Una obstrucción para extender la dualidad de Gelfand al contexto no conmutativo

Paul Fernando Camargo Toro

Matemático

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

Bogotá, D.C., Colombia

Enero de 2019

Una obstrucción para extender la dualidad de Gelfand al contexto no conmutativo

Paul Fernando Camargo Toro

Matemático

Trabajo final presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magíster en Ciencias - Matemáticas

Director

Lorenzo Acosta Gempeler,

Doctor en Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

Bogotá, D.C., Colombia

Enero de 2019

Aprende todo lo necesario para que tu vida sea más feliz.

Pitágoras

Agradecimientos

Una vez más, el profesor Lorenzo Acosta Gempeler Ph.D. ha dispuesto su tiempo, su amplio conocimiento, y en general, todo su esfuerzo, en dirgirme en el proceso de creación de un trabajo de grado. Es por esto, que de la manera más sincera y especial mis agradecimientos son para él. Por otro lado, agradezco también a toda mi familia, pues de diversas maneras me han ayudado a seguir avanzando en este hermoso camino de las matemáticas.

Resumen

Es bien sabida la importancia de la dualidad de Gelfand. En esta construcción, surge el funtor $\max\colon \mathsf{CommC^*alg} \to \mathbf{Set}$, que a cada C*-álgebra conmutativa unitaria C, asigna la colección $\max(C)$ de sus ideales maximales. Este texto está encaminado a demostrar que ningún funtor $F\colon \mathsf{C^*alg} \to \mathbf{Set}$, de la categoría de las C*-álgebras unitarias en la categoría de los conjuntos, cuya restricción $\mathscr{R}(F) : \mathsf{CommC^*alg} \to \mathbf{Set}$ sea tal $\mathscr{R}(F) \cong \max$, es fiel. La estrategia es la siguiente: Dado $A \in \mathsf{C^*alg}$, construiremos la colección $\mathrm{N}-\max(A)$ de sus N-ideales maximales y veremos que esta colección es el límite del diagrama $\max|_{\mathscr{C}^*(A)}$. Pasaremos entonces a construir el funtor $\mathrm{N}-\max\colon \mathsf{C^*alg} \to \mathbf{Set}$, demostrando que éste es un objeto terminal en la categoría $\mathscr{R}^{-1}(\max)$. Finalmente, apoyándonos en la propiedad universal de $\mathrm{N}-\max$ y usando un corolario del Teorema de Kochen-Specker de mecánica cuántica, veremos que para todo $F \in \mathscr{R}^{-1}(\max)$ se tiene que $F(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})) = \emptyset$ para cada $n \geq 3$. Esto nos permitirá demostrar que no existe una extensión de la dualidad de Gelfand entre $\mathsf{C^*alg}$ y una categoría que esté estructurada sobre $\mathbf{Set}$, es decir, un constructo.

Palabras clave: C*-álgebra, N-ideal maximal, funtor $\mathrm{N}-\max$**.**

Abstract

It is well known the importance of the Gelfand duality. In this construction, comes up the functor $\max\colon \mathsf{CommC^*alg} \to \mathbf{Set}$, which assigns to every commutative unital C*-algebra C, the collection $\max(C)$ of its maximal ideals. This paper aims to demonstrate that no functor $F\colon \mathsf{C^*alg} \to \mathbf{Set}$, from the category of the unital C*-algebras to the category of sets, whose restriction $\mathscr{R}(F) : \mathsf{CommC^*alg} \to \mathbf{Set}$ is such that $\mathscr{R}(F) \cong \max$, is faithful. The strategy is as follows: Given $A \in \mathsf{C^*alg}$, we will construct the collection $\mathrm{N}-\max(A)$ of its maximal N-ideals and we will see that this collection is the limit of the diagram $\max|_{\mathscr{C}^*(A)}$. We will then construct the functor $\mathrm{N}-\max\colon \mathsf{C^*alg} \to \mathbf{Set}$, proving that this is a terminal object in the category $\mathscr{R}^{-1}(\max)$. Finally, supported on the universal property of $\mathrm{N}-\max$ and using a corollary of the Kochen-Specker Theorem of quantum mechanics, we will show that for every $F \in \mathscr{R}^{-1}(\max)$ it is found that $F(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})) = \emptyset$ for each $n \geq 3$. This will allow us to demonstrate that it does not exist an extension of the Gelfand duality between $\mathsf{C^*alg}$ and a $\mathbf{Set}$ structured category, namely, a construct.

Key words: C*-algebra, maximal N-ideal, functor $\mathrm{N}-\max$**.**

Índice general

Introducción

Una de las construcciones más relevantes en las matemáticas modernas, es la dualidad de Gelfand. En esta construcción, a cada espacio topológico compacto y de Hausdorff X se le asigna mediante el funtor $\mathcal{C}$, la C*-álgebra conmutativa unitaria $\mathcal{C}(X)$, de las funciones continuas de X en $\mathbb{C}$, y a cada C*-álgebra conmutativa unitaria C se le asigna mediante el funtor $\max_{\mathrm{T}}$, el espacio topológico $\max_{\mathrm{T}}(C)$, de los ideales maximales de C con la topología débil*[1]. Más aún, la dualidad de Gelfand demuestra que la categoría de los espacios topológicos compactos y de Hausdorff es dual a la categoría de las C*-álgebras conmutativas unitarias. Su importancia radica en el hecho de establecer que todo espacio (con ciertas condiciones) es, en esencia, un álgebra de funciones. Esta propiedad ha sido ampliamente utilizada, sobre todo en geometría, pues permite el estudio de los espacios en términos algebraicos, y esta es la razón para que muchos matemáticos quieran extender esta dualidad al contexto no conmutativo, siendo esta, una de las aproximaciones más importantes a la *geometría no conmutativa*. (Ver, por ejemplo, [5] [7] [13] [16])

Es Manuel L. Reyes en 2011, quien en su artículo *Obstructing extensions of the functor Spec to noncommutative rings* [14], presenta un resultado contundente: dicha dualidad no puede ser extendida al caso no conmutativo usando los espacios topológicos, ni cualquier otra categoría estructurada sobre los conjuntos. De hecho, poco tiempo después, es publicado el artículo escrito por Benno van den Berg y Chris Heunen, *No-go theorems for functorial localic spectra of noncommutative rings* [4], en donde amplían el resultado conseguido por Reyes, demostrando que esta extensión de la dualidad de Gelfand al caso no conmutativo, tampoco puede darse en categorías estructuradas sobre los Locales, los Toposes o los Quantales.

Para obtener estos resultados es fundamental el uso del Teorema de Kochen-Specker. Este es un teorema de la física cuántica que prohíbe la existencia de ciertas teorías de observables ocultos y se expresa algebraicamente en términos de los elementos autoadjuntos de un álgebra de matrices [11].

[1] Ver página 320 en [15].

Reyes, en su artículo, desarrolla un trabajo enfocado en el funtor Spec, de la categoría de anillos en la categoría de los conjuntos. Primero, introduce la noción de *algebras parciales*, y desde allí desarrolla una serie de resultados y preliminares algebraicos, que le permiten, a partir de la colección de ideales parciales primos, construir el funtor $\mathrm{p}-\mathrm{Spec}$. Haciendo uso de los diagramas sobre los espectros de anillos conmutativos, logra demostrar que el funtor $\mathrm{p}-\mathrm{Spec}$ es un objeto terminal en la categoría de los funtores cuya restricción a los anillos conmutativos es isomorfa a Spec. Posteriormente, construye una biyección para cualquier anillo R, entre el conjunto $\mathrm{p}-\mathrm{Spec}\,(R)$ y la colección de ciertos morfismos de álgebras parciales. Justo después de esto, es en donde se presenta el Teorema de Kochen-Specker, pues este resultado es el que permite demostrar precisamente la no existencia de los morfismos de álgebras parciales anteriormente mencionados, cuando el anillo considerado es $\mathbb{M}_n\,(\mathbb{C})$, concluyendo así, que $\mathrm{p}-\mathrm{Spec}\,(\mathbb{M}_n\,(\mathbb{C})) = \emptyset$ cuando $n \geq 3$. Finalmente, extiende este resultado, mediante la propiedad universal del funtor $\mathrm{p}-\mathrm{Spec}$, obteniendo que $F\,(\mathbb{M}_n\,(\mathbb{C})) = \emptyset$ cuando $n \geq 3$, para cualquier funtor F de la categoría de los anillos a la categoría de los conjuntos cuya restricción sea isomorfa a Spec. Como una última parte de su artículo, presenta la línea argumentativa que permite obtener de manera similar el mismo resultado para el funtor max, de la categoría de las C*-álgebras en la categoría de los conjuntos, introduciendo en este caso, la noción de C*-álgebra parcial; en esta parte no entra mucho en detalles, sino que más bien lo hace ver como una prolongación natural de los resultados anteriormente expuestos para anillos.

En este texto, explicaremos de manera detallada el argumento presentado por Reyes, concentrándonos no en anillos, sino precisamente en las C*-álgebras. Cambiaremos un poco el lenguaje, buscando simplificar la manera como se desarrollan los temas, siendo de resaltar que se elude por completo el hecho de tener que abordar la noción de C*-álgebra parcial. La mayor parte de la teoría algebraica se construye dentro del ámbito propio de las C*-álgebras, con la idea de acercarnos lo más que sea posible, por decirlo de algún modo, a toda la información conmutativa contenida en las C*-álgebras, esto lo haremos, mediante la construcción de diagramas y límites, y usando las propiedades del conjunto de elementos normales, y por supuesto, el conjunto de las C*-subálgebras conmutativas. Solo será necesario introducir, en la última sección del último capítulo, la noción de álgebra parcial, esto, con la intención de poder conectar al final con el Teorema de Kochen-Specker. Obtendremos también, en este caso, que $F\,(\mathbb{M}_n\,(\mathbb{C})) = \emptyset$ cuando $n \geq 3$, para cualquier funtor F de la categoría de las C*-álgebras a la categoría de los conjuntos cuya restricción sea isomorfa a max. En el artículo de Reyes, tampoco se profundiza mucho en el hecho de explicar por qué esta asignación de estos anillos o C*-álgebras de matrices con el conjunto vacío no permite la extensión de los funtores Spec y max; en este trabajo, por el contrario, presentaremos como resultado final, una demostración de este hecho, obteniendo, como característica "adicional", que estas posibles extensiones, no solo colapsan las álgebras de matrices en el vacío, sino que tampoco pueden ser funtores fieles.

El capítulo 1 estará enfocado en brindar al lector un primer acercamiento a la Teoría de Categorías y en proporcionar algunas herramientas fundamentales para el desarrollo que se hará en los dos capítulos posteriores. En la Sección 1.1. daremos las definiciones de categoría y funtor, acompañándolas con algunos ejemplos. Después de esto, en la Sección 1.2. realizaremos la construcción de una categoría en donde sus objetos son funtores, introduciendo para esto, la noción de transformación natural. Finalizaremos este primer capítulo presentando los conceptos de diagrama y límite.

En el capítulo 2, para una C*-álgebra arbitraria A, estudiaremos la estrecha relación que existe entre $N(A)$, su colección de elementos normales, y $\mathscr{C}^*(A)$, el conjunto parcialmente ordenado de sus C*-subálgebras conmutativas (ordenado por inclusión). En la Sección 2.2. consideraremos el diagrama que surge al restringir el funtor max a $\mathscr{C}^*(A)$, y con intención de construir el límite de dicho diagrama, definiremos el concepto de N-ideal maximal, notando por $\mathrm{N}-\max(A)$ la colección de los N-ideales maximales de A. Posteriormente, en la Sección 2.3. construiremos el funtor $\mathrm{N}-\max$.

En el capítulo 3, realizaremos un trabajo mucho más categórico que algebraico. En la Sección 3.1. construiremos la categoría $\mathscr{R}^{-1}(\max)$, en donde sus objetos son precisamente aquellos funtores de la categoría $\mathsf{C^*alg}$ (de las C*-álgebras) a la categoría **Set** (de los conjuntos), que cuando se restringen a $\mathsf{CommC^*alg}$ (la categoría de las C*-álgebras conmutativas) resultan ser isomorfos a max. Luego, en la Sección 3.2. mostraremos que $\mathrm{N}-\max$ es un objeto terminal en dicha categoría. Finalmente, en la Sección 3.3. haciendo uso del Teorema de Kochen-Specker, veremos que $\mathrm{N}-\max(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})) = \emptyset$ para cada $n \geq 3$, y por medio de la propiedad universal de $\mathrm{N}-\max$, extenderemos este resultado a todo funtor de $\mathscr{R}^{-1}(\max)$. Esto nos permitirá mostrar que ningún funtor $F \in \mathscr{R}^{-1}(\max)$ puede ser fiel.

CAPÍTULO 1

Preliminares categóricos

1.1. Categorías y Funtores

Para el estudio de los planteamientos posteriores, se hace necesario abordar varias colecciones con "demasiados elementos", es decir, colecciones tan grandes que ya no pueden ser consideradas como conjuntos. Por ejemplo, no llamaremos conjunto a la colección de todas las C*-álgebras, o a la colección de todos los conjuntos, elementos a los que nos referiremos (y sin dar la definición formal) como *clases*.

