mathcal{R}_0^1)$.

Morfismos: Sea $h \in [L, M]_{\mathcal{R}_0^1}$, veamos que $S^\mu(h) : S^\mu(M) \to S^\mu(L)$ cumple las condiciones para ser una función $\beta\alpha$-continua. Sean $A, B \in E(S(L))$, entonces $A = u(a)$ y $B = u(b)$ para algunos $a, b \in L$.

$$
\begin{aligned}
(x_1, x_2) \in (S^\mu(h))^*(A) &\Leftrightarrow S^\mu(h)(x_1, x_2) \in A \\
&\Leftrightarrow S^\tau(h)(x_1, x_2) \in u(a) \\
&\Leftrightarrow (h^*(x_1), h^*(x_2)) \in u(a) \\
&\Leftrightarrow a \in h^*(x_1) \\
&\Leftrightarrow h(a) \in x_1 \\
&\Leftrightarrow (x_1, x_2) \in u(h(a)).
\end{aligned}
$$

Así, $(S^\mu(h))^*(u(a)) = u(h(a))$.

Veamos que se cumple la segunda condición:

$$\begin{aligned}
(S^\mu(h))^*(\beta\alpha(A\cup B)) &= (S^\mu(h))^*(\beta\alpha(u(a)\cup u(b)))\\
&= (S^\mu(h))^*(u(a\vee b))\\
&= u(h(a\vee b))\\
&= u(h(a)\vee h(b))\\
&= \beta\alpha(u(h(a))\cup u(h(b)))\\
&= \beta\alpha((S^\mu(h))^*(u(a))\cup (S^\mu(h))^*(u(b)))\\
&= \beta\alpha((S^\mu(h))^*(A)\cup (S^\mu(h))^*(B)).
\end{aligned}$$

Así, $(S^\mu(h))^*(\beta\alpha(A\cup B)) = \beta\alpha((S^\mu(h))^*(A\cup B))$.

Observemos la tercera condición:

$$\begin{aligned}
(x_1,x_2)\in (S^\mu(h))^*(\alpha(A)) &\Leftrightarrow S^\mu(h)(x_1,x_2)\in\alpha(A)\\
&\Leftrightarrow S^\mu(h)(x_1,x_2)\in v(a)\\
&\Leftrightarrow (h^*(x_1),h^*(x_2))\in v(a)\\
&\Leftrightarrow a\notin h^*(x_2)\\
&\Leftrightarrow h(a)\notin x_2\\
&\Leftrightarrow (x_1,x_2)\in v(h(a))\\
&\Leftrightarrow (x_1,x_2)\in \alpha(u(h(a)))\\
&\Leftrightarrow (x_1,x_2)\in \alpha((S^\mu(h))^*(u(a))) = \alpha((S^\mu(h))^*(A)).
\end{aligned}$$

Así, $(S^\mu(h))^*(\alpha(A)) = \alpha(S^\mu(h))^*(A)$.

Para observar que $f$ es continua, del primer resultado se tiene que $(S^\mu(h))^*(u(a)) = u(h(a))$, entonces $(S^\mu(h))^*(cu(a)) = cu(h(a))$ y del tercer resultado $(S^\mu(h))^*(\alpha(u(a))) = \alpha u(h(a))$, con lo cual $(S^\mu(h))$ devuelve sub-básicos es sub-básicos y por lo tanto es continua. Tenemos entonces que $(S^\mu(h))\in [S^\mu(M), S^\mu(L)]_{\mathcal{W}}$.

Además, por el comportamiento de la imagen recíproca es fácil observar que $S^\mu(g\circ h) = S^\mu(h)\circ S^\mu(g)$ y que $S^\mu(1_L) = 1_{S^\mu(L)}$.

