Existencia de solución débil para un sistema $(n+1)\times(n+1)$ de tipo Keyfitz-Kranzer.

FREDY ALBERTO RAMÍREZ TRISTANCHO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.

5 DE OCTUBRE DE 2018

Existencia de solución débil para un sistema $(n+1)\times(n+1)$ de tipo Keyfitz-Kranzer.

FREDY ALBERTO RAMÍREZ TRISTANCHO

TRABAJO FINAL PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE
MAGISTER EN CIENCIAS MATEMÁTICAS.

DIRECTOR
JUAN CARLOS HERNÁNDEZ RINCÓN.
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.

5 DE OCTUBRE DE 2018

Título en español
Existencia de solución débil para un sistema $(n+1)\times(n+1)$ de tipo Keyfitz-Kranzer.

Title in English
Existence of weak solution to a $(n+1)\times(n+1)$ system of Keyfitz-Kranzer type.

Resumen: Presentamos una prueba de existencia de solución global entrópica para un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de tipo Keyfitz-Kranzer, bajo condiciones bastante generales sobre el flujo y las variables involucradas, utilizando principalmente el método de compacidad compensada.

Abstract: We present a existence proof of global entropic solution for a differential partial equations system of Keyfitz-Kranzer type, under fairly general conditions over the flow and variables involucrates, using mainly the compensed compactness method.

Palabras clave: Solución Débil; Compacidad compensada; Sistema de tipo Keyfitz-Kranzer.

Keywords: Weak Solution; Compensed compactness; Keyfitz-Kranzer type System.

Nota de aceptación

Trabajo de tesis

Jurado

Director
Juan Carlos Hernández Rincón

Bogotá, D.C., 5 de octubre de 2018

Dedicado a

Para Lucí...
...haberte conocido fue maravilloso.
tu esencia vive y palpita en nuestro corazón.

Agradecimientos

En primer lugar quiero expresar mi agradecimiento a los profesores Juan Carlos Hernández y Leonardo Rendón, por su acompañamiento durante los últimos meses, su apoyo y coordinación fueron fundamentales.
A mi familia, por su inagotable cariño y comprensión.
A mis compañeros por ser fuente de inspiración y excelentes personas.
Y por último, a cada persona que ha influido en mi formación personal y profesional, espero no decepcionar.

Índice general

Introducción

El problema de Cauchy para un sistema de leyes de conservación en un espacio unidimensional toma la forma

$$u_t(x,t) + f(u(x,t))_x = 0 \tag{0.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{0.2}$$

donde $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ se denomina el vector de cantidades conservadas y $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ es una función suave denominada flujo. Cuando los valores propios de la matriz Jacobiana de $f(u)$ son todos reales se dice que el sistema es hiperbólico, si adicionalmente todos son distintos el sistema es estrictamente hiperbólico y si algunos de ellos coinciden sobre algún subconjunto no vacío de $\mathbb{R} \times [0,\infty)$, el sistema es llamado no estrictamente hiperbólico.
Muchos fenómenos físicos pueden ser caracterizados como leyes de conservación, en particular, en teoría de elasticidad, surge el sistema 2×2:

$$\begin{cases} u_t + (u\phi(u,v))_x = 0 \\ v_t + (v\phi(u,v))_x = 0 \end{cases} \tag{0.3}$$

el cual modela la propagación de las ondas delantera y transversa en una cuerda elástica estrecha que se mueve en el plano [17]. Este fue uno de los primeros sistemas no estrictamente hiperbólicos que surgieron como modelos físicos y fue interesante debido a que su estudio motivó la extensión de la teoría clásica de sistemas hiperbólicos de leyes de conservación que se enfocaba al rededor del caso estrictamente hiperbólico. En [17] B. Keyfitz y H. Kranzer modelan el fenómeno de la cuerda elástica y prueban la existencia de solución débil del problema de Riemann (es decir, el problema de Cauchy para el sistema (0.3) con condición inicial una función constante a trozos).
Más sistemas con la forma y características de (0.3) con dos o más ecuaciones fueron propuestos como modelo de varios otros fenómenos físicos como el flujo de agua en una reserva de petróleo [12] , el modelo macroscópico de flujo de tráfico de automóviles [1], y también aparece entre otras en áreas como la magnetohidrodinámica [13].

Un sistema $n \times n$ de tipo Keyfitz-Kranzer en un espacio unidimensional es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de la forma

$$(u_i)_t + (u_i\phi(u_1, \ldots, u_n))_x = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{0.4}$$

Cuando la función ϕ está escrita en forma simétrica, es decir, $\phi(u_1, \ldots, u_n) = f(|u|)$, donde $|u|$ es el módulo de $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función escalar suave, entonces el sistema se dice simétrico de tipo Keyfitz-Kranzer. El problema de Cauchy para esta clase de sistemas ha sido bien estudiado en [8, 9, 13, 18, 23].

En este trabajo estudiaremos un sistema de tipo Keyfitz-Kranzer pero no exactamente escrito de la forma (0.4), bajo un cambio de variables, podemos reescribirlo convenientemente como el sistema $(n+1) \times (n+1)$:

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho\phi(\rho, w_1, w_2, \ldots, w_n))_x = 0, \\ (\rho w_i)_t + (\rho w_i \phi(\rho, w_1, w_2, \ldots, w_n))_x = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{0.5}$$

donde asumiremos que ϕ es una función en $C^1(\mathbb{R}^{n+1})$.
Estaremos concentrados en demostrar la existencia de solución débil entrópica global del problema de Cauchy para (0.5) con dato inicial medible y acotado

$$(\rho(x,0), w_i(x,0)) = (\rho_0(x), w_{i_0}(x)), \quad \rho_0(x) \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{0.6}$$

Escritos de la forma (0.5) podemos encontrar varios ejemplos de sistemas no simétricos, aquí los resultados existentes se concentran sobre funciones ϕ muy particulares.
Cuando $w_i = u$ y $\phi(\rho, w_1, w_2, \ldots, w_n) = u$, para todo $i = 1, \ldots, n$. tenemos el sistema de dinámica de gases de tipo presurizado, el cual es estudiado en [28, 3, 4, 11].

Cuando $n = 1$, $w_1 = u$ y $\phi(\rho, w_1, w_2, \ldots, w_n) = \Phi(w_1, w_2, \ldots, w_n) - P(\rho)$, el sistema (0.5) fue introducido como un modelo macroscópico para flujo de tráfico por Aw y Rascle [1]. En este caso, la existencia global de soluciones entrópicas acotadas del problema de Cauchy (0.5)-(0.6) es obtenida bajo algunas condiciones extra sobre la función $P(\rho)$ [1, 15, 21].

Estudiaremos en detalle la existencia de solución global entrópica del problema de Cauchy (0.5)-(0.6), pero bajo condiciones muy generales sobre la función suave ϕ, siguiendo el desarrollo hecho en [22].

El plan para este trabajo es el siguiente: El capítulo 1. reúne la teoría preliminar, definiciones y resultados que se utilizarán a lo largo del documento y que se incluyen con el fin de que este sea en lo posible un escrito auto-contenido. El capítulo 2. se concentrará en el estudio del sistema parabólico relacionado a (0.5) mediante la introducción de un término viscoso, con el fin de generar soluciones aproximadas. El capítulo 3. ocupará el resultado principal del trabajo, que será mostrar la existencia de solución para el sistema (0.5) usando el método de la compacidad compensada para encontrar una subsucesión de soluciones aproximadas que converja a una solución débil, además se tendrá que esta solución es entrópica. Finalmente, en el capítulo 4. se mostrarán algunas aplicaciones del teorema 7, entre ellas una aplicación al sistema de flujo de tráfico propuesto por Aw y Rascle [1].

CAPÍTULO 1

Preliminares

En este capítulo se introducen algunas definiciones y teoremas que se usaran más adelante. Aquí se omitirán las demostraciones aduciendo que se trata de resultados en cierto sentido clásicos de Teoría de Ecuaciones Diferenciales Parciales, Análisis Funcional y Espacios de Sobolev y cuyo estudio detallado se sale del propósito y alcance de este trabajo. Sin embargo, se remite al lector a la respectiva bibliografía.

1.1. Leyes de conservación

1.1.1. Leyes de conservación escalar

Definición 1. *Una ley de conservación escalar es una ecuación diferencial parcial de primer orden de la forma*

$$u_t + f(u)_x = 0 \tag{1.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}$ es una variable unidimensional y $t \in [0, +\infty)$ representa el tiempo.
Aquí, $u = u(x,t)$ es llamada la cantidad conservada y f es el flujo.

Considerando el problema de Cauchy con dato inicial

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{1.2}$$

Cuando la función f es no lineal, una característica distinguida de la solución de este problema es la pérdida de regularidad, esto significa que no se pueden encontrar funciones en el espacio $C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ que satisfagan la ecuación en cuestión, aún cuando el dato inicial sea suave, pues la solución puede desarrollar choques en tiempo finito (ver [5]).
Por eso, las soluciones globales deben ser consideradas en un espacio de funciones discontinuas interpretando a (1.1) en el sentido distribucional, llegando a la siguiente definición:

Definición 2. *Sea $1 < p \leq \infty$. Considérese la ley de conservación escalar $u_t + f(u)_x = 0$, y el dato inicial $u(x,0) = u_0(x)$ acotado en $L^p(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$. Una solución débil para el problema* *de Cauchy es una función $u(x,t) \in L^p(\mathbb{R} \times [0,+\infty))$ tal que*

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (u\phi_t + f(u)\phi_x) dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} (u_0 \phi) dx = 0 \tag{1.3}$$

para toda $\phi \in C_0^1(\mathbb{R} \times (0,+\infty))$.

1.1.2. Sistemas hiperbólicos de leyes de conservación

Definición 3. *Un sistema $n \times n$ de leyes de conservación es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de la forma:*

$$u_t + F(u)_x = 0 \tag{1.4}$$

donde $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty)$, con la diferencia de que ahora $u = (u_1, \ldots, u_n)^T$ representa un vector en $\mathbb{R}^n$ y $F = (F_1, \ldots, F_n)^T$ es una función vectorial tomando valores en $\mathbb{R}^n$.

Por la regla de la cadena, $F(u)_x = DF(u) \cdot u_x$, donde $DF(u)$

$$DF(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial u_n} \end{pmatrix}$$

es la matriz Jacobiana de F en el punto u. Entonces se puede escribir (1.4) como

$$u_t + DF(u) \cdot u_x = 0 \tag{1.5}$$

Cuando un sistema de leyes de conservación es escrito en la forma (1.5), suele ser clasificado de la siguiente manera:

Definición 4. *Considérese un sistema de leyes de conservación en la forma (1.4). Si los valores propios de la matriz $DF(u)$ son reales para todo u, entonces se dice que el sistema es* **hiperbólico***. Si además, dichos valores propios son todos diferentes, el sistema se dice* **estrictamente hiperbólico***. Y si para algunos puntos u, hay valores propios que coinciden, entonces el sistema es llamado* **no estrictamente hiperbólico***.*

De forma análoga a como se hizo en el caso escalar, se define lo que es una solución débil para el problema de Cauchy de un sistema de leyes de conservación:

Definición 5. *Sea $1 < p \leq \infty$. Considérese el sistema (1.4) y el dato inicial $u(x,0) = u_0(x)$ acotado en $L^p(\mathbb{R} \times [0,+\infty))$. Una solución débil para el problema de Cauchy es una función vectorial $u(x,t) \in L^p(\mathbb{R} \times [0,+\infty))$ tal que*

$$\int \int_{t>0} (u\phi_t + F(u)\phi_x) dx dt + \int_{t=0} (u_o \phi) dx = 0 \tag{1.6}$$

para cada función $\phi \in C_0^1(\mathbb{R} \times (0,+\infty))$.