Comenzaremos con algunas definiciones, buscando simplemente ubicar al lector, sin proponernos ahondar demasiado en las propiedades, y más bien sí proveer del lenguaje de categorías y funtores del que haremos uso.

Definición 1.1.1. *Una **categoría** es una cuádrupla $\mathcal{Q} = (\mathfrak{A}, Hom, id, \circ)$ que consta de:*

- *Una clase $\mathfrak{A}$, cuyos elementos son llamados $\mathcal{Q}-$ objetos.*
- *Para cada par de elementos $A, B \in \mathfrak{A}$, un conjunto denotado por $Hom\,(A, B)$, cuyos elementos son llamados $\mathcal{Q}-$ morfismos de A a B.*
- *Para cada $A \in \mathfrak{A}$, un $\mathcal{Q}-$ morfismo $id_A \in Hom\,(A, A)$, al que llamaremos $\mathcal{Q}-$ identidad sobre A.*
- *Una ley de composición, que para cada $A, B, C \in \mathfrak{A}$, y cada $f \in Hom\,(A, B)$ y $g \in Hom\,(B, C)$, asigne un $\mathcal{Q}-$ morfismo $g \circ f \in Hom\,(A, C)$, al que llamaremos la **compuesta** de f y g.*

De tal forma que se cumplen las siguientes condiciones:

(i) *La composición es asociativa; es decir, si* $A, B, C, D \in \mathfrak{A}$*, y si* $f \in Hom\,(A, B)$*,* $g \in Hom\,(B, C)$ *y* $h \in Hom\,(C, D)$*, entonces* $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$*.*

(ii) *Las* $\mathcal{Q}-$ *identidades actúan como identidades con respecto a la composición; es decir, si* $A, B \in \mathfrak{A}$ *y* $f \in Hom\,(A, B)$*, entonces* $id_B \circ f = f$ *y* $f \circ id_A = f$*.*

(iii) *Los conjuntos* $Hom\,(A, B)$ *son disyuntos dos a dos.*

La clase $\mathfrak{A}$ de todos los $\mathcal{Q} -$ *objetos* es denotada usualmente por $Ob\,(\mathcal{Q})$, y la clase de todos los $\mathcal{Q} -$ *morfismos*, por $Mor\,(\mathcal{Q})$. También, de la misma forma en que se hace con las funciones, los $\mathcal{Q}-$ *morfismos* suelen ser representados por medio de flechas, es decir, si $f \in Hom\,(A, B)$, entonces diremos que $f : A \to B$ es un morfismo. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.1.2. La categoría **Set**, en donde $Ob\,(\mathbf{Set})$ es la clase de todos los conjuntos, $Hom\,(A, B)$ es el conjunto de todas las funciones de A en B, id_A es la función idéntica sobre A y $\circ$ es la composición usual de funciones.

Definición 1.1.3. *Diremos que la categoría* $\mathbb{K}$ *está* ***estructurada*** *sobre* ***Set****, si los objetos en* $\mathbb{K}$ *son de la forma* (X, Ω)*, en donde* X *es un conjunto y* Ω *es una estructura sobre* X *y los morfismos* $f\colon\ (X, \Omega) \to (X', \Omega')$ *son funciones de conjuntos* $f\colon X \to X'$ *que preservan dichas estructuras. En tal caso, llamaremos a* $\mathbb{K}$ *un* ***constructo****.*

Sobre los constructos se definen categorías muy importantes, y serán estas en las que más nos interesaremos y con las que trabajaremos en la mayor parte del texto. En estas categorías, id_A es siempre la función idéntica sobre A y $\circ$ es siempre la composición usual de funciones.

Ejemplo 1.1.4. La categoría **Top**, en donde $Ob\,(\mathbf{Top})$ es la clase de todos los espacios topológicos y $Hom\,(X, Y)$ es el conjunto de todas las funciones continuas de X en Y.

Ejemplo 1.1.5. La categoría $\mathbf{Ban_b}$[1], en donde $Ob\,(\mathbf{Ban_b})$ es la clase de todos los espacios de Banach y $Hom\,(A, B)$ es el conjunto de todas las transformaciones lineales acotadas de A en B.

Las categorías para las cuales su colección de objetos es un conjunto, son conocidas como ***categorías pequeñas.***

Ejemplo 1.1.6. Sea $(S, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, entonces podemos considerar la categoría pequeña $S_{\leq}$, en donde $Ob\,(S_{\leq}) = S$, y para cada $s, t \in S$

[1] El subíndice $_\mathbf{b}$ es debido a que considerando como objetos los espacios de Banach, también puede ser definida otra categoría, en donde los morfismos se definen de manera distinta.

tenemos que $Hom\,(s,t) = \{\varphi_{st}\}$ (el conjunto cuyo único elemento es la flecha φ_{st}) si y sólo si $s \leq t$, de lo contrario, $Hom\,(s,t) = \emptyset$. En esta categoría, la ley de composición funciona de acuerdo a la ley transitiva que cumple el orden $\leq$, es decir, si s, t, u son tales que $\varphi_{st} \in Hom\,(s,t)$ y $\varphi_{tu} \in Hom\,(t,u)$, entonces se cumple que $s \leq t \leq u$, luego $s \leq u$, por lo tanto definimos $\varphi_{tu} \circ \varphi_{st} := \varphi_{su}$. Para cada $s \in S$, el morfismo identidad es φ_{ss}, que existe gracias a que $s \leq s$.

Definición 1.1.7. *Sea $\mathcal{Q}$ una categoría, diremos que $\mathcal{Q}'$ es una* ***subcategoría*** *de $\mathcal{Q}$, si:*

(i) $Ob\,(\mathcal{Q}') \subseteq Ob\,(\mathcal{Q})$.

(ii) *para cada $A, B \in Ob\,(\mathcal{Q}')$ se cumple que $Hom_{\mathcal{Q}'}\,(A,B) \subseteq Hom_{\mathcal{Q}}\,(A,B)$.*

(iii) *la ley de composición de $\mathcal{Q}'$ coincide con la de $\mathcal{Q}$ restringida a los morfismos de $Mor\,(\mathcal{Q}')$ para los cuales la composición tiene sentido.*

(iv) *para cada $A \in Ob\,(\mathcal{Q}')$ se cumple que la $\mathcal{Q}' -$ identidad sobre A es igual a la $\mathcal{Q} -$ identidad sobre A.*

Si $\mathcal{Q}'$ es una subcategoría de $\mathcal{Q}$, y para cada $A, B \in Ob\,(\mathcal{Q}')$ se tiene que $Hom_{\mathcal{Q}'}\,(A,B) = Hom_{\mathcal{Q}}\,(A,B)$, diremos que $\mathcal{Q}'$ es una **subcategoría plena** de $\mathcal{Q}$.

Definición 1.1.8. *Si $\mathcal{Q}$ es una categoría y $f : A \to B$ es un $\mathcal{Q}-$morfismo, entonces f es llamado un* ***isomorfismo*** *siempre que exista $g : B \to A$, tal que $g \circ f = id_A$ y $f \circ g = id_B$. Tal morfismo g es llamado el inverso de f y será denotado por $g = f^{-1}$.*

Notemos que en la Definición *1.1.8.* decimos que g es ***el*** inverso de f. Esto se debe a que si un morfismo tiene inverso, éste es único.

Proposición 1.1.9. *Si $\mathcal{Q}$ es una categoría y $f : A \to B$ es un $\mathcal{Q} -$ isomorfismo, entonces el inverso de f es único.*

Demostración. Supongamos que $g, h : B \to A$ son inversos de f, entonces

$$g = g \circ id_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = id_A \circ h = h.$$

□

Pasaremos ahora a dotar con alguna estructura, la colección de todas las categorías. Con este objetivo definiremos los funtores, que serán los “morfismos”que nos permitan establecer relaciones entre las distintas categorías.

Definición 1.1.10. *Sean $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{P}$ categorías. Una función F de $\mathcal{Q}$ a $\mathcal{P}$ es llamada un **funtor** si para cada $C \in Ob(\mathcal{Q})$ se cumple que $F(C) \in Ob(\mathcal{P})$, y para cada $A, B \in Ob(\mathcal{Q})$ y $f \in Hom(A, B)$ se cumple que $F(f) \in Hom(F(A), F(B))$, de tal manera que:*

(i) *F preserva la composición; es decir, si $f, g \in Mor(\mathcal{Q})$ y se puede definir $f \circ g$, entonces $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.*

(ii) *F preserva los morfismos identidad; es decir, $F(id_A) = id_{F(A)}$.*

Los anteriores funtores son llamados también ***funtores covariantes***. Si cambiamos un poco la definición, de manera que para cada $f \in Hom(A, B)$ se tenga que $F(f) \in Hom(F(B), F(A))$, y para cada $f, g \in Mor(\mathcal{Q})$ se cumpla que $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$ —siempre que $f \circ g$ esté definido—, entonces estos funtores son llamados ***funtores contravariantes***.

Si $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{P}$ son categorías, denotaremos por $\mathsf{Fun}_{\mathsf{cov}}(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$ la colección de todos los funtores covariantes de $\mathcal{Q}$ en $\mathcal{P}$, y por $\mathsf{Fun}_{\mathsf{con}}(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$ la colección de todos los funtores contravariantes de $\mathcal{Q}$ en $\mathcal{P}$.

Los funtores contravariantes son de particular interés para nosotros, pues las categorías con las que trabajaremos en el siguiente capítulo se relacionan con este tipo de funtores.

Observación 1.1.11. Notemos que un funtor $F : \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ es técnicamente una familia de funciones; una de $Ob(\mathcal{Q})$ en $Ob(\mathcal{P})$, y para cada $A, B \in Ob(\mathcal{Q})$ una de $Hom(A, B)$ en $Hom(F(A), F(B))$ si F es covariante, o una de $Hom(A, B)$ en $Hom(F(B), F(A))$ si F es contravariante.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.1.12. Sea $\mathcal{Q}$ una categoría, entonces podemos considerar el ***funtor identidad*** $id_{\mathcal{Q}} : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ definido por: $id_{\mathcal{Q}}(A) = A$ para cada $A \in Ob(\mathcal{Q})$ y $id_{\mathcal{Q}}(f) = f$ para cada $f \in Mor(\mathcal{Q})$.

Ejemplo 1.1.13. Sean $\mathcal{Q}$ una categoría y $\mathcal{Q}'$ una subcategoría de $\mathcal{Q}$, entonces podemos considerar el ***funtor inclusión*** $\mathcal{J} \colon \mathcal{Q}' \to \mathcal{Q}$ definido por: $\mathcal{J}(A) = A$ para cada $A \in Ob(\mathcal{Q}')$ y $\mathcal{J}(f) = f$ para cada $f \in Mor(\mathcal{Q}')$.

Ejemplo 1.1.14. Sea $\mathbb{K}$ un constructo, entonces podemos considerar el ***funtor olvido*** $\mathcal{V} \colon \mathbb{K} \to \mathbf{Set}$ definido por: $\mathcal{V}((X, \Omega)) = X$ para cada $(X, \Omega) \in Ob(\mathbb{K})$ y $\mathcal{V}(f) = f$ para cada $f \in Mor(\mathbb{K})$.

Ejemplo 1.1.15. Sea $\mathcal{Q}$ una categoría y $A \in Ob(\mathcal{Q})$ un objeto arbitrario, entonces consideramos el ***funtor Hom covariante*** $Hom(A, \_) : \mathcal{Q} \to \mathbf{Set}$ definido por: $Hom\,(A,\_)\,(B) = Hom\,(A,B)$ para cada $B \in Ob\,(\mathcal{Q})$ y si $f \in Hom\,(B,C)$, entonces $Hom\,(A,\_)\,(f) = Hom\,(A,f)$, donde $Hom\,(A,f)\,(g) = f \circ g$ para cada $g \in Hom\,(A,B)$.

Ejemplo 1.1.16. Sea $\mathcal{Q}$ una categoría y $A \in Ob\,(\mathcal{Q})$ un objeto arbitrario, entonces consideramos el ***funtor Hom contravariante*** $Hom\,(\_,A) : \mathcal{Q} \to \mathbf{Set}$ definido por: $Hom\,(\_,A)\,(B) = Hom\,(B,A)$ para cada $B \in Ob\,(\mathcal{Q})$ y si $f \in Hom\,(B,C)$, entonces $Hom\,(\_,A)\,(f) = Hom\,(f,A)$, donde $Hom\,(f,A)\,(g) = g \circ f$ para cada $g \in Hom\,(C,A)$.

Una propiedad supremamente importante de todos los funtores es la siguiente, que nos permite garantizar que un isomorfismo es enviado también en un isomorfismo mediante cualquier funtor.