Sea $f\in [X,Y]_{\mathcal{Q}}$. Por las condiciones dadas a $f$ ya se tiene que $E(f) = f^*$ es un homomorfismo de $E(Y)$ en $E(X)$, así que basta ver que se cumple la condición para ser acotado, pero esto es claro pues $f^*(\emptyset) = \emptyset$ y $f^*(Y) = X$.

De lo anterior se concluye que $E(f)\in [E(Y), E(X)]_{\mathcal{R}_0^1}$. Además, por el comportamiento de la imagen recíproca, es fácil observar que $E(g\circ f) = E(f)\circ E(g)$ y que $E(1_X) = 1_{E(X)}$.

$\square$

**Proposición 4.20.** El funtor $S^\mu : \mathcal{R}_0^1 \to \mathcal{W}$ es una coequivalencia.

*Demostración.* Basta mostrar que los siguientes diagramas conmutan para todo $L, M \in Obj(\mathcal{R}_0^1)$, para todo $h \in [L, M]_{\mathcal{R}_0^1}$, para todo $X, Y \in Obj(\mathcal{W})$ y para todo $f \in [X, Y]_{\mathcal{W}}$.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "u_L"] \arrow[d, "h"'] & E(S^\mu(L)) \arrow[d, "E(S^\mu(h))"] \\ M \arrow[r, "u_M"] & E(S^\mu(M)) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\gamma_L"] \arrow[d, "f"'] & S^\mu(E(X)) \arrow[d, "S^\mu(E(f))"] \\ Y \arrow[r, "\gamma_Y"] & S^\mu(E(Y)) \end{tikzcd}$$

Diagrama izquierdo: Sea $a \in L$.

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) \in E(S^\mu(h))(u_L(a)) &\Leftrightarrow (x_1, x_2) \in (S^\mu(h))^*(u_L(a)) \\ &\Leftrightarrow (x_1, x_2) \in u_M(h(a)). \end{aligned}$$

Es decir, $(E(S^\mu(h)) \circ u_L)(a) = (u_M \circ h)(a)$. Como esto ocurre para todo $a \in L$ entonces $E(S^\mu(h)) \circ u_L = u_M \circ h$. Por lo tanto el diagrama izquierdo conmuta.

Diagrama derecho: Sea $x \in X$,

$$S^\mu(E(f))(\gamma_X(x)) = S^\mu(E(f))(\gamma_1(x), \gamma_2(x)) = ((E(f))^*(\gamma_1(x)), (E(f))^*(\gamma_2(x))).$$

Como se tienen dos componentes, es preferible estudiar cada componente por separado.

$$\begin{aligned} A \in (E(f))^*(\gamma_1(x)) &\Leftrightarrow (E(f))(A) \in \gamma_1(x) \\ &\Leftrightarrow f^*(A) \in \gamma_1(x) \\ &\Leftrightarrow x \in f^*(A) \\ &\Leftrightarrow f(x) \in A \\ &\Leftrightarrow A \in \gamma_1(f(x)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \in (E(f))^*(\gamma_2(x)) &\Leftrightarrow (E(f))(A) \in \gamma_2(x) \\ &\Leftrightarrow f^*(A) \in \gamma_2(x) \\ &\Leftrightarrow x \notin \alpha(f^*(A)) \\ &\Leftrightarrow x \notin f^*(\alpha(A)) \\ &\Leftrightarrow f(x) \notin \alpha(A) \\ &\Leftrightarrow A \in \gamma_2(f(x)). \end{aligned}$$

De lo anterior $(S^\mu(E(f) \circ \gamma_X)(x) = (\gamma_1(f(x)), \gamma_2(f(x))) = (\gamma_Y \circ f)(x)$. Como esto ocurre para todo $x \in X$ el diagrama derecho conmuta.

□

# Capítulo 5

# Relaciones con las representaciones de Stone, Priestley y Urquhart

En este capítulo se mostrarán brevemente las principales relaciones que existen entre las dos representaciones trabajadas durante el texto, la representación primordial y la representación de Allwein-Hartonas, y las representaciones nombradas en la introducción, la representación de Stone, la representación de Priestley y la representación de Urquhart.