Cuando las discontinuidades se presentan, las soluciones débiles pueden no ser únicas, por tal razón con el fin de seleccionar una única buena solución del problema de Cauchy, debemos imponer condiciones adicionales llamadas condiciones de admisibilidad.

1.1.3. Condiciones de admisibilidad, condición de Entropía

Definición 6. *(Viscosidad Nula) Una solución u de (1.4) se dice admisible en el sentido de la viscosidad nula, si existe una sucesión de soluciones u^ϵ para*

$$u_t + F(u^\epsilon)_x = \epsilon u^\epsilon_{xx} \tag{1.7}$$

la cual converge débil en L^p (débil $\star$ en L^∞) a u, cuando $\epsilon \to 0^+$.

Definición 7. *(entropía y flujo de entropía) Una función continuamente diferenciable $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es llamada una entropía para el sistema de leyes de conservación (1.4), con flujo de entropía $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si para todo $u \in \mathbb{R}^n$ se cumple*

$$D\eta(u) \cdot DF(u) = Dq(u) \tag{1.8}$$

Si adicionalmente, tenemos que η es convexa, el par (η,q) se denomina par de entropía convexa-flujo.

Una consecuencia inmediata de (1.8) es que si $u = u(x,t)$ es una solución C^1 de (1.4), entonces

$$\eta(u)_t + q(u)_x = 0$$

En efecto,

$$\eta(u)_t + q(u)_x = D\eta(u)u_t + Dq(u)u_x = D\eta(u)(-DF(u)u_x) + Dq(u))u_x = 0$$

sin embargo lo anterior no es cierto cuando $u = u(x,t)$ es solamente solución débil. Si tenemos un par de entropía convexa-flujo para el sistema podemos deducir la siguiente condición de admisibilidad:

Definición 8. *(Condición de entropía) Una solución débil del sistema $u_t + F(u)_x = 0$ es admisible en el sentido de la entropía si satisface:*

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\eta(u)\phi_t + q(u)\phi_x)dxdt \geq 0, \tag{1.9}$$

para cualquier par (η,q) de entropía convexa-flujo del sistema $u_t + F(u)_x = 0$ y para cualquier $\phi \in C^1_0(\mathbb{R} \times (0,\infty))$, con $\phi \geq 0$.

Esta condición es equivalente a decir que

$$\eta(u)_t + q(u)_x \leq 0 \tag{1.10}$$

en el sentido de las distribuciones. Finalmente, se conocen otras condiciones de admisibilidad de acuerdo a la naturaleza de las soluciones. Entre ellas tenemos la condición de admisibilidad de Liu y la condición de admisibilidad de Lax (ver [5]).

1.1.4. Invariantes de Riemann

Definición 9. *Dado un sistema de leyes de conservación $u_t + F(u)_x = 0$, funciones W_i tales que*

$$W_i(u)DF(u) = \lambda_i(u)W_i(u) \tag{1.11}$$

son llamadas invariantes de Riemann del sistema. En otras palabras, son vectores propios a izquierda de la matriz Jacobiana $DF(u)$.

1.2. El principio del máximo

A la hora de generar estimativas para la solución de un sistema parabólico el principio del máximo juega un rol fundamental.

Definición 10. *Un operador diferencial de la forma*

$$L[u] = a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1.12}$$

es llamado parabólico en un punto (x,t) si

$$a(x,t) > 0.$$

El operador L es uniformemente parabólico en un dominio Ω del plano $x-t$, si existe una constante positiva μ tal que

$$a(x,t) \geq \mu$$

para todo (x,t) en Ω.

El siguiente teorema y corolario han sido adaptados de un teorema más general que se encuentra en [26]

Teorema 1. *Sea u una solución no constante de*

$$L[u] = a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$$

en $D \times (0,T)$, donde D es un subconjunto abierto convexo de $\mathbb{R}$ y $T < \infty$, y L es un operador uniformemente parabólico con coeficientes acotados $a(x,t)$ y $b(x,t)$. Entonces u puede alcanzar su máximo solo en $t = 0$ o sobre ∂D.

A partir del anterior resultado, es posible argumentar lo siguiente:

Corolario 1. *Con las condiciones del anterior teorema. Supongamos que tenemos*

$$u(x,0) < M, \qquad y \quad u(x,t) < M \quad si \quad x \in \partial D.$$

Entonces, $u(x,t) < M$ en $D \times (0,T)$.

La acotación del coeficiente $b(x,t)$ no es estrictamente necesaria, basta con suponer que $b(x,t)$ es acotada sobre cada bola cerrada contenida en $D \times (0,T)$, además el dominio D no necesariamente debe ser acotado (ver [24]).

1.3. Algunos resultados de Análisis funcional y Espacios de Sobolev

Teorema 2. *(Teorema de punto fijo de Brouwer-Schauder) Sea E un espacio de Banach, sea M un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de E. Sea f una función que aplica M en si mismo tal* *que*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \theta \|x - y\|, \qquad x, y \in M, \tag{1.13}$$

para algún $\theta < 1$. *Entonces existe un único* $x_0 \in M$ *tal que*

$$f(x_0) = x_0,$$

(ver [25]).
Es oportuno introducir los siguientes espacios de funciones:

Definición 11. *Sea* Ω *un conjunto abierto en* $\mathbb{R}^n$, $m > 0$ *un entero y sea* $1 \leq p \leq \infty$. *El* **espacio de Sobolev** $W^{m,p}(\Omega)$ *es definido por:*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) | D^\alpha u \in L^p(\Omega), \quad \text{para todo } |\alpha| \leq m\}. \tag{1.14}$$

Definición 12. *Se define el espacio* $W_0^{m,p}(\Omega)$ *como la cerradura de* $C_0^\infty(\Omega)$ *en el espacio* $W^{m,p}(\Omega)$, *y el espacio* $W^{-m,p}(\Omega)$ *como el dual de* $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Cuando $p = 2$ el espacio $W^{m,2}(\Omega)$ se suele denotar por $H^m(\Omega)$. El subíndice loc, indica que se están considerando funciones locamente integrables (ver [2] y [16]).

Definición 13. *(Espacio de Medidas de Radon) Sea* Ω *un conjunto abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$ *, consideremos el espacio* $E = C(\overline{\Omega})$, *con su norma* $\|u\| = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|$. *Su espacio dual, denotado por* $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$, *es llamado el espacio de medidas de Radon sobre* $\overline{\Omega}$.

Identificamos $L^1(\Omega)$ con un subespacio de $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$. Para hacer esto introducimos la aplicación $L^1(\Omega) \to \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ definida como sigue: Dada $f \in L^1(\Omega)$, la aplicación $u \in C(\overline{\Omega}) \mapsto \int_\Omega f u dx$ es un funcional lineal continuo sobre $C(\overline{\Omega})$. Ya que $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ es el espacio dual del espacio separable $C(\overline{\Omega})$, este tiene propiedades de compacidad en la topología débil $\star$. En particular, si (f_n) es una sucesión acotada en $L^1(\Omega)$, existe una subsucesión (f_{n_k}) y una medida de Radon μ tal que $f_{n_k} \to \mu$ en la topología débil $\star$ (ver [6]).

Teorema 3. *Para cada* $1 \leq \alpha < 1* = \frac{n}{n+1}$ *se tiene la siguiente inmersión compacta.*

$$\mathcal{M}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,\alpha}(\Omega), \tag{1.15}$$

(ver [10]).

1.4. Compacidad compensada

Lema 1. *(Lema de divergente-rotacional) Sea* Ω *un dominio abierto en* $\mathbb{R}^n$. *Con* $\epsilon > 0$ *denotando un parámetro que toma sus valores en una sucesión que tiende a cero, supongamos que*

$$D^\epsilon \rightharpoonup D \text{ en } (L^2(\Omega))^2, \qquad E^\epsilon \rightharpoonup E \text{ en } (L^2(\Omega))^2 \tag{1.16}$$

$$\{divD^\epsilon\}_{\epsilon>0}, \text{ es pre-compacto en } H^{-1}_{loc}(\Omega) \tag{1.17}$$

$$\{rotE^\epsilon\}_{\epsilon>0}, \text{ es pre-compacto en } H^{-1}_{loc}(\Omega) \tag{1.18}$$

entonces existen subsucesiones de D^ϵ *y* E^ϵ *denotadas de la misma forma tales que*

$$D^\epsilon \cdot E^\epsilon \to D \cdot E \quad \text{en el sentido de las distribuciones.} \tag{1.19}$$

Un resultado que será útil a la hora de garantizar las hipótesis de compacidad del anterior lema es el siguiente:

Lema 2. *(Lema de Murat) Sea* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *una sucesión acotada en* $W_{loc}^{-1,r}(\Omega)$ *para algún* r*, con* $2 < r \leq \infty$*, tal que* $f_k = g_k + h_k$ *(para* $k = 1, 2, \ldots$*) donde* $\{g_k\}$ *es una sucesión pre-compacta en* $H_{loc}^{-1}(\Omega)$ *y* $\{h_k\}$ *es una sucesión acotada en* $\mathcal{M}(\Omega)$*. Entonces,* $\{f_k\}$ *es pre-compacta en* $H_{loc}^{-1}(\Omega)$*.*

Para un desarrollo completo de las demostraciones (ver [10]).
El anterior resultado es conocido como el Lema de Murat clásico, la siguiente es una generalización (ver [7, 10]).

Teorema 4. *Sea* $1 < q \leq p < r$*. Entonces*

$$\{\textit{compacto en } W_{loc}^{-1,q}(\Omega)\} \cap \{\textit{acotado en } W_{loc}^{-1,r}(\Omega)\} \subset \{\textit{compacto en } W_{loc}^{-1,p}(\Omega)\}. \quad (1.20)$$

CAPÍTULO 2

Existencia de solución viscosa global

Consideremos el problema de Cauchy para el sistema de leyes de conservación (0.1)

$$u_t(x,t) + f(u(x,t))_x = 0$$

con dato inicial (0.2)

$$u(x,0) = u_0(x)$$

supondremos que $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ donde cada f_i es una función suave sobre $\mathbb{R}^n$, es decir $f_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$ con $i = 1, \ldots, n$.
Utilizaremos el método de viscosidad nula, para esto perturbaremos el sistema (0.1) mediante la introducción de un término viscoso de la siguiente manera:

$$u_t^\epsilon(x,t) + f(u^\epsilon(x,t))_x = \epsilon u_{xx}^\epsilon \tag{2.1}$$

donde $\epsilon > 0$ es una constante.
En la sección 2.1. estudiaremos el problema de Cauchy para el sistema de ecuaciones parabólico (2.1) con dato inicial medible y acotado

$$\begin{aligned} u^\epsilon(x,0) &= u_0(x) \\ |u_{0_i}(x)| &\leq M, \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{2.2}$$

y demostraremos la existencia de solución local única para (2.1)-(2.2). En la sección 2.2. se muestra de que forma es posible extender la solución local a global, mediante la obtención de estimativas a-priori.
El contenido de las dos primeras secciones se puede resumir como la demostración del siguiente teorema:

Teorema 5.