Proposición 1.1.17. *Sea $F : \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ un funtor. Si $A, B \in Ob\,(\mathcal{Q})$ y se tiene que $f \in Hom\,(A,B)$ es un isomorfismo, entonces $F\,(f)$ es un isomorfismo.*

Demostración. Supongamos que F es covariante, entonces

$$F\,(f) \circ F\left(f^{-1}\right) = F\left(f \circ f^{-1}\right) = F\,(id_B) = id_{F(B)}.$$

De la misma manera se observa que $F\,(f^{-1}) \circ F\,(f) = id_{F(A)}$.
La demostración en el caso en que F es un funtor contravariante es similar.

□

Los dos últimos ejemplos nos muestran que entre cada par de categorías pueden existir muchos funtores, de hecho nos proporcionan una manera de construir infinitos funtores covariantes e infinitos funtores contravariantes de $\mathcal{Q}$ en **Set** (siempre que $\mathcal{Q}$ sea una categoría con infinitos objetos). Otra forma de construir funtores es la composición de ellos, y la siguiente proposición nos garantiza que la compuesta de dos funtores es en efecto, un funtor.

Proposición 1.1.18. *Si $F : \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ y $G : \mathcal{P} \to \mathcal{R}$ son funtores, entonces la compuesta $G \circ F : \mathcal{Q} \to \mathcal{R}$ definida por $(G \circ F)\,(A) = G\,(F\,(A))$ para cada $A \in Ob\,(\mathcal{Q})$, y $(G \circ F)\,(f) = G\,(F\,(f))$ para cada $f \in Mor\,(\mathcal{Q})$, también es un funtor. Más aún, se cumple que:*

(i) *Si F y G son funtores del mismo tipo (covariantes o contravariantes), entonces $G \circ F$ es covariante.*

(ii) *Si F es covariante y G es contravariante (o viceversa), entonces $G \circ F$ es contravariante.*

Demostración. Su prueba se realiza a partir de la definición, y las condiciones se verifican fácilmente.

□

Como lo dijimos antes, los funtores son precisamente estas funciones que nos permiten establecer relaciones entre las categorías. Dentro de estas relaciones, la más fuerte es la de ser categorías isomorfas, y es la que presentaremos en este momento.

Definición 1.1.19. *Un funtor $F : \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ es llamado un **isomorfismo**, si existe un funtor $G : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ de tal forma que $G \circ F = id_{\mathcal{Q}}$ y $F \circ G = id_{\mathcal{P}}$. En tal caso, se dice que $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{P}$ son categorías **isomorfas**.*

Presentamos ahora algunas características de los funtores, que nos ayudarán más adelante a introducir la siguiente relación entre categorías.

Definición 1.1.20. *Sea $F : \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ un funtor, entonces:*

(i) *F es llamado un **encaje**, si F es inyectivo sobre los $\mathcal{Q} -$ morfismos.*

(ii) *F es llamada **fiel**, si todas las restricciones sobre los conjuntos Hom*

$$F : Hom\,(A, B) \to Hom\,(F\,(A)\,, F\,(B)) \quad \textit{(suponiendo que es covariante)}$$

son inyectivas.

(iii) *F es llamado **pleno**, si todas las restricciones sobre los conjuntos Hom son sobreyectivas.*

Observación 1.1.21. Notemos que un funtor es:

- un encaje si y sólo si es fiel e inyectivo sobre los objetos.
- un isomorfismo si y sólo si es fiel, pleno y biyectivo sobre los objetos.

Presentamos ahora una relación entre categorías, un poco más débil que el ser isomorfas, pero que preserva la noción de “ser lo mismo”. Esto será lo último que veamos antes de pasar a la siguiente sección.

Definición 1.1.22. *Un funtor $F : \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ es llamado una **equivalencia**, si F es fiel, pleno y para cada $B \in Ob\,(\mathcal{P})$ existe $A \in Ob\,(\mathcal{Q})$ tal que $F\,(A)$ es isomorfo a B. En tal caso, se dice que $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{P}$ son categorías **equivalentes** si F es covariante, ó **dualmente equivalentes** si F es contravariante.*

1.2. Transformaciones naturales

Resulta supremamente útil poderle dar estructura a distintos tipos de colecciones de funtores. Es así, que construiremos dos categorías cuyos objetos son funtores, y en donde los morfismos son conocidos como transformaciones naturales.

Definición 1.2.1. *Sean $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{P}$ categorías, y sean $F, G \in \mathsf{Fun}_{\mathsf{con}}(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$ dos funtores contravariantes. Diremos que η es una* ***transformación natural*** *de F en G, y escribiremos $\eta\colon F \Rightarrow G$ o equivalentemente $F \overset{\eta}{\Rightarrow} G$ si:*

(i) *para cada $A \in Ob(\mathcal{Q})$, η asigna un $\mathcal{P}-$ morfismo $\eta_A \in Hom(F(A), G(A))$, los cuales son llamados* ***componentes*** *de η.*

(ii) *para cada $A, B \in Ob(\mathcal{Q})$ y $f \in Hom(A, B)$, el siguiente diagrama resulta ser conmutativo*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & F(A) \arrow[r, "\eta_A"] & G(A) \\ B & F(B) \arrow[u, "F(f)"] \arrow[r, "\eta_B"'] & G(B) \arrow[u, "G(f)"'] \end{tikzcd}$$

es decir, se cumple que $\eta_A \circ F(f) = G(f) \circ \eta_B$.

De manera similar se puede definir lo que es una transformación natural entre funtores covariantes.

Recordemos también que en una categoría debe existir una ley de composición entre morfismos, por lo tanto, describiremos a continuación la composición entre transformaciones naturales.

Proposición 1.2.2. *Sean $F, G, H \in \mathsf{Fun}_{\mathsf{con}}(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$, y sean $F \overset{\eta}{\Rightarrow} G$ y $G \overset{\mu}{\Rightarrow} H$ transformaciones naturales. Si definimos $\mu \circ \eta$ tal que para cada $A \in Ob(\mathcal{Q})$ $(\mu \circ \eta)_A = \mu_A \circ \eta_A$, entonces $\mu \circ \eta$ es una transformación natural de F en H.*

Demostración. Para cada $A \in Ob(\mathcal{Q})$ se tiene que $\eta_A \in Hom(F(A), G(A))$ y $\mu_A \in Hom(G(A), H(A))$, por lo tanto

$$(\mu \circ \eta)_A = \mu_A \circ \eta_A \in Hom(F(A), H(A)).$$

Por otro lado, sean $A, B \in Ob(\mathcal{Q})$ y $f \in Hom(A, B)$. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & F(A) \arrow[r, "\eta_A"] & G(A) \arrow[r, "\mu_A"] & H(A) \\ B & F(B) \arrow[u, "F(f)"] \arrow[r, "\eta_B"'] & G(B) \arrow[u, "G(f)"] \arrow[r, "\mu_B"'] & H(B) \arrow[u, "H(f)"'] \end{tikzcd}$$

entonces $\eta_A \circ F(f) = G(f) \circ \eta_B$ y $\mu_A \circ G(f) = H(f) \circ \mu_B$, luego

$$\begin{aligned} (\mu \circ \eta)_A \circ F(f) &= (\mu_A \circ \eta_A) \circ F(f) = \mu_A \circ (\eta_A \circ F(f)) \\ &= \mu_A \circ (G(f) \circ \eta_B) = (\mu_A \circ G(f)) \circ \eta_B \\ &= (H(f) \circ \mu_B) \circ \eta_B = H(f) \circ (\mu_B \circ \eta_B) \\ &= H(f) \circ (\mu \circ \eta)_B \end{aligned}$$

□

Nuestra intención ahora es poder ver a $\mathsf{Fun}_{\mathsf{con}}(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$ como una categoría.

Proposición 1.2.3. *Sean $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{P}$ categorías, entonces $\mathsf{Fun}_{\mathsf{con}}(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$ puede ser dotada con una estructura de categoría, de la siguiente forma:*

- *Para cada par de elementos $F, G \in \mathsf{Fun}_{\mathsf{con}}(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$, diremos que $\eta \in Hom(F, G)$ si $\eta \colon F \Rightarrow G$ es una transformación natural.*
- *Para cada $F \in \mathsf{Fun}_{\mathsf{con}}(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$, el morfismo id_F es la transformación natural tal que para cada $A \in Ob(\mathcal{Q})$, se tiene $(id_F)_A = id_{F(A)}$.*
- *Para cada $F, G, H \in \mathsf{Fun}_{\mathsf{con}}(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$, y cada $\eta \in Hom(F, G)$ y $\mu \in Hom(G, H)$, la composición $\mu \circ \eta \in Hom(F, H)$ será como se definió en la Proposición 1.2.2.*

Demostración. Verifiquemos que la composición es asociativa, que las identidades están bien definidas y que los conjuntos *Hom* son disyuntos dos a dos.

(i) Sean $F, G, H, J \in \mathsf{Fun}_{\mathsf{con}}(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$ y sean $\eta \in Hom(F, G)$, $\mu \in Hom(G, H)$ y $\kappa \in Hom(H, J)$. Se tiene que para cada $A \in Ob(\mathcal{Q})$

$$\begin{aligned} (\kappa \circ (\mu \circ \eta))_A &= \kappa_A \circ (\mu \circ \eta)_A = \kappa_A \circ (\mu_A \circ \eta_A) = (\kappa_A \circ \mu_A) \circ \eta_A \\ &= (\kappa \circ \mu)_A \circ \eta_A = ((\kappa \circ \mu) \circ \eta)_A \end{aligned}$$

luego $\kappa \circ (\mu \circ \eta) = (\kappa \circ \mu) \circ \eta$.

(ii) Sean $F, G \in \mathsf{Fun}_{\mathsf{con}}(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$ y sea $\eta \in Hom(F, G)$. Para cada $A \in Ob(\mathcal{Q})$ se tiene que

$$(id_G \circ \eta)_A = (id_G)_A \circ \eta_A = id_{G(A)} \circ \eta_A = \eta_A,$$

luego $id_G \circ \eta = \eta$. Similarmente se ve que $\eta \circ id_F = \eta$.

(iii) Si suponemos que existe una transformación natural η, tal que $\eta \in Hom(F, G)$ y $\eta \in Hom(H, J)$ para algunos $F, G, H, J \in \mathsf{Fun}_{\mathsf{con}}(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$, entonces para cada $A \in Ob(\mathcal{Q})$ se tiene que $\eta_A \in Hom(F(A), G(A))$ y $\eta_A \in Hom(H(A), J(A))$, pero esto es una contradicción, pues al ser $\mathcal{P}$ una categoría, se tiene que estas dos últimas colecciones de morfismos son disyuntas. De esta manera, tenemos que $Hom(F, G)$ y $Hom(H, J)$ son disyuntos.

$\square$

Antes de pasar a la siguiente sección, introduciremos el concepto de isomorfismo natural y presentaremos un resultado relacionado.

Definición 1.2.4. *Sean $F, G \in \mathsf{Fun}_{\mathsf{con}}(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$, diremos que η es un* ***isomorfismo natural*** *entre F y G, si η visto como morfismo en $Hom(F, G)$ es un isomorfismo.*

Proposición 1.2.5. *Sean $F, G \in \mathsf{Fun}_{\mathsf{con}}(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$ y sea $\eta \in Hom(F, G)$, entonces η es un isomorfismo natural si y sólo si $\eta_A \colon F(A) \to G(A)$ es un isomorfismo para cada $A \in Ob(\mathcal{Q})$.*

Demostración. $(\Rightarrow)$
Como $\eta \in Hom(F, G)$ es un isomorfismo natural, sabemos entonces que existe $\eta^{-1} \in Hom(G, F)$. Sea $A \in Ob(\mathcal{Q})$, entonces $(\eta^{-1})_A : G(A) \to F(A)$ es el morfismo inverso de η_A pues

$$\eta_A \circ \left(\eta^{-1}\right)_A = \left(\eta \circ \eta^{-1}\right)_A = (id_G)_A = id_{G(A)}$$

y

$$\left(\eta^{-1}\right)_A \circ \eta_A = \left(\eta^{-1} \circ \eta\right)_A = (id_F)_A = id_{F(A)}.$$

$(\Leftarrow)$
Sea $A \in Ob(\mathcal{Q})$, se tiene que $\eta_A \colon F(A) \to G(A)$ es un isomorfismo, luego existe $(\eta_A)^{-1} : G(A) \to F(A)$, el morfismo inverso de η_A. Definamos μ de tal manera que

$$\mu_A := (\eta_A)^{-1}, \text{ para cada } a \in A$$

entonces $\mu \in Hom(G, F)$ y μ es el inverso de η. Demostrémoslo.
Sean $A, B \in Ob(\mathcal{Q})$ y $f \in Hom(A, B)$, como η es una transformación natural,

entonces se cumple que $\eta_A \circ F(f) = G(f) \circ \eta_B$, luego

$$\begin{aligned}
\mu_A \circ G(f) &= \mu_A \circ G(f) \circ id_{G(B)} = \mu_A \circ G(f) \circ \eta_B \circ (\eta_B)^{-1} \\
&= \mu_A \circ \eta_A \circ F(f) \circ (\eta_B)^{-1} = (\eta_A)^{-1} \circ \eta_A \circ F(f) \circ \mu_B \\
&= id_{F(A)} \circ F(f) \circ \mu_B \\
&= F(f) \circ \mu_B
\end{aligned}$$

luego $\mu \in Hom(G,F)$ y por la manera en que está defindo, es claro que $\mu = \eta^{-1}$.

