UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Enfoque Galoisiano de la ecuación de Schrödinger con potenciales polinomiales y polinomios de Laurent

Henock Venegas Gómez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas
Medellín, Colombia
2018

Enfoque Galoisiano de la ecuación de Schrödinger con potenciales polinomiales y polinomios de Laurent

Henock Venegas Gómez

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias-Matemáticas

Director:
Ph.D. David Blázquez-Sanz
Codirector:
Ph.D. Primitivo Acosta-Humánez

Línea de investigación:
Métodos algebraicos en ecuaciones diferenciales

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas
Medellín, Colombia
2018

Resumen

En este trabajo se estudia bajo que condiciones es posible encontrar integrabilidad en sentido Liouville para la ecuación de Schrödinger cuyos potenciales, en este caso polinomios de Laurent, poseen parámetros en sus coeficientes. Se introduce una serie de teoremas basados en el algoritmo de Kovacic que nos permiten analizar el problema anterior, encontrando entre otras cosas, una aproximación a generar potenciales polinomiales cuasi-resolubles de cualquier grado, un criterio de no integrabilidad para potenciales polinomios de Laurent. También hemos descrito explicitamente las soluciones Liouvillianas con potenciales conocidos, *e.g.*, el oscilador armónico perturbado y extendido el número de soluciones conocidas del potencial de Morse. Por otra parte, se demuestra que la integrabilidad Liouvilliana de ecuaciones de Schrödinger con potencial polinomio de Fourier es equivalente a la integrabilidad Liouvilliana de determinada ecuación tipo Schrödinger con potencial polinomio de Laurent.
Palabras clave: Ecuación de Schrödinger, Integrabilidad Liouvilliana, Teoría de Galois diferencial, Algoritmo de Kovacic.

Abstract

In this work we study under what conditions on the potential parameters it is posible to find Liouvillian integrability to the Schrödinger equation with Laurent polynomial potentials. We introduce a series of theorems consequence of Kovacic's algorithm in order to deal with our main problem, this tools allow us to determine, among others, an approximation to generate quasi-solvable polynomial potentials of any degree, a non-integrability criterion for Laurent polynomial potentials. we also have explicitly described Liouvillian solutions to the associated Schrödinger equation of well known potentials as the perturbed harmonic oscillator, we also have extended the number of known Liouvillian solutions to the Morse potential. On the other hand, we show that the Liouvillian integrability of Schrödinger equations with Fourier polynomial potentials is equivalent to the integrability of some Schrödinger-type equation with Laurent polynomial potential.
Keywords: Schrödigner equation, Liouvillian integrability, Differential Galois theory, Kovacic algorithm.

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Introducción

El principal objeto interés de este trabajo es la Ecuación de Schrödinger uno-dimensional, estacionaria, no relativista e independiente del tiempo

$$\partial_z^2 \Psi = (V - \lambda)\Psi$$

donde V es un polinomio, $V \in \mathbb{C}[z]$ o un polinomio de Laurent, $V \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$. A lo largo de este trabajo nos interesaremos en estudiar bajo que condiciones se pueden obtener soluciones Liouvillianas para la ecuación anterior.

Estructura de la Tesis

Capítulo 1.

Este capítulo es un resumen de algunos aspectos de la teoría de Picard-Vessiot que serán necesarios para el desarrollo de los capítulos posteriores. En él estudiaremos los conceptos de cuerpos diferenciales, también hablaremos sobre una formalización algebraica de las ecuaciones diferenciales, las extensiones de Picard-Vessiot, el Grupo de Galois diferencial. En la sección 1.6 daremos la noción de *Integrabilidad Liouvilliana* y finalmente en la sección 1.7 daremos una descripción del algoritmo de Kovacic.

Capítulo 2.

En este capítulo se hace un breve estudio del comportamiento asintótico de las soluciones de ecuaciones diferenciales de segundo orden normalizadas con coeficiente polinomial por medio del teorema 2.2.8 enunciado por Sibuya & Hsieh en [16]. También se presenta una generalización del teorema antes mencionado para ecuaciones con coeficientes polinomios de Laurent (teorema 2.2.12). En la sección 2.3 se describe el método de iteración asintótica o MIA, así como una generalización de este método a anillos diferenciales de característica cero. Se presenta también una relación entre el MIA y el caso 1 del algoritmo de Kovacic.

Capítulo 3.

En la Sección 3.1 se presenta el teorema 3.1.2 introducido por Acosta-Humánez y Blázquez-Sanz en [4], el cual caracteriza las soluciones Liouvillianas de ecuaciones diferenciales de segundo orden normalizadas con coeficiente polinomial. Luego en la sección 3.2 se presenta una serie de resultados que extienden el teorema 3.1.2 y caracteriza las soluciones Liouvillianas de ecuaciones con coeficientes polinomios de Laurent. En la sección 3.3 presentaremos una serie de teoremas introducidos por Ciftci *et al.* en [12, 13, 27] (Ver también [10]) los cuales dan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de soluciones polinomiales para la ecuación auxiliar descrita en la sección 2.3.1.

Capítulo 4.

Este capítulo esta dedicado a la aplicación del teorema 3.1.2. Realizamos un estudio desde el punto de vista Galoisiano del bien conocido oscilador armónico. También se estudia el potencial polinomial de grado cuatro, donde encontramos una fórmula de recurrencia para la parte polinomial de la solución de la Ecuación de Schrödinger. En cuanto al potencial de grado seis, notamos la existencia de una familia numerable de hipersuperficies cuyos puntos corresponden a valores de los parámetros y la energía de potenciales cuasi-resolubles. Finalmente, se estudian las condiciones suficientes para la existencia de soluciones Liouvillianas de la Ecuación de Schrödinger con potencial canónico.

Capítulo 5.

Este capítulo esta dedicado a la aplicación de los teoremas de la sección 3.2. Se da el ejemplo de un potencial no integrable (sección 5.1), podemos ver una aproximación similar en [3] con la diferencia que el teorema 3.2.4 al caracterizar los potenciales de orden impar, permite concluir de forma mas sencilla. Extendemos algunos resultados del oscilador armónico con una $\frac{b}{z^2}$-perturbación, estudiados en [1, 5]. Encontramos fórmulas explícitas para la parte polinomial de la solución Liouvilliana, además de condiciones de suficiencia para la existencia de estas. En la sección 5.3 vemos la relación entre los potenciales polinomios de Fourier y potenciales polinomios de Laurent, se realiza un estudio Galoisiano del potencial de Morse y se extienden algunos resultados en [1, 5].

Algo de Historia

En 1883, E. Picard dio el punto de partida a una teoría para ecuaciones diferenciales lineales análoga a la teoría de Galois clásica para ecuaciones algebraicas con la publicación de *Sur les groupes de transformations des équations differentielles linéares* (ver [23]), en este trabajo introduce la noción de *grupo de transformaciones lineales correspondientes a una ecuación diferencial lineal*, el cual conocemos hoy en día como grupo de Galois diferencial. En [22] Picard afirmó lo siguiente:

A toda ecuación diferencial de orden n le corresponde un grupo de transformaciones lineales en n variables que posee propiedades análogas al grupo de Galois de una ecuación algebraica.

Pero no fue hasta 1892 que su estudiante E. Vessiot demostrara este hecho en su tesis doctoral [31], dándole forma a una nueva teoría de Galois para ecuaciones diferenciales lineales.

Esta teoría siguió evolucionando gracias a matemáticos como J. Ritt (ver [26]), I. Kaplansky (ver [17]), E. Kolchin (ver [18]) por mencionar algunos. En 1986, J. Kovacic desarrolló un algoritmo, basado en la teoría de Galois differencial (ver [19]) para determinar en que casos una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes funciones racionales poseía soluciones Liouvillianas, aprovechando la clasificación de subgrupos algebraicos de $SL_2(\mathbb{C})$ y la ecuación de Riccati asociada.

El algoritmo de Kovacic ha sido desde entonces, en muchos trabajos herramienta fundamental para determinar soluciones Liouvillianas de la Ecuación de Schrödinger. En [4], Acosta-Humánez y Blázquez-Sanz utilizan el algoritmo de Kovacic para caracterizar las soluciones Liouvillianas de potenciales polinomiales. En [3] se realiza un estudio Galoisiano del potencial de Lennard-Jones generalizado. En [1, 2, 5] se realizan estudios Galoisianos de potenciales tanto polinomiales como polinomios de Laurent.

En [1], Acosta-Humánez introdujo el conjunto Λ. Este conjunto consta de todos los valores en la energía para los cuales la ecuación de Schrödinger es integrable en el sentido Liouville. Los potenciales para los cuales el conjunto Λ es finito se llaman algebraicamente cuasi-resolubles (en adelante, cuasi-resolubles).

En otros trabajos como [10, 12, 13, 27] en donde se han estudiado potenciales polinomiales de grado cuatro, seis, ocho y diez, aunque no se hayan desarrollado desde el punto de vista Galoisiano, guardan cierta sinergia con el algoritmo de Kovacic.

Este trabajo consiste en una extensión y mejoramiento significativo de la tesis de pregrado del autor, véase [6, 30].

Capítulo 1

Teoría Algebraica

1.1. Anillos y Cuerpos Diferenciales

Definición 1.1.1. *Una derivación sobre un anillo* $(R, +, \cdot)$*, es un mapa* $\partial : R \to R$ *que distribuye sobre la suma y satisface la regla de Leibniz, es decir, para todo* $a, b \in R$

1. $\partial(a + b) = \partial a + \partial b$,
2. $\partial(ab) = b\partial a + a\partial b$.

A la estructura (R, ∂) *la llamaremos anillo diferencial o bien un cuerpo diferencial en el caso que* R *sea un cuerpo.*

El conjunto $C_R = \{a \in R | \partial a = 0\}$ es un subanillo (subcuerpo) de R y lo llamaremos anillo (cuerpo) de constantes.

Ejemplo 1.1.2.

1. *Cualquier anillo se puede dotar de estructura diferencial, si consideramos la derivada nula, i.e.,* $\partial \equiv 0$.
2. *Sea* $(R, ')$ *un anillo diferencial. Definimos el anillo de polinomios diferenciables en las variables* $y_1, \cdots, y_n$*, notado por* $R\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$*, como el anillo de polinomios en infinitas variables*
$$R[y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_2, y_2', y_2'', \ldots, y_n, y_n', y_n'', \ldots].$$
La derivada en R *extiende a una derivada en* $R\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ *por medio de* $(y_i^{(j)})' = y_i^{(j+1)}$*. En caso de haber una sola variable indeterminada* y*,*
$$R\{y\} = R[y, y', \ldots, y^{(n)}, \ldots].$$
Para $P \in R\{y\}$*, decimos que* P *es de orden* n*, si* n *es el menor entero para el cual*
$$P \in R[y, y', \ldots, y^{(n)}].$$
3. *El cuerpo de las funciones racionales sobre los números complejos,* $\mathbb{C}(z)$*, junto a la derivada usual* $f \to \frac{df}{dz}$*. Forman un cuerpo diferencial, cuyo cuerpo de constantes es* $\mathbb{C}$.
4. $K((z))$*, el cuerpo de las series formales de Laurent con la derivada usual es un cuerpo diferencial, su cuerpo de consantes es* K.

Sea (A, ∂) un anillo diferencial y R un subanilo de A (en el sentido clásico) tal que R es estable bajo ∂. Luego ∂ restringe en R a una derivación. En este caso diremos que R es un subanillo diferencial, o bien, que A es una extensión diferencial o simplemente una extensión.
si consideramos (R_1, ∂_1) y (R_2, ∂_2) dos anillos diferenciales, un homomorfismo diferencial de anillos

$$\phi : R_1 \to R_2$$

es un homomorfismo de anillos que además satisface la condición

$$\phi\partial_1 = \partial_2\phi$$

Ejemplo 1.1.3. *Sea R un anillo diferencial y A/R una extensión. El mapa*

$$\begin{array}{cccc} \phi : & R\{y\} & \longrightarrow & A \\ & y^{(i)} & \mapsto & a^{(i)} \end{array}$$

es un homomorfismo diferencial, al cual llamaremos homomorfismo de evaluación.

1.2. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneos

Consideremos $(K,')$ un cuerpo diferencial. Un Sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden y rango n esta dado por

$$y' = Ay \tag{Δ_A}$$

donde $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ y $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$, los valores y_i son indeterminadas sobre el cuerpo K. Cuando no haya lugar a confusión notaremos el sistema (Δ_A) simplemente por (Δ). Por lo general, las soluciones del sistema diferencial (Δ_A) pertenecen a un cuerpo diferencial más grande que K. Por tanto sea E/K una extensión de K, el conjunto de soluciones del sistema diferencial (Δ_A) con valores en E

$$Sol_E(\Delta_A) = \{y = (y_1, \ldots, y_n)^T | y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j\}$$

es un C_E-espacio vectorial, basta ver que la suma de soluciones es de nuevo una solución y el producto de una constante y una solución es también una solución. Sin embargo, este hecho es trivial debido a la linealidad de la derivación.

Observación 1.2.1. *La derivación en un anillo diferencial R se puede extender a $M_n(R)$ actuando por componentes. Así, para $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$, tenemos que $A' = (a'_{ij})$. De lo que se sigue*

1. $(AB)' = A'B + AB'$, $A, B \in M_n(R)$.
2. $(A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1}$, $A \in Gl_n(R)$.

Definición 1.2.2. *Una matriz $F \in Gl_n(E)$ se dice fundamental para el sistema (Δ_A), si $F' = AF$.*

Lo siguiente es ver que el espacio de soluciones, $Sol_F(\Delta_A)$, como espacio vectorial tiene dimensión a lo sumo igual a su rango, para esto primero veamos el siguiente lema.