1. *Para cada $\epsilon > 0$, el problema de Cauchy (2.1) con dato inicial medible y acotado (2.2) siempre tiene solución local suave $u^\epsilon(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \tau_0))$, para un tiempo pequeño $\tau_0 > 0$, el cual depende únicamente de la norma L^∞ del dato inicial $u_0(x)$, y además*

   $$|u_i^\epsilon(x,t)| \leq 2M, \quad \text{para todo } (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, \tau_0).$$

2. *Si la solución u^ϵ tiene una estimativa a-priori L^∞, es decir, $\|u^\epsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq c(\epsilon, T, \|u_0\|_{L^\infty})$ para cada $t \in [0,T]$, entonces la solución existe sobre $\mathbb{R} \times [0,T]$.*

En la sección 2.3. se harán algunos comentarios acerca de como podemos aplicar los resultados del teorema 5 al problema (0.5)-(0.6) y finalmente en la sección 2.4. obtendremos algunas de las estimativas a-priori necesarias para garantizar la existencia de solución global, así como algunas otras estimativas que nos serán útiles más adelante.

2.1. Existencia Local

El objetivo de esta sección será probar la parte (1) del teorema (5), esto es, demostrar que: Para cada $\epsilon > 0$, el problema de Cauchy (2.1) con dato inicial medible y acotado(2.2) siempre tiene solución local suave $u^{\epsilon}(x,t) \in C^{\infty}(\mathbb{R} \times (0, \tau_0))$, para un tiempo pequeño τ_0, el cual depende únicamente de la norma L^{∞} del dato inicial $u_0(x)$.

Demostración. Empezaremos la demostración introduciendo el siguiente espacio de funciones: Sea $\tau > 0$,

$$B = \{u : \mathbb{R} \times [0,\tau] \to \mathbb{R}^n : u_i \in C^{\infty}(\mathbb{R} \times (o,\tau)) \cap L^{\infty}(\mathbb{R} \times [0,\tau]), \quad i = 1,2,\ldots,n.\}$$

Para $u \in B$ definimos la norma:

$$\|u\|_B = \|u_1\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}\times[0,\tau])} + \|u_2\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}\times[0,\tau])} + \cdots + \|u_n\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}\times[0,\tau])} \tag{2.3}$$

donde u_i es la componente i-ésima de la función u. El espacio $(B, \|\cdot\|_B)$ es de Banach. Consideremos el subespacio cerrado, acotado y convexo de B

$$B_{\tau} = \{u : \mathbb{R} \times [0,\tau] \to \mathbb{R}^n : u_i \in C^{\infty}(\mathbb{R} \times (o,\tau)), \|u_i(x,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}\times[o,\tau])} \leq 2M, \quad i = 1,2,\ldots,n.\}$$

Sea $K_{\epsilon}(x,t)$ la solución fundamental del operador $\frac{\partial}{\partial t} - \epsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, es decir

$$K_{\epsilon}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon t}} e^{\frac{-x^2}{4\epsilon t}}$$

para $K_{\epsilon}(x,t)$ se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_{\epsilon}(x,t)dx = 1 \qquad \text{para todo} \quad t > 0. \tag{2.4}$$

y

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial x} K_{\epsilon}(x-y,t-s) \right| dyds = 2\sqrt{\frac{t}{\pi\epsilon}}. \tag{2.5}$$

Ahora, si $u = (u_1, \ldots, u_n)$ es solución de (2.1)-(2.2), entonces sus componentes se pueden escribir como:

$$u_i(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\epsilon}(x-y,t)u_{i0}(y)dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}(K_{\epsilon}(x-y,t-s))f_i(u(y,s))dyds. \tag{2.6}$$

Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} S :B_{\tau} &\to B \\ u &\mapsto S(u) = (S_1(u), S_2(u), \ldots, S_n(u)) \end{aligned} \tag{2.7}$$

donde

$$
\begin{aligned}
S_i(u)(x,t) =& u_i(x,t) \\
=& \int_{-\infty}^{\infty} K_\epsilon(x-y,t)u_{i0}(y)dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}(K_\epsilon(x-y,t-s))f_i(u(x,s))dyds.
\end{aligned}
$$

Observe que un punto fijo de la aplicación S_i es una solución de (2.6). Así que un punto fijo de S es solución de (2.1)-(2.2). Queremos demostrar que existe un $\tau_0 > 0$ tal que S sea una aplicación contractiva sobre el espacio B_{τ_0}.

Si u y v están en B_τ, entonces ya que las f_i son localmente lipschitz continuas, existen constantes positivas L y k tales que

$$
|f_i(u)| \leq L \tag{2.8}
$$

y

$$
|f_i(u) - f_i(v)| \leq k(|u_1 - v_1| + \cdots + |u_n - v_n|) \tag{2.9}
$$

para cada $i = 1, \ldots, n$.
Veamos que debe cumplir τ_0 para que S aplique B_{τ_0} en si mismo. Por (2.4),(2.5) y (2.8) tenemos

$$
\begin{aligned}
|S_i(u)(x,t)| &\leq M + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial x}(K_\epsilon(x-y,t-s)) \right| |f_i(u)|ds \\
&\leq M + 2L\sqrt{\frac{t}{\pi\epsilon}}.
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

Así que la primera condición que debemos imponer sobre τ_0 es que

$$
2L\sqrt{\frac{\tau_0}{\pi\epsilon}} \leq M.
$$

Por otro lado, en vista de la desigualdad (2.9), tenemos

$$
|S_i(u) - S_i(v)| \leq \left(2k\sqrt{\frac{t}{\pi\epsilon}}\right) (\|u_1 - v_1\|_{L^\infty} + \cdots + \|u_n - v_n\|_{L^\infty})
$$

si sumamos a lo largo de $i = 1, \ldots, n$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\|S(u) - S(v)\|_B &\leq n\left(2k\sqrt{\frac{t}{\pi\epsilon}}\right) (\|u_1 - v_1\|_{L^\infty} + \cdots + \|u_n - v_n\|_{L^\infty}) \\
&= n\left(2k\sqrt{\frac{t}{\pi\epsilon}}\right) \|u - v\|_B.
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

De este modo si escogemos τ_0 tal que

$$
n\left(2k\sqrt{\frac{\tau_0}{\pi\epsilon}}\right) < 1
$$

entonces (2.11) prueba que S en efecto es una aplicación contractiva sobre B_{τ_0}.
Podemos aplicar el teorema de punto fijo de Brouwer-Schauder para concluir que S tiene un único punto fijo en B_{τ_0}, es decir, el problema de Cauchy (2.1) con dato inicial medible

y acotado(2.2) siempre tiene solución local suave $u^\epsilon(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0,\tau_0))$ y además

$$|u_i^\epsilon(x,t)| \leq 2M, \quad \text{para todo } (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\tau_0).$$

□

2.2. Existencia Global

En esta sección se mostrará de que forma es posible extender en el tiempo la solución local que acabamos de obtener, mediante la obtención de estimativas a-priori para la solución. Más precisamente demostraremos la parte 2. del teorema 5, esto es:

Si la solución u^ϵ tiene una estimativa a-priori L^∞, es decir, $\|u^\epsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq c(\epsilon, T, \|u_0\|_{L\infty})$ para cada $t \in [0,T]$, entonces la solución existe sobre $\mathbb{R} \times [0,T]$.

Demostración. Dados $T > 0$ y $\epsilon > 0$. Suponiendo que podemos probar la existencia de una cota a-priori para la solución $u^\epsilon(\cdot,t)$ de (2.1)-(2.2), es decir una constante $c > 0$ que dependa únicamente de $\|u_0\|_{L^\infty}$ y que cuando $0 \leq t \leq T$ se tenga: $\|u^\epsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq c$. Podemos asegurar la existencia de la solución para todo tiempo t, $0 \leq t \leq T$ de la siguiente manera:
Por la parte 1 del teorema 5, podemos obtener una solución en $0 \leq t \leq \tau$, $\tau > 0$, del problema original con dato inicial $u_0^0(x) = u_0(x)$. Lo siguiente será modificar el problema tomando a $u_0^1(x) = u^\epsilon(x,\tau)$ como dato inicial para un nuevo problema y usar de nuevo la parte 1 del teorema 5 para obtener una solución sobre $\tau \leq t \leq \tau + \sigma$, donde $\sigma = \sigma(\|u^\epsilon(\cdot,\tau)\|)$. Repetimos este proceso hasta encontrar una solución sobre $\tau + \sigma \leq t \leq \tau + 2\sigma$, y así eventualmente después de un número finito de etapas encontrar una solución sobre $0 \leq t \leq T$. □

Nótese que el caso $T = \infty$ también es contemplado en el anterior razonamiento, esto implica la existencia de solución global.

2.3. Existencia de solución viscosa global para el sistema $(n+1) \times (n+1)$ de tipo Keyfitz-Kranzer.

Consideremos el sistema parabólico relacionado al sistema (0.5), generado mediante la introducción de un término viscoso:

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho\phi(\rho, w_1, w_2, \ldots, w_n))_x = \epsilon\rho_{xx}, \\ (\rho w_i)_t + (\rho w_i \phi(\rho, w_1, w_2, \ldots, w_n))_x = \epsilon(\rho w_i)_{xx}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{2.12}$$

En esta sección queremos establecer las hipótesis necesarias para poder aplicar los resultados de las dos secciones anteriores al problema de Cauchy (2.12) con dato inicial medible y acotado

$$(\rho^\epsilon(x,0), w_i^\epsilon(x,0)) = (\rho_0(x) + \epsilon, w_{i0}(x)), \quad \rho_0(x) \geq 0, i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.13}$$

Una vez se tiene la existencia de solución local, para poder extender tal solución a global, según la parte dos del teorema 5 necesitamos establecer estimaciones a-priori para las variables $\rho, w_1, w_2, \ldots, w_n$, adicionalmente, por los supuestos del teorema 5 debemos tener que las funciones

$$\begin{aligned}
f_1(\rho, w_1, \ldots, w_n) &= \rho\phi(\rho, w_1, \ldots, w_n) \\
f_2(\rho, w_1, \ldots, w_n) &= \rho w_1 \phi(\rho, w_1, \ldots, w_n) \\
&\vdots \\
f_{n+1}(\rho, w_1, \ldots, w_n) &= \rho w_n \phi(\rho, w_1, \ldots, w_n)
\end{aligned}$$

están en el espacio $C^1(\mathbb{R}^{n+1})$, es sencillo comprobar que la suavidad de estas funciones, depende de estas mismas características sobre la función $\phi(\rho, w_1, \ldots, w_n)$. De esta forma se pueden establecer hasta este momento dos supuestos fundamentales:

1. $\phi \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$.
2. Debemos ser capaces de generar estimaciones a-priori para $\rho, w_1, w_2, \ldots, w_n$.

Otra característica adicional que debemos asumir se refiere al dato incial (2.13), además de suponer que es medible y acotado, debemos tener que la variación total de los w_{i0} es acotada.

2.4. Estimativas a-priori.

Como se dijo en la sección anterior para garantizar la existencia de solución local y global del problema de Cauchy (2.12)-(2.13) debemos establecer estimativos a-priori para las variables $(\rho^\epsilon, w_i^\epsilon)$. En esta sección intentaremos encontrar estos estimados, además de varios otros estimativos que nos serán útiles más adelante.