$\square$

1.3. Diagramas y Límites

A partir de los diagramas, construiremos un tipo particular de objeto terminal que cumple una propiedad universal, estos objetos son llamados límites.

Definición 1.3.1. *Sean $\mathcal{Q}$ una categoría y $\mathcal{S}$ una categoría pequeña. Todo funtor contravariante $D\colon \mathcal{S} \to \mathcal{Q}$ es llamado **diagrama contravariante de forma $\mathcal{S}$ en $\mathcal{Q}$** o simplemente **diagrama contravariante**.*

De manera similar se puede definir la noción de diagrama covariante.

Ejemplo 1.3.2. Sea $F\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ un funtor contravariante. Si $(S, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y $S_{\leq}$ es una subcategoría de $\mathcal{P}$, entonces $F|_{S_{\leq}}\colon S \to \mathcal{Q}$ es un diagrama contravariante.

En este texto, los diagramas que estudiaremos serán todos contravariantes, por lo que nos referiremos a ellos sencillamente como diagramas.

Definición 1.3.3. *Sea $D\colon \mathcal{S} \to \mathcal{Q}$ un diagrama. Un **cono** sobre D está conformado por un objeto $A \in Ob(\mathcal{Q})$ (al que llamaremos **vértice** del cono), junto con una familia de morfismos $(f_S)_{S\in\mathcal{S}}$ tales que $f_S \in Hom(A, D_S)$ para cada $S \in \mathcal{S}$*

$$\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[dll, dotted, "f_S"'] \arrow[dl, dotted, "f_T"] \arrow[dr, dotted, "f_U"] \arrow[drr, dotted, "f_V"] & & \\
D(S) & D(T) & \cdots & D(U) & D(V)
\end{tikzcd}$$

de tal manera que para cada $S, T \in \mathcal{S}$ y cada $j \in Hom(S,T)$, el siguiente diagrama resulta ser conmutativo

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, dotted, "f_S"'] \arrow[dr, dotted, "f_T"] & \\ D(S) & & D(T) \arrow[ll, "D(j)"] \end{tikzcd}$$

es decir, se cumple que $D(j) \circ f_T = f_S$.

Definición 1.3.4. *Sea $D\colon \mathcal{S} \to \mathcal{Q}$ un diagrama. Diremos que $\left(L \xrightarrow{\pi_S} D(S)\right)_{S \in \mathcal{S}}$ es un* ***cono límite*** *de D, si es tal que para cada cono $\left(A \xrightarrow{f_S} D(S)\right)_{S \in \mathcal{S}}$, existe una única función $f \in Hom(A, L)$, tal que $\pi_S \circ f = f_S$ para cada $S \in \mathcal{S}$.*

$$\begin{tikzcd} & & A \arrow[ddll, dotted, "f_S"'] \arrow[ddl, dotted, "f_T"'] \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \arrow[ddr, dotted, "f_U"] \arrow[ddrr, dotted, "f_V"] & & \\ & & L \arrow[dll, "\pi_S"'] \arrow[dl, "\pi_T"'] \arrow[dr, "\pi_U"] \arrow[drr, "\pi_V"] & & \\ D(S) & D(T) & \cdots & D(U) & D(V) \end{tikzcd}$$

Notaremos entonces esta relación por $L = \varprojlim_{\mathcal{S}} D$ y llamaremos a L el ***límite*** *de D. Los morfismos π_S son llamados las* ***proyecciones*** *del límite.*

En la Definición *1.3.4.* podríamos referimos a ***el*** cono límite, más que a un cono límite, pues éste es único salvo isomorfismos.

Proposición 1.3.5. *Sea $D\colon \mathcal{S} \to \mathcal{Q}$ un diagrama. Si $\left(L \xrightarrow{\pi_S} D(S)\right)_{S \in \mathcal{S}}$ y $\left(L' \xrightarrow{\pi'_S} D(S)\right)_{S \in \mathcal{S}}$ son dos conos límite de D, entonces L y L' son isomorfos.*

Demostración. Por la definición de límite sabemos que:

- Existe un único $f \in Hom(L', L)$ tal que $\pi_S \circ f = \pi'_S$ para cada $S \in \mathcal{S}$.
- Existe un único $f' \in Hom(L, L')$ tal que $\pi'_S \circ f' = \pi_S$ para cada $S \in \mathcal{S}$.

- Existe un único $g \in Hom\,(L, L)$ tal que $\pi_S \circ g = \pi_S$ para cada $S \in \mathcal{S}$, pero como id_L cumple esta propiedad, entonces $g = id_L$.
- Existe un único $g' \in Hom\,(L', L')$ tal que $\pi'_S \circ g' = \pi'_S$ para cada $S \in \mathcal{S}$, pero como $id_{L'}$ cumple esta propiedad, entonces $g' = id_{L'}$

Por otro lado, para cada $S \in \mathcal{S}$ se cumple que

$$\pi_S \circ (f \circ f') = (\pi_S \circ f) \circ f' = \pi'_S \circ f' = \pi_S$$

pero ya sabemos que el único morfismo que puede hacer esto es id_L, entonces

$$f \circ f' = id_L.$$

Similarmente se puede mostrar que

$$f' \circ f = id_{L'}.$$

De esta manera $L' \xrightarrow{f} L$ es un isomorfismo.

$\square$

CAPÍTULO 2

El funtor $\mathrm{N} - \max$

En esta parte del texto haremos un estudio de las propiedades algebraicas de las C*-álgebras, prestando especial atención al conjunto de sus elementos normales. Además, apoyándonos en ciertos diagramas y límites, construiremos un funtor que analizaremos con más detalle en el siguiente capítulo.

Para simplificar la notación, de ahora en adelante identificaremos toda categoría simplemente por su colección de objetos, siempre que no haya ambigüedad en cuanto a sus morfismos, su ley de composición y sus morfismos identidad.

Todas las álgebras consideradas serán unitarias y los homorfismos correspondientes respetarán las unidades.

2.1. Las C*-álgebras

Comencemos presentando ciertas definiciones básicas del ámbito de las C*-álgebras.

Definición 2.1.1. *Sea A un álgebra de Banach sobre $\mathbb{C}$. Diremos que A es una* ***C*-álgebra*** *(C estrella álgebra), si sobre A se ha definido una aplicación $x \mapsto x^*$ de A en sí mismo, tal que para cada $x, y \in A$ y cada $\alpha \in \mathbb{C}$, se cumple que:*

(i) $(x + y)^* = x^* + y^*$

(ii) $(\alpha x)^* = \overline{\alpha} x^*$, *en donde $\overline{\alpha}$ es el conjugado usual de α.*

(iii) $(xy)^* = y^* x^*$

(iv) $(x^*)^* = x$

(v) $\|x^*x\| = \|x\|\|x^*\|$

*La aplicación $x \mapsto x^*$ recibe el nombre de **involución** y el elemento x^* es llamado el **adjunto** de x.*

Notemos que si A es una C*-álgebra entonces $0^* = 0$ y $1^* = 1$, pues para $x \in A$ se cumple que $0 + x^* = x^* = (0 + x)^* = 0^* + x^*$ luego $0^* = 0$. Y además, $1^* = 1\,(1^*) = (1^*)^*\,1^* = (1\,(1^*))^* = (1^*)^* = 1$.

Ejemplo 2.1.2. El álgebra de Banach $\mathbb{C}$ de los números complejos es una C*-álgebra considerando la involución dada por el conjugado usual. Más aún, ésta es la única posible involución que se puede definir sobre $\mathbb{C}$, pues para cada $x \in \mathbb{C}$ se tiene que $x^* = (x \cdot 1)^* = \overline{x}1^* = \overline{x}$.

Definición 2.1.3. *Sean A y B dos C*-álgebras. Si f es un homomorfismo de A en B, entonces f es llamado un ***-homomorfismo** (estrella homomorfismo) si f se comporta bien con las involuciones, es decir, $f(x^*) = f(x)^*$ para cada $x \in A$.*

Notaremos entonces por $\mathsf{C^*alg}$ la categoría de todas las C*-álgebras en donde los morfismos son precisamente los *-homomorfismos, y por $\mathsf{CommC^*alg}$ la subcategoría plena de $\mathsf{C^*alg}$ conformada por todas las C*-álgebras conmutativas.

De ahora en adelante, A será una C*-álgebra.

Definición 2.1.4. *Sea $A' \subseteq A$, diremos que A' es una **C*-subálgebra** de A, si las operaciones, la norma y la involución heredadas de A, dotan a A' con estructura de C*-álgebra.*

Definición 2.1.5. *Diremos que $a \in A$ es un **elemento normal** si $aa^* = a^*a$.*

Denotaremos entonces por $N(A)$ **el conjunto de elementos normales de** A y por $\mathscr{C}^*(A)$ **el conjunto parcialmente ordenado de todas las C*-subálgebras conmutativas de** A, ordenado por inclusión.

Pasaremos ahora a ver algunos resultados que nos proporcionan información muy importante sobre la relación que hay entre $N(A)$ y $\mathscr{C}^*(A)$, explicando, de cierta manera, por qué al estudiar las C*-subálgebras conmutativas, surge de manera natural la colección de elementos normales.

Lema 2.1.6. *Para cada $C \in \mathscr{C}^*(A)$, se tiene que $C \subseteq N(A)$.*

Demostración. Sea $a \in C$, como C es una C*-subálgebra conmutativa, sabemos que $a^* \in C$ y que $aa^* = a^*a$, entonces $a \in N(A)$, luego $C \subseteq N(A)$.

$\square$

Proposición 2.1.7. *Sea $a \in A$, entonces existe $C \in \mathscr{C}^*(A)$ tal que $a \in C$ si y sólo si $a \in N(A)$.*

Demostración. $(\Rightarrow)$
Tenemos que $a \in C$ y por el Lema *2.1.6.* sabemos que $C \subseteq N(A)$, luego $a \in N(A)$.
$(\Leftarrow)$
Sea $a \in N(A)$. Como $aa^* = a^*a$ entonces P_a, la colección de todos los polinomios en dos variables con coeficientes en $\mathbb{C}$ evaluados en (a, a^*), es un álgebra conmutativa sobre $\mathbb{C}$. De esta manera, es fácil ver que $C_a = \overline{P_a}$, la clausura de P_a es una C*-subálgebra conmutativa de A. Es claro que $a \in C_a$. □

Corolario 2.1.8. $\displaystyle\bigcup_{C \in \mathscr{C}^*(A)} C = N(A).$

En la demostración de la Proposición *2.1.7.* se realizó, para cada $a \in N(A)$, la construcción de una C*-subálgebra especial. La siguiente es una notable propiedad que cumplen estas C*-subálgebras.

Observación 2.1.9. Sea $a \in N(A)$, entonces para cada $C \in \mathscr{C}^*(A)$ con $a \in C$, se cumple que $C_a \subseteq C$; es decir, la colección de todas las C*-subálgebras conmutativas de A que contienen a a tiene un mínimo, y es C_a.

Antes de pasar a la siguiente sección, mencionemos una propiedad importante de los *-homomorfismos.

Proposición 2.1.10. *Sean $A, B \in \mathsf{C^*alg}$ y sea $f : A \to B$ un *-homomorfismo, si $C \in \mathscr{C}^*(A)$ entonces $f(C) \in \mathscr{C}^*(B)$.*

Demostración. Ver teorema 4.1.9. en [10]. □

2.2. Los diagramas $\max|_{\mathscr{C}^*(A)}$

Comencemos esta sección recordando que $\max\colon \mathsf{CommC^*alg} \to \mathbf{Set}$ es un funtor contravariante que está definido de la siguiente manera:

- Para cada $C \in \mathsf{CommC^*alg}$ se tiene que $\max(C)$ es la colección de todos los ideales maximales de C.
- Para cada $C, C' \in \mathsf{CommC^*alg}$ y cada $f \in Hom(C, C')$, se tiene que $\max(f)$ es tal que $\max(f)(M) = f^{-1}(M)$ para cada $M \in \max(C')$.

Además, también sabemos que el conjunto parcialmente ordenado $\mathscr{C}^*(A)$ es una subcategoría de $\mathsf{CommC^*alg}$, por lo tanto, como vimos en el Ejemplo *1.3.2.*, podemos considerar el diagrama

$$\max|_{\mathscr{C}^*(A)} \colon \mathscr{C}^*(A) \to \mathbf{Set}.$$

Buscando simplificar la notación, para cada $C \in \mathscr{C}^*(A)$, escribiremos $\max(C)$ en vez de $\max|_{\mathscr{C}^*(A)}(C)$.

Nuestra intención será entonces poder construir un cono límite para este diagrama. Con esta motivación damos la siguiente definición.

Definición 2.2.1. *Sea $M \subseteq A$, diremos que M es un* ***N-ideal maximal*** *de A si:*

(i) $M \subseteq N(A)$.