Lema 1.2.3. *Sean $F, \tilde{F} \in Gl_n(E)$ matrices fundamentales para el sistema (Δ_A). Entonces, existe una única matriz C con coeficientes constantes tal que $\tilde{F} = FC$.*

Prueba: Consideremos la matriz $F^{-1}\tilde{F}$ y apliquemos derivación

$$\begin{aligned}(F^{-1}\tilde{F})' &= (F^{-1})'\tilde{F} + F^{-1}(\tilde{F})' \\ &= -F^{-1}F'F^{-1}\tilde{F} + F^{-1}A\tilde{F} \\ &= -F^{-1}AFF^{-1}\tilde{F} + F^{-1}A\tilde{F} \\ &= -F^{-1}A\tilde{F} + F^{-1}A\tilde{F} \\ &= 0\end{aligned}$$

Por consiguiente $C = F^{-1}\tilde{F} \in Gl_n(E)$. □

Proposición 1.2.4. *El C_E espacio vectorial $Sol_E(\Delta_A)$ tiene dimensión a lo más n.*

Prueba: Suponga $y_1, \ldots, y_{n+1} \in E^{n\times 1}$ soluciones del sistema (Δ_A), linealmente independientes sobre C_E. Definamos las siguientes matrices

$$\tilde{F} = [y_1, \ldots, y_n], \quad F = [y_2, \ldots, y_{n+1}].$$

Como son soluciones tenemos que

$$(\tilde{F})' = A\tilde{F} \quad y \quad F = AF.$$

Supongamos ahora que $det(\tilde{F}) = 0$. Por tanto ha de existir $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T \in E^{n\times 1}$, diferente de cero tal que $\tilde{F}\lambda = 0$. Sea λ de tal forma que tenga el número minimo de entradas distindas de cero. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\lambda_i = 1$ para algún $i = 1, \ldots, n$. Por otro lado

$$\begin{aligned}0 &= (\tilde{F}\lambda)' \\ &= (\tilde{F})'\lambda + \tilde{F}\lambda' \\ &= A\tilde{F}\lambda + \tilde{F}\lambda' \\ &= \tilde{F}\lambda'\end{aligned}$$

Luego, el número de entradas distintas de cero en λ' es menor que en λ, lo cual viola la minimalidad de λ. Se sigue que $\lambda' = 0$, por lo que $y_1, \ldots, y_n$ son linealmente dependientes. Lo cual es absurdo, por tanto $det(\tilde{F}) \neq 0$. De forma análoga $det(F) \neq 0$, concluimos que $\tilde{F}$ y F son matrices fundamentales y por el lema anterior $\tilde{F} = FC$ con $C \in Gl_n(C_E)$. De aquí que y_{n+1} dependa linealmente de $y_1, \ldots, y_n$. □

1.2.1. Relación con los Módulos Diferenciales

Definición 1.2.5. *Sea $(K,')$un cuerpo diferencial. Un módulo diferencial (M, ∇) de dimensión n es un K-espacio vectorial de dimensión n, equipado con un mapa aditivo (conexión) $\nabla : M \to M$, tal que para $r \in K$ y $m \in M$*

$$\nabla(rm) = r'm + r\nabla(m).$$

Diremos que $m \in M$ es una sección horizontal, si $\nabla(m) = 0$. Dependiendo del contexo ∇ también puede ser llamada derivada o derivación.

Consideremos $\underline{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de M sobre K. Luego existen elementos $a_{ij} \in K$, $1 \leq i, j \leq n$ tales que $\nabla(e_j) = -\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$. Así para cada $m = \sum_{j=1}^{n} r_j e_j \in M$, $\nabla(m)$ tiene la forma

$$\nabla(m) = \nabla(\sum_{j=1}^{n} r_j e_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} (r_j' e_j - r_j \nabla(e_j)) = \sum_{j=1}^{n} r_j' e_j - \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} a_{ij} r_j) \tag{1.1}$$

es decir, ∇ esta determinada por su acción sobre $\underline{e}$. Para cada $A \in M_n(K)$, sea ∇_A la conexión cuya matriz en la base estándar es A, de (1.1) se sigue la fórmula

$$\nabla_A(y) = y' - Ay \tag{1.2}$$

como consecuencia inmediata de la fórmula (1.2) tenemos que las secciones horizontales de (K^n, ∇_A) satisfacen el sistema diferencial lineal de primer orden y rango n

$$y' = Ay \tag{1.3}$$

Por tanto obtenemos la siguiente equivalencia

$$\{conexiones\ en\ K^n\} \Leftrightarrow \{Sistemas\ diferenciales\ de\ primer\ orden\ y\ rango\ n\}$$

1.3. Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas

Sea $(K,')$ un cuerpo diferencial y sea $L(y)$ un polinomio diferencial en $K\{y\}$. Una ecuación diferencial lineal escalar homogénea es una expresión de la forma

$$L(y) = 0. \tag{1.4}$$

Una solución para la ecuación (1.4) es un elemento f (posiblemente en una extensión F/K) tal que $L(f) = 0$, el conjunto de las soluciones de la ecuación (1.4) con valores en F

$$Sol_F(L) = \{f \in K | L(f) = 0\}$$

forma un C_F espacio vectorial.
Supongamos ahora que

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y, \quad a_i \in K.$$

Entonces, a la ecuación $L(y) = 0$ se le puede asociar un sistema diferencial de primer orden y rango n, $Y' = A_L Y$, donde

$$A_L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

es llamada la matriz compañera de $L(y)$ Luego la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \phi: & Sol_F(L) & \longrightarrow & Sol_F(\Delta_{A_L}) \\ & f & \mapsto & \begin{bmatrix} f \\ f' \\ \vdots \\ f^{(n-1)} \end{bmatrix} \end{array}$$

es un homomorfismo de C_f espacios vectoriales. Más aún, ϕ es un isomorfismo. Podemos concluir que las ecuaciones diferenciales lineales escalares son un caso particular de los sistemas diferenciales de primer orden. Debido a este hecho, por la proposición 1.2.4 tenemos lo siguiente

Corolario 1.3.1. *Sea K un cuerpo diferencial y $L(y) \in K\{y\}$, tal que el orden de $L(y)$ es n. Consideremos la ecuación $L(y) = 0$, entonces $dim_{C_K} Sol_K(L) \leq n$.*

Definición 1.3.2. *Sea K un cuerpo y sean $y_1, \ldots, y_n \in K$. La matriz Wroskiana de $y_1, \ldots, y_n$ es la matriz*

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

y el wroskiano, al cual notaremos por $Wr(y_1, \ldots, y_n)$, el determinante de la matriz wroskiana.

Lema 1.3.3. *Los valores $y_1, \ldots, y_n \in K$ son linealmente independientes sobre C_K si y solamente si $Wr(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$.*

1.4. Extensiones de Picard-Vessiot

Definimos ahora las extensiones de Picard-Vessiot para ecuaciones diferenciales lineales homogéneas sobre un cuerpo diferencial, estas son el análogo a los cuerpos de descomposición de un polinomio en la teoría de Galois clásica.

Definición 1.4.1. *Sea K un cuerpo diferencial. Decimos que L/K es una extensión de Picard-Vessiot para el sistema diferencial*

$$y' = Ay, \quad A \in M_n(K) \tag{Δ}$$

si

1. *$dim_{C_L} Sol_L(\Delta) = n$,*

2. *L es generado sobre K, como cuerpo, por las soluciones de (Δ) en L,*

3. *K y L tienen el mismo cuerpo de constantes, i.e., $C_K = C_L$.*

Teorema 1.4.2. *[20, teorema 3.4, pág 25]-[Existencia] Si K es un cuerpo diferencial, su cuerpo de constantes es algebraicamente cerrado, entonces existe una extensión de Picard-Vessiot L/K para Δ.*

Teorema 1.4.3. *[20, teorema 3.5, pág 25]-[Unicidad] Si L_1/K y L_2/K son extensiones de Picard-Vessiot para Δ, entonces existe un isomorfismo $L_1 \simeq L_2$ que deja fijo a K.*

Teorema 1.4.4. *[20, Lema, pág 24]-[Minimalidad] Si L_1/K y L_2/K son extensiones de Picard-Vessiot para Δ tal que $F_1 \subseteq F_2$, entonces $F_1 = F_2$.*

Ejemplo 1.4.5. *Considere K un cuerpo diferencial. Sea α un elemento de un cuerpo diferencial más grande tal que $\alpha' = a \in K$, donde a no es una derivada en K. Decimos que $L = K\langle\alpha\rangle$ se obtiene de K mediante la adjunción de una integral. Veamos que α es trascendente sobre K y L es una extensión de Picard-Vessiot.*
Primero, supongamos que α es algebraico sobre K, por tanto α satisface una ecuación polinomial sobre K

$$P(x) = x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n, \quad b_i \in K. \tag{1.6}$$

Por tanto

$$\alpha^n + b_1\alpha^{n-1} + \cdots + b_n = 0 \tag{1.7}$$

derivando obtenemos

$$n\alpha^{n-1}a + b_1'\alpha^{n-1} + \cdots = 0 \tag{1.8}$$

se sique que $a = (\frac{b_1}{n})'$, lo que contradice la hipótesis, por consiguiente α es trascendente sobre K. Veamos ahora que L no posee nuevas constantes. Asumamos que $\sum_{i=0}^{n} b_1\alpha^{n-1}$ con $b_i \in K$ es una constante, diferenciando obtenemos

$$b_0'\alpha^n + (nb_0a + b_1')\alpha^{n-1} + \cdots = 0 \tag{1.9}$$

entonces $a = -\frac{b_1'}{nb_0}$, lo cual contradice la hipótesis. Ahora asumamos que la función racional $\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$ con g mónico de grado impar mayor igual a uno y minimal es una constante. Diferenciando tenemos

$$\frac{f'(\alpha)g(\alpha)a - f(a)g'(\alpha)a}{g(a)^2} = 0 \tag{1.10}$$

de donde

$$\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} = \frac{f(\alpha)}{g(a)} \tag{1.11}$$

con $g'(\alpha)$ no nulo de grado menor que g, lo que contradice la hipótesis que la fracción $\frac{f}{g}$ está dada en términos mínimos.
Observe que 1 y α son soluciones de la ecuación $y'' - \frac{a'}{a}y' = 0$, linealmente independientes sobre las constantes, por tanto L/K es una extensión de Picard-Vessiot.

Ejemplo 1.4.6. *Sea K un cuerpo diferencial, u un elemento que satisface la ecuación $y' - ay = 0$, $a \in K$. Decimos que $L = K\langle u\rangle$ se obtiene de K por la adjunción de la exponencial de una integral. Supongamos que L tiene el mismo cuerpo de constantes que K, entonces es claro de la definición que L es una extensión de Picard-Vessiot de K.*

1.5. El Grupo de Galois Diferencial

Sea K un cuerpo diferencial y F/K una extensión de K, a esta extensión le podemos asignar un grupo, notado por $DGal(F/K)$, el cual consiste de todos los K-automorfismos diferenciales de F

Definición 1.5.1. *Consideremos L la extensión de Picard-Vessiot para el sistema $y' = Ay$, con $A \in M_n(K)$. Entonces al grupo*

$$DGal(\Delta_A) = \{\sigma : L \to L | \sigma(K) = K,\ \sigma\ es\ un\ isomorfismo\}$$

lo llamaremos el grupo de Galois diferencial asociado al sistema (Δ_A).

Supongamos que F es una matriz fundamental para el sistema (Δ_A) en la definición (1.5.1), y sea σ una simetría en $DGal(\Delta_A)$. Se sigue de cálculos directos que σF también es una matriz fundamental. Por el lema 1.2.3, $\sigma F = FC_\sigma$ donde C_σ es una matriz invertible con coeficientes en C_L. Luego el mapa

$$\begin{array}{rccc} \phi : & DGal(\Delta_A) & \longrightarrow & Gl_n(C_L) \\ & \sigma & \mapsto & C_\sigma \end{array}$$

es un homomorfismo de grupos, dado que este está completamente determinado por las entradas de F, es además un monomorfismo, por lo que podemos considerar el grupo de Galois diferencial $DGal(\Delta_A)$, como un subgrupo de matrices de $Gl_n(C_L)$. Más aún, $DGal(\Delta_A)$ tiene estructura de variedad algebraica.

Proposición 1.5.2. *El grupo de Galois diferencial $DGal(\Delta_A)$, es un subgrupo algebraico de $Gl_n(C_L)$.*

Ejemplo 1.5.3. *Siguiendo con el ejemplo 1.4.5, el grupo de Galois $DGal(L/K)$ es isomorfo al grupo aditivo de las constantes. En efecto, para cada simetría σ_c en $DGal(L/K)$, $\sigma_c(a) = a$, se sigue que el elemento α es enviado a $\alpha + c$, $c \in C_K$. Por tanto, en la base $\{1, \alpha\}$ la matriz asociada a σ_c pertenece al subgrupo aditivo*

$$(C_K, +) \simeq \mathbb{G}_a = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} :\ c \in C_k \right\}. \tag{1.12}$$

Como los únicos subgrupos algebraicos del grupo aditivo son el grupo identidad y el mismo tenemos que $DGal(L/K) \simeq \mathbb{G}_a$.