2.4.1. Estimativo a-priori para $w_i^\epsilon(x,t)$.

Si sustituimos la primera ecuación de (2.12) en la segunda obtenemos

$$\begin{gathered}
\rho_t w_i + \rho w_{it} + (\rho\phi(\rho, w_1, \ldots, w_n))w_{ix} + (\rho\phi(\rho, w_1, \ldots, w_n))_x w_i = \epsilon(\rho_x w_i + \rho w_{ix})_x \\
\rho_t w_i + \rho w_{it} + (\rho\phi(\rho, w_1, \ldots, w_n))w_{ix} + (\epsilon\rho_{xx} - \rho_t)w_i = \epsilon(\rho_{xx} w_i + 2\rho_x w_{ix} + \rho w_{ixx}) \\
\rho(w_{it} + \phi(\rho, w_1, \ldots, w_n)w_{ix}) = 2\epsilon\rho_x w_{ix} + \epsilon\rho w_{ixx}.
\end{gathered}$$

Así,

$$w_{it} + \phi(\rho, w_1, \ldots, w_n)w_{ix} = \epsilon w_{ixx} + 2\epsilon\frac{\rho_x}{\rho}w_{ix}. \tag{2.14}$$

Podemos considerar (2.14) como una desigualdad ($\leq$,$\geq$), con respecto a la variable w_i, si podemos garantizar que el coeficiente $2\epsilon\frac{\rho_x}{\rho} - \phi(\rho, w_1, \ldots, w_n)$ es acotado sobre cualquier bola cerrada contenida en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, entonces podemos aplicar el principio del máximo y obtener la acotación

$$|w_i^\epsilon(x,t)| \leq M. \tag{2.15}$$

donde M es una constante que no depende de ϵ.
En efecto, bajo el supuesto de que $\phi \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$ podemos establecer la acotación del

coeficiente $2\epsilon\frac{\rho_x}{\rho} - \phi(\rho, w_1, \ldots, w_n)$ escribiéndolo como

$$2\epsilon\frac{\rho_x}{\rho} - \phi(\rho, w_1, \ldots, w_n) = 2\epsilon(\ln\rho)_x - \phi(\rho, w_1, \ldots, w_n).$$

El término $2\epsilon(\ln\rho)_x$ resulta acotado si para la variable ρ tenemos una acotación de la forma $o < c(t,\epsilon) \leq \rho^\epsilon(x,t) \leq M$, mostraremos más adelante en (2.16) que esto en efecto se verifica.

2.4.2. Sobre el estimado a-priori de $\rho^\epsilon(x,t)$.

Solamente faltaría establecer un estimado a-priori para la variable ρ^ϵ, sin embargo, bajo las condiciones impuestas hasta el momento sobre el sistema (0.5) y su correspondiente sistema parabólico (2.12) no resulta ser tan evidente. Por tal razón el autor en [20] descansando en los cálculos hechos en [21] asume esta condición como supuesto, con miras a dar un resultado en cierto sentido más general. Aquí también haremos esta suposición y referimos al lector a [21] y a la sección 4, donde esta estimación se puede hallar bajo los supuestos que allí se establecen.

2.4.3. Una cota inferior positiva para ρ^ϵ.

Notemos que por la forma del sistema (2.12) resultaría inconveniente si la variable ρ^ϵ asumiera el valor 0. Por tanto para garantizar la validez de los cálculos hechos hasta el momento, la siguiente acotación es fundamental

Lema 3. *Si las soluciones viscosas $(\rho^\epsilon, w_i^\epsilon)$ del problema de Cauchy (2.12)-(2.13) tienen la estimativa a-priori $\rho^\epsilon \leq M$, donde M es una constante positiva independiente de ϵ entonces*

$$\rho^\epsilon \geq c(t,\epsilon) > 0 \tag{2.16}$$

donde $c(t,\epsilon)$ tiende a cero cuando el tiempo t tiende a infinito o ϵ tiende a cero.

Demostración. Multiplicando la primera ecuación de (2.12) por $1/\rho$ tenemos

$$\frac{1}{\rho}\rho_t + \frac{1}{\rho}(\rho\phi(\rho, w_i, \ldots, w_n))_x = \epsilon\frac{1}{\rho}\rho_{xx}$$
$$(\ln\rho)_t + \phi(\rho, w_1, \ldots, w_n)_x + \phi(\rho, w_1, \ldots, w_n)(\ln\rho)_x = \epsilon(\ln\rho)_{xx} + \epsilon((\ln\rho)_x)^2$$

Haciendo $v = -\ln\rho$, entonces deducimos que:

$$-v_t + \phi(\rho, w_1, \ldots, w_n)_x + \phi(\rho, w_1, \ldots, w_n)(\ln\rho)_x = -\epsilon v_x x + \epsilon(v_x)^2$$
$$v_t - \epsilon v_{xx} = -\epsilon(v_x)^2 + \phi(\rho, w_1, \ldots, w_n)(v_x) + \phi(\rho, w_1, \ldots, w_n)_x$$
$$v_t - \epsilon v_{xx} = -\epsilon\left(v_x + \frac{\phi(\rho, w_1, \ldots, w_n)}{2\epsilon}\right)^2 + \frac{(\phi(\rho, w_1, \ldots, w_n))^2}{4\epsilon} + \phi(\rho, w_1, \ldots, w_n)_x.$$

Así,

$$v_t - \epsilon v_{xx} \leq \frac{(\phi(\rho, w_1, \ldots, w_n))^2}{\epsilon} + \phi(\rho, w_1, \ldots, w_n)_x. \tag{2.17}$$

Consideremos la función $K_\epsilon(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon t}}e^{\frac{-x^2}{4\epsilon t}}$, sabemos que esta es la solución fundamental del operador $\frac{\partial}{\partial t} - \epsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, luego si $v(x,t)$ es solución de la ecuación

$$v_t - \epsilon v_{xx} = g(x,t)$$

entonces podemos escribir a $v(x,t)$ como:

$$v(x,t) = K_\epsilon(x,t) * v_0(x) + \int_0^t (g(x,s)) *_x K_\epsilon(x,t-s)ds. \tag{2.18}$$

Aquí, $*_x$ denota la convolución respecto a la variable x. Luego de (2.17) tenemos la desigualdad

$$\begin{aligned} v(x,t) &\leq K_\epsilon(x,t) * v_0(x) + \int_0^t \left(\frac{1}{\epsilon}\phi(\rho,w_1,\ldots,w_n)^2 + \phi(\rho,w_1,\ldots,w_n)_x\right) *_x K_\epsilon(x,t-s)ds \\ &\leq K_\epsilon(x,t) *_x v_0(x) + \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(\phi^2 *_x K_\epsilon(x,t-s) + \phi *_x \frac{\partial}{\partial x}K_\epsilon(x,t-s)\right) ds, \end{aligned} \tag{2.19}$$

donde $v_0(x) = -\ln\rho_0^\epsilon(x)$.
Ya que la función $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ y $\rho_0^\epsilon(x) \geq \epsilon > 0$

$$\begin{aligned} v(x,t) &\leq K_\epsilon(x,t) * v_o(x) + \frac{N_1}{\epsilon}t + N_2\sqrt{\frac{t}{\epsilon}} \\ &\leq -\ln\epsilon + \frac{N_1}{\epsilon}t + N_2\sqrt{\frac{t}{\epsilon}}, \end{aligned}$$

donde N_1 y N_2 son constantes.
Entonces

$$\rho(x,t) \geq \epsilon \exp\left(-\left(\frac{N_1}{\epsilon}t + N_2\sqrt{\frac{t}{\epsilon}}\right)\right) \geq c(t,\epsilon) > 0. \tag{2.20}$$

□

2.4.4. Estimado para TVw_i

Una cota a-priori útil más adelante será la siguiente:

Lema 4. *Dado el problema de Cauchy (2.12)-(2.13) supongamos que para el dato inicial se tiene que TVw_{i0} es acotada, entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |w_{ix}|(x,t)dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |w_{ix}^\epsilon|(x,o)dx \leq M. \tag{2.21}$$

Demostración. Sea $\theta = w_{ix}$, derivando (2.14) con respecto a x, tenemos:

$$\begin{aligned} w_{itx} + (\phi(\rho,w_1,\ldots,w_n)w_{ix})_x &= \epsilon w_{ixxx} + \left(2\epsilon\frac{\rho_x}{\rho}w_{ix}\right)_x \\ \theta_t + (\phi(\rho,w_1,\ldots,w_n)\theta)_x &= \epsilon\theta_{xx} + \left(2\epsilon\frac{\rho_x}{\rho}\theta\right)_x \end{aligned}$$

Sea $g(\theta,\alpha)$ una sucesión de funciones tal que $g'(\theta,\alpha) \to sign\theta$, $g''(\theta,\alpha) \geq 0$, y $g(\theta,\alpha) \to |\theta|$, cuando $\alpha \to 0$.
Si multiplicamos por $g'(\theta,\alpha)$ tenemos:

$$\begin{gathered}
g'(\theta,\alpha)\theta_t + g'(\theta,\alpha)(\phi\theta)_x = \epsilon g'(\theta,\alpha)\theta_{xx} + g'(\theta,\alpha)(2\epsilon\rho_x\rho^{-1}\theta)_x \\
g(\theta,\alpha)_t + (\phi g(\theta,\alpha))_x - g(\theta,\alpha)\phi_x + g'(\theta,\alpha)\theta\phi_x = \\
\epsilon g(\theta,\alpha)_{xx} - \epsilon g''(\theta,\alpha)\theta_x^2 + [(2\epsilon\rho_x\rho^{-1})_x\theta + (2\epsilon\rho_x\rho^{-1})\theta_x]g'(\theta,\alpha) \\
g(\theta,\alpha)_t + (\phi g(\theta,\alpha))_x + (g'(\theta,\alpha)\theta - g(\theta,\alpha))\phi_x = \\
\epsilon g(\theta,\alpha)_{xx} - \epsilon g''(\theta,\alpha)\theta_x^2 + (2\epsilon\rho_x\rho^{-1}g(\theta,\alpha))_x + (2\epsilon\rho_x\rho^{-1})_x(g'(\theta,\alpha)\theta - g(\theta,\alpha))
\end{gathered}$$

Como $g'(\theta,\alpha) \to sign\theta$, $g''(\theta,\alpha) \geq 0$, y $g(\theta,\alpha) \to |\theta|$, cuando $\alpha \to 0$, entonces haciendo $\alpha \to 0$ tenemos:

$$\begin{aligned}
&|\theta|_t + (\phi|\theta|)_x = \epsilon|\theta|_{xx} + (2\epsilon\rho^{-1}\rho_x|\theta|)_x - \epsilon g''(\theta,\alpha)\theta_x^2 \\
&|\theta|_t + (\phi|\theta|)_x \leq \epsilon|\theta|_{xx} + (2\epsilon\rho^{-1}\rho_x|\theta|)_x
\end{aligned} \tag{2.22}$$

en el sentido de las distribuciones, esto quiere decir que, sea $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ un conjunto compacto arbitrario y sea $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0,t])$ tal que $\psi|_K = 1$, y $0 \leq \psi \leq 1$, si multiplicamos la desigualdad en (2.22) por ψ, e integramos sobre $\mathbb{R} \times [0,t]$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t |\theta|_t\psi dtdx + &\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}(\phi|\theta|)_x\psi dxdt \\
&\leq \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\epsilon|\theta|_{xx}\psi dxdt + \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}(2\epsilon\rho^{-1}\rho_x|\theta|)_x\psi dxdt
\end{aligned} \tag{2.23}$$

integrando por partes obtenemos la expresión

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t |\theta|_t\psi dtdx - &\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}(\phi|\theta|)\psi_x dxdt \\
&\leq -\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\epsilon|\theta|_x\psi_x dxdt - \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}(2\epsilon\rho^{-1}\rho_x|\theta|)\psi_x dxdt
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Notemos que el segundo término del lado izquierdo, y los términos del lado derecho de (2.24) se anulan, ya que la derivada ψ_x se anula sobre K, de este modo