Para ello veremos una forma de recuperar la representación de Urquhart y la representación de Priestley a partir de la representación de Allwein-Hartonas. Y de forma análoga, la forma de observar la representación de Stone a partir de la representación primordial.

En este punto es importante recordar que el principal objetivo de este texto ha sido construir representaciones topológicas de retículos que no utilicen el axioma de elección. Pero las representaciones precedentes, si utilizan (y muy frecuentemente) dicho axioma, por lo tanto para poder recuperar a estas representaciones desde las dos que estudiamos es necesario aceptar el axioma de elección.

La principal diferencia entre la representación de Urquhart y representación de Allwein-Hartonas, es el uso de parejas filtro-ideal maximales en vez de las parejas filtro-ideal. Dado un retículo, una pareja filtro-ideal $(F, I)$ se dice maximal, si no existe otra pareja $(F', I')$ tal que $F \subseteq F'$ e $I \subseteq I'$.

Si al conjunto de las parejas filtro-ideal maximales de un retículo $L$ lo notamos por $M(L)$, es claro que, $M(L) \subseteq S(L)$. Por lo tanto se puede definir $\overline{u} : L \to M(L)$ y $\overline{v} : L \to M(L)$ por medio de $\overline{u}(a) = u(a) \cap M(L)$ y $\overline{v}(a) = v(a) \cap M(L)$. Es claro que $\overline{u}(a \wedge b) = \overline{u}(a) \cap \overline{u}(b)$ y $\overline{v}(a \vee b) = \overline{v}(a) \cup \overline{u}(b)$. Lo que no es evidente, es que $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son inyectivas.

Es acá donde el axioma de elección hace su aparición. Pues con dicho axioma (con el lema de Zorn) se puede mostrar el teorema del ideal casi primo, generalización del teorema del ideal primo usado en retículos distributivos. Este teorema nos asegura que dado un retículo, $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son inyectivas. Con esto, se tiene que $Im\,\overline{u}$ e $Im\,\overline{v}$ son isomorfas a $L$.

Para recuperar $Im\,\overline{u}$ a partir de $M(L)$, primero se puede observar que $M(L)$ es un conjunto doblemente pre-ordenado, y por lo tanto se pueden usar las funciones $\alpha$ y $\beta$ y además se puede hablar de subconjuntos $\beta\alpha$-estables. Por otro lado, como $M(L) \subseteq S(L)$ entonces se puede tomar a $M^{\mu}(L)$ como sub-espacio de $S^{\mu}(L)$. Revisando [10] o realizando los mismos procedimientos del capítulo 4 (desarrollos que son más fáciles por tener la condición de maximalidad), se observa que $Im\,\overline{u}$ se recupera de $M^{\mu}(L)$ tomando los subconjuntos $\beta\alpha$-estables, cerrados y $\alpha$-abiertos[1], es decir, las mismas condiciones para recuperar a $Im\,u$ de $S^{\mu}(L)$.

Así pues la representación de Urquhart, puede ser recuperada de la representación de Allwein-Hartonas trabajando sobre un sub-espacio apropiado. Por otra parte, en la sección 2 de [10], Urquhart muestra que su representación generaliza a la de Priestley, pues en el caso distributivo, las parejas filtro-ideal maximales quedan determinadas totalmente por el filtro (o por el ideal). Aunque se podría pensar que la representación de Allwein-Hartonas también generaliza a la representación de Priestley, no es el caso, pues los espacios en la representación de Priestley siempre son $T_2$ mientras que los espacios en la representación de Allwein-Hartonas, nunca son $T_2$.

Pero, por lo anterior, sí se tiene que en el caso distributivo, en $S^{\mu}(L)$ se puede obtener el sub-espacio $M^{\mu}(L)$ el cual es homeomorfo al espacio obtenido por medio de la representación de Priestley.