Ejemplo 1.5.4. *Continuando con el ejemplo 1.4.6, veamos que si u es algebraico sobre K entonces $u^n \in K$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Además, $DGal(L/K)$ es isomorfo a un subgrupo del grupo multiplicativo $(C_K^*, \cdot)$. En efecto, Supongamos que u es algebraico sobre K y sea $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ su polinomio minimal. Diferenciando obtenemos*

$$0 = P(u)' = P'(u)u' = p'(u)au = anu^n + \sum_{k=0}^{n-1}(a_k' + aka_k)u^k \tag{1.13}$$

como P es minimal, divide a este último polinomio. Por tanto $a_k' + aka_k = ana_k$, luego

$$a_k' = a(n-k)a_k,\ \ 0 \leq k \leq n-1 \tag{1.14}$$

de donde $(\frac{u^{n-k}}{a_k})' = 0$. *En particular,* $u^n = la_0$ *donde* $l \in C_K$.
Ahora, note que para cada σ_d *en* $DGal(L/K)$, $\sigma_d(u)' = \sigma_d(u') = \sigma_d(au) = a\sigma_d(u)$. *Así*

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_d(u)}{u}\right)' &= \frac{\sigma_d(u)'u - \sigma_d(u)u'}{u^2} \\ &= \frac{a\sigma_d(u)u - \sigma_d(u)au}{u^2} = 0 \end{aligned} \tag{1.15}$$

entonces $\sigma_d(u) = ud$ *para algún* $d \in C_K$. *Por lo que podemos identificar* $DGal(L/K)$ *con un subgrupo de* $(C_K^*, \cdot) \simeq \mathbb{G}_m$. *Si* $DGal(L/K)$ *es un subgrupo no trivial de* $\mathbb{G}_m$ *este debe ser finito, como los subgrupos finitos del grupo multiplicativo de un cuerpo son todos cíclicos,* $DGal(L/K)$ *es cíclico. Más aún, este caso corresponde a* u *algebraico sobre* K, *si* $u^n = b \in K$, *entonces* $\sigma(u)^n = \sigma(u^n) = b$, *se sigue que* $d^n = 1$, *por lo que* d *es una raíz* n*-esíma de la unidad y* $DGal(L/K)$ *es un grupo cíclico y finito.*

1.5.1. La Correspondencia de Galois Diferencial

Sea $y' = Ay$ un sistema diferencial definido sobre un cuerpo K y consideremos L/K su extensión de Picard-Vessiot. Si F es un cuerpo intermedio entre K y L podemos deducir que L/F es una extensión de Picard-Vessiot, si vemos los coeficientes de la ecuación $y' = Ay$ como elementos de F, con grupo de Galois diferencial

$$DGal(L/F) = \{\sigma \in DGal(L/K) | \sigma|_F = Id\}. \tag{1.16}$$

Si H es un subgrupo cerrado (Zariski) de $DGal(L/K)$, denotamos por L^H al subcuerpo H-fijo[1] de L, es decir,

$$L^H := \{x \in L | \sigma(x) = x, \forall \sigma \in H\}. \tag{1.17}$$

Como los elementos de $DGal(L/K)$ conmutan con la derivada en L, se sigue que L^H es un subcuerpo diferencial de L.

Teorema 1.5.5 (Correspondencia de Galois Diferencial)**.** *Con la notación anterior, consideremos los retículos,* $\mathcal{G}$ *de los subgrupos cerrados (Zariski) de* $DGal(L/K)$ *y* $\mathcal{K}$ *de los cuerpos intermedios de* L/K *y definamos*

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & \mathcal{G} & \to & \mathcal{K} \\ & H & \mapsto & L^H \end{array} \qquad y \qquad \begin{array}{rccc} \beta: & \mathcal{K} & \to & \mathcal{G} \\ & F & \mapsto & DGal(L/F) \end{array} \tag{1.18}$$

Entonces, los mapas α *y* β *son mutuamente inversos.*

Corolario 1.5.6. *Si el cuerpo fijo de* $G \leq DGal(L/K)$ *es* K, *entonces* G *es denso (Zariski) en* $DGal(L/K)$.

Prueba: Dado que tenemos la siguiente cadena de grupos $G < \bar{G} < DGal(L/K)$, el cuerpo fijo de $\bar{G}$ también es K. Por la correspondencia de Galois se sigue que $\bar{G} = DGal(L/K)$. □

[1] Consistente de los elementos invariantes por la acción de H

1.6. Extensiones Liouvillianas

El propósito de esta sección es dar una carateriización a ecuaciones diferenciales lineales homegéneas solubles por cuadraturas. Esto es el análogo a la caracterización de las ecuaciones algebraicas solubles por radicales.

Definición 1.6.1. *Sea* $(K,')$ *un cuerpo diferencial. Una extensión* F/K *se llama Liouvilliana si* $C_K = C_F$ *y además existe una cadena de cuerpos diferenciales*

$$K = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n = F$$

tal que $K_i = K_{i-1}(t_i)$ $i = 1, 2, \ldots, n$, *donde*

- $t_i' \in K_{i-1}$, *es decir,* t_i *es una integral, o*
- $t_i \neq 0$ *y* $t_i'/t_i \in K_{i-1}$, *es decir,* t_i *es una exponecial, o*
- t_i *es algebraico sobre* K_{i-1}.

Observación 1.6.2. *Sea* L/K *la extensión de Picard-Vessiot asociada al sistema diferencial* $y' = Ay$ *donde* $A \in M_n(K)$. *Decimos que las soluciones de* Δ_A *son Liouvillianas, si existe una extensión Liouvilliana* F *de* K *tal que* $K \subseteq L \subseteq F$.

Teorema 1.6.3. *(Caracterización de las soluciones Liouvillianas) Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. $DGal(\Delta_A)$ *es virtualmente soluble.*
2. L *es una extensión Liouvilliana de* K.
3. L *esta contenida en una extensión Liouvilliana de* K.

Ejemplo 1.6.4. $\mathbb{C}(x, e^{x^2}, \int e^{x^2}dx)$ *es una extensión liouvilliana de* $\mathbb{C}(x)$ *ya que existe la cadena de cuerpos diferenciales*

$$\mathbb{C}(x) \subset \mathbb{C}(x, e^{x^2}) \subset \mathbb{C}(x, e^{x^2}, \textstyle\int e^{x^2}dx)$$

donde cada extensión ha sido construida a partir de la anterior por la adjunción de exponeciales de funciones algebraicas y exponenciales de integrales de funciones algebraicas.

1.7. El Algoritmo de Kovacic

Consideremos la ecuación diferencial lineal homogénea

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{1.19}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones racionales con coeficientes complejos. Esta ecuación puede ser llevada a su forma normal, por medio de la transformada de D'Alembert. Por tanto, para el resto de esta sección, solamente consideraremos la ecuación

$$\mathcal{L}(y) := y'' + r(x)y = 0 \tag{1.20}$$

donde $r(x)$ es una función racional con coeficientes complejos.

Proposición 1.7.1. *Si $\mathcal{L}(y) = 0$ tiene una solución Liouvilliana, entonces toda solución es Liouvilliana.*

Prueba: Si y_1 es una solución Liouvilliana, usando reducción de orden, $y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2}$ es otra solución Liouvilliana. □

Proposición 1.7.2. *$DGal(\mathcal{L}) \subseteq SL_2(\mathbb{C})$*

Prueba: Sea $\{y_1, y_2\}$ un sistema fundamental de soluciones para $\mathcal{L}$. Luego,

$$Wr(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2 \tag{1.21}$$

Si derivamos $Wr(y_1, y_2)$ obtenemos

$$\begin{aligned} Wr'(y_1, y_2) &= y_1 y_2'' - y_1'' y_2 \\ &= y_1(ry_2) - (ry_1)y_2 = 0 \end{aligned} \tag{1.22}$$

Por consiguiente, $Wr(y_1, y_2)$ es constante. Así, para cualquier simetría $\sigma \in DGal(\mathcal{L})$ tenemos que

$$\sigma(Wr(y_1, y_2)) = Wr(y_1, y_2) \tag{1.23}$$

Por otro lado, mediante cálculo directo

$$\sigma(Wr(y_1, y_2)) = det(C_\sigma) Wr(y_1, y_2) \tag{1.24}$$

con $C_\sigma \in GL_2(\mathbb{C})$. Finalmente concluimos que $det(C_\sigma) = 1$. □

La proposición 1.7.2 señala que para analizar la existencia de soluciones Liouvillianas para la ecuación (1.20), basta clasificar los subgrupos algebraicos de $SL_2(\mathbb{C})$. Esta clasificación está dada por el siguiente teorema

Teorema 1.7.3 (Clasificación de Subgrupos Algebraicos de $SL_2(\mathbb{C})$)**.** *Sea G un subgrupos algebraicos de $SL_2(\mathbb{C})$. Entonces uno de los siguiente casos puede ocurrir*

1. *G es triangulizable,*
2. *G es conjugado a un subgrupo de $\mathbb{D}_\infty = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -\beta^{-1} \\ \beta & 0 \end{bmatrix},\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}^* \right\}$,*
3. *G es finito,*
4. *$G = Sl_2(\mathbb{C})$.*

Prueba: Considere G° la componente conexa de la identidad de G. Es bien sabido que toda álgebra de Lie dos-dimensional es resoluble, por consiguiente $dim(G) = 3$, en tal caso $G = SL_2(\mathbb{C})$, o G° es resoluble. En el segundo caso se sigue del teorema de Lie-Kolchin que G° es triangulizable. Supongamos ahora que G° no es diagonalizable, del teorema de descomposición multiplicativa de Jordan-Chevalley para cuerpos algebraicamente cerrados, se sigue que G° contiene una matriz de la forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad con\ x \in \mathbb{C}^* \tag{1.25}$$

Ahora, como $G^\circ \trianglelefteq G$, para cualquier $g \in G$

$$gAg^{-1} \in G^\circ$$

es decir g conjuga a A en una matriz triangular, luego

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ -xc^2 & * \end{bmatrix} \tag{1.26}$$

de donde $c = 0$, se sigue que G es triangular, este es el caso 1.
Supongamos ahora que G° es diagonal e infinito. Luego, G° contiene una matriz diagonal no-escalar B, i.e., no es el producto de una constante por la identidad. Como $G^\circ \trianglelefteq G$, para todo $g \in G$

$$gBg^{-1} \in G^\circ$$

es decir, g conjuga a B en una matriz diagonal,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ c & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} adx_1 - bcx_2 & ab(x_2 - x_1) \\ cd(x_1 - x_2) & adx_2 - cbx_1 \end{bmatrix} \tag{1.27}$$

de donde

$$\begin{aligned} ab(x_2 - x_1) &= 0, \ y \\ cd(x_1 - x_2) &= 0 \end{aligned} \tag{1.28}$$

como B es no-escalar, $x_1 \neq x_2$ por tanto

$$\begin{aligned} ab &= 0, \ y \\ cd &= 0 \end{aligned} \tag{1.29}$$

a y b no pueden ser ambos cero, pues

$$det(B) = ad - bc = 1 \tag{1.30}$$

de forma análoga c y d no pueden ser ambos cero. Si $a = 0$ y $d = 0$ de (1.30) tenemos que $b = -c^{-1}$. Similarmente para $c = 0$ y $b = 0$ se sigue $d = a^{-1}$. Por tanto G es diagonal (caso 1) o $G \subseteq \mathbb{D}_\infty$ siendo este último el caso 2.
Finalmente si G° es finito, entonces G también es finito, este es el caso 3 $\square$

Teorema 1.7.4. *[19, pág 8] Hay exactamente cuatro casos que pueden ocurrir,*

1. *$\mathcal{L}(y) = 0$ tiene una solución de la forma $e^{\int w}$ donde $w \in \mathbb{C}(x)$.*
2. *$\mathcal{L}(y) = 0$ tiene una solución de la forma $e^{\int w}$ donde w es algebraico sobre $\mathbb{C}(x)$ de grado dos y el caso 1 no se da.*
3. *Todas las soluciones de $\mathcal{L}(y) = 0$ son algebraicas sobre $\mathbb{C}(x)$ y los casos 1 y 2 no se dan.*
4. *$\mathcal{L}(y) = 0$ no posee soluciones Liouvillianas.*

Prueba: Sea $\{y_1, y_2\}$ un sistema fundamental de soluciones a la ecuación (1.20).
Caso 1: Suponga que $DGal(\mathcal{L})$ es triangulizable, i.e.,

$$DGal(\mathcal{L}) \cong \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{C}^*, \beta \in \mathbb{C} \right\} \tag{1.31}$$

Luego, para toda simetría $\sigma \in DGal(\mathcal{L})$

$$\begin{aligned} \sigma(y_1, y_2) &= (y_1, y_2) \begin{bmatrix} \alpha_\sigma & \beta_\sigma \\ 0 & \alpha_\sigma^{-1} \end{bmatrix} \\ &= (\alpha_\sigma y_1, \beta_\sigma y_1 + \alpha_\sigma^{-1} y_2) \end{aligned} \tag{1.32}$$

Por tanto

$$\sigma\left(\frac{y_1'}{y_1}\right) = \frac{\sigma(y_1)'}{\sigma(y_1)} = \frac{y_1'}{y_1} \tag{1.33}$$

Por consiguiente $\frac{y_1'}{y_1} \in \mathbb{C}(x)$. Por otro lado, como

$$Ln(y_1)' = \frac{y_1'}{y_1} := \omega \tag{1.34}$$

se sigue que (1.20) tiene una solución de la forma $y_1 = e^{\int \omega}$.
Caso 2: Suponga que $DGal(\mathcal{L}) \subseteq \mathbb{D}_\infty$ y el caso 1 no ocurre. Luego

$$\sigma(y_1, y_2) = (y_1, y_2) \begin{bmatrix} \alpha_\sigma & 0 \\ 0 & \alpha_\sigma^{-1} \end{bmatrix}, \ o \tag{1.35}$$

$$\sigma(y_1, y_2) = (y_1, y_2) \begin{bmatrix} 0 & -\beta_\sigma^{-1} \\ \beta_\sigma & 0 \end{bmatrix} \tag{1.36}$$

se sigue inmediatamente que

$$\begin{cases} \sigma(y_1) = \alpha_\sigma y_1 \\ \sigma(y_2) = \alpha_\sigma^{-1} y_1 \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} \sigma(y_1) = \beta_\sigma y_2 \\ \sigma(y_2) = -\beta_\sigma^{-1} y_1 \end{cases} \tag{1.37}$$

denotemos $\eta = \frac{y_1'}{y_1}$ y $\zeta = \frac{y_2'}{y_2}$, de forma análoga al caso 1 tenemos que $\sigma(\eta) = \eta$ y $\sigma(\zeta) = \zeta$ o $\sigma(\eta) = \zeta$ y $\sigma(\zeta) = \eta$. Por tanto η es cuadrático sobre $\mathbb{C}(x)$