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t |\theta|_t dtdx \leq 0 \tag{2.25}$$

esto es

$$\int_{-\infty}^{\infty}|w_{ix}|(x,t)dx = \int_{-\infty}^{\infty}|\theta|(x,t)dx \leq \int_{-\infty}^{\infty}|\theta|(x,0)dx \leq M. \tag{2.26}$$

ya que $TVw_{i0}(x)$ es acotada. □

Terminamos este capítulo resumiendo los resultados obtenidos para el problema de Cauchy del sistema (2.12) en el siguiente teorema:

Teorema 6. *Considérese el sistema de ecuaciones parabólico (2.12)*

$$\begin{cases}
\rho_t + (\rho\phi(\rho,w_1,w_2,\ldots,w_n))_x = \epsilon\rho_{xx}, \\
(\rho w_i)_t + (\rho w_i\phi(\rho,w_1,w_2,\ldots,w_n))_x = \epsilon(\rho w_i)_{xx}, \qquad i = 1,2,\ldots,n
\end{cases}$$

donde ϕ es una función en $C^1(\mathbb{R}^n)$. Supongamos que para ρ^ϵ se tiene el estimado a-priori L^∞

$$\rho^\epsilon(x,t) \leq M \tag{2.27}$$

donde M es una constante positiva independiente de ϵ. Entonces para el problema de Cauchy con dato inicial medible y acotado (2.13)

$$(\rho^\epsilon(x,0), w_i^\epsilon(x,0)) = (\rho_0(x) + \epsilon, w_{i0}(x)), \quad \rho_0(x) \geq 0, i = 1, 2, \ldots, n.$$

existe solución global $(\rho^\epsilon, w_i^\epsilon)$ sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

CAPÍTULO 3

Existencia de Solución global entrópica.

En este capítulo desarrollaremos la parte principal del trabajo, nuestro objetivo será demostrar el siguiente teorema:

Teorema 7. *Consideremos las soluciones viscosas $(\rho^\epsilon, w_i^\epsilon)$ del problema de Cauchy (2.12)-(2.13). Supongamos que la variación total de w_{i0}, $i = 1, \ldots, n$ es acotada. Si tenemos una estimativa a-priori L^∞*

$$\rho^\epsilon(x,t) \leq M \tag{3.1}$$

donde M es una constante positiva independiente de ϵ, entonces existe una subsucesión w_i^ϵ que converge puntualmente sobre el conjunto $\{(x,t) : \rho(x,t) > 0\}$ a funciones w_i; además, si

$$meas\{\rho : 2\phi_\rho(\rho, w_1, w_2, \ldots, w_n) + \rho\phi_{\rho\rho}(\rho, w_1, w_2, \ldots, w_n) = 0\} = 0 \tag{3.2}$$

entonces existe una subsucesión ρ^ϵ que converge puntualmente a una función ρ y el límite (ρ, w_i) es una solución débil entrópica del problema de Cauchy (0.5)-(0.6), es decir que satisface (0.5) en el sentido de las distribuciones y

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \eta(\rho(x,t), w_i(x,t))\theta_t + q(\rho(x,t), w_i(x,t))\theta_x dxdt \geq 0 \tag{3.3}$$

donde $(\eta, q) \in C^2$ es un par de entropía-flujo del sistema (0.5), η es convexa y $\theta \in C_o^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ es una función no negativa.

El método que utilizaremos para demostrar este teorema es la Compacidad Compensada, la intención es garantizar las hipótesis del Lema de Divergente-Rotacional para ciertos campos de funciones por definir y así obtener la existencia de una subsucesión de soluciones de (2.12) convergente a la solución débil (ρ, w_i) de (0.5)-(0.6).

Dividiremos esta tarea en cuatro secciones:
En la sección 3.1. se garantizarán las hipótesis del Lema de Murat y se obtendrá la compacidad en $H_{loc}^{-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ de algunos funcionales.
En la sección 3.2. aplicaremos el Lema de Divergente-Rotacional sobre algunos campos de funciones para obtener la convergencia puntual de una subsucesión de w_i^ϵ a funciones w_i.
En la sección 3.3. se expondrá una adaptación a la primera ecuación en (2.12) de un Le-

ma de compacidad compensada aplicado sobre leyes de conservación escalar con flujo discontinuo [14], donde básicamente se aplica el Lema de Divergente-Rotacional para obtener una subsucesión de ρ^ϵ convergente a ρ.
En la sección 3.4. se mostrará que la solución encontrada satisface la desigualdad de entropía (3.3).

3.1. Compacidad en $H^{-1}_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$

Lema 5. *Sea $g(\rho)$ una funcion suave, entonces*

$$g(\rho)_t + \left(\int^\rho (\phi(s,w) + s\phi_\rho(s,w))g'(s)ds\right)_x \tag{3.4}$$

es compacto en $H^{-1}_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$

Demostración. Reescribimos la primera ecuación de (2.12) como

$$\rho_t + (\phi(\rho,w) + \rho\phi_\rho(\rho,w))\rho_x + \rho\sum_{i=1}^n \phi_{w_i}(\rho,w)w_{ix} = \epsilon\rho_{xx}, \tag{3.5}$$

multiplicando (3.5) por $g'(\rho)$, se obtiene

$$\begin{aligned} g'(\rho)\rho_t + g'(\rho)(\phi(\rho,w) + \rho\phi_\rho(\rho,w))\rho_x + \rho g'(\rho)\sum_{i=1}^n \phi_{w_i}(\rho,w)w_{ix} &= \epsilon\rho_{xx}g'(\rho) \\ g(\rho)_t + g'(\rho)(\phi(\rho,w) + \rho\phi_\rho(\rho,w))\rho_x + \rho g'(\rho)\sum_{i=1}^n \phi_{w_i}(\rho,w)w_{ix} &= \epsilon g(\rho)_{xx} - \epsilon g''(\rho)\rho_x^2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

haciendo $G(\rho,w) = \int^\rho(\phi(s,w) + s\phi_\rho(s,w))g'(s)ds$ podemos escribirlo como

$$g(\rho)_t + G(\rho,w)_x = \epsilon g(\rho)_{xx} - \epsilon g''(\rho)\rho_x^2 - \rho g'(\rho)\sum_{i=1}^n \phi_{w_i}(\rho,w)w_{ix} + \sum_{i=1}^n G_{w_i}(\rho,w)w_{ix}. \tag{3.7}$$

Los dos últimos términos del lado derecho de (3.7) son acotados en $L^1_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$. En efecto, si integramos sobre un conjunto compacto $K\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ el valor absoluto de esa suma tenemos:

$$\begin{aligned} &\int_K \left|\sum_{i=1}^n \left[G_{w_i}(\rho,w) - \rho g'(\rho)\phi_{w_i}(\rho,w)\right] w_{ix}\right| dxdt \\ &\qquad \le \int_K \left|\sum_{i=1}^n G_{w_i}(\rho,w) - \rho g'(\rho)\phi_{w_i}(\rho,w)\right| |w_{ix}|\, dxdt. \end{aligned}$$

Luego por el estimado (2.21) y la desigualdad de Hölder basta con demostrar que

$$\sum_{i=1}^n G_{w_i}(\rho,w) - \rho g'(\rho)\phi_{w_i}(\rho,w)$$

está en $L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$. Para ver esto, notemos que

$$G_{w_i}(\rho,w)-\rho g'(\rho)\phi_{w_i}(\rho,w)=-\int_0^{\rho}\phi_{w_i}(s,w)g''(s)sds.$$

Luego tomando (x,t) en el conjunto compacto $K\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n}G_{w_i}(\rho,w)-\rho g'(\rho)\phi_{w_i}(\rho,w)\right| &\leq \sum_{i=1}^{n}\left|-\int_0^{\rho}\phi_{w_i}(s,w)g''(s)sds\right|\\ &\leq \sum_{i=1}^{n}M_i\left|\int_0^{\rho}g''(s)sds\right|\\ &\leq \sum_{i=1}^{n}M_i\left|g'(\rho)\rho-g(\rho)+g(0)\right|<\infty\end{aligned}$$

donde M_i es el máximo que alcanza ϕ_{w_i} sobre el conjunto compacto K.
Volviendo a (3.7) observe que transponiendo términos se tiene

$$\epsilon g''(\rho)\rho_x^2=\epsilon g(\rho)_{xx}-\big(g(\rho)_t+G(\rho,w)_x\big)-\rho g'(\rho)\sum_{i=1}^{n}\phi_{w_i}(\rho,w)w_{ix}+\sum_{i=1}^{n}G_{w_i}(\rho,w)w_{ix}. \tag{3.8}$$

Acabamos de mostrar que los dos últimos términos del lado derecho son acotados en $L^1_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$, queremos demostrar lo mismo para el término del lado izquierdo, para hacerlo basta con mostrar que $\epsilon g(\rho)_{xx}-\big(g(\rho)_t+G(\rho,w)_x\big)$ es acotado en $L^1_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$.

Supongamos ahora que $g(\rho)$ es estrictamente convexa. Sean $K\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ compacto y $\psi\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ tal que $\psi|_K=1$, y $0\leq\psi\leq 1$. Si multiplicamos (3.8) por ψ e integramos sobre $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\epsilon\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g''(\rho)\rho_x^2\psi dxdt &\leq \epsilon\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(\rho)_{xx}\psi dxdt\\ &\quad-\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(\rho)_t\psi dxdt-\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G(\rho,w)_x\psi dxdt+M^*\\ \epsilon\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g''(\rho)\rho_x^2\psi dxdt &\leq \epsilon\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(\rho)\psi_{xx}dxdt\\ &\quad+\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}g(\rho)\psi_t dtdx+\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G(\rho,w)\psi_x dxdt+M^*\\ &\leq M(\psi).\end{aligned}$$

De este modo se tiene que

$$\epsilon(\rho_x^{\epsilon})^2 \text{ es acotado en } L^1_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+). \tag{3.9}$$

Ahora, es sencillo probar que

$$\epsilon g(\rho^{\epsilon})_{xx}\quad \text{es compacto en } H^{-1}_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+) \tag{3.10}$$

Consideremos el conjunto

$$A = \{\epsilon g(\rho^\epsilon)_{xx} : \epsilon \text{ toma valores en una sucesión real } (x_n) \text{ que converge a cero}\}$$

vemos que cualquier sucesión de elementos de A está determinada por una subsucesión de (x_n), además cada elemento de A induce un funcional lineal continuo sobre $W_0^{1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, mediante la expresión:

$$(\epsilon g(\rho^\epsilon)_{xx})(u) = \int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} \epsilon g(\rho^\epsilon(x,t))_{xx} u(x,t)dxdt \tag{3.11}$$

donde $u \in W_0^{1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, haciendo $\epsilon \to 0$ es claro de (3.11) que ya que ρ^ϵ es uniformemente acotada, entonces cualquier sucesión de elementos de A posee una subsucesión que converge al funcional 0. De este modo el conjunto A es compacto en $H_{loc}^{-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$. El término del lado izquierdo de (3.7) es acotado en $W_{loc}^{-1,\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$. Luego por el Lema de Murat, tenemos que (3.4) es compacto en $H_{loc}^{-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$. □

Lema 6. *Tenemos que*

$$(\rho^\epsilon w_i^\epsilon)_t + (\rho^\epsilon w_i^\epsilon \phi(\rho^\epsilon, w^\epsilon))_x \tag{3.12}$$

es compacto en $H_{loc}^{-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$.