Por otra parte, la restricción de trabajar sobre $M(L)$ también puede ser considerada en la representación primordial. Así, $M^{\tau}(L)$ es un sub-espacio de $S^{\tau}(L)$ y se puede recuperar a $Im\,\overline{v}$ a partir de $M^{\tau}(L)$ tomando los sub-conjuntos $\alpha\beta$-estables y abierto-compactos, tal vez salvo $\emptyset$. Esta representación es equivalente a la trabajada por Ríos en [8].

Como es de esperarse por los resultados anteriores, la representación primordial no es una generalización de la representación de Stone. Pero en cambio, la representación de Ríos, sí lo es, y por lo tanto, en el caso en que $L$ sea distributivo, existe un sub-espacio de $S^{\tau}(L)$ que es homeomorfo al espacio trabajado en la representación de Stone.

Se puede representar la relación entre las diferentes representaciones por el siguiente diagrama:

[1] Al revisar [10], se debe tener en cuenta que las funciones $l$ y $r$ usadas por Urquhart, aunque análogas a $\alpha$ y $\beta$, son ligeramente diferentes, por lo cual al final la condición de ser $\alpha$-abierto en su caso cambia por ser cerrado.

$$\begin{tikzcd}
\text{Sin axioma de elección} & \text{Primordial} & & \text{Allwein-Hartonas} \\
 & & \text{sub-espacio} & \\
\text{No distributivo} & \text{Ríos} \arrow[uu, hook] & & \text{Urquhart} \arrow[uu, hook] \\
 & & \text{generalización} & \\
\text{Distributivo} & \text{Stone} \arrow[uu] & & \text{Priestley} \arrow[uu] \\
 & \text{No acotado} & & \text{Acotado}
\end{tikzcd}$$

Donde la fila inferior son representaciones para el caso distributivo, la fila superior son representaciones que no usan el axioma de elección y la segunda fila son generalizaciones de la representación inferior y pueden obtenerse de las representaciones superiores tomando sub-espacios. La columna derecha son representaciones para el caso acotado, mientras que la columna izquierda no tiene restricciones en este aspecto. La columna izquierda no es una generalización de la columna derecha, pero si hay una relación, las dos representaciones de la misma fila tienen el mismo conjunto base para sus respectivos espacios, pero en la columna derecha se usan topologías más finas.

# Bibliografía


[1] Acosta, L., *Temas de teoría de retículos*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2016.

[2] Allwein, G. and Hartonas, C., *Duality for Bounded Lattices*, 1993.

https://www.researchgate.net/publication/2667566_Duality_for_Bounded_Lattices_IULG_Preprint

[3] Arévalo, A.F., *Representación topológica de retículos distributivos al estilo Priestley* , Trabajo de grado de la carrera de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, 2016.

[4] Howard, P. and Rubin, J. E., *Consequences of the Axiom of Choice*, Mathematical Surveys and Monographs, Volume 59, 1998.

[5] Davey, B.A. and Priestley, H.A., *Introduction to Lattices and Order*, Segunda edición, Cambridge University Press, 2002.

[6] Mancera, M.Y., *Dualidad de Urquhart: una extensión de la dualidad de Priestley al contexto de los retículos acotados*,Tesis de Magíster, Universidad Nacional de Colombia, 2017.

[7] Priestley, H., *Representation of distributive lattices by means of ordered Stone spaces*, Bull. London Math.Soc. 2(1970),186-190.

[8] Ríos, A., *Sobre la naturaleza bitopológica de la teoría de retículos*, Trabajo de grado de la carrera de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, 2017.

[9] Stone, M.H., *Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics*, Časopis pěst. mat. fys., 67(1938), No. 1, 1-25.

[10] Urquhart, A., *A topological representation theory for lattices*, Algebra Universalis, 8(1978), No. 1, 45-58.