Caso 3: Suponga ahora que $DGal(\mathcal{L})$ es finito por tanto

$$DGal(\mathcal{L}) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \tag{1.38}$$

Note que los polinomios simétricos elementales en $\sigma_1(y_1), \ldots, \sigma_n(y_1)$ son $DGal(\mathcal{L})-$invariantes, considere el polinomio simétrico elemental

$$e_r = \sum_{1 \leq i_r \leq \cdots \leq i_r \leq n} \sigma_{i_1}(y_1) \cdots \sigma_{i_r}(y_1) \tag{1.39}$$

Luego, para una simetría $\sigma_k \in DGal(\mathcal{L})$,

$$\begin{aligned} \sigma_k(e_r) &= \sigma_k\left(\sum_{1\leq i_r\leq\cdots\leq i_r\leq n} \sigma_{i_1}(y_1)\cdots\sigma_{i_r}(y_1)\right) \\ &= \sum_{1\leq i_r\leq\cdots\leq i_r\leq n} \sigma_k(\sigma_{i_1}(y_1))\cdots\sigma_k(\sigma_{i_r}(y_1)) \\ &= \sum_{1\leq k_r\leq\cdots\leq k_r\leq n} \sigma_{k_1}(y_1)\cdots\sigma_{k_r}(y_1) \\ &= e_r \end{aligned} \tag{1.40}$$

Considere el polinomio

$$P(y) = \prod_{k=1}^{n}(y-\sigma_k(y_1)) = y^n - e_1y^{n-1} + e_2y^{n-2} + \cdots + (-1)^n e_n \tag{1.41}$$

Como $Id = \sigma_j \in DGal(\mathcal{L})$ para algún $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, se sigue que y_1 es una raíz de P. Luego y_1 es algebraica sobre $\mathbb{C}(x)$, de forma similar se concluye que y_2 es también algebraica sobre $\mathbb{C}(x)$. Consecuentemente, toda solución de (1.20) es algebraica, puesto que está contenida en $\mathbb{C}(x)\langle y_1, y_2\rangle$.
Caso 4: Supongamos que $G = SL_2(\mathbb{C})$. Como $SL_2(\mathbb{C})$ es conexo, $(SL_2(\mathbb{C}))^{\circ} = SL_2(\mathbb{C})$. Además, $SL_2(\mathbb{C})$ no es resoluble. Se sigue del teorema de caracterización de las soluciones Liouvillianas que (1.20) no posee soluciones Liouvillianas. □

En 1986, J. Kovacic (ver [19]) presenta ciertas condiciones necesarias para que los casos 1, 2 y 3 antes descritos puedan ocurrir. Además, cuando estas condiciones fallan, se obtiene una condición suficiente para que el caso 4 ocurra. Antes de enunciar estas condiciones, realicemos las siguientes consideraciones. El hecho que $r(x) \in \mathbb{C}(x)$ implica que puede ser expresada como el cociente entre dos polinomios, $r = \frac{s}{t}$. Por tanto, un polo c de r es en realidad un cero de t y el orden de r en c, $o(r_c)$, su multiplicidad. Por el orden de r en ∞, $o(r_\infty)$, se entenderá el orden de infinito como cero de r, Así $o(r_\infty) = deg(t) - deg(s)$.

Teorema 1.7.5. *[19, pág 8] Las siguientes condiciones son necesarias (mas no suficientes) para que su respectivo caso pueda ocurrir,*

1. *Cada polo de r debe ser de orden par o de orden uno. El orden de r en ∞ debe ser de orden par o mayor que dos.*

2. *r debe tener al menos un polo de orden impar mayor que dos o ser de orden dos.*

3. *El orden de un polo en r no puede ser mayor que dos. El orden de r en ∞ debe ser al menos dos.*

De ahora en adelante

1. Denotemos por Γ' al conjunto de polos (finitos) de r,

$$\Gamma' = \{c \in \mathbb{C} | t(c) = 0\} \tag{1.42}$$

2. Denotemos por $\Gamma = \Gamma' \cup \{\infty\}$.

3. si $p \in \Gamma$, entonces $s(p) \in \{+,-\}$.

1.7.1. El Algoritmo para el Caso 1

Para cada $c \in \Gamma'$ y para ∞, definamos funciones racionales $[\sqrt{r}]_c$, $[\sqrt{r}]_\infty$ y números complejos $\alpha_c^\pm$, $\alpha_\infty^\pm$ descritos abajo.

Paso 1: Buscar para cada polo $c \in \Gamma'$ y para ∞ la situación correspondiente a cada una de las que sigue

(c_0) si $o(r_c) = 0$, entonces

$$[\sqrt{r}]_c = 0, \ \ \alpha_c^\pm = 0$$

(c_1) si $o(r_c) = 1$, entonces

$$[\sqrt{r}]_c = 0, \ \ \alpha_c^\pm = 1$$

(c_2) si $o(r_c) = 2$ y

$$r = \cdots + b(x-c)^{-2} + \cdots$$

entonces

$$[\sqrt{r}]_c = 0, \ \ \alpha_c^\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1+4b}}{2}$$

(c_3) si $o(r_c) = 2v \geq 4$ y

$$r = (a(x-c)^{-v} + \cdots + d(x-c)^{-2})^2 + b(x-c)^{-(v+1)} + \cdots$$

entonces

$$[\sqrt{r}]_c = a(x-c)^{-v} + \cdots + d(x-c)^{-2}, \ \ \alpha_c^\pm = \frac{1}{2}\left(\pm \frac{b}{a} + v \right)$$

(∞_1) si $o(r_\infty) > 2$, entonces

$$[\sqrt{r}]_\infty = 0, \ \ \alpha_\infty^+ = 0, \ \ \alpha_\infty^- = 1$$

(∞_2) si $o(r_\infty) = 2$ y

$$r = \cdots + bx^2 + \cdots$$

entonces

$$[\sqrt{r}]_\infty = 0, \ \ \alpha_\infty^\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1+4b}}{2}$$

(∞_3) si $o(r_\infty) = -2v \leq 0$ y

$$(ax^v + \cdots + d)^2 + bx^{v-1} + \cdots$$

entonces

$$[\sqrt{r}]_\infty = ax^v + \cdots + d, \ \ \alpha_\infty^\pm = \frac{1}{2}\left(\pm \frac{b}{a} - v \right)$$

Paso 2: Encontrar $D \neq \emptyset$ definido por

$$D = \left\{ d \in \mathbb{Z}_+ : d = \alpha_\infty^{s(\infty)} - \sum_{c \in \Gamma'} \alpha_c^{s(c)}, \ \forall (s(p))_{p \in \Gamma} \right\} \tag{1.43}$$

Si $D = \emptyset$, debemos pasar de inmediato al caso 2. Por otro lado, si $|D| > 0$, entonces para cada $d \in D$ se construye $\omega \in \mathbb{C}(x)$ de la siguiente forma

$$\omega = s(\infty)[\sqrt{r}]_\infty + \sum_{c \in \Gamma'} \left(s(c)[\sqrt{r}]_c + \frac{\alpha_c^{s(c)}}{x - c} \right) \tag{1.44}$$

Paso 3: Para cada $d \in D$, buscar un polinomio mónico P_d de grado d, tal que

$$P_d'' + 2\omega P_d' + (\omega' + \omega^2 - r)P_d = 0 \tag{1.45}$$

Si tal P_d no existe, se debe pasar al caso 2 inmediatamente. En caso que P_d exista, entonces una solución de (1.20) está dada por

$$y = P_d e^{\int \omega}.$$

1.7.2. El Algoritmo para el Caso 2

Para cada $c \in \Gamma'$ y para ∞, buscar $E_c \neq \emptyset$ y $E_\infty \neq \emptyset$. Definimos los conjuntos $E_c \subseteq \mathbb{Z}$ y $E_\infty \subseteq \mathbb{Z}$ como sigue

Paso 1: Buscar para cada polo $c \in \Gamma'$ y para ∞ la situación correspondiente a cada una de las que sigue

(c_1) Si $o(r_c) = 1$, entonces $E_c = \{4\}$

(c_2) Si $o(r_c) = 2$ y

$$r = \cdots + b(x-c)^{-2} + \cdots$$

entonces

$$E_c = \{2 + k\sqrt{1+4b} : k = 0, \pm 2\}$$

(c_3) Si $o(r_c) = v > 2$, entonces $E_c = \{v\}$

(∞_1) Si $o(r_\infty) > 2$, entonces $E_\infty = \{0, 2, 4\}$

(∞_2) Si $o(r_\infty) = 2$ y

$$r = \cdots + bx^2 + \cdots$$

entonces

$$E_\infty = \{2 + k\sqrt{1+4b} : k = 0, \pm 2\}$$

(∞_3) Si $o(r_\infty) = v < 2$, entonces $E_\infty = \{v\}$

Paso 2: Encontrar $D \neq \emptyset$ definido por

$$D = \left\{ d \in \mathbb{Z}_+ : d = \frac{1}{2}\left(e_\infty - \sum_{c \in \Gamma'} e_c \right), \ \forall e_p \in E_p, \ \forall p \in \Gamma \right\} \tag{1.46}$$

Si $D = \emptyset$, debemos pasar de inmediato al caso 3. Por otro lado, si $|D| > 0$, entonces para cada $d \in D$ se construye $\theta \in \mathbb{C}(x)$ de la siguiente forma

$$\theta = \frac{1}{2} \sum_{c \in \Gamma'} \frac{e_c}{x - c} \tag{1.47}$$

Paso 3: Para cada $d \in D$, buscar un polinomio mónico P_d de grado d, tal que

$$P_d''' + 3\theta P_d'' + (3\theta' + 3\theta^2 - 4r)P_d' + (\theta'' + 3\theta\theta' + \theta^3 - 4r\theta - 2r')P_d = 0 \tag{1.48}$$

Si tal P_d no existe, se debe pasar al caso 3 inmediatamente. En caso que P_d exista, sea $\phi = \theta + \frac{P_d'}{P_d}$. Entonces

$$y = e^{\int \omega} \tag{1.49}$$

es solución de (1.20), donde ω es solución de

$$\omega^2 + \phi\omega + \frac{1}{2}(\phi' + \phi^2 - 2r) = 0 \tag{1.50}$$

1.7.3. El Algoritmo para el Caso 3

Para cada $c \in \Gamma'$ y para ∞, buscar $E_c \neq \emptyset$ y $E_\infty \neq \emptyset$. Definimos los conjuntos $E_c \subseteq \mathbb{Z}$ y $E_\infty \subseteq \mathbb{Z}$ como sigue

Paso 1: Buscar para cada polo $c \in \Gamma'$ y para ∞ la situación correspondiente a cada una de las que sigue

(c_1) Si $o(r_c) = 1$, entonces $E_c = \{12\}$

(c_2) Si $o(r_c) = 2$ y

$$r = \cdots + b(x-c)^{-2} + \cdots$$

entonces

$$E_c = \{6 + k\sqrt{1+4b} : k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 6\}$$

(∞) si $o(r_\infty) = v \geq 2$ y

$$r = \cdots + bx^2 + \cdots$$

entonces

$$E_\infty = \left\{6 + \frac{12k}{n}\sqrt{1+4b}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 6,\ n = 4, 6, 12\right\}$$

Paso 2: Encontrar $D \neq \emptyset$ definido por

$$D = \left\{d \in \mathbb{Z}_+ : d = \frac{n}{12}\left(e_\infty - \sum_{c \in \Gamma'} e_c\right),\ \forall e_p \in E_p,\ \forall p \in \Gamma\right\} \tag{1.51}$$

Si $D = \emptyset$, entonces (1.20) no posee soluciones Liouvillianas puesto que necesariamente ocurre el caso 4. Si $|D| > 0$, entonces para cada $d \in D$ y para cada n se construye $\theta \in \mathbb{C}(x)$ de la siguiente forma

$$\theta = \frac{n}{12}\sum_{c \in \Gamma'} \frac{e_c}{x-c} \tag{1.52}$$

también definimos el polinomio S dado por

$$S = \prod_{c \in \Gamma'}(x-c) \tag{1.53}$$

Paso 3: Para cada $d \in D$, buscar un polinomio mónico $P_d = P$ de grado d, de tal forma que cuando definamos los polinomios $P_n, P_{n-1}, \ldots, P_{-1}$, recursivamente por las fórmulas descritas debajo, entonces P_{-1} es identicamente cero.

$$\begin{aligned} P_n &= -P, \\ P_{i-1} &= -SP_i' + ((n-i)S' - S\theta)P_i - (n-i)(n+i)S^2 r P_{i+1},\ i = n, n-1, \ldots, 0. \end{aligned} \tag{1.54}$$

si tal polinomio existe para alguna familia (e_c), sea ω una solución del polinomio

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{S^i P_i}{(n-i)!} \omega^i = 0 \tag{1.55}$$

entonces $y = e^{\int \omega}$ es una solución para (1.20). Si tal polinomio P no existe, entonces (1.20) no posee soluciones Liouvillianas.

Capítulo 2

Teoría Analítica

2.1. Problema de Sturm-Liouville

Un problema de Sturm-Liouville (SLP) es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) = (r(x) - \lambda q(x))y, \ \ en \ (a,b) \ \ -\infty \leq a < b \leq \infty \tag{2.1}$$

sujeta a condiciones de frontera tipo dirichlet

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde λ es un valor complejo y asumiremos $p(x), q(x)$ definidas positivas. Una función que satisfaga el problema anterior es llamada una autofunción y el valor λ correspondiente a esta solución es llamado un autovalor. Así si y_n es una autofunción para el SLP, relativa al autovalor λ_n,

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy_n}{dx}\right) = (r(x) - \lambda q(x))y_n. \tag{2.3}$$

Por conveniencia en este trabajo, asumiremos $p(x) \equiv 1$ y $q(x) \equiv 1$, también supondremos que $\alpha_2 = \beta_2 = 0$. Por lo que el SLP se reduce al problema (RSLP)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (r(x) - \lambda)y, \ \ en \ (a,b) \tag{2.4}$$

sujeto a las condiciones $y(a) = y(b) = 0$.