Demostración. Sea $\eta(\rho, w_i, \ldots, w_n) = \rho F(w_1, \ldots, w_n)$, donde F es una función estrictamente convexa, entonces η es una entropía para el sistema (0.5) con correspondiente flujo de entropia $q(\rho, w_1, \ldots, w_n) = \rho F(w_1, \ldots, w_n)\phi(\rho, w_1, \ldots, w_n)$. Si multiplicamos la primera ecuación en (2.12) por η_ρ, multiplicamos a (2.14) por $\eta_\rho w_i$ y luego sumamos los resultados obtenemos

$$\begin{aligned} \eta(\rho, w_1, \ldots, w_n)_t + (\phi\eta(\rho, w_1, \ldots, w_n))_x &= \epsilon\eta(\rho, w_1, \ldots, w_n)_{xx} - \epsilon\rho\sum_{i,j=1}^{n} F_{w_i w_j} w_{ix} w_{j_x} \\ &\leq \epsilon\eta(\rho, w_1, \ldots, w_n)_{xx} - \epsilon c_0 \rho \sum_{i=1}^{n} w_{ix}^2 \end{aligned} \tag{3.13}$$

para alguna constante positiva adecuada c_0. Así haciendo cálculos similares a los hechos para obtener (3.9) se tiene que

$$\epsilon\rho \sum_{i=1}^{n} w_{ix}^2 \quad \text{es acotada en } L_{loc}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+). \tag{3.14}$$

Ahora, podemos reescribir la segunda ecuación en (2.12) como

$$(\rho w_i)_t + (\rho w_i \phi(\rho, w_i, \ldots, w_n))_x = \epsilon(\rho w_{ix} + w_i \rho_x)_x, \tag{3.15}$$

consideremos el conjunto

$$B = \{\epsilon(\rho w_{ix} + w_i \rho_x)_x : \epsilon \text{ toma valores en una sucesión real } (x_n) \text{ que converge a cero}\},$$

cada elemento de B induce un funcional lineal continuo sobre $W_0^{1,2}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$, mediante la expresión:

$$\big(\epsilon(\rho w_{ix}+w_i\rho_x)_x\big)(u)=\int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}\epsilon(\rho w_{ix}+w_i\rho_x)_x u(x,t)dxdt \tag{3.16}$$

donde $u\in W_0^{1,2}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz tenemos que

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}\epsilon(\rho w_{ix}+w_i\rho_x)_x u(x,t)dxdt &\leq \int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}\left|\epsilon(\rho w_{ix}+w_i\rho_x)u_x(x,t)\right|dxdt\\ &\leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}\left|\epsilon(\rho w_{ix}+w_i\rho_x)\right|^2dxdt\right)^{1/2}\|u_x\|_{L^2}\\ &\leq \left[\left(\int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}\left|\epsilon(\rho w_{ix})\right|^2dxdt\right)^{1/2}+\left(\int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}\left|\epsilon(w_i\rho_x)\right|^2dxdt\right)^{1/2}\right]\|u\|_{W_0^{1,2}}\\ &\leq \left[\left(\epsilon\int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}\epsilon\left(\rho\rho w_{ix}^2\right)dxdt\right)^{1/2}+\left(\epsilon\int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}\epsilon\left(w_i{}^2\rho_x^2\right)dxdt\right)^{1/2}\right]\|u\|_{W_0^{1,2}}\end{aligned} \tag{3.17}$$

haciendo $\epsilon\to 0$, es claro de (3.17) que ya que se tienen (3.9) y (3.14) y además $\rho^\epsilon, w_i^\epsilon$ son uniformemente acotadas, entonces cualquier sucesión de elementos de B posee una subsucesión que converge al funcional 0. De este modo el conjunto B es compacto en $H_{loc}^{-1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$. Esto concluye la prueba. □

Lema 7. *Para cualquier constante c*

$$c_t + w^\epsilon_{i\,x} \text{ es compacto en } H_{loc}^{-1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+) \tag{3.18}$$

Demostración. Ya que $w_{ix}^\epsilon(\cdot,t)$ son acotados en $L^1_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$, entonces por (1.15) son compactos en $W_{loc}^{-1,\alpha}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ para algún $\alpha\in(1,2)$ adecuado. Además es claro que $w_{ix}^\epsilon(x,t)$ es acotado en $W_{loc}^{-1,\infty}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$, así por el lema de Murat generalizado (1.20) tenemos que $w_{ix}^\epsilon(x,t)$ es compacto en $H_{loc}^{-1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$. Así

$$c_t + w^\epsilon_{i\,x} \text{ es compacto en } H_{loc}^{-1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+).$$

□

3.2. Convergencia puntual de $w_i^\epsilon(x,t)$.

En lo siguiente utilizaremos la barra "—"para denotar el límite débil $\star$ en $L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$. Consideremos los campos vectoriales en $\left(L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)\right)^2$

$$D_1^\epsilon=(\rho^\epsilon,\rho^\epsilon\phi(\rho^\epsilon,w^\epsilon)) \tag{3.19}$$
$$E^\epsilon=(-w_i^\epsilon,c) \tag{3.20}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} divD_1^\epsilon &= \rho_t^\epsilon + (\rho^\epsilon \phi(\rho^\epsilon, w^\epsilon))_x \\ rotE^\epsilon &= c_t + w_{ix}^\epsilon \end{aligned}$$

por (3.4) con $g(\rho) = \rho$ y (3.18) tenemos que son compactos en $H_{loc}^{-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, así que podemos aplicar el lema de divergente rotacional a las sucesiones $\{D_1^\epsilon\}_{\epsilon>0}$, $\{E^\epsilon\}_{\epsilon>0}$ para obtener

$$\begin{aligned} \overline{D_1^\epsilon \cdot E^\epsilon} &= \overline{D_1^\epsilon} \cdot \overline{E^\epsilon} \\ \overline{c\rho^\epsilon \phi(\rho^\epsilon, w^\epsilon) - \rho^\epsilon w_i^\epsilon} &= \overline{c}\, \overline{\rho^\epsilon \phi(\rho^\epsilon, w^\epsilon)} - \overline{\rho^\epsilon}\, \overline{w_i^\epsilon} \\ c\overline{\rho^\epsilon \phi(\rho^\epsilon, w^\epsilon)} - \overline{\rho^\epsilon w_i^\epsilon} &= c\, \overline{\rho^\epsilon \phi(\rho^\epsilon, w^\epsilon)} - \overline{\rho^\epsilon}\, \overline{w_i^\epsilon} \\ \overline{\rho^\epsilon w_i^\epsilon} &= \overline{\rho^\epsilon}\, \overline{w_i^\epsilon} \end{aligned}$$

Por otro lado, considerando los campos

$$D_2^\epsilon = (\rho^\epsilon w_i^\epsilon, \rho^\epsilon w_i^\epsilon \phi(\rho^\epsilon, w^\epsilon)) \tag{3.21}$$

$$E^\epsilon = (-w_i^\epsilon, c) \tag{3.22}$$

el lema de divergente rotacional también se puede aplicar ya que se tiene (3.12), y así tenemos:

$$\begin{aligned} \overline{D_2^\epsilon \cdot E^\epsilon} &= \overline{D_2^\epsilon} \cdot \overline{E^\epsilon} \\ \overline{c\rho^\epsilon w_i^\epsilon \phi(\rho^\epsilon, w^\epsilon) - \rho^\epsilon (w_i^\epsilon)^2} &= \overline{c}\, \overline{\rho^\epsilon w_i^\epsilon \phi(\rho^\epsilon, w^\epsilon)} - \overline{w_i^\epsilon}\, \overline{\rho^\epsilon w_i^\epsilon} \\ c\overline{\rho^\epsilon w_i^\epsilon \phi(\rho^\epsilon, w^\epsilon)} - \overline{\rho^\epsilon (w_i^\epsilon)^2} &= c\, \overline{\rho^\epsilon w_i^\epsilon \phi(\rho^\epsilon, w^\epsilon)} - \overline{w_i^\epsilon}\, \overline{\rho^\epsilon w_i^\epsilon} \\ \overline{\rho^\epsilon (w_i^\epsilon)^2} &= \overline{w_i^\epsilon}\, \overline{\rho^\epsilon w_i^\epsilon} \end{aligned}$$

Sea $(\overline{\rho^\epsilon}, \overline{w_i^\epsilon}) = (\rho, w_i)$. Entonces

$$\begin{aligned} \overline{\rho^\epsilon (w_i^\epsilon - w_i)^2} &= \overline{\rho^\epsilon (w_i^\epsilon)^2} - 2w_i \overline{\rho^\epsilon w_i^\epsilon} + \rho w_i^2 \\ &= \overline{w_i^\epsilon}\, \overline{\rho^\epsilon w_i^\epsilon} - 2w_i \overline{\rho^\epsilon}\, \overline{w_i^\epsilon} + \rho w_i^2 \\ &= w_i \overline{\rho^\epsilon}\, \overline{w_i^\epsilon} - 2w_i \overline{\rho^\epsilon}\, \overline{w_i^\epsilon} + \rho w_i^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esto implica que existe una subsucesión de w_i^ϵ que converge puntualmente sobre el conjunto $\{(x,t) : \rho(x,t) > 0\}$ a funciones w_i, donde $\rho(x,t)$ es el límite débil de ρ^ϵ.

3.3. Convergencia puntual de $\rho^\epsilon(x,t)$.

El siguiente Lema y su demostración es una adaptación a la ecuación escalar

$$\rho_t + (\rho\phi(\rho, w_1, \ldots, w_n)) = \epsilon \rho_{xx} \tag{3.23}$$

bajo la condición (3.2) del Lema de compacidad compensada sobre ecuaciones de conservación escalar con un flujo discontinuo de espacio tiempo, realizado en [14].

Lema 8. *Supongamos que se cumple (3.2) y que dadas las expresiones:*

$$\begin{aligned} S_1(\rho) =& \rho \\ Q_1(\rho) =& \rho\phi(\rho,w) \\ S_2(\rho) =& \rho\phi(\rho,w) \\ Q_2(\rho) =& \int_0^{\rho} (\xi\phi(\xi,w))^2_{\rho} d\xi \end{aligned}$$

las sucesiones

$$\{S_1(\rho^\epsilon)_t + Q_1(\rho^\epsilon)_x\}_{\epsilon>0} \tag{3.24}$$

y

$$\{S_2(\rho^\epsilon)_t + Q_2(\rho^\epsilon)_x\}_{\epsilon>0} \tag{3.25}$$

pertenecen a un subconjunto compacto de $H^{-1}_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$. Entonces existe una subsucesión de $\{\rho^\epsilon\}_{\epsilon>0}$ que converge puntualmente en c.t.p. a una función $\rho \in L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$.