(ii) *Para cada $C \in \mathscr{C}^*(A)$, la intersección $M \cap C$ es un ideal maximal de C.*

Notaremos por $\mathrm{N}-\max(A)$ ***la colección de todos los N-ideales maximales de*** *A.*

Antes de mostrar que $\mathrm{N}-\max(A) = \lim\limits_{\leftarrow \mathscr{C}^*(A)} \max|_{\mathscr{C}^*(A)}$, veamos un resultado preliminar.

Lema 2.2.2. *Sea* $\left(X \xrightarrow{f_C} \max(C)\right)_{C \in \mathscr{C}^*(A)}$ *un cono sobre* $\max|_{\mathscr{C}^*(A)}$ *y sean $C, C' \in \mathscr{C}^*(A)$ tales que $C \subseteq C'$, entonces para cada $x \in X$ se tiene que $f_{C'}(x) \cap C = f_C(x)$.*

Demostración. Como $C \subseteq C'$, existe el morfismo inclusión $\varphi \in Hom_{\mathscr{C}^*(A)}(C, C')$, y se cumple que $\max(\varphi) \circ f_{C'} = f_C$, luego para cada $x \in X$

$$\begin{aligned} f_C(x) &= (\max(\varphi) \circ f_{C'})(x) = \max(\varphi)(f_{C'}(x)) = \varphi^{-1}(f_{C'}(x)) \\ &= f_{C'}(x) \cap C \end{aligned}$$

□

Proposición 2.2.3. $\mathrm{N}-\max(A)$ *es el límite del diagrama* $\max|_{\mathscr{C}^*(A)}$.

Demostración. Comencemos construyendo las proyecciones.
Para cada $C \in \mathscr{C}^*(A)$ definimos

$$\begin{aligned} \pi_C \colon \mathrm{N}-\max(A) &\longrightarrow \max(C) \\ M &\longmapsto M \cap C. \end{aligned}$$

Evidentemente estas funciones están bien definidas, por la manera en que se definió un N-ideal maximal.

• $\mathrm{N}-\max(A)$ junto con las proyecciones $(\pi_C)_{C\in\mathscr{C}^*(A)}$ forman un cono.

Sean $C, C' \in \mathscr{C}^*(A)$ y sea $\varphi \in Hom_{\mathscr{C}^*(A)}(C, C')$, es decir, $C \subseteq C'$, entonces para cada $M \in \mathrm{N}-\max(A)$ se tiene que

$$\begin{aligned}(\max(\varphi)\circ\pi_{C'})(M) &= \max(\varphi)(\pi_{C'}(M)) = \max(\varphi)(M\cap C') \\ &= (M\cap C')\cap C = M\cap C = \pi_C(M),\end{aligned}$$

luego $\max(\varphi)\circ\pi_{C'} = \pi_C$.

• El cono formado por $\mathrm{N}-\max(A)$ y las proyecciones $(\pi_C)_{C\in\mathscr{C}^*(A)}$ es límite.

Sea $\left(X \xrightarrow{f_C} \max(C)\right)_{C\in\mathscr{C}^*(A)}$ un cono, debemos mostrar que existe una única $f\colon X \to \mathrm{N}-\max(A)$ tal que para cada $C \in \mathscr{C}^*(A)$ se cumpla que $\pi_C \circ f = f_C$. Definamos

$$\begin{aligned} f\colon X &\longrightarrow \mathrm{N}-\max(A) \\ x &\longmapsto \bigcup_{C\in\mathscr{C}^*(A)} f_C(x).\end{aligned}$$

Veamos que f está bien definida. Sea $x \in X$, entonces

(i) Para cada $C \in \mathscr{C}^*(A)$, se tiene que $f_C(x)$ es un ideal maximal de C, luego $f_C(x) \subseteq C \subseteq N(A)$, por lo tanto

$$f(x) = \bigcup_{C\in\mathscr{C}^*(A)} f_C(x) \subseteq N(A).$$

(ii) Por otro lado, si $C \in \mathscr{C}^*(A)$, veremos que $f(x)\cap C$ es un ideal maximal de C. Más aún, mostremos que

$$f(x)\cap C = f_C(x)$$

$(\supseteq)$
Es claro que $f_C(x) \subseteq f(x)\cap C$, pues $f_C(x) \subseteq f(x)$ y $f_C(x) \subseteq C$.

$(\subseteq)$
Sea $a \in f(x)\cap C$. Como $a \in f(x)$, entonces existe $C' \in \mathscr{C}^*(A)$ tal que $a \in f_{C'}(x) \subseteq C'$, por lo tanto $C_a \subseteq C'$, entonces $f_{C'}(x)\cap C_a = f_{C_a}(x)$ luego

$$a \in f_{C_a}(x).$$

Además, como $a \in C$, tenemos que $C_a \subseteq C$, luego $f_C(x) \cap C_a = f_{C_a}(x)$, y entonces

$$a \in f_C(x),$$

por lo tanto $f(x) \cap C \subseteq f_C(x)$.

Al demostrar la igualdad $f(x) \cap C = f_C(x)$, hemos visto que $f(x) \cap C$ es un ideal maximal de C, y por lo tanto $f(x)$ es en efecto un N-ideal maximal de A, luego f está bien definida. Pero a partir de esta igualdad, también podemos asegurar que $\pi_C \circ f = f_C$ pues para cada $x \in X$

$$(\pi_C \circ f)(x) = \pi_C(f(x)) = f(x) \cap C = f_C(x).$$

Nos queda entonces simplemente demostrar que f es única.
Si $g \colon X \to \mathrm{N} - \max(A)$ es tal que $\pi_C \circ g = f_C$ para cada $C \in \mathscr{C}^*(A)$, entonces para cada $x \in X$ se cumple que

$$f_C(x) = (\pi_C \circ g)(x) = g(x) \cap C$$

luego

$$\begin{aligned} f(x) &= \bigcup_{C \in \mathscr{C}^*(A)} f_C(x) = \bigcup_{C \in \mathscr{C}^*(A)} (g(x) \cap C) = g(x) \cap \left(\bigcup_{C \in \mathscr{C}^*(A)} C \right) \\ &= g(x) \cap N(A) = g(x), \end{aligned}$$

y por lo tanto $g = f$.

□

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \arrow[ddll, dotted, "f_C"'] \arrow[ddl, dotted, "f_{C'}"'] \arrow[ddr, dotted, "f_D"] \arrow[ddrr, dotted, "f_{D'}"] & & \\
 & & \mathrm{N} - \max(A) \arrow[dll, "\pi_C"'] \arrow[dl, "\pi_{C'}"'] \arrow[dr, "\pi_D"] \arrow[drr, "\pi_{D'}"] \arrow[d, phantom, "\cdots"] & & \\
\max(C) & \max(C') & \cdots & \max(D) & \max(D')
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{N} - \max(A)$ es el límite del diagrama $\max|_{\mathscr{C}^*(A)}$

Consideremos ahora $A, B \in \mathsf{C^*alg}$ y $f : A \to B$ un *-homomorfismo. Nos gustaría saber cómo se relacionan $\mathrm{N} - \max(A)$ y $\mathrm{N} - \max(B)$ viéndolos como límites de sus respectivos diagramas $\max|_{\mathscr{C}^*(A)}$ y $\max|_{\mathscr{C}^*(B)}$.

De acuerdo con la Proposición 2.1.10., sabemos que para cada $C \in \mathscr{C}^*(A)$ se tiene que $f(C) \in \mathscr{C}^*(B)$, y por lo tanto $f|_C \in Hom(C, f(C))$, luego

$$\max(f|_C) \in Hom(\max(f(C)), \max(C)).$$

Además, como $f(C) \in \mathscr{C}^*(B)$, entonces existe la respectiva proyección del límite

$$\pi_{f(C)} \colon \mathrm{N} - \max(B) \longrightarrow \max(f(C)).$$

Así pues, para cada $C \in \mathscr{C}^*(A)$ se tiene que

$$\max(f|_C) \circ \pi_{f(C)} \in Hom(\mathrm{N} - \max(B), \max(C)).$$

Para simplificar la notación, definiremos

$$\Gamma_{f,C} := \max(f|_C) \circ \pi_{f(C)}.$$

Observemos que para cada $M \in \mathrm{N} - \max(B)$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{f,C}(M) &= \left(\max(f|_C) \circ \pi_{f(C)}\right)(M) = \max(f|_C)\left(\pi_{f(C)}(M)\right)\\
&= \max(f|_C)(M \cap f(C)) = f|_C^{-1}(M \cap f(C))\\
&= f|_C^{-1}(M) \cap f|_C^{-1}(f(C)) = \left(f^{-1}(M) \cap C\right) \cap \left(f^{-1}(f(C)) \cap C\right)\\
&= \left(f^{-1}(M) \cap C\right) \cap C = f^{-1}(M) \cap C
\end{aligned}$$

Proposición 2.2.4. *Sean $A, B \in \mathsf{C^*alg}$ y $f : A \to B$ un *-homomorfismo, entonces $\mathrm{N} - \max(B)$ junto con la familia de funciones $(\Gamma_{f,C})_{C \in \mathscr{C}^*(A)}$ forman un cono sobre $\max|_{\mathscr{C}^*(A)}$.*

Demostración. Sean $C, C' \in \mathscr{C}^*(A)$ y sea $\varphi \in Hom_{\mathscr{C}^*(A)}(C, C')$, es decir, $C \subseteq C'$, entonces para cada $M \in \mathrm{N} - \max(B)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
(\max(\varphi) \circ \Gamma_{f,C'})(M) &= \max(\varphi)(\Gamma_{f,C'}(M)) = \max(\varphi)\left(f^{-1}(M) \cap C'\right)\\
&= f^{-1}(M) \cap C' \cap C = f^{-1}(M) \cap C\\
&= \Gamma_{f,C}(M)
\end{aligned}$$

luego $\max(\varphi) \circ \Gamma_{f,C'} = \Gamma_{f,C}$.

$\square$

De esta manera, como $\mathrm{N}-\max(A)$ es el límite del diagrama $\max|_{\mathscr{C}^*(A)}$, sabemos que existe una única $\Gamma_f \in Hom\left(\mathrm{N}-\max(B), \mathrm{N}-\max(A)\right)$ tal que para cada $C \in \mathscr{C}^*(A)$

$$\pi_C \circ \Gamma_f = \Gamma_{f,C},$$

es decir

$$\pi_C \circ \Gamma_f = \max\left(f|_C\right) \circ \pi_{f(C)}.$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{N}-\max(B) \arrow[dll, "\pi_{f(C)}"'] \arrow[dl, "\pi_{f(C')}"'] \arrow[dd, dashed, "\exists!\Gamma_f"] \arrow[dr, "\pi_{f(D)}"] \arrow[drr, "\pi_{f(D')}"] & & \\
\max(f(C)) \arrow[dd, dotted, "\max(f|_C)"] & \max(f(C')) \arrow[dd, dotted, "\max(f|_{C'})"] & & \max(f(D)) \arrow[dd, dotted, "\max(f|_D)"] & \max(f(D')) \arrow[dd, dotted, "\max(f|_{D'})"] \\
 & & \mathrm{N}-\max(A) \arrow[dll, "\pi_C"'] \arrow[dl, "\pi_{C'}"'] \arrow[d, phantom, "\cdots"] \arrow[dr, "\pi_D"] \arrow[drr, "\pi_{D'}"] & & \\
\max(C) & \max(C') & \cdots & \max(D) & \max(D')
\end{tikzcd}$$

Proposición 2.2.5. *Sean $A, B \in \mathsf{C^*alg}$ y $f : A \to B$ un *-homomorfismo, entonces para cada $M \in \mathrm{N}-\max(B)$ se tiene que $\Gamma_f(M) = f^{-1}(M) \cap N(A)$.*

Demostración. Apoyándonos en los cálculos realizados en la demostración de la Proposición 2.2.3. sabemos que, para cada $M \in \mathrm{N}-\max(B)$

$$\begin{aligned}
\Gamma_f(M) &= \bigcup_{C \in \mathscr{C}^*(A)} \Gamma_{f,C}(M) = \bigcup_{C \in \mathscr{C}^*(A)} \left(f^{-1}(M) \cap C\right) \\
&= f^{-1}(M) \cap \left(\bigcup_{C \in \mathscr{C}^*(A)} C\right) \\
&= f^{-1}(M) \cap N(A)
\end{aligned}$$

□

Corolario 2.2.6. *Sean $A, B \in \mathsf{C^*alg}$ y $f : A \to B$ un *-homomorfismo, entonces para cada $M \in \mathrm{N-max}\,(B)$ se tiene que $f^{-1}(M) \cap N(A)$ es un N-ideal maximal de A.*

2.3. El funtor $\mathrm{N-max}$

Antes de pasar a construir el funtor $\mathrm{N-max}$, veamos un resultado preliminar.