Proposición 2.1.1. *Si y_n y y_m son autofunciones correspondientes a distintos valores del parámetro λ, entonces*

$$\int\limits_a^b y_n(x) y_m(x) dx = 0 \tag{2.5}$$

Prueba: Dados dos autovalores diferentes λ_n, λ_m y sus respectivas autofunciones,

$$y_n'' = (r(x) - \lambda_n)y_n, \tag{2.6}$$

y

$$y_m'' = (r(x) - \lambda_m)y_m. \tag{2.7}$$

Multiplicando (2.6) por y_m y (2.7) por y_n, luego restando

$$\begin{aligned}(\lambda_m - \lambda_n)y_n y_m &= y_m y_n'' - y_n y_m'' \\ &= \frac{d}{dx}(y_m y_n' - y_n y_m').\end{aligned} \tag{2.8}$$

Por consiguiente

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b y_n y_m dx = [y_m y_n' - y_n y_m']_a^b = 0 \tag{2.9}$$

como $\lambda_n \neq \lambda_m$, tenemos

$$\int_a^b y_n(x)y_m(x)dx = 0 \tag{2.10}$$

□

Proposición 2.1.2. *Supongamos que $r(x)$ es real. Los autovalores del RSLP son reales.*

Prueba: Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalor, y sea y su correspondiente autofunción,

$$y'' = (r(x) - \lambda)y, \ y(a) = y(b) = 0 \tag{2.11}$$

tomando su conjugado complejo

$$\bar{y}'' = (r(x) - \bar{\lambda})\bar{y}, \ \bar{y}(a) = \bar{y}(b) = 0 \tag{2.12}$$

Aplicando un argumento similar al utilizado en la proposicón 2.1.1, tenemos

$$(\bar{\lambda} - \lambda)\int_a^b |y|dx = [y'\bar{y} - y\bar{y}']_a^b = 0 \tag{2.13}$$

como y es una autofunción, esta es distinta de cero. Por tanto

$$\int_a^b |y|dx > 0 \tag{2.14}$$

lo que implica que $\lambda = \bar{\lambda}$, es decir, $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Asumiendo que $r(x)$ es real, los autovalores del RSLP son todos de multiplicidad uno. Más aún, forma una secuencia que puede ordenarse de forma creciente,

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \cdots$$

Además $\lambda_n \to \infty$, a medida que $n \to \infty$. Este orden en los autovalores establece un ordenamiento natural en sus correspondientes autofunciones

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}, \ldots \tag{2.15}$$

Para más información ver [29].

2.2. Expansiones Asintóticas

Definición 2.2.1. *Un sector abierto S en el $z-$plano es un conjunto de la forma*

$$S : a < arg(z) < b, \ |z| \geq M$$

donde a y b son números reales[1] *y M es un número positivo. Análogamente se definen los sectores cerrados.*
Un subsector S' del sector S, es un sector tal que $S' \subset S$.

Definición 2.2.2 (Expansión Asintótica)**.** *Dada una función analítica, definida en algún sector S y una serie de potencias formal $\hat{f}(z) = \sum f_n z^n \in \mathbb{C}[[x]]$, decimos que $f(z)$ es asintóticamente igual a $\hat{f}(z)$ o que $\hat{f}(z)$ representa a $f(z)$ asintóticamente cuando $z \to 0$ en S, si para todo $N \in \mathbb{N}_+$ y todo subsector cerrado $\bar{S}'$ de S, existe $C = C(N, \bar{S}') > 0$ tal que*

$$r_f(z, N) := |z|^{-N} \left| f(z) - \sum_{n}^{N-1} f_n z^n \right| \leq C \tag{2.16}$$

Si $\hat{f}$ representa asintóticamente a f en S, escribiremos $f(z) \cong \hat{f}(z)$ en S.

Note que si $N = 0$, la definición de expansión asintótica implica que

$$\lim_{z \to 0} f(z) = f_0 \tag{2.17}$$

También observemos que para $N > 0$

$$\begin{aligned} r_f(z, N+1) &= |z|^{-N} \left| f(z) - \sum_{n}^{N-1} f_n z^n \right| \\ &= |z|^{-1} |r_f(z, N) - f_N| \end{aligned} \tag{2.18}$$

Por definición $r_f(z, N+1)$ es acotada en el origen, por tanto

$$\lim_{z \to 0} (r_f(z, N) - f_N) = 0 \tag{2.19}$$

lo que nos lleva al siguiente resultado

Proposición 2.2.3. *[33, teorema 8.1, pág 33] Una función $f(x)$ puede tener a lo más una expansión asintótica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \tag{2.20}$$

cuando $z \to 0$ en un sector dado S.

Observación 2.2.4. *La afirmación recíproca de la anterior proposición resulta no ser cierta. Por ejemplo, la serie de potencias trivial*[2] *representa asintóticamente en el semieje positivo a las dos funciones $f(z) \equiv 0$ y $g(z) = e^{-\frac{1}{z}}$.*

[1] $b - a$ podría ser mayor a 2π, en tal caso S debe ser definido como un dominio en la superficie de Riemann del logaritmo.

[2] Aquella cuyos coeficientes son todos cero.

El siguiente teorema resume el álgebra de expansiones asintóticas

Teorema 2.2.5. *[33, teoremas 8.2-8.3,8.5] Sea S un sector y $a, b \in \mathbb{C}$, supongamos que*

$$f(z) \cong \hat{f}(z) \text{ en } S$$

y

$$g(z) \cong \hat{g}(z) \text{ en } S$$

entonces

1. $af(z) + bg(z) \cong a\hat{f}(z) + b\hat{g}(z)$.

2. $f(z)g(z) \cong \hat{f}(z)\hat{g}(z)$.

3. *Supongamos que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in S$ y asumamos que f_0 es no nulo, entonces*

$$\frac{1}{f(z)} \cong \frac{1}{\hat{f}(z)} \text{ en } S \tag{2.21}$$

   donde $\frac{1}{\hat{f}(z)}$ es la única serie formal $\hat{h}(z)$ tal que

$$\hat{f}(z)\hat{h}(z) = 1. \tag{2.22}$$

Teorema 2.2.6. *[33, teoremas 8.7-8.8] Sea S un sector, suponga que*

$$f(z) \cong \hat{f}(z) \text{ en } S$$

entonces

1. $f'(z) \cong \hat{f}'(z)$ *en cada subsector propio de S.*

2. $\int_0^z f(w)dw \cong \int_0^z \hat{f}(w)dw$ *donde el camino de integración esta en S.*

Los teoremas 2.2.5 y 2.2.6 dotan al conjunto $A(s)$ de las funciones analíticas definidas sobre un sector S con representante asintótico de una estructura de álgebra diferencial. En virtud de la proposición 2.2.3

$$\begin{array}{rccc} J: & A(S) & \rightarrow & \mathbb{C}[[z]] \\ & f(z) & \mapsto & (Jf)(z) = \hat{f(z)} \end{array} \tag{2.23}$$

es un homomorfismo de $\mathbb{C}-$álgebras diferenciales. Más aún, la versión compleja del teorema de Borel-Ritt implica que J es sobreyectivo. Sin embargo, J no es inyectivo.

2.2.1. Un Teorema de Sibuya

Lema 2.2.7. *[16, Lema 1, pág. 94] Sean f, h y g polinomios en z^{-1} cuyos coeficientes son lineales en $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{C}$. Suponga además que*

$$f = O(z^{-1}), \quad h = h_0 + O(z^{-1}), \quad g = O(z^{-1}),$$

donde h_0 es una constante no nula independiente de $a_1, \ldots, a_p$. Entonces, la ecuación

$$\frac{d\rho}{dz} = z^{p+1}(f(z) + h(z)\rho + g(z)\rho^2) \tag{2.24}$$

tiene una única solución formal

$$\hat{\rho}(z) = \sum_{N=1}^{\infty} \rho_N z^{-1},$$

donde ρ_N son polinomios en $a_1, \ldots, a_p$ e independientes de z.
Sea $\delta > 0$ lo suficientemente pequeña. Entonces existe una única solución $\rho(z)$ de (2.24) la cual satisface las siguientes condiciones.

1. *Para $r > 0$, existe una constante postiva N_r tal que $\rho(z)$ es holomorfa respecto a $(z, a_1, \ldots, a_p)$ en el dominio definido por*

$$\begin{cases} |z| > N_r, \\ |a_1^2| + \cdots + |a_p^2| < r, \quad (0 < r < \infty), \\ |arg(h_0) + (p+2)arg(z)| < \frac{3\pi}{2} - \delta; \end{cases} \tag{2.25}$$

2. $$\rho(z) \cong \hat{\rho}(z)$$

   uniformemente en cada compacto del $(a_1, \ldots, a_p)-$espacio cuando z tiende a infinito, en todo subsector cerrado del sector

$$|arg(h_0) + (p+2)arg(z)| < \frac{3\pi}{2} - \delta \tag{2.26}$$

Teorema 2.2.8. *[16, Teorema 1, pág. 84-85] La ecuación diferencial*

$$y'' = a(x)y \tag{2.27}$$

donde $a(x)$ es un polinomio mónico de grado p, posee una solución

$$y = \mathcal{Y}_p(x, a_1, \ldots, a_p) \tag{2.28}$$

tal que:

1. *$\mathcal{Y}_p$ es una función entera de $(x, a_1, \ldots, a_p)$,*

2. $\mathcal{Y}_p$ admite una representación asintótica

$$\mathcal{Y}_p(x, a_1, \ldots, a_p) \cong x^{r_p}\left(1 + \sum_{N=1}^{\infty} B_N x^{-\frac{N}{2}}\right) e^{-\frac{2}{p+2}x^{\frac{p+2}{2}} + \sum_{N=1}^{p+1} A_N x^{\frac{p+2-N}{a}}} \tag{2.29}$$

uniformemente en cada compacto del $(a_1, \ldots, a_p)$-espacio, cuando x tiende al infinito en cualquier subsector cerrado del sector

$$|arg(x)| < \frac{3\pi}{p+2},$$

Los valores r_p, A_N y B_N son polinomios en $a_1, \ldots, a_p$.

Prueba: La primera parte del teorema es consecuencia inmediata del teorema de existencia y unicidad, ya que el único punto singular de (2.27) es $x = \infty$. Por otro lado, la ecuación diferencial (2.27) es equivalente al sistema

$$\frac{dU}{dx} = A(x)U, \tag{Δ_A}$$

donde $A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a(x) & 0 \end{bmatrix}$. Realicemos el cambio de variables

$$x = z^2, \quad U = FV, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^p \end{bmatrix}.$$

Aplicando regla de la cadena tenemos que

$$\frac{dU}{dz} = \hat{A}(z)U, \quad \hat{A}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 2z \\ 2za(z) & 0 \end{bmatrix},$$

luego $\Delta_A \rightsquigarrow \Delta_B$; donde $\Delta_B : \frac{dV}{dz} = F[\hat{A}]V$,

$$\begin{aligned} F[\hat{A}] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^p \end{bmatrix}^{-1} \left[\begin{bmatrix} 0 & 2z \\ 2za(z) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^p \end{bmatrix}' \right] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2z^{p+1} \\ 2z^{-p+1}a(z) & -pz^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{dV}{dz} = \begin{bmatrix} 0 & 2z^{p+1} \\ 2z^{-p+1}a(z) & -pz^{-1} \end{bmatrix} V,$$

o equivalentemente

$$\frac{dV}{dz} = z^{n+1} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2z^{-2p}a(z) & -pz^{-p-2} \end{bmatrix} V$$

Ahora, como

$$\begin{aligned} z^{-2p}a(z) &= z^{-2p}\left(z^{2p} + \sum_{i=1}^{p} a_i z^{2p-2i}\right) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{p} a_i z^{-2i} \end{aligned}$$

tenemos que

$$F[\hat{A}] = z^{n+1}\left[\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2+\sum_{i=1}^{p} 2a_i z^{-2i} & -pz^{-p-2} \end{bmatrix}\right]$$

luego $F[\hat{A}]$ se puede escribir como

$$z^{p+1}\sum_{N=0}^{N_p} A_N z^{-N}$$

donde $N_p = Max\{2p, p+2\}$; A_N son matrices 2×2 lineales en $a_1, \dots, a_p$ e independientes de z. Por tanto Δ_B se puede escribir como

$$\frac{dV}{dz} = z^{p+1}\left(\sum_{N=0}^{N_p} A_N z^{-N}\right)V, \tag{Δ_B}$$

Sea $V = Tw$ con $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, entonces

$$\frac{dw}{dz} = T^{-1}\left(z^{p+1}\sum_{N=0}^{N_p} A_N z^{-N}\right)Tw.$$

Por tanto

$$\frac{dw}{dz} = z^{p+1}B(z)w, \tag{$\Delta_{B'}$}$$

donde $B(z) = \sum_{N=0}^{N_p} B_N z^{-N}$, con $B_N = T^{-1}A_N T$.