Demostración. Sea Ω cualquier conjunto abierto acotado en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$. Notemos que las condiciones (3.24) y (3.25) son equivalentes a

$$\rho^\epsilon + (\rho^\epsilon\phi(\rho^\epsilon,w))_x \text{ es compacto en } H^{-1}_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+) \tag{3.26}$$

y

$$\rho^\epsilon\phi(\rho^\epsilon) + \Big(\int_0^{\rho} (\xi\phi(\xi,w))^2_{\rho} d\xi\Big) \text{ es compacto en } H^{-1}_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+) \tag{3.27}$$

y que esto se tiene como caso particular de (3.4) para los valores de la función $g(\rho) = \rho$ y $g(\rho) = \rho\phi(\rho,w)$ respectivamente. De esta manera podemos aplicar el lema de divergente rotacional a las sucesiones $\{D^\epsilon\}_{\epsilon>0} = \{(S_1(\rho^\epsilon), Q_1(\rho^\epsilon))\}_{\epsilon>0}$ y $\{E^\epsilon\}_{\epsilon>0} = \{(-Q_2(\rho^\epsilon), S_2(\rho^\epsilon))\}_{\epsilon>0}$ para obtener:

$$\begin{aligned} \overline{D^\epsilon\cdot E^\epsilon} =& \overline{D^\epsilon}\cdot\overline{E^\epsilon} \\ \overline{(\rho^\epsilon\phi(\rho^\epsilon,w))^2 - \rho^\epsilon\int_0^{\rho^\epsilon}(\xi\phi(\xi,w))^2_{\rho}d\xi} =& \overline{(\rho^\epsilon\phi(\rho^\epsilon,w))}^2 - \overline{\rho^\epsilon}\,\overline{\int_0^{\rho^\epsilon}(\xi\phi(\xi,w))^2_{\rho}d\xi} \end{aligned} \tag{3.28}$$

Ya que

$$\begin{aligned} (\rho^\epsilon\phi(\rho^\epsilon,w))^2 = (\rho^\epsilon\phi(\rho^\epsilon,w) - \overline{\rho^\epsilon}\phi(\overline{\rho^\epsilon}))^2 + 2(\rho^\epsilon\phi(\rho^\epsilon,w) - \overline{\rho^\epsilon}\phi(\overline{\rho^\epsilon},w))(\overline{\rho^\epsilon}\phi(\overline{\rho^\epsilon},w)) \\ + (\overline{\rho^\epsilon}\phi(\overline{\rho^\epsilon},w))^2 \end{aligned} \tag{3.29}$$

y

$$\begin{aligned} \rho^\epsilon\int_0^{\rho^\epsilon}(\xi\phi(\xi,w))^2_{\rho}d\xi = (\rho^\epsilon - \overline{\rho^\epsilon})\int_{\overline{\rho^\epsilon}}^{\rho^\epsilon}(\xi\phi(\xi,w))^2_{\rho}d\xi + \overline{\rho^\epsilon}\int_{\overline{\rho^\epsilon}}^{\rho^\epsilon}(\xi\phi(\xi,w))^2_{\rho}d\xi \\ + \rho^\epsilon\int_0^{\overline{\rho^\epsilon}}(\xi\phi(\xi,w))^2_{\rho}d\xi \end{aligned} \tag{3.30}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}(\overline{\rho^\epsilon\phi(\rho^\epsilon,w)})^2 = (\overline{\rho^\epsilon\phi(\rho^\epsilon,w)-\overline{\rho^\epsilon}\phi(\overline{\rho^\epsilon})})^2 + 2(\overline{\rho^\epsilon\phi(\rho^\epsilon,w)-\overline{\rho^\epsilon}\phi(\overline{\rho^\epsilon},w)})(\overline{\rho^\epsilon}\phi(\overline{\rho^\epsilon},w))\\ + (\overline{\rho^\epsilon}\phi(\overline{\rho^\epsilon},w))^2\end{aligned} \tag{3.31}$$

y

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\rho^\epsilon}\int_0^{\rho^\epsilon}(\xi\phi(\xi,w))^2_\rho d\xi} &= (\overline{\rho^\epsilon-\overline{\rho^\epsilon}})\overline{\int_{\overline{\rho^\epsilon}}^{\rho^\epsilon}(\xi\phi(\xi,w))^2_\rho d\xi} + \overline{\rho^\epsilon}\,\overline{\int_{\overline{\rho^\epsilon}}^{\rho^\epsilon}(\xi\phi(\xi,w))^2_\rho d\xi}\\ &\quad + \overline{\rho^\epsilon}\int_0^{\overline{\rho^\epsilon}}(\xi\phi(\xi,w))^2_\rho d\xi\\ &= \overline{\rho^\epsilon}\,\overline{\int_{\overline{\rho^\epsilon}}^{\rho^\epsilon}(\xi\phi(\xi,w))^2_\rho d\xi} + \overline{\rho^\epsilon}\int_0^{\overline{\rho^\epsilon}}(\xi\phi(\xi,w))^2_\rho d\xi,\end{aligned} \tag{3.32}$$

reemplazando las expresiones de (3.29, 3.30, 3.31 y 3.32) en la igualdad (3.28), tenemos que

$$\overline{(\rho^\epsilon\phi(\rho^\epsilon,w)-\overline{\rho^\epsilon}\phi(\overline{\rho^\epsilon}))^2} - \overline{(\rho^\epsilon-\overline{\rho^\epsilon})\int_{\overline{\rho^\epsilon}}^{\rho^\epsilon}(\xi\phi(\xi,w))^2_\rho d\xi} - (\overline{\rho^\epsilon\phi(\rho^\epsilon,w)-\overline{\rho^\epsilon}\phi(\overline{\rho^\epsilon})})^2 = 0. \tag{3.33}$$

Sea $I(\rho^\epsilon) = (\rho^\epsilon\phi(\rho^\epsilon,w)-\overline{\rho^\epsilon}\phi(\overline{\rho^\epsilon},w))^2 - (\rho^\epsilon-\overline{\rho^\epsilon})\int_{\overline{\rho^\epsilon}}^{\rho^\epsilon}(\xi\phi(\xi,w))^2_\rho d\xi$, entonces (3.33) queda:

$$\overline{I(\rho^\epsilon)} - (\overline{\rho^\epsilon\phi(\rho^\epsilon,w)-\overline{\rho^\epsilon}\phi(\overline{\rho^\epsilon})})^2 = 0. \tag{3.34}$$

La desigualdad de Cauchy-Schwartz implica que

$$\begin{aligned}(\rho^\epsilon\phi(\rho^\epsilon,w)-\overline{\rho^\epsilon}\phi(\overline{\rho^\epsilon},w))^2 &= \Big(\int_{\overline{\rho^\epsilon}}^{\rho^\epsilon}(\xi\phi(\xi,w))_\rho d\xi\Big)^2\\ &\le (\rho^\epsilon-\overline{\rho^\epsilon})\int_{\overline{\rho^\epsilon}}^{\rho^\epsilon}(\xi\phi(\xi,w))^2_\rho d\xi,\end{aligned} \tag{3.35}$$

luego se tiene que $I(\rho^\epsilon)\le 0$ en c.t.p.
En vista de la condición (3.2):

$$\begin{aligned}0 = meas\{\rho : 2\phi_\rho(\rho,w_1,w_2,\ldots,w_n) + \rho\phi_{\rho\rho}(\rho,w_1,w_2,\ldots,w_n) = 0\}\\ = meas\{\rho : (\rho\phi(\rho,w_1,w_2,\ldots,w_n))_{\rho\rho} = 0\}\end{aligned}$$

la cual en otras palabras dice que para la función $g(\rho)=\rho\phi(\rho,w)$, se tiene que $g''(\rho)\neq 0$ en c.t.p. tenemos que la desigualdad en (3.35) debe ser estricta. Esto implica que la función no positiva $I(\cdot)$ tiene un máximo global estricto en $\overline{\rho^\epsilon}$ con $I(\overline{\rho^\epsilon})=0$, así que

$$I(\rho^\epsilon) \le -c_\alpha \quad \text{c.t.p. sobre } \{|\rho^\epsilon-\overline{\rho^\epsilon}|>\alpha\} \tag{3.36}$$

para alguna constante $c_\alpha>0$ que depende de α pero no de ϵ.
En consecuencia

$$meas\{|\rho^\epsilon-\overline{\rho^\epsilon}|>\alpha\} < \frac{1}{c_\alpha}\int\limits_{\Omega\cap\{|\rho^\epsilon-\overline{\rho^\epsilon}|>\alpha\}} I_\epsilon(x,t)dxdt \to 0, \quad \text{cuando } \epsilon\to 0 \tag{3.37}$$

Ya que α es arbitrario, esto prueba que $\rho^\epsilon \to \overline{\rho^\epsilon} = \rho$ en medida, luego existe una subsucesión de $\{\rho^\epsilon\}_{\epsilon>0}$ que converge a ρ c.t.p. sobre Ω. □

3.4. La solución (ρ, w_i) es entrópica.

Lema 9. *Para la solución (ρ, w_i), se tiene la siguiente desigualdad*

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \eta(\rho(x,t), w_i(x,t))\theta_t + q(\rho(x,t), w_i(x,t))\theta_x dxdt \geq 0. \tag{3.38}$$

Demostración. Consideremos el par de entropía-convexa flujo (η, q) definido en la demostración del lema 6, es decir, $\eta(\rho, w_i, \ldots, w_n) = \rho F(w_1, \ldots, w_n)$, donde F es una función estrictamente convexa, y $q(\rho, w_1, \ldots, w_n) = \rho F(w_1, \ldots, w_n)\phi(\rho, w_1, \ldots, w_n)$.
Notemos que probar la desigualdad (3.38) es equivalente a mostrar que $\eta(\rho, w_i)_t + q(\rho, w_i)_x \leq 0$ en el sentido de las distribuciones. Invocando a (3.13), tenemos

$$\eta(\rho, w_1, \ldots, w_n)_t + q(\rho, w_1, \ldots, w_n)_x \leq \epsilon\eta(\rho, w_1, \ldots, w_n)_{xx} - \epsilon c_0 \rho \sum_{i=1}^n w_{ix}^2 \tag{3.39}$$

donde c_0 es una constante positiva. Notemos que el último término del lado derecho es siempre negativo, así que podemos escribir (3.39) como

$$\eta(\rho, w_1, \ldots, w_n)_t + q(\rho, w_1, \ldots, w_n)_x \leq \epsilon\eta(\rho, w_1, \ldots, w_n)_{xx}. \tag{3.40}$$

Sea $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ tal que $\psi \geq 0$. Si multiplicamos (3.40) por ψ e integramos sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ obtenemos:

$$\int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty [\eta(\rho, w_1, \ldots, w_n)_t + q(\rho, w_1, \ldots, w_n)_x]\psi dtdx \leq \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \epsilon\eta(\rho, w_1, \ldots, w_n)_{xx}\psi dxdt \tag{3.41}$$

por integración por partes tenemos

$$\int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty [\eta(\rho, w_1, \ldots, w_n)_t + q(\rho, w_1, \ldots, w_n)_x]\psi dtdx \leq \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \epsilon\eta(\rho, w_1, \ldots, w_n)\psi_{xx} dxdt, \tag{3.42}$$

como η es estrictamente convexa y ψ_{xx} es de soporte compacto, entonces $\eta\psi_{xx}$ es acotada, luego haciendo $\epsilon \to 0^+$ se tiene

$$\int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty [\eta(\rho, w_1, \ldots, w_n)_t + q(\rho, w_1, \ldots, w_n)_x]\psi dtdx \leq 0. \tag{3.43}$$

□

CAPÍTULO 4

Aplicaciones

4.1. Flujo de Tráfico

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \rho_t + \big(\rho(w - P(\rho))\big)_x = 0 \\ (\rho w)_t + \big(\rho w(w - P(\rho))\big)_x = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

introducido como un modelo macroscópico para el flujo de tráfico por Aw y Rascle [1], donde ρ, w son la densidad y velocidad de los carros sobre la vía y la función P es suave y estrictamente creciente y satisface

$$2P'(\rho) + \rho P''(\rho) > 0. \tag{4.2}$$

Podemos escribir el sistema (4.1) como

$$\begin{cases} \rho_t + \big(\rho(w - P(\rho))\big)_x = 0 \\ m_t + \big(\frac{m^2}{\rho} - mP(\rho)\big)_x = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

donde $m = \rho w$.
Los valores propios del sistema (4.3) son

$$\lambda_1 = \frac{m}{\rho} - P(\rho) - \rho P'(\rho), \qquad \lambda_2 = \frac{m}{\rho} - P(\rho) \tag{4.4}$$

con correspondientes vectores propios a derecha

$$r_1 = \Big(1, \frac{m}{\rho}\Big)^T, \qquad r_2 = \Big(1, \frac{m}{\rho} + \rho P'(\rho)\Big)^T \tag{4.5}$$

e invariantes de Riemann

$$z(\rho, m) = \frac{m}{\rho} - P(\rho), \qquad w(\rho, m) = \frac{m}{\rho}. \tag{4.6}$$

Además

$$\nabla\lambda_1 \cdot r_1 = -(2P'(\rho) + \rho P''(\rho)), \qquad \nabla\lambda_2 \cdot r_2 = 0. \tag{4.7}$$

Por esta razón el sistema (4.3) o equivalentemente el sistema (4.1) es estrictamente hiperbólico excepto para $\rho = 0$, donde los valores propios coinciden. La segunda familia de ondas es siempre lineal degenerada y la primera familia es genuinamente no lineal excepto cuando

$$2P'(\rho) + \rho P''(\rho) = 0. \tag{4.8}$$

Basados en la anterior descripción del sistema (4.1) estamos listos para intentar abordar la solución de su problema de Cauchy, mediante el resultado del teorema 7.