Lema 2.3.1. *Sean $A, B \in \mathsf{C^*alg}$ y sea $f : A \to B$ un *-homomorfismo, entonces $N(A) \subseteq f^{-1}(N(B))$*

Demostración.

$$\begin{aligned} x \in N(A) &\Rightarrow xx^* = x^*x \Rightarrow f(xx^*) = f(x^*x) \Rightarrow f(x)f(x^*) = f(x^*)f(x) \\ &\Rightarrow f(x)f(x)^* = f(x)^* f(x) \Rightarrow f(x) \in N(B) \\ &\Rightarrow x \in f^{-1}(N(B)) \end{aligned}$$

□

Proposición 2.3.2. *Sea $\mathrm{N-max}\colon \mathsf{C^*alg} \to \mathbf{Set}$ definido de la siguiente manera:*

- *Si $A \in \mathsf{C^*alg}$, entonces $\mathrm{N-max}\,(A)$ es, como se definió antes, la colección de todos los N-ideales maximales de A.*
- *Si $A, B \in \mathsf{C^*alg}$ y $f \in Hom\,(A, B)$, entonces definimos $\mathrm{N-max}\,(f) := \Gamma_f$.*

Entonces $\mathrm{N-max}$ es un funtor contravariante.

Demostración. Sean $A, A_1, A_2, A_3 \in \mathsf{C^*alg}$, $f \in Hom\,(A_1, A_2)$ y $g \in Hom\,(A_2, A_3)$, debemos ver que

$$\mathrm{N-max}\,(id_A) = id_{\mathrm{N-max}(A)}$$

y que

$$\mathrm{N-max}\,(g \circ f) = \mathrm{N-max}\,(f) \circ \mathrm{N-max}\,(g)\,.$$

Veámoslo.
Sea $M \in \mathrm{N-max}\,(A)$, entonces se tiene que $M \subseteq N(A)$, luego

$$(\mathrm{N-max}\,(id_A))(M) = id_A^{-1}(M) \cap N(A) = M \cap N(A) = M = \left(id_{\mathrm{N-max}(A)}\right)(M)\,,$$

entonces

$$\mathrm{N-max}\,(id_A) = id_{\mathrm{N-max}(A)}.$$

Finalmente, para cada $M \in \mathrm{N} - \max(A_3)$ se tiene que

$$\begin{aligned} & \Big(\mathrm{N} - \max(f) \circ \mathrm{N} - \max(g)\Big)(M) = \mathrm{N} - \max(f)\Big(\mathrm{N} - \max(g)(M)\Big) \\ = \; & \mathrm{N} - \max(f)\Big(g^{-1}(M) \cap N(A_2)\Big) = f^{-1}\Big(g^{-1}(M) \cap N(A_2)\Big) \cap N(A_1) \\ = \; & f^{-1}\left(g^{-1}(M)\right) \cap f^{-1}(N(A_2)) \cap N(A_1) = f^{-1}\left(g^{-1}(M)\right) \cap N(A_1) \\ = \; & (g \circ f)^{-1}(M) \cap N(A_1) = \mathrm{N} - \max(g \circ f)(M), \end{aligned}$$

luego

$$\mathrm{N} - \max(g \circ f) = \mathrm{N} - \max(f) \circ \mathrm{N} - \max(g).$$

$\square$

CAPÍTULO 3

Imposibilidad de extender el funtor $\max$

En este capítulo haremos uso de todas las herramientas que hasta este momento hemos desarrollado, concentrándonos en estudiar los funtores $\max$ y $\mathrm{N}-\max$ y la estrecha relación que hay entre ellos.

3.1. La categoría $\mathscr{R}^{-1}(\max)$

Sea $\mathcal{J}\colon \mathsf{CommC^*alg} \to \mathsf{C^*alg}$ el funtor inclusión, entonces, para cada funtor $F\colon \mathsf{C^*alg} \to \mathbf{Set}$ podemos construir el funtor $F\circ\mathcal{J}\colon \mathsf{CommC^*alg} \to \mathbf{Set}$

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C^*alg} \arrow[dr, "F"] & \\
& \mathbf{Set} \\
\mathsf{CommC^*alg} \arrow[uu, hook, "\mathcal{J}"] \arrow[ur, "F\circ\mathcal{J}"'] &
\end{tikzcd}$$

En otras palabras, el funtor $\mathcal{J}$ nos permite realizar una asignación entre objetos de la categoría $\mathsf{Fun_{con}}(\mathsf{C^*alg}, \mathbf{Set})$ y objetos de la categoría $\mathsf{Fun_{con}}(\mathsf{CommC^*alg}, \mathbf{Set})$. El siguiente paso será entonces, convertir esta asignación de objetos, en un funtor.

Proposición 3.1.1. *Sea* $\mathscr{R}\colon \mathsf{Fun_{con}}(\mathsf{C^*alg}, \mathbf{Set}) \longrightarrow \mathsf{Fun_{con}}(\mathsf{CommC^*alg}, \mathbf{Set})$ *definido de la siguiente manera:*

- *Si* $F \in \mathsf{Fun_{con}}(\mathsf{C^*alg}, \mathbf{Set})$, *entonces* $\mathscr{R}(F) = F\circ\mathcal{J}$.

- *Si* $F, G \in \mathsf{Fun}_{\mathsf{con}}(\mathsf{C}^*\mathsf{alg}, \mathbf{Set})$ *y* $\eta \colon F \Rightarrow G$ *es una transformación natural, es decir, si* $\eta \in Hom(F, G)$*, entonces* $\mathscr{R}(\eta) \in Hom(\mathscr{R}(F), \mathscr{R}(G))$ *está definido como*
$$\mathscr{R}(\eta)_C = \eta_C \text{ para cada } C \in \mathsf{CommC}^*\mathsf{alg}.$$

Entonces $\mathscr{R}$ *es un funtor covariante.*

Demostración. Su prueba se realiza a partir de la definición, y las condiciones se verifican fácilmente.

□

El funtor $\mathscr{R}$ es conocido como el funtor restricción, y a partir de éste, podemos considerar la colección
$$\mathscr{R}^{-1}(\max),$$
de parejas (F, ϕ) tales que $F \in \mathsf{Fun}_{\mathsf{con}}(\mathsf{C}^*\mathsf{alg}, \mathbf{Set})$ y $\phi \colon \mathscr{R}(F) \Rightarrow \max$ es un isomorfismo natural.

Proposición 3.1.2. *Podemos dotar a* $\mathscr{R}^{-1}(\max)$ *con estructura de categoría, de la siguiente forma:*

- *Si* $(F, \phi), (F', \phi') \in \mathscr{R}^{-1}(\max)$*, entonces definimos* $Hom((F, \phi), (F', \phi'))$ *como la colección de todas las transformaciones naturales* $\psi \colon F \Rightarrow F'$ *tales que*
$$\phi = \phi' \circ \mathscr{R}(\psi).$$
- *Para cada* $(F, \phi) \in \mathscr{R}^{-1}(\max)$*, el morfismo* $id_{(F,\phi)} := id_F$*.*
- *La compuesta es la misma que en la categoría* $\mathsf{Fun}_{\mathsf{con}}(\mathsf{C}^*\mathsf{alg}, \mathbf{Set})$*.*

Demostración. Sean $\psi \in Hom((F, \phi), (F', \phi'))$ y $\psi' \in Hom((F', \phi'), (F'', \phi''))$, entonces $\phi = \phi' \circ \mathscr{R}(\psi)$ y $\phi' = \phi'' \circ \mathscr{R}(\psi')$, luego
$$\begin{aligned} \phi &= \phi' \circ \mathscr{R}(\psi) = (\phi'' \circ \mathscr{R}(\psi')) \circ \mathscr{R}(\psi) = \phi'' \circ (\mathscr{R}(\psi') \circ \mathscr{R}(\psi)) \\ &= \phi'' \circ \mathscr{R}(\psi' \circ \psi), \end{aligned}$$
es decir, $\psi' \circ \psi \colon F \Rightarrow F''$ es una transformación natural tal que $\phi = \phi'' \circ \mathscr{R}(\psi' \circ \psi)$, entonces, en efecto $\psi' \circ \psi \in Hom((F, \phi), (F'', \phi''))$. De esta manera, la composición está bien definida.
Las demás propiedades se verifican fácilmente.

□

El siguiente resultado nos muestra la fuerte relación que hay entre $\mathrm{N}-\max$ y max.

Proposición 3.1.3. $\mathscr{R}(\mathrm{N}-\max) = \max$

Demostración. Sean $C, D \in \mathsf{CommC^*alg}$ y sea $f : C \to D$ un *-homomorfismo, entonces

• $\mathrm{N}-\max(C) = \max(C)$.

$(\subseteq)$
Sea M un N-ideal maximal de C, entonces, como $C \in \mathscr{C}^*(C)$ sabemos que $M \cap C$ es un ideal maximal de C, pero $M \cap C = M$.
$(\supseteq)$
Sea M un ideal maximal de C. Es claro que $M \subseteq N(C)$ pues $N(C) = C$. Por otro lado, si $C' \in \mathscr{C}^*(C)$, entonces $C' \subseteq C$, luego existe $\varphi \in Hom(C', C)$ el morfismo inclusión, y por lo tanto $\max(\varphi)(M)$ es un ideal maximal de C', pero

$$\max(\varphi)(M) = \varphi^{-1}(M) = M \cap C'.$$

• $\mathrm{N}-\max(f) = \max(f)$.

Para cada $M \in \max(D) = \mathrm{N}-\max(D)$ se tiene que

$$\mathrm{N}-\max(f)(M) = f^{-1}(M) \cap N(C) = f^{-1}(M) \cap C = f^{-1}(M) = \max(f)(M).$$

□

De lo anterior, podemos concluir el siguiente resultado.

Proposición 3.1.4. $(\mathrm{N}-\max, id_{\max}) \in \mathscr{R}^{-1}(\max)$

Demostración. Consecuencia directa de la proposición anterior.

□

3.2. $\mathrm{N}-\max$ es un objeto terminal en $\mathscr{R}^{-1}(\max)$

En la sección final del capítulo anterior, pudimos establecer comportamientos de tipo límite para las colecciones $\mathrm{N}-\max(A)$; ahora, estableceremos la cualidad de objeto terminal para el funtor $\mathrm{N}-\max$.

Proposición 3.2.1. *Sea* $F \in \mathsf{Fun_{con}}(\mathsf{C^*alg}, \mathbf{Set})$*. Si existe una transformación natural* $\eta \in Hom(\mathscr{R}(F), \max)$*, entonces existe una única transformación natural* $\delta \in Hom(F, \mathrm{N}-\max)$ *tal que* $\mathscr{R}(\delta) = \eta$.

Demostración. La demostración la dividiremos en cuatro partes:
• Construyamos δ.
Sea $A \in \mathsf{C^*alg}$. Como η es una transformación natural en la categoría $\mathsf{Fun_{con}}\left(\mathsf{CommC^*alg}, \mathbf{Set}\right)$, entonces para cada $C \in \mathscr{C}^*\left(A\right)$ existe

$$\eta_C \colon F\left(C\right) \to \max\left(C\right),$$

y además, como F es un funtor contravariante, si consideramos $\varphi_C \colon C \to A$ el morfismo inclusión, entonces existe

$$F\left(\varphi_C\right) : F\left(A\right) \to F\left(C\right).$$

De esta manera, para cada $C \in \mathscr{C}^*\left(A\right)$ podemos construir

$$\eta_C \circ F\left(\varphi_C\right) : F\left(A\right) \to \max\left(C\right).$$

Para simplificar la notación definiremos

$$\Delta_C := \eta_C \circ F\left(\varphi_C\right).$$

Veamos entonces que $F\left(A\right)$ junto con la familia de funciones $\left(\Delta_C\right)_{C\in\mathscr{C}^*(A)}$ forman un cono sobre $\max|_{\mathscr{C}^*(A)}$.
Sean $C, C' \in \mathscr{C}^*\left(A\right)$ y sea $\varphi \in Hom_{\mathscr{C}^*(A)}\left(C, C'\right)$, es decir, $C \subseteq C'$, entonces, como η es una transformación natural, sabemos que

$$\eta_C \circ F\left(\varphi\right) = \max\left(\varphi\right) \circ \eta_{C'},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \max\left(\varphi\right) \circ \Delta_{C'} &= \max\left(\varphi\right) \circ \eta_{C'} \circ F\left(\varphi_{C'}\right) = \eta_C \circ F\left(\varphi\right) \circ F\left(\varphi_{C'}\right) \\ &= \eta_C \circ F\left(\varphi_{C'} \circ \varphi\right) = \eta_C \circ F\left(\varphi_C\right) = \Delta_C. \end{aligned}$$

Como $\mathrm{N} - \max\left(A\right)$ es el límite de $\max|_{\mathscr{C}^*(A)}$, sabemos entonces que existe una única $\delta_A \colon F\left(A\right) \to \mathrm{N} - \max\left(A\right)$, la cual definiremos como la componente de δ en A, tal que para cada $C \in \mathscr{C}^*\left(A\right)$ se cumple que

$$\pi_C \circ \delta_A = \Delta_C.$$

• Veamos que δ es una transformación natural.
Sean $A, B \in \mathsf{C^*alg}$ y sea $f \colon A \to B$ un *-homomorfismo, debemos mostrar que

$$\delta_A \circ F\left(f\right) = \mathrm{N} - \max\left(f\right) \circ \delta_B.$$

Notemos que para cada $C \in \mathscr{C}^*(A)$ podemos construir

$$\Delta_C \circ F(f) : F(B) \to \max(C),$$

y además, es claro que $F(B)$ junto con la familia de funciones $(\Delta_C \circ F(f))_{C \in \mathscr{C}^*(A)}$ forman un cono sobre $\max|_{\mathscr{C}^*(A)}$. Por lo tanto, como $\mathrm{N} - \max(A)$ es el límite de $\max|_{\mathscr{C}^*(A)}$, sabemos que $\delta_A \circ F(f) \in \mathit{Hom}(F(B), \mathrm{N} - \max(A))$ es el único morfismo tal que para cada $C \in \mathscr{C}^*(A)$ se cumple que

$$\pi_C \circ \delta_A \circ F(f) = \Delta_C \circ F(f).$$

Pero notemos también, que para cada $C \in \mathscr{C}^*(A)$ se tiene que $f|_C \in \mathit{Hom}(C, f(C))$, y como η es transformación natural, sabemos que

$$\eta_C \circ F(f|_C) = \max(f|_C) \circ \eta_{f(C)},$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\pi_C \circ \mathrm{N} - \max(f) \circ \delta_B &= \max(f|_C) \circ \pi_{f(C)} \circ \delta_B = \max(f|_C) \circ \Delta_{f(C)} \\
&= \max(f|_C) \circ \eta_{f(C)} \circ F\left(\varphi_{f(C)}\right) = \eta_C \circ F(f|_C) \circ F\left(\varphi_{f(C)}\right) \\
&= \eta_C \circ F\left(\varphi_{f(C)} \circ f|_C\right) = \eta_C \circ F(f \circ \varphi_C) \\
&= \eta_C \circ F(\varphi_C) \circ F(f) \\
&= \Delta_C \circ F(f),
\end{aligned}$$

luego $\delta_A \circ F(f) = \mathrm{N} - \max(f) \circ \delta_B$.

• Veamos que $\mathscr{R}(\delta) = \eta$.
Sea $C \in \mathsf{CommC^*alg}$, debemos ver que

$$\delta_C = \eta_C.$$

Para cada $D \in \mathscr{C}^*(C)$ sabemos que

$$\pi_D \circ \delta_C = \Delta_D,$$

en particular, como $C \in \mathscr{C}^*(C)$, se tiene que

$$\pi_C \circ \delta_C = \Delta_C = \eta_C \circ F(id_C) = \eta_C \circ id_{F(C)} = \eta_C,$$

pero

$$\pi_C = \max(id_C) = id_{\max(C)},$$

y por lo tanto

$$\eta_C = \pi_C \circ \delta_C = id_{\max(C)} \circ \delta_C = \delta_C.$$

• Veamos que δ es única.
Supongamos que $\mu\colon F \Longrightarrow \mathrm{N}-\max$ es tal que $\mathscr{R}(\mu)=\eta$, debemos mostrar que

$$\mu=\delta.$$

Sea $A\in \mathsf{C^*alg}$, entonces sabemos que $\delta_A\colon F(A)\to \mathrm{N}-\max(A)$ es el único morfismo tal que para cada $C\in\mathscr{C}^*(A)$ se tiene que

$$\pi_C\circ\delta_A=\Delta_C=\eta_C\circ F(\varphi_C)=\mu_C\circ F(\varphi_C),$$

pero para cada $C\in\mathscr{C}^*(A)$ se tiene que $\varphi_C\in \mathit{Hom}(C,A)$, y como μ es una transformación natural, sabemos que

$$\mu_C\circ F(\varphi_C)=\mathrm{N}-\max(\varphi_C)\circ\mu_A=\pi_C\circ\mu_A,$$

y por lo tanto

$$\mu_A=\delta_A.$$

$\square$

Corolario 3.2.2. *Si* $(F,\phi)\in\mathscr{R}^{-1}(\max)$, *entonces existe una única* $\delta\in \mathit{Hom}(F,\mathrm{N}-\max)$ *tal que* $\mathscr{R}(\delta)=\phi$.

El Corolario 3.2.2. nos dice entonces, entre otras cosas, que si $F\in \mathsf{Fun}_{\mathsf{con}}(\mathsf{C^*alg},\mathbf{Set})$ es tal que $\mathscr{R}(F)$, su restricción a la categoría $\mathsf{CommC^*alg}$, es isomorfo al funtor max, entonces para cada $A\in\mathsf{C^*alg}$ existe una función $\delta_A\colon F(A)\to\mathrm{N}-\max(A)$. Esta propiedad es muy importante, y la aprovecharemos en la siguiente sección.

3.3. El Teorema de Kochen-Specker

En esta última sección cambiaremos un poco el lenguaje, para así poder presentar el Teorema de Kochen-Specker.

Definición 3.3.1. *Diremos que P es un* ***álgebra parcial*** *sobre un anillo conmutativo k, si sobre P se han definido:*

- *Una relación binaria simétrica y reflexiva $\perp\subseteq P\times P$, llamada* ***conmesurabilidad***.
- *Unas operacionas parciales, producto y suma $\cdot,+\colon\ \perp\to P$.*
- *Una multiplicación por escalar $k\times P\to P$.*

- *Unos elementos* $0, 1 \in P$.

De tal forma que se cumplen las siguientes condiciones:

(i) *Para cada* $a \in P$ *se tiene que* $a \perp 0$ *y* $a \perp 1$, *y además, se cumple que* $a + 0 = 0 + a = a$ *y* $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.

(ii) *Las operaciones parciales respetan la conmesurabilidad, es decir, si* $a_1, a_2, a_3 \in P$ *y* $\lambda \in k$, *y se cumple que* $a_i \perp a_j$ $(1 \leq i, j \leq 3)$, *entonces* $(a_1 + a_2) \perp a_3$, $(a_1 \cdot a_2) \perp a_3$ *y* $(\lambda a_1) \perp a_2$.

(iii) *Si* $a_1, a_2, a_3 \in P$ *son como en* (ii), *entonces los valores de todos los polinomios conmutativos en* a_1, a_2 *y* a_3, *forman una* k*-álgebra conmutativa.*

Antes de ver un ejemplo, definamos un importante subconjunto de cada C*-álgebra.

Definición 3.3.2. *Sea* $A \in \mathsf{C^*alg}$, *diremos que* $a \in A$ *es un* ***elemento autoadjunto*** *si* $a^* = a$. *Denotaremos por* A_{sa} ***el conjunto de elementos autoadjuntos de*** A.

Nótese que todo elemento autoadjunto es también un elemento normal, es decir $A_{sa} \subseteq N(A)$.

Ejemplo 3.3.3. Para cada $A \in \mathsf{C^*alg}$, el conjunto A_{sa} puede ser dotado con estructura de álgebra parcial sobre $\mathbb{R}$, considerando $\perp \subseteq A_{sa} \times A_{sa}$ como la relación de conmutatividad, es decir, $a \perp b$ si y sólo si $ab = ba$, y considerando las operaciones parciales como las heredadas de A. Recordemos también, que justo después de presentar la Definición *2.1.1.* vimos que $0^* = 0$ y $1^* = 1$, luego $0, 1 \in A_{sa}$.

Cabe aclarar que esta no es la única manera de dotar a A_{sa} con estructura de álgebra parcial sobre $\mathbb{R}$, pero es un valioso ejemplo que utilizaremos en esta parte final del texto. Veremos una última definición antes de enunciar el Teorema de Kochen-Specker.

Definición 3.3.4. *Sean* P *y* R, *álgebras parciales sobre un anillo conmutativo* k. *Diremos que* $f\colon P \to R$ *es un* ***morfismo de álgebras parciales*** *si para cada* $a, b \in P$ *con* $a \perp b$, *y cada* $\lambda \in k$ *se cumple que:*

(i) $f(a) \perp f(b)$

(ii) $f(\lambda a) = \lambda f(a)$

(iii) $f(a + b) = f(a) + f(b)$

(iv) $f(ab) = f(a) f(b)$

(v) $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$

Teorema 3.3.5 (Teorema de Kochen-Specker)**.** *Sea $n \geq 3$ y sea $A = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, entonces no existen morfismos de $\mathbb{R}$-álgebras parciales $f\colon A_{sa} \to \mathbb{R}$.*

Con la intención de conectar el Teorema de Kochen-Specker con el funtor $\mathrm{N} - \max$, definiremos ahora, un nuevo tipo de morfismo, que nos servirá como una especie de puente, entre los morfismos de álgebras parciales y los *-homomorfismos.

Definición 3.3.6. *Sean $A, B \in \mathsf{C^*alg}$, diremos que una función $f\colon N(A) \to B$ es un **N*-homomorfismo** de A en B, si para cada $C \in \mathscr{C}^*(A)$ se tiene que $f|_C\colon C \to f(C)$ es un *-homomorfismo.*

En el caso conmutativo, la colección de ideales maximales de una C*-álgebra conmutativa resulta estar en biyeccción con una colección de morfismos (funcionales multiplicativos no nulos, de hecho). Mostraremos un resultado similar para las colecciones de N-ideales maximales, pero antes, veamos un lema.

Lema 3.3.7. *Sea $A \in \mathsf{C^*alg}$, si f y g son N*-homomorfismos de A en $\mathbb{C}$ tales que $f^{-1}(0) = g^{-1}(0)$, entonces $f = g$.*

Demostración. El caso en el que $f^{-1}(0) = N(A) = g^{-1}(0)$ es evidente, pues f y g serían ambos el N*-homomorfismo nulo. Por lo tanto supondremos en adelante que $f \neq 0$ y $g \neq 0$.
Sea $C \in \mathscr{C}^*(A)$ y sean $M = f^{-1}(0) = g^{-1}(0)$ y $M_C = M \cap C$. Para simplificar la notación, $f_C = f|_C$ y $g_C = g|_C$. Sabemos que $1 \in C$ y que $1 \notin M_C$, más aún

$$f_C(1) = f_C(1 \cdot 1) = f_C(1) f_C(1) = f_C(1)^2,$$

y como $f_C(1) \neq 0$ entonces $f_C(1) = 1$. Similarmente podemos ver que $g_C(1) = 1$.
Sea $a \in C$, definamos $\beta_a = g_C(a)$ y $m_a = a - \beta_a 1$. Se tiene entonces que $\beta_a \in \mathbb{C}$ y que $m_a \in M_C$ pues

$$g_C(m_a) = g_C(a) - \beta_a g_C(1) = g_C(a) - \beta_a = 0.$$

Además, como $a = m_a + \beta_a 1$, se cumple que

$$f_C(a) = f_C(m_a) + \beta_a f_C(1) = \beta_a f_C(1) = \beta_a = g_C(a).$$

De esta manera, para cada $C \in \mathscr{C}^*(A)$ se tiene que $f_C = g_C$.
Para finalizar, supongamos que existe $a \in N(A)$ tal que $f(a) \neq g(a)$, entonces $f_{C_a} \neq g_{C_a}$ y esto es una contradicción.

$\square$

Proposición 3.3.8. *Si $A \in \mathsf{C^*alg}$, entonces existe una biyección entre* $\mathrm{N} - \max(A)$ *y la colección de todos los N*-homomorfismos no nulos $f\colon N(A) \to \mathbb{C}$, que asigna a cada dicho f el N-ideal maximal $f^{-1}(0)$.*

Demostración. Sea $f\colon N(A) \to \mathbb{C}$ un N*-homomorfismo de A en $\mathbb{C}$. Es claro que $f^{-1}(0) \subseteq N(A)$, y además, si $C \in \mathscr{C}^*(A)$, entonces $f|_C\colon C \to f(C)$ es un *-homomorfismo, y por lo tanto $f^{-1}(0) \cap C = f|_C^{-1}(0)$ es un ideal maximal de C. De esta manera, $f^{-1}(0)$ resulta ser un N-ideal maximal de A.
Lo anterior nos permite ver que la asignación entre los N*-homomorfismos y los N-ideales maximales es en efecto una función, más aún, el Lema *3.3.7.* implica que esta asignación también es inyectiva. Veamos finalmente que es sobreyectiva, es decir, si $M \in \mathrm{N} - \max(A)$, debemos definir un N*-homomorfismo $f\colon N(A) \to \mathbb{C}$, de tal manera que $f^{-1}(0) = M$.
Como M es un N-ideal maximal de A, entonces para cada $C \in \mathscr{C}^*(A)$ sabemos que $M \cap C$ es un ideal maximal de C, por lo tanto, existe un único *-isomorfismo entre $C/(M \cap C)$ y $\mathbb{C}$[1]. Sea ρ_C el *-homomorfismo canónico entre C y $C/(M \cap C)$, y sea θ_C el *-isomorfismo único entre $C/(M \cap C)$ y $\mathbb{C}$, definiremos entonces f de tal manera que $f(a) = (\theta_C \circ \rho_C)(a)$, para cualquier $C \in \mathscr{C}^*(A)$ tal que $a \in C$.
Debemos mostrar entonces que f está bien definida, y para esto, basta ver, que dados $a \in N(A)$ y $C \in \mathscr{C}^*(A)$ tal que $a \in C$ se tiene que

$$(\theta_C \circ \rho_C)(a) = (\theta_{C_a} \circ \rho_{C_a})(a).$$

Verifiquémoslo.
Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
C_a \arrow[r, "\rho_{C_a}"] \arrow[d, hook, "\varphi_a"'] & C_a/(M \cap C_a) \arrow[d, "\Upsilon"] \arrow[dr, "\theta_{C_a}"] & \\
 & & \mathbb{C} \\
C \arrow[r, "\rho_C"'] & C/(M \cap C) \arrow[ur, "\theta_C"'] &
\end{tikzcd}$$

En donde $\Upsilon\colon C_a/(M \cap C_a) \to C/(M \cap C)$ está definida por

$$\Upsilon(x + M \cap C_a) = x + M \cap C,$$

para cada $x + M \cap C_a \in C_a/(M \cap C_a)$.
Υ está bien definida, pues si $x, y \in C_a$ son tales que $x - y \in M \cap C_a$, entonces, como $C_a \subseteq C$, se tiene que $M \cap C_a \subseteq M \cap C$, luego $x - y \in M \cap C$; Υ es inyectiva, pues si $x, y \in C_a$ son tales que $x - y \in M \cap C$, entonces $x - y \in M$, además $x - y \in C_a$

[1] Ver [6] Proposiciones 2.1.2. y 1.2.3.

pues C_a es C*-subálgebra, luego $x - y \in M \cap C_a$; y Υ es sobreyectiva, pues si $z + M \cap C \in C/(M \cap C)$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $z + M \cap C = \lambda \cdot 1 + M \cap C$, luego $\Upsilon(\lambda \cdot 1 + M \cap C_a) = z + M \cap C$. De esta manera,

$$\theta_C \circ \Upsilon \colon C_a/(M \cap C_a) \to \mathbb{C}$$

es un *-isomorfismo, luego

$$\theta_C \circ \Upsilon = \theta_{C_a}.$$

Notemos también que $\Upsilon \circ \rho_{C_a} = \rho_C \circ \varphi_a$, pues para cada $x \in C_a$,

$$(\Upsilon \circ \rho_{C_a})(x) = \Upsilon(x + M \cap C_a) = x + M \cap C = (\rho_C \circ \varphi_a)(x).$$

De esta manera

$$\theta_{C_a} \circ \rho_{C_a} = \theta_C \circ \Upsilon \circ \rho_{C_a} = \theta_C \circ \rho_C \circ \varphi_a,$$

en particular

$$(\theta_C \circ \rho_C)(a) = (\theta_{C_a} \circ \rho_{C_a})(a).$$

Es claro que $f \colon N(A) \to \mathbb{C}$ es un N*-homomorfismo, pues para cada $C \in \mathscr{C}^*(A)$ se cumple que $f|_C$ es un *-homomorfismo, pues $f|_C = \theta_C \circ \rho_C$.

Finalmente, $f^{-1}(0) = \bigcup_{C \in \mathscr{C}^*(A)} M \cap C = M \cap \left(\bigcup_{C \in \mathscr{C}^*(A)} C \right) = M \cap N(A) = M.$

□

Proposición 3.3.9 (Un corolario del Teorema de Kochen-Specker)**.** *Sea $n \geq 3$ y sea $A = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, entonces no existen N*-homomorfismos $f \colon N(A) \to \mathbb{C}$.*

Demostración. Supongamos que $f \colon N(A) \to \mathbb{C}$ es un N*-homomorfismo, entonces para cada $x \in A_{sa}$ se tiene que $f(x) = f(x^*) = f(x)^*$, luego $f(x) \in \mathbb{C}$ es un elemento autoadjunto. Pero de acuerdo con el Ejemplo 2.1.2., sabemos que la única posible involución en $\mathbb{C}$ es el conjugado usual de los números complejos. De esta manera, para cada $x \in A_{sa}$ se tiene que $f(x) = f(x)^* = \overline{f(x)}$, luego $f(x) \in \mathbb{R}$. Así pues, $f|_{A_{sa}} \colon A_{sa} \to \mathbb{R}$ es una función bien definida; más aún, como $A_{sa} \subseteq N(A)$, es fácil ver que $f|_{A_{sa}}$ es un morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras parciales, pero esto es una contradicción, pues por el Teorema de Kochen-Specker, sabemos que dichos morfismos no existen.

□

De esta manera, podemos presentar ahora el resultado central de este texto.

Teorema 3.3.10. *Sea F un funtor contravariante de la categoría de las C*-álgebras a la categoría de los conjuntos, cuya restricción a la categoría de las C*-álgebras conmutativas es isomorfo a* max, *entonces $F(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})) = \emptyset$ para todo $n \geq 3$.*

Demostración. Sea $n \geq 3$, y sea $A = \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \in \mathsf{C^*alg}$. Por la Proposición *3.3.8.* sabemos que existe una biyección entre $\mathrm{N} - \max(A)$ y la colección de todos los N*-homomorfismos no nulos de A en $\mathbb{C}$, pero de acuerdo con la Proposición *3.3.9.*, esta colección es vacía y por lo tanto $\mathrm{N} - \max(A) = \emptyset$.
Por otro lado, por las propiedades que cumple F, sabemos que existe un isomorfismo natural $\phi \colon \mathscr{R}(F) \Rightarrow \max$, tal que $(F, \phi) \in \mathscr{R}^{-1}(\max)$. El Corolario *3.2.2.* nos dice que existe una única transformación natural $\delta \in \mathit{Hom}(F, \mathrm{N} - \max)$ tal que $\mathscr{R}(\delta) = \phi$, en particular, existe una función $\delta_A \colon F(A) \to \mathrm{N} - \max(A)$, pero como $\mathrm{N} - \max(A) = \emptyset$, entonces $F(A) = \emptyset$.

$\square$

Veamos un corolario de este importante teorema.

Corolario 3.3.11. *Sea $F \in \mathsf{Fun_{con}}(\mathsf{C^*alg}, \mathbf{Set})$ tal que $\mathscr{R}(F)$ es isomorfo a $\max$, entonces para cada $A \in \mathsf{C^*alg}$, se cumple que $F(\mathbb{M}_n(A)) = \emptyset$ para todo $n \geq 3$.*

Demostración. Sea $n \geq 3$. Consideremos $\varphi \colon \mathbb{C} \to A$ el *-homomorfismo canónico, es decir, $\varphi(\lambda) = \lambda \cdot 1$. Este induce un *-homomorfismo $\varphi_n \colon \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{M}_n(A)$. De esta manera, $F(\varphi_n) : F(\mathbb{M}_n(A)) \to F(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ es una función, pero este último conjunto es vacío, y por lo tanto $F(\mathbb{M}_n(A)) = \emptyset$.

$\square$

Para finalizar, consideremos de nuevo el tema que motivó la realización de este trabajo, es decir, la extensión de la dualidad de Gelfand.

Teorema 3.3.12. *No existe una extensión de la dualidad de Gelfand para el caso no conmutativo, a una categoría que sea un constructo.*

Demostración. Supongamos que existen un constructo $\mathbb{K}$ y un funtor $F \colon \mathsf{C^*alg} \to \mathbb{K}$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C^*alg} \arrow[r, "F"] & \mathbb{K} \arrow[dr, "\mathcal{V}_{\mathbb{K}}"] & \\
& & \mathbf{Set} \\
\mathsf{CommC^*alg} \arrow[uu, hook, "\mathcal{J}"] \arrow[r, "\max_{\mathrm{T}}"'] & \mathbf{Top_{CH}} \arrow[ur, "\mathcal{V}_{\mathbf{Top_{CH}}}"'] &
\end{tikzcd}$$

En donde $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ es el funtor olvido del constructo $\mathbb{K}$, y $\mathcal{V}_{\mathbf{Top_{CH}}}$ es el funtor olvido del constructo $\mathbf{Top_{CH}}$. Notemos que $\mathcal{V}_{\mathbf{Top_{CH}}} \circ \max_{\mathrm{T}} = \max$ y además, $\mathcal{V}_{\mathbb{K}} \circ F$ es tal que $\mathscr{R}(\mathcal{V}_{\mathbb{K}} \circ F)$ es isomorfo a $\max$, y por lo tanto, por el Teorema *3.3.10.* sabemos que $(\mathcal{V}_{\mathbb{K}} \circ F)(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})) = \emptyset$ para todo $n \geq 3$.

Sea $A = \mathbb{M}_3(\mathbb{C})$, entonces $F(A) = (\emptyset, \Omega)$ en donde Ω es alguna estructura sobre $\emptyset$. Recordemos que en los constructos, los morfismos son funciones entre sus conjuntos subyacentes que respetan la estructura; en particular, $Hom_{\mathbb{K}}(F(A), F(A)) = \{\emptyset\}$, pues entre el vacío y el vacío solo puede existir la función vacía.
De esta manera, si logramos ver que en $Hom_{\mathsf{C^*alg}}(A, A)$ existe más de un elemento, habremos demostrado que el funtor F no es fiel, y por lo tanto no podrá ser una equivalencia.
Es claro que $id_A \in Hom_{\mathsf{C^*alg}}(A, A)$, luego basta construir $f\colon A \to A$ un *-homomorfismo tal que $f \neq id_A$. Recordemos que en las C*-álgebras de matrices, la involución está definida por la conjugada transpuesta, en particular, si $X \in A$, entonces $X^* = \overline{X}^T$. Sea

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces $M \in A$ y $M = M^{-1} = M^*$. Definamos $f\colon A \to A$ tal que $f(X) = MXM^{-1}$ para cada $X \in A$, entonces f es un *-homomorfismo, pues para cada $X, Y \in A$ y cada $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene que:

(i) $f(X+Y) = M(X+Y)M^{-1} = MXM^{-1} + MYM^{-1} = f(X) + f(Y)$.

(ii) $f(XY) = M(XY)M^{-1} = MXM^{-1}MYM^{-1} = f(X)f(Y)$.

(iii) $f(\lambda X) = M(\lambda X)M^{-1} = \lambda(MXM^{-1}) = \lambda f(X)$.

(iv) $f(X)^* = (MXM^{-1})^* = (M^{-1})^* X^* M^* = MX^*M^{-1} = f(X^*)$

Resta simplemente ver que $f \neq id_A$, pero esto se cumple, pues para cada $X = \left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{smallmatrix}\right) \in A$ se tiene que

$$f(X) = MXM^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b & c \\ -d & e & -f \\ g & -h & j \end{pmatrix}$$

□

Este teorema no lo debemos entender como una imposibilidad absoluta para poder extender la dualidad de Gelfand, más que eso, busca explicar que se necesita mucha creatividad a la hora de construir una categoría adecuada, pues esta no puede ser una categoría de espacios topológicos, o de estructuras algebraicas, o cualquier otro constructo.

Bibliografía

[1] Lorenzo Acosta, *Ideales, Homomorfismos y Topología*, Lecturas Matemáticas **Vol. 10** (1989), 101–109.

[2] Jiri Adamek, Horst Herrlich, and George E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories*, John Wiley & Sons, Inc., 1990.

[3] Warren Ambrose, *Structure Theorems for a Special Class of Banach Algebras*, Transactions of the American Mathematical Society **Vol. 57** (1945), no. 3, 364–386.

[4] Benno van den Berg and Chris Heunen, *No-go theorems for functorial localic spectra of noncommutative rings*, Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science **95** (2012), 21–25.

[5] Klaus Bichteler, *A generalization to the non-separable case of Takesaki's duality theorem for C*-algebras*, Inventiones Mathematicae **9** (1969), no. 1, 89–98.

[6] Paul F. Camargo, *El Teorema de representación de Gelfand-Neumark*, Universidad Nacional de Colombia (2014).

[7] Ichiro Fujimoto, *A Gelfand-Naimark theorem for C*-algebras*, Pacific Journal of Mathematics **184** (1998), no. 1, 95–119.

[8] Israil Gelfand, *Normierte Ringe*, Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S. **Vol. 9** (1941), no. 51, 3–24.

[9] Israil Gelfand and Mark Neumark, *Normed Rings with Involutions and their Representations*, Izvestiya Akademii Nauk SSSR Ser. Math. **Vol. 12** (1948), 445–480.

[10] Richard V. Kadison and John R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, vol. 1, Elementary Theory, Academic Press, Inc., 1983.

[11] Simon Kochen and Ernst Specker, *The Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics*, Journal of Mathematics and Mechanics (1967), no. 1, 59–87.

[12] Tom Leinster, *Basic Category Theory*, Cambridge University Press, 2014.

[13] Janusz Migda, *Non-commutative Gelfand-Naimark theorem*, Comment.Math.Univ.Carolin. **34** (1993), no. 2, 253–255.

[14] Manuel L. Reyes, *Obstructing Extensions of the Functor Spec to Noncommutative Rings*, Israel Journal of Mathematics **Vol. 192** (2012), no. 2, 667–698.

[15] George F. Simmons, *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw-Hill Book Company, 1963.

[16] Masamichi Takesaki, *A Duality in the Representation Theory of C*-algebras*, The Annals of Mathematics **85** (1967), no. 3, 370.