Suponga ahora que

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix} e^{\int^z \eta^{p+1}\gamma(\eta)d\eta}$$

donde ρ es una función de z. Derivando w obtenemos

$$\frac{dw}{dz} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{d\rho}{dz} \end{bmatrix} + z^{p+1}\gamma(z)\begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix}\right)e^{\int^z \eta^{p+1}}\gamma(\eta)d\eta$$

remplazando en $\Delta_{B'}$ tenemos lo siguiente

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{d\rho}{dz} \end{bmatrix} + z^{p+1}\gamma(z)\begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix} = z^{p+1}B(z)\begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

sabemos que

$$B(z) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + O(z^{-1})$$

establezcamos

$$B(z) = \begin{bmatrix} \alpha_1(z) & \beta_1(z) \\ \beta_2(z) & \alpha_2(z) \end{bmatrix}$$

donde α_i, β_i son polinomios en z^{-1}, lineales en $a_1, \dots, a_p$. Además

$$\begin{aligned} \alpha_1(z) &= -2 + O(z^{-1}) \quad & \beta_1(z) &= O(z^{-1}) \\ \alpha_2(z) &= 2 + O(z^{-1}) \quad & \beta_2(z) &= O(z^{-1}) \end{aligned}$$

Luego (2.30) tiene la forma

$$\begin{bmatrix} z^{p+1}\gamma(z) \\ \frac{d\rho}{dz} + z^{p+1}\gamma(z)\rho \end{bmatrix} = z^{p+1} \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1\rho \\ \alpha_2\rho + \beta_2 \end{bmatrix}$$

de donde obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} \gamma(z) = \alpha_1(z) + \beta_1(z)\rho \\ \frac{d\rho}{dz} = z^{p+1}(\beta_2(z) + \alpha_2(z)\rho - \gamma(z)\rho) \end{cases} \tag{2.31}$$

del sistema (2.31) obtenemos la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d\rho}{dz} = z^{p+1}(\beta_2(z) + (\alpha_2(z) - \alpha_1(z))\rho - \beta_1(z)\rho^2) \tag{2.32}$$

Aplicando el lema 2.2.7 a la ecuación (2.32) obtenemos lo siguiente:
La ecuación (2.32) tiene una solución $\rho(z)$ tal que,

1. Para $r > 0$ y cada δ lo suficientemente pequeño, existe $N_{r,\delta}$ tal que $\rho(z)$ es holomorfa respecto a $(z, a_1, \dots, a_p)$ en el dominio definido por

$$\begin{cases} |z| > N_{r,\delta}, \\ |a_1^2| + \cdots + |a_p^2| < r, \quad (0 < r < \infty), \\ |arg(z)| < \frac{3\pi}{2(p+2)} - \delta; \end{cases} \tag{D1}$$

2. $$\rho(z) \cong \sum_{N=1}^{\infty} \rho_N z^{-N}$$

   uniformemente en cada compacto del $(a_1, \dots, a_p)-$espacio cuando z tiende a infinito, en todo subsector cerrado del sector

$$|arg(z)| < \frac{3\pi}{2(p+2)} \tag{S1}$$

   donde ρ_N son polinomios en $a_1, \dots, a_p$, independientes de z.

Ahora, como $\gamma(z) = \alpha_1(z) + \rho(z)\beta_1(z)$, se sigue que $\gamma(z)$ es holomorfa en (D1). Además

$$\gamma(z) \cong -2 + \sum_{N=1}^{\infty} \gamma_N z^{-N}$$

uniformemente en cada compacto del $(a_1, \dots, a_p)-$espacio cuando z tiende a infinito, en cualquier subsector cerrado de (S1).
Observación: γ_N son polinomios en $a_1, \dots, a_p$, independientes de z.
Sea

$$\tilde{\gamma} = \gamma - \big(-2 + \textstyle\sum_{N=1}^{p+2} \gamma_N z^{-N}\big), \ y$$
$$E(z) = z^{\gamma_{p+2}} e^{\frac{-2}{p+2} z^{p+2} + \sum_{N=1}^{p+1} \frac{\gamma_N}{p+2-N} z^{p+2-N}}$$

Observación:

$$\begin{aligned} e^{\int^z \eta^{p+1}\gamma(\eta)d\eta} &= e^{\int^z \eta^{p+1}\left(\tilde{\gamma}(\eta) + \left(-2 + \sum_{N=1}^{p+2} \gamma_N \eta^{-N}\right)\right)d\eta} \\ &= e^{\int^z \eta^{p+1}\tilde{\gamma}(\eta)d\eta} e^{\int^z \eta^{p+1}\left(-2 + \sum_{N=1}^{p+2} \gamma_N \eta^{-N}\right)d\eta} \end{aligned}$$

como

$$\int^{z} \big(-2\eta^{p+1} + \sum_{N=1}^{p+1} \gamma_N \eta^{p+1-N} + \gamma_{p+2}\eta^{-1} \big) d\eta$$

$$= \frac{-2}{p+2} z^{p+2} + \sum_{N=1}^{p+1} \frac{\gamma_N}{p+2-N} z^{p+2-N} + Log(z^{\gamma_{p+2}})$$

Se tiene que

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix} E(z) e^{\int^z \eta^{p+1} \tilde{\gamma}(\eta) d\eta} \tag{2.33}$$

es solución de $\Delta_{B'}$ (se integra sobre un camino en S1). Más aún, la solución 2.33 es holomorfa respecto a $(z, a_1, \ldots, a_p)$ en el dominio (D1), también

$$w \cong \Big(w_0 + \sum_{N=1}^{\infty} w_N z^{-N} \Big) E(z); \;\; w_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

uniformemente en cada compacto del $(a_1, \ldots, a_p)-$espacio, siempre que z tienda a infinito en cualquier subsector cerrado del (S1).

Observación: w_N son vectores dos-dimensionales cuyos elementos son polinomios en $a_1, \ldots, a_p$ e independientes de z.

Sea ahora

$$U(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho(z) \end{bmatrix} E(z) e^{\int^z \eta^{p+1} \tilde{\gamma}(\eta) d\eta} \tag{2.34}$$

Entonces (2.34) es solución de Δ_A. Veamos que $U(x)$ es entera. Sea $\Phi(x)$ tal que

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = A(x)\Phi(x); \;\; \Phi(0) = Id_2$$

$\Phi(x)$ está compuesta por entradas enteras de $(x, a_1, \ldots, a_p)$, así como $\Phi(x)^{-1}$. Por tanto existe $C \in Gl_2(\mathbb{C})$ tal que

$$U(x) = \Phi(x) C$$

en particular $U(x_0) = \Phi(x_0) C$, de donde se sigue que

$$U(x) = \Phi(x)\Phi(x_0)^{-1} U(x_0).$$

Sea $(a_1^0, \ldots, a_p^0)$ arbitrario, pero fijo, y consideremos una vecindad del punto, digamos $\mathcal{V}_0$. Luego podemos escoger $x_0 = z_0^2$ de tal forma que $(z_0, a_1, \ldots, a_p)$ esta en (D1) para todo $(a_1, \ldots, a_p)$ en $\mathcal{V}_0$. Luego $U(x_0)$ es holomorfa en $\mathcal{V}_0$. Se sigue que $U(x)$ es entera. $\square$

2.2.2. Soluciones Subdominantes

Realicemos el cambio de variable $\hat{x} = e^{i\theta} x$, $\theta \in \mathbb{R}$. De la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\hat{x}} \frac{d\hat{x}}{x}, \;\; \frac{d\hat{x}}{dx} = e^{i\theta} \tag{2.35}$$

es decir

$$\frac{dy}{dx} = e^{i\theta}\frac{dy}{d\hat{x}} \tag{2.36}$$

Además

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\hat{x}}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d\hat{x}}{dx} = e^{2i\theta}\frac{d^2y}{d\hat{x}^2} \tag{2.37}$$

Por lo que la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} - P(x)y = 0 \tag{2.38}$$

con $P(x) = x^p + a_1x^{p-1} + \cdots + a_p$, se transforma en la ecuación

$$e^{2i\theta}\frac{d^2y}{d\hat{x}^2} - P(e^{-i\theta}\hat{x})y = 0 \tag{2.39}$$

Como $P(x) = P(e^{-i\theta}\hat{x}) = e^{-i\theta p}(\hat{x}^p + a_1e^{i\theta}\hat{x}^{p-1} + \cdots + a_pe^{i\theta p})$, la ecuación (2.39) se puede escribir de la forma

$$\frac{d^2y}{d\hat{x}^2} - e^{-i\theta(p+2)}Q(\hat{x})y = 0 \tag{2.40}$$

donde $Q(\hat{x}) = \hat{x}^p + a_1e^{i\theta}\hat{x}^{p-1} + \cdots + a_pe^{i\theta p}$. Si tomamos θ de tal forma que $e^{-i\theta(p+2)} = 1$, entonces $\mathcal{Y}_p(\hat{x}, e^{i\theta}a_1, \ldots, e^{i\theta p}a_p)$ es solución de la ecuación (2.40).

Sea $\theta_k = \frac{2k\pi}{p+2}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, p+1$ y

$$\mathcal{Y}_{p,k}(x, a) = \mathcal{Y}_{p,k}(x, a_1, \ldots, a_p) = \mathcal{Y}_p(e^{i\theta_k}x, e^{i\theta_k}a_1, \ldots, e^{i\theta_k p}a_p) \tag{2.41}$$

entonces $\mathcal{Y}_{p,k}(x, a)$ son soluciones de (2.38). En particular, $\mathcal{Y}_{p,0}(x, a) = \mathcal{Y}_p(x, a)$.

Como consecuencia del teorema 2.2.8, tenemos el siguiente teorema

Teorema 2.2.9. *[28, Teorema 7.1, pág 18] La solución $\mathcal{Y}_{p,k}$ satisface las siguientes condiciones*

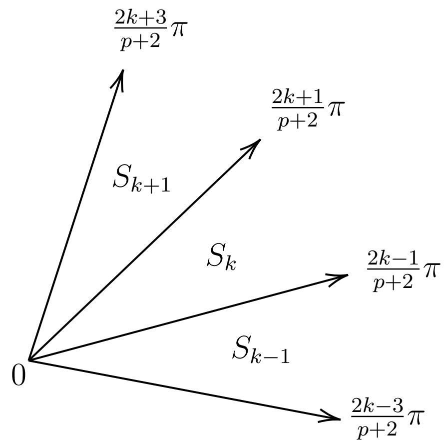
1. $\mathcal{Y}_{p,k}$ *es una función entera de* $(x, a_1, \ldots, a_p)$.
2. $$\mathcal{Y}_{p,k} \cong Y_m(e^{i\theta_k}x, e^{i\theta_k}a_1, \ldots, e^{i\theta_k p}a_p) \tag{2.42}$$
   uniformemente en cada compacto del $(a_1, \ldots, a_p)-$*espacio siempre que* $x \to \infty$ *en cualquier subsector cerrado del sector*
   $$\left|arg(x) + \frac{2k\pi}{p+2}\right| < \frac{3\pi}{p+2} \tag{2.43}$$

donde Y_m *es el miembro derecho de* (2.29).

Sea S_k el subsector de (2.43) dado por

$$\left|arg(x) - \frac{2k\pi}{p+2}\right| < \frac{\pi}{p+2} \tag{2.44}$$

Luego el sector (2.43), lo podemos ver como la unión de subsectores $S_{k-1} \cup \bar{S}_k \cup S_{k+1}$



Notemos que los $p+2$ sectores $\bar{S}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, p+1$ $(mod\, p+2)$ cubren todo el $x-$plano

Figura 2.1: división del plano en 3 sectores

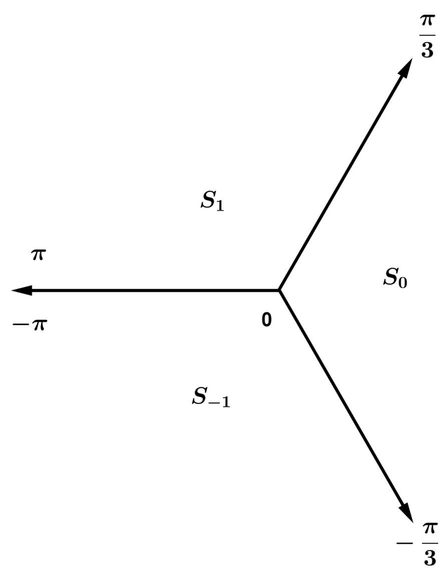
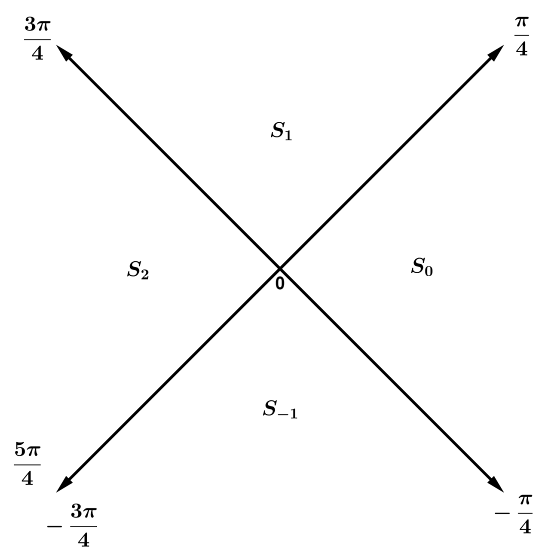


Figura 2.2: división del plano en 4 sectores



Definición 2.2.10. *Si una solución de la ecuación diferencial (2.38) tiende a cero cuando $x \to \infty$ a lo largo de cualquier dirección en el sector S_k, diremos que esta solución es subdominante en el sector S_k. Por otro lado, si una solución de la ecuación diferencial (2.38) tiende a infinito mientras $x \to \infty$ a lo largo de cualquier dirección en el sector S_k, diremos que esta solución es dominante en el sector S_k.*

Notemos que si $x = re^{i\theta}$, entonces $Re(x^{\frac{1}{2}(p+2)}) = r^{\frac{1}{2}(p+2)}Cos(\frac{p+2}{2}(\theta + 2k\pi))$, $k = 0, 1$. Tome $k = 0$ el otro caso es igual ya que la función coseno posee un periodo de 2π. Como

$$\begin{aligned} &Cos(\frac{p+2}{2}\theta) > 0 \ en \ S_0 \ , y \\ &Cos(\frac{p+2}{2}\theta) < 0 \ en \ S_1 \ y \ S_{-1}. \end{aligned} \tag{2.45}$$

La solución $\mathcal{Y}_p = \mathcal{Y}_{p,0}$ es subdominante en S_0 y dominante en S_{-1} y S_1. Por tanto, la solución $\mathcal{Y}_{p,k}$ es subdominante en S_k y es dominante en S_{k-1} y S_{k+1}.

Note que las soluciones $\mathcal{Y}_{p,0}$ y $\mathcal{Y}_{p,1}$ son linealmente independientes, puesto que $\mathcal{Y}_{p,0}$ es subdominante en S_0 y $\mathcal{Y}_{p,1}$ es dominante en S_0. Sea $y(x)$ una solución subdominante de (2.38) en el sector S_0, además

$$y(x) = c_0\mathcal{Y}_{p,0} + c_1\mathcal{Y}_{p,1} \tag{2.46}$$

Luego, c_1 debe ser cero, por tanto

$$y(x) = c_0\mathcal{Y}_{p,0} \cong c_0 Y_m. \tag{2.47}$$

Teorema 2.2.11. *La solución $\mathcal{Y}_p(x, a)$ es la única solución de (2.38) la cual satisface todas las condiciones requeridas del teorema 2.2.8.*

2.2.3. Una Generalización al Teorema de Sibuya

El teorema 2.2.8 ha sido generalizado a una ecuación diferencial de la forma

$$x^2 y'' = a(x)y,$$

donde $a(x)$ es un polinomio mónico de grado p (ver [21, teorema 1, pág 5]). Sin embargo, aquí presentamos un resultado un poco más general.

Teorema 2.2.12. *La ecuación diferencial*

$$x^q y'' = a(x)y \tag{2.48}$$

donde $a(x)$ es un polinomio mónico de grado p, posee una solución

$$y = \mathcal{Y}_p(x, a_1, \ldots, a_p) \tag{2.49}$$

tal que:

1. *$\mathcal{Y}_p$ es una función entera de $(a_1, \ldots, a_p)$ y analítica para $|x| > 0$ y $|arg(x)| < \pi$,*
2. *$\mathcal{Y}_p$ admite una representación asintótica*

$$\mathcal{Y}_p(x, a_1, \ldots, a_p) \cong x^{\tau+1}\left(1 + \sum_{N=1}^{\infty} B_N x^{-\frac{N}{2}}\right) e^{-\frac{2}{p-q+2}x^{\frac{p-q+2}{2}} + \sum_{N=1}^{p-q+1} A_N x^{\frac{p-q+2-N}{a}}} \tag{2.50}$$

uniformemente en cada compacto del $(a_1, \ldots, a_p)$-espacio, cuando x tiende al infinito en cualquier subsector cerrado del sector

$$|arg(x)| < \frac{3\pi}{p-q+2},$$

los valores τ, A_N y B_N son polinomios en $a_1, \ldots, a_p$.

Prueba: Los procedimientos en esta prueba son análogos a los usados en la prueba del teorema 2.2.8. Sin embargo, dada la adición del punto singular $x = 0$, se deben realizar algunos cambios.

El dominio determinado por

$$\begin{cases} 0 < |x|, \\ |arg(x)| < \pi. \end{cases} \tag{D2}$$

es simplemente conexo. Además la función $\frac{a(x)}{x^q}$ es analítica en (D2), por lo que la primera parte del teorema se sigue del teorema de existencia y unicidad aplicado sobre el dominio (D2). Para la segunda parte, la ecuación diferencial (2.48) es equivalente al sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\frac{dU}{dx} = A(x)U, \tag{Δ_{A2}}$$

donde $A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x^{-q}a(x) & 0 \end{bmatrix}$. Realicemos el cambio de variables

$$x = z^2, \qquad U = PV, \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{p-q} \end{bmatrix}.$$

Luego el sistema Δ_{A2} se transforma en el sistema

$$\frac{dV}{dz} = z^{p-q+1}\left(\sum_{N=0}^{2p} A_N z^{-N}\right)V, \tag{Δ_{B2}}$$

donde A_N son matrices 2×2 lineales en $a_1, \ldots, \alpha_p$ e independientes de z.
De aquí en adelante la prueba es totalmente análoga a la prueba del teorema 2.2.8. $\square$

2.3. Método de Iteración Asintótica

El método de iteración asintótica (o MIA) fue introducido por H. Ciftci *et al* en [12] como herramienta para solucionar ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de la forma

$$y'' = l_0(x)y' + r_0(x)y \tag{2.51}$$

donde $l_0(x)$ y $r_0(x)$ son funciones de tipo $C^\infty(a,b)$. El método se basa en la estructura invariante del lado derecho de la ecuación (2.51) bajo derivaciones sucesivas y puede ser resumido en el siguiente teorema

Teorema 2.3.1. *[12, pág 4] Sean $l_0, r_0 \in C^\infty(a,b)$. La ecuación diferencial*

$$y'' = l_0y' + r_0y \tag{2.52}$$

tiene solución general

$$y = e^{-\int^x \alpha(t)dt}(c_2 + c_1\int^x e^{\int^t (l_0+2\alpha)d\tau}dt) \tag{2.53}$$

si existe algún $p >> 0$ tal que

$$\frac{r_p}{l_p} = \frac{r_{p-1}}{l_{p-1}} := \alpha \tag{2.54}$$

donde $l_i(x) = l'_{i-1}(x) + r_{i-1}(x) + l_0(x)l_{i-1}$ y $r_i = r'_{i-1}(x) + r_0l_{i-1}$, $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

Sin embargo, el método anterior hace uso únicamente de la estructura de álgebra diferencial del anillo de funciones, de la solución de ecuaciones lineales homogéneas de primer orden. Por tanto, en lo que sigue, podemos fijar R un anillo diferencial de característica cero y suponer que los coeficientes $l_0(x)$, $r_0(x)$ son elementos de dicho anillo.
Derivando la ecuación (2.51) obtenemos la siguiente ecuación diferencial de tercer orden

$$\begin{aligned} y''' &= l_0'(x)y' + l_0(x)y'' + r_0'(x)y + r_0(x)y' \\ &= l_0'(x)y' + l_0(x)(l_0(x)y' + r_0(x)y) + r_0'(x)y + r_0(x)y' \\ &= l_1(x)y' + r_1(x)y \end{aligned} \tag{2.55}$$

donde $l_1(x) = l_0'(x) + r_0(x) + l_0^2(x)$ y $r_1 = r_0'(x) + r_0 l_0$. Ahora, si también derivamos (2.55) tendremos que

$$\begin{aligned} y^{(4)} &= l_1'(x)y' + l_1(x)y'' + r_1'(x)y + r_1(x)y' \\ &= l_1'(x)y' + l_1(x)(l_0(x)y' + r_0(x)y) + r_1'(x)y + r_1(x)y' \\ &= l_2(x)y' + r_2(x)y \end{aligned} \tag{2.56}$$

donde $l_2(x) = l_1'(x) + r_1(x) + l_0(x)l_1$ y $r_2 = r_1'(x) + r_0 l_1$. En general la $(p+1)$-ésima y $(p+2)$-ésima derivada serían

$$\begin{aligned} y^{(p+1)} &= l_{p-1}(x)y' + r_{p-1}(x)y, \ \ y \\ y^{(p+2)} &= l_p(x)y' + r_p(x)y, \end{aligned} \tag{2.57}$$

donde $l_p(x) = l_{p-1}'(x) + r_{p-1}(x) + l_0(x)l_{p-1}$ y $r_p = r_{p-1}'(x) + r_0 l_{p-1}$. Luego, del cociente entre $y^{(p+2)}$ y $y^{(p+1)}$ se sigue que

$$\frac{d}{dx}Ln(y^{(p+1)}) = \frac{y^{(p+2)}}{y^{(p+1)}} = \frac{l_p(y' + \frac{r_p}{l_p}y)}{l_{p-1}(y' + \frac{r_{p-1}}{l_{p-1}}y)} \tag{2.58}$$

Si existe p lo suficientemente grande tal que

$$\frac{r_p}{l_p} = \frac{r_{p-1}}{l_{p-1}} := \alpha \tag{2.59}$$

la ecuación (2.58) se reduce a

$$\frac{d}{dx}Ln(y^{(p+1)}) = \frac{l_p}{l_{p-1}} \tag{2.60}$$

Por consiguiente

$$y^{(p+1)} = c_1 e^{\int^x \frac{l_p(t)}{l_{p-1}(t)}dt} \text{[3]} \tag{2.61}$$

Por otra parte, como

$$\begin{aligned} \frac{l_p}{l_{p-1}} &= \frac{l_{p-1}' + r_{p-1} + l_0 l_{p-1}}{l_{p-1}} \\ &= \frac{l_p'}{l_{p-1}} + \alpha + l_0 \\ &= [Ln(l_{p-1})]' + \alpha + l_0 \end{aligned} \tag{2.62}$$

[3]Desde el punto de vista del álgebra diferencial, $exp(\int^x bdt)$ denota la solución de la ecuación diferencial de primer orden $y' = by$.

concluimos que

$$y^{(p+1)} = c_1 l_{p-1} e^{\int^x (\alpha + l_0) dt} \tag{2.63}$$

Luego

$$l_{p-1}(x) y' + r_{p-1}(x) y = c_1 l_{p-1} e^{\int^x (\alpha + l_0) dt} \tag{2.64}$$

de donde obtenemos la siguiente ecuación lineal de primer orden

$$y' + \alpha y = c_1 e^{\int^x (\alpha + l_0) dt} \tag{2.65}$$

por lo que la función

$$y = e^{-\int^x \alpha(t) dt} (c_2 + c_1 \int^x e^{\int^t (l_0 + 2\alpha) d\tau} dt) \tag{2.66}$$

es solución general para la ecuación (2.51). Por lo que podemos enunciar una forma general para el teorema 2.3.1

Teorema 2.3.2. *Sean l_0 y r_0 elementos de un anillo diferencial R de característica cero. La ecuación diferencial*

$$y'' = l_0 y' + r_0 y \tag{2.67}$$

tiene solución general

$$y = u^{-1}(c_2 + c_1 \beta) \tag{2.68}$$

en la extensión $R\langle \alpha, u, u^{-1}, v, \beta \rangle$ donde u, v, β son soluciones de $u' = \alpha u$, $v' = l_0 v$ y $\beta' = u^2 v$, respectivamente, si existe algún $p >> 0$ tal que

$$\frac{r_p}{l_p} = \frac{r_{p-1}}{l_{p-1}} := \alpha \tag{2.69}$$

donde $l_i(x) = l'_{i-1}(x) + r_{i-1}(x) + l_0(x) l_{i-1}$ y $r_i = r'_{i-1}(x) + r_0 l_{i-1}$, $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

2.3.1. El caso 1 de Kovacic y el MIA

La existencia de soluciones Liouvillianas en el caso 1 depende de la existencia de soluciones polinomiales para la ecuación (1.45), la cual llamaremos ecuación auxiliar. El MIA otorga una caracterización de estas soluciones por medio de la anulación de la cantidad $\delta_n := l_p r_{p-1} - l_{p-1} r_p$. Así, el siguiente teorema nos da las condiciones bajo las cuales la ecuación auxiliar posee soluciones polinomiales

Teorema 2.3.3. *[27, Análogo al teorema 2, pág 3] Sean l_0, r_0 elementos en un anillo diferencial R de característica cero que contenga a $C[x]$ y considere la ecuación diferencial*

$$y'' = l_0 y' + r_0 y \tag{2.70}$$

1. *si (2.70) tiene una solución polinomial de grado p, entonces*

$$l_p r_{p-1} - l_{p-1} r_p = 0 \tag{2.71}$$

2. *si $l_p l_{p-1} \neq 0$ y $\delta_p = 0$, entonces la ecuación diferencial (2.70) tiene una solución polinomial de grado a lo sumo p.*

Prueba:

1. Supongamos que (2.70) tiene una solución polinomial de grado a lo más p, entonces las derivadas $y^{(k)} = 0$ para $k > p$. En particular $y^{(p+1)} = y^{(p+2)} = 0$. Luego como

$$0 = l_p y^{(p+1)} - l_{p-1} y^{(p+2)} = (l_p r_{p-1} - l_{p-1} r_p) y = \delta_p y \tag{2.72}$$

se sigue que $\delta_p = 0$.

2. Supongamos que $l_p l_{p-1} \neq 0$ y $\delta_p = 0$, entonces

$$l_p r_{p-1} = l_{p-1} r_p \tag{2.73}$$

dividiendo por $(l_p l_{p-1})^{-1}$ obtenemos

$$\frac{r_{p-1}}{l_p} = \frac{r_p}{l_{p-1}} = \alpha \tag{2.74}$$

Por tanto, se sigue del teorema 2.3.2 que

$$y = u^{-1} \tag{2.75}$$

Por tanto

$$y' = -\alpha u^{-1} = -\alpha y = -\frac{r_{p-1}}{l_{p-1}} y \tag{2.76}$$

Luego, $y^{(p+1)} = l_{p-1} y' + r_{p-1} y = 0$, consecuentemente, y es un polinomio de grado a lo más p. □

Capítulo 3

Soluciones Liouvillianas de Ecuaciones Diferenciales de la Forma $y'' = r(x)y$

3.1. Caso $r \in \mathbb{C}[x]$

Consideremos la ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden con coeficiente polinomial

$$y'' = \left(\sum_{i=0}^{k} u_i x^i\right) y, \quad u_i \in \mathbb{C}. \tag{3.1}$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el coeficiente de (3.1) es un polinomio mónico, ya que toda ecuación de la forma (3.1) se puede transformar en una de la forma

$$y'' = \left(x^k + \sum_{i=0}^{k-1} v_i x^i\right) y \tag{3.2}$$

mediante el cambio de variables $x = \sqrt[k+2]{u_k}\,x$. (Ver [4, Observación 5, pág 274])

Lema 3.1.1. *[4, Lema 2.4, pág 275] Todo polinomio mónico de grado par puede ser escrito de forma única completando cuadrados, es decir,*

$$a_{2p}(x) = x^{2p} + \sum_{i=0}^{2p-1} v_i x^i = \left(x^p + \sum_{i=0}^{p-1} c_i x^i\right)^2 + \sum_{i=0}^{p-1} d_i x^i. \tag{3.3}$$

Teorema 3.1.2. *[4, Teorema 2.5, pág 276] Consideremos la ecuación diferencial*

$$y'' = a(x)y \tag{E}$$

donde $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ es un polinomio mónico de grado k. Entonces, solo uno de los siguientes casos puede ocurrir:

1. *$DGal(E) = \mathbb{B}$,*
2. *$DGal(E) = Sl_2(\mathbb{C})$.*

Más aún, $DGal(E) = \mathbb{B}$ si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. *$a(x)$ es de grado $2p$, escrito en la forma del lema 3.1.1,*

2. *$d_{p-1} - p$ o $-d_{p-1} - p$ es un número par de la forma $2d$, $d \in \mathbb{Z}_+$,*

3. *existe un polinomio mónico P_d, de grado d, tal que:*

$$\begin{aligned} &P_d'' + 2(x^p + \sum_{i=0}^{p-1} c_i x^i)P_d' + (px^{p-1} + \sum_{i=0}^{p-2}(i+1)c_{i+1}x^i - \sum_{i=0}^{p-1} d_i x^i)P_d = 0, \text{ o} \\ &P_d'' - 2(x^p + \sum_{i=0}^{p-1} c_i x^i)P_d' - (px^{p-1} + \sum_{i=0}^{p-2}(i+1)c_{i+1}x^i + \sum_{i=0}^{p-1} d_i x^i)P_d = 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

En tal caso, una de las soluciones Liouvillianas está dada por,

$$y = P_d e^{\frac{1}{p+1}x^{p+1} + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{c_i}{i+1}x^{i+1}}, \quad \text{o} \quad y = P_d e^{-\left(\frac{1}{p+1}x^{p+1} + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{c_i}{i+1}x^{i+1}\right)}.$$

3.2. Caso $r \in \mathbb{C}[x, \frac{1}{x}]$

Teorema 3.2.1. *Consideremos la ecuación diferencial*

$$y'' = L\left(x, \frac{1}{x}\right)y, \text{ con } L\left(x, \frac{1}{x}\right) = \frac{a}{x} + A(x),\ a \in \mathbb{C}^*. \tag{3.5}$$

Donde $A(x)$ es un polinomio mónico de grado $k > 0$. Luego uno de los siguientes casos ocurre:

1. a) *$A(x)$ es un polinomio de grado $k = 2p$, escrito de la forma del lema 3.1.1,*

   b) *$d_{p-1} - p$ o $-d_{p-1} - p$ es un número par de la forma $2d + 2$, $d \in \mathbb{Z}_+$,*

   c) *Existe un polinomio mónico P_d, de grado d, tal que:*

$$\begin{aligned} &P_d'' + 2\left(A_1(x) + \frac{1}{x}\right)P_d' + \left(A_1'(x) + \frac{2A_1(x)}{x} - A_2(x)\right)P_d = 0, \quad \text{o} \\ &P_d'' - 2\left(A_1(x) - \frac{1}{x}\right)P_d' - \left(A_1'(x) + \frac{2A_1(x)}{x} + A_2(x)\right)P_d = 0. \end{aligned}$$

   En tal caso, una de las soluciones Liouvillianas de (3.5) está dada por

$$y = xP_d e^{\frac{x^{n+1}}{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{c_i}{i+1}x^{i+1}}, \quad \text{o} \quad y = xP_d e^{-\frac{x^{n+1}}{n+1} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{c_i}{i+1}x^{i+1}}$$

2. *La ecuación (3.5) no tiene soluciones Liovillianas.*

Prueba: Consideremos la ecuación diferencial

$$\mathcal{L} := y'' = L\left(x, \frac{1}{x}\right)y,\ L\left(x, \frac{1}{x}\right) = \frac{a}{x} + A(x),\ a \in \mathbb{C}^*. \tag{3.6}$$

Donde $A(x)$ es un polinomio de grado $k > 0$. En este caso $o(L_0) = 1$ y $o(L_\infty) = -k$. En virtud del teorema de condiciones necesarias, esta ecuación solo puede satisfacer el caso 1 del algoritmo de Kovacic. Si $k = 2p + 1$, entonces el paso 1 no se cumple. Por tanto $DGal(\mathcal{L}) = SL_2(\mathbb{C})$. Por otro lado si consideramos $k = 2p$, luego debemos segir las condiciones $\{c_1, \infty_3\}$.

Observación 3.2.2. *Por el lema 3.1.1 $A(x)$ tiene la escritura $A(x) = (A_1(x))^2 + A_2(x)$, donde*

$$A_1 = x^p + \sum_{i=0}^{p-1} c_i x^i,\ A_2 = \sum_{i=0}^{p-1} d_i x^i,\ c_i, d_i \in \mathbb{C} \tag{3.7}$$

Por el paso 1 del algoritmo tenemos que

$$\begin{array}{rr} [\sqrt{L}]_0 = 0, & \alpha_0^{\pm} = 1. \\ [\sqrt{L}]_\infty = A_1(x), & \alpha_\infty^{\pm} = \frac{1}{2}(\pm d_{p-1} - p). \end{array}$$

Y del paso 2 tenemos el conjunto $D = \{d \in \mathbb{Z}_+ | d = \alpha_\infty^{s(\infty)} - \alpha_0^{s(0)}\}$. Si $D = \emptyset$, el caso 1 no se tiene. Por tanto supongamos que $|D| > 0$. Como $\alpha_0^+ = \alpha_0^-$, solo tenemos dos posibilidades para $d \in D$,

1. $2d = d_{p-1} - p - 2 > 0$, o
2. $2d = -d_{p-1} - p - 2 > 0$.

De esta forma para $d \in D$, tenemos $\omega \in \mathbb{C}(x)$ dada por

1. $\omega = A_1(x) + \frac{1}{x}$, o
2. $\omega = -A_1(x) + \frac{1}{x}$.

Ahora, por el paso 3, para cada $d \in D$ ha de existir un polinomio mónico P_d de grado d, tal que

1. $P_d'' + 2\Big(A_1(x) + \frac{1}{x}\Big)P_d' + \Big(A_1'(x) + \frac{2A_1(x)}{x} - A_2(x)\Big)P_d = 0$, o
2. $P_d'' - 2\Big(A_1(x) - \frac{1}{x}\Big)P_d' - \Big(A_1'(x) + \frac{2A_1(x)}{x} + A_2(x)\Big)P_d = 0$.

En tal caso, el algoritmo de Kovacic provee una solución dada por,

1. $y = xP_d e^{\int A_1(x)dx}$, o
2. $y = xP_d e^{\int -A_1(x)dx}$

Por otro lado, si tal P_d no existe, el algoritmo falla y por tanto $DGal(\mathcal{L}) = SL_2(\mathbb{C})$. $\square$

Teorema 3.2.3. *Consideremos la ecuación diferencial*

$$y'' = L\Big(x, \frac{1}{x}\Big)y,\ \text{con}\ L\Big(x, \frac{1}{x}\Big) = \frac{b}{x^2} + \frac{a}{x} + A(x),\ a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}^*. \tag{3.8}$$

Donde $A(x)$ es un polinomio mónico de grado $k > 0$. Luego uno de los siguientes casos ocurre:

1. a) *$A(x)$ es un polinomio de grado $k = 2p$, escrito de la forma del lema 3.1.1,*

   b) *$d_{n-1} - \sqrt{1+4b}$, $d_{n-1} + \sqrt{1+4b}$, $-d_{n-1} - \sqrt{1+4b}$, o $-d_{n-1} + \sqrt{1+4b}$ es un entero positivo de la forma $2d + n + 1$, $d \in \mathbb{Z}_+$,*

   c) *Existe un polinomio mónico P_d, de grado d, tal que:*

c-1) $P_d'' + \left(2A_1(x) + \frac{1+\sqrt{1+4b}}{x}\right)P_d' + \left(A_1'(x) - A_2(x) + \frac{\sqrt{1+4b}A_1(x)-a+A_1(x)}{x}\right)P_d = 0,$ *o*

c-2) $P_d'' + \left(2A_1(x) + \frac{1-\sqrt{1+4b}}{x}\right)P_d' + \left(A_1'(x) - A_2(x) - \frac{\sqrt{1+4b}A_1(x)+a-A_1(x)}{x}\right)P_d = 0,$ *o*

c-3) $P_d'' - \left(2A_1(x) - \frac{1+\sqrt{1+4b}}{x}\right)P_d' - \left(A_1'(x) + A_2(x) + \frac{\sqrt{1+4b}A_1(x)+a+A_1(x)}{x}\right)P_d = 0,$ *o*

c-4) $P_d'' - \left(2A_1(x) - \frac{1-\sqrt{1+4b}}{x}\right)P_d' - \left(A_1'(x) + A_2(x) + \frac{-\sqrt{1+4b}A_1(x)+a+A_1(x)}{x}\right)P_d = 0.$

En tal caso, una de las soluciones Liouvillianas de (3.8) está dada por,

- $y = x^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4b})}P_d e^{\int A_1(x)dx}$, *o*
- $y = x^{\frac{1}{2}(1-\sqrt{1+4b})}P_d e^{\int A_1(x)dx}$, *o*
- $y = x^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4b})}P_d e^{-\int A_1(x)dx}$, *o*
- $y = x^{\frac{1}{2}(1-\sqrt{1+4b})}P_d e^{-\int A_1(x)dx}$.

2. a) *b tiene la forma $\frac{l^2}{16} - \frac{1}{4}$, con $l \in \mathbb{Z}$,*

   b) *$l - k$ es un número par de la forma $2d + 2$, $d \in \mathbb{Z}_+$,*

   c) *Existe un polinomio mónico P_d, de grado d, tal que*

$$P_d''' + \frac{3 - 3\sqrt{1+4b}}{x}P_d'' + \left(\frac{3\sqrt{1+4b}(-1+\sqrt{1+4b})}{x^2} - 4L\right)P_d' - \\ -\left(\frac{4b\sqrt{1+4b}}{x^3} + \frac{4 - 4\sqrt{1+4b}}{x}L + 2L'\right)P_d = 0$$

En tal caso, si establecemos $\phi = \frac{1-\sqrt{1+4b}}{x} + \frac{P_d'}{P_d}$. Luego $y = e^{\int \omega}$ es solución de la ecuación (3.8), donde

$$\omega = \frac{1}{2}(-\phi \pm \sqrt{-2\phi' - \phi^2 - 4L})$$

3. *La ecuación (3.8) no tiene soluciones Liouvillianas*

Prueba: Consideremos la ecuación diferencial

$$\mathcal{L} := y'' = L\left(x, \frac{1}{x}\right)y, \;\; L\left(x, \frac{1}{x}\right) = \frac{b}{x^2} + \frac{a}{x} + A(x), \; a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}^*. \tag{3.9}$$

Donde $A(x)$ es un polinomio mónico de grado k. Por tanto, tenemos que $o(L_0) = 2$ y $o(L_\infty) = -k$. Luego, por el teorema de condiciones necesarias, la ecuación (3.9) puede satisfacer el caso 1 o el caso 2 del algoritmo de Kovacic.
Supongamos que (3.9) satisface el caso 1 (específicamente condiciones $\{c_2, \infty_3\}$), por tanto $k = 2p$, $p \in \mathbb{Z}_+$. Sabemos por el lema 3.1.1 que $A(x) = [A_1(x)]^2 + A_2(x)$, donde

$$A_1(x) = x^p + \sum_{i=0}^{p-1} c_i x^i, \; c_i \in \mathbb{C}.$$

$$A_2(x) = \sum_{i=0}^{p-1} d_i x^i, \; d_i \in \mathbb{C}.$$

Luego, del paso 1 tenemos que

$$\begin{aligned}[\sqrt{L}]_0 = 0, \qquad \alpha_0^{\pm} = \tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1+4b}).\\ [\sqrt{L}]_\infty = A_1(x), \quad \alpha_\infty^{\pm} = \tfrac{1}{2}(\pm d_{p-1} - p).\end{aligned}$$

Del paso 2, consideremos $D = \{d \in \mathbb{Z}_+ | d = \alpha_\infty^{s(\infty)} - \alpha_0^{s(0)}\}$, luego $D = \emptyset$ es decir, el caso 1 falla o $|D| > 0$, por lo que

1. $2d = d_{p-1} - p - 1 - \sqrt{1+4b} > 0$, o
2. $2d = d_{p-1} - p - 1 + \sqrt{1+4b} > 0$, o
3. $2d = -d_{p-1} - p - 1 - \sqrt{1+4b} > 0$, o
4. $2d = -d_{p-1} - p - 1 + \sqrt{1+4b} > 0$.

de esta forma para cada $d \in D$, tenemos $\omega \in \mathbb{C}(x)$ dada por

1. $\omega = A_1(x) + \frac{1}{2}\frac{1+\sqrt{1+4b}}{x}$, o
2. $\omega = A_1(x) + \frac{1}{2}\frac{1-\sqrt{1+4b}}{x}$, o
3. $\omega = -A_1(x) + \frac{1}{2}\frac{1+\sqrt{1+4b}}{x}$, o
4. $\omega = -A_1(x) + \frac{1}{2}\frac{1-\sqrt{1+4b}}{x}$.

Ahora, por el paso 3, para cada $d \in D$ ha de existir un polinomio mónico P_d de grado d, tal que

1. $P_d'' + \left(2A_1(x) + \frac{1+\sqrt{1+4b}}{x}\right)P_d' + \left(A_1'(x) - A_2(x) + \frac{\sqrt{1+4b}A_1(x) - a + A_1(x)}{x}\right)P_d = 0$, o
2. $P_d'' + \left(2A_1(x) + \frac{1-\sqrt{1+4b}}{x}\right)P_d' + \left(A_1'(x) - A_2(x) - \frac{\sqrt{1+4b}A_1(x) + a - A_1(x)}{x}\right)P_d = 0$, o
3. $P_d'' - \left(2A_1(x) - \frac{1+\sqrt{1+4b}}{x}\right)P_d' - \left(A_1'(x) + A_2