Teorema 8. *Sea el dato inicial $(\rho_0(x), w_0(x))$ acotado, $\rho_0(x) \geq 0$, la variación total de $w_0(x)$ acotada y $P(\rho)$ que satisface*

$$P(0) = 0, \quad \lim_{\rho\to 0} \rho P'(\rho) = 0, \quad y \quad \rho P''(\rho) + 2P'(\rho) > 0 \quad para\, \rho > 0. \tag{4.9}$$

Entonces, para el problema de Cauchy de (4.1) existe solución global entrópica $(\rho(x,t), w(x,t))$.

Demostración. Queremos garantizar las hipótesis del teorema (7) en este caso particular, donde $\phi(\rho, w) = w - P(\rho)$. Es claro que las condiciones impuestas sobre el flujo se satisfacen, es decir $\phi(\rho, w) = w - P(\rho)$ esta en $C^1(\mathbb{R}^2)$ y por consiguiente es acotada sobre cualquier bola cerrada en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.
Considerando el problema de Cauchy para el sistema parabólico relacionado

$$\begin{cases} \rho_t + \big(\rho(w - P(\rho))\big)_x = \epsilon\rho_{xx} \\ m_t + \big(\frac{m^2}{\rho} - mP(\rho))\big)_x = \epsilon m_{xx} \end{cases} \tag{4.10}$$

con dato inicial

$$(\rho^\epsilon(x,0), w^\epsilon(x,0)) = (\rho_0(x) + \epsilon, w_0(x)). \tag{4.11}$$

Debemos ser capaces de encontrar un estimado a-priori L^∞ para $\rho^\epsilon(x,t)$, es decir

$$\rho^\epsilon(x,t) \leq M$$

donde M es una constante independiente de ϵ.
Si multiplicamos (4.10) por (w_ρ, w_m) y (z_ρ, z_m) respectivamente, donde (w, z) son los invariantes de Riemann (4.6) obtenemos

$$\begin{aligned} w_t + \lambda_2 w_x =& \epsilon w_{xx} - \epsilon(w_{\rho\rho}\rho_x^2 + 2w_{\rho m}\rho_x m_x + w_{mm}m_x^2) \\ =& \epsilon w_{xx} - \epsilon\Big(\frac{2m}{\rho^3}\rho_x^2 - \frac{2}{\rho^2}\rho_x m_x\Big) \\ =& \epsilon w_{xx} + \frac{2\epsilon}{\rho}\rho_x w_x \end{aligned} \tag{4.12}$$

y

$$\begin{aligned} z_t + \lambda_1 z_x =& \epsilon z_{xx} - \epsilon(z_{\rho\rho}\rho_x^2 + 2_{\rho m}\rho_x m_x + z_{mm} m_x^2) \\ =& \epsilon z_{xx} - \epsilon\Big(\Big(\frac{2m}{\rho^3} - P''(\rho)\Big)\rho_x^2 - \frac{2}{\rho^2}\rho_x m_x\Big) \\ =& \epsilon z_{xx} + \frac{\epsilon}{\rho}(2P'(\rho) + \rho P''(\rho))\rho_x^2 \\ \geq& \epsilon z_{xx} + \frac{2\epsilon}{\rho}\rho_x z_x. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Si consideramos (4.12) como una desigualdad respecto a la variable w y (4.13) como una desigualdad respecto a la variable z, entonces podemos aplicar el principio del máximo para obtener las estimativas $w(\rho^\epsilon, m^\epsilon) \leq C_1$, $z(\rho^\epsilon, m^\epsilon) \geq C_2$.
El argumento usado en (2.16) también es válido en este caso, así que la región

$$R = \{(\rho, m) : w(\rho, m) \leq C_1, z(\rho, m) \geq C_2, \rho \geq 0\}$$

es una región invariante acotada para dos constantes adecuadas C_1,C_2. Así se obtiene los siguientes estimativos

$$0 \leq \rho^\epsilon \leq M, \qquad |w^\epsilon| = |\frac{m^\epsilon}{\rho^\epsilon}| \leq M \tag{4.14}$$

para una constante M adecuada que no depende de ϵ. Por último, nótese que (4.2) garantiza que

$$meas\{\rho : 2\phi_\rho(\rho, w) + \rho\phi_{\rho\rho}(\rho, w) = 0\} = meas\{\rho : 2P'(\rho) + \rho P''(\rho) = 0\} = 0 \tag{4.15}$$

esto concluye la prueba. □

4.2. Ejemplo 2.

Consideremos el sistema

$$u_{it} + (u_i\phi(u_1, \ldots, u_n))_x = \epsilon u_{ixx}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{4.16}$$

donde ϕ es una función suave no negativa y convexa y $\lim_{|u_i|\to\infty} \phi(u_1, \ldots, u_n) = \infty$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Si multiplicamos la i-ésima ecuación en (4.16) por ϕ_{u_i}, y sumamos los resultados, se obtiene

$$\phi_t + \Big(\sum_{i=1}^n u_i\phi_{u_i} + \phi\Big)\phi_x = \epsilon\phi_{xx} - \sum_{i,j=1}^n \phi_{u_i u_j} u_{ix} u_{jx} \leq \epsilon\phi_{xx}. \tag{4.17}$$

Podemos aplicar el principio del máximo a (4.17) y obtener $\phi(u_i^\epsilon, \ldots, u_n^\epsilon) \leq M$, y así obtener la acotación $|u_i| \leq M$.
En particular, si

$$\phi(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^n |u_i|^{l_i}, \qquad l_i > 1.$$

se satisfacen las condiciones anteriores.

Bibliografía

[1] A. Aw and M. Rascle, *Resurrection of "second order"models of traffic flow*, Indiana. Univ. Math. J., **26** (1977), 373-392.

[2] R. A. Adams and J. F. Fournier, *Sobolev Spaces*, 2nd ed., Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 2003.

[3] F. Bouchut & F. James, *Duality solutions for pressureless gases, monotone scalar conservations laws, and uniqueness.* Comm. Partial Differential Equations 24 (1999) 2173-2190.

[4] Y. Brenier & E. Grenier, *On the model of pressureless gases withg sticky particles.* SIAM J. Numer. Anal. 35 (1999) 2317-2328.

[5] A. Bressan, *Hyperbolic Conservation Laws An Illustrated Tutorial*, Penn State University. (2009),Informe de Investigación. 81 p.

[6] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations* Univesity Text, USA, (2010).

[7] C.-Q, Chen, *The compensated compactness method applied to the system of isentropic gas dynamics.*Academi Sinica,1986.

[8] H. Freistuhler, *Rotational degeneracy of hyperbolic systems of conservation laws*, Arch. Ration. Mech. Anal. **113** (1990) 39-64.

[9] H. Freisthuhler, *On the Cauchy problem for a class of hyperbolic systems of conservation laws.* J. Diff. Eqs. 112 (1994), p. 170-178.

[10] H. Frid Neto, *Compacidade compensada aplicada às leis de conservação*, 19 colóquio Brasileiro de Matemática, Instituto De Matemática Pura E Aplicada.

[11] F.M. Huang & Z. Wang, *Well posedness for pressureles flow.* Comm. Math. Phys. 202 (2001) 117-146.

[12] E. L. Isaacson; J. B Temple. *Analysis of a Singular Hyperbolic System of Conservation Laws* . Journal of Differential Equations, **65** (1986), 250-268.

[13] F. James; Y.-J, Peng; B. Perthame. *Kinetic formulation for chromatography and some other hyperbolic systems*. J. Math. Pure Appl, **74** (1995), 367-385.

[14] K.H. Karlsen & J.D. Towers, *Convergence of the Lax-Friedrichs scheme and stability for conservation laws with a discontinuous space-time dependent flux*, Chin. Ann. Math. Ser. B 25 (2004) 287-318.

[15] A. Kearsley & A. Reiff, *Existence of weak solutions to a class of nonstrictly hyperbolic conservation laws with non-interacting waves.* Pacific J. Of Math. 205 (2002), P. 153-170.

[16] S. Kesavan, *Topics in functional analysis and applications.*, Jhon Wiley & Sons., 1989.

[17] B. Keyfitz & H. Kranzer, *A system of non-strictly hyperbolic conservation laws arising in elasticity*, Arch. Rat. Mech. Anal., **72** (1980), 219-241.

[18] T-P, Liu & J-H, Wang, *On a hyperbolic system of conservation laws which is not strictly hyperbolic.* J. Diff. Eqs. 57 (1985), p, 1-14.

[19] Y. G. Lu, *Some results on general system of compensated compactness method*, Chapman and Hall, New York, (2002).

[20] Y. G. Lu, *Hyperbolic conservations laws and the compensated compactness method*, Vol 128, Chapman and Hall, New York, (2002).

[21] Y.G Lu, *Existence Of Global Bounded Weak Solutions To Nonsymmetric Systems Of Keyfitz-Kranzer Type*, Nonlinear Ana. Real World Appl. 13 (2012) 235-240.

[22] Y.G Lu, *Existence of global Entropy Solutions To General System Of Keyfitz-Kranzer Type*, (2013), 2457-2468.

[23] Y.-G. Lu, *Existence of global bounded weak solutions to a symmetric system of Keyfitz-Kranzer type*, Nonlinear Anal. Real World Appl. **13** (2012) 235-240.

[24] M. H. Protter; H. F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1967).

[25] M. Schechter, *An Introduction to Nonlinear Analysis* Cambridge University Press (2004).

[26] R.P. Sperb, *Maximum principles an their applications*, Academic Press Inc. (1981), 20-24.

[27] L. Tartar, *The compensated compactness method applied to systems of conservation laws*, J.M. Ball ed., Systems of Nonlinear P.D.E., 263-285.

[28] Z. Wang & X. Ding, *Uniqueness of Cauchy problem for transport equation*, Acta Math. Sci. 17 (1997) 341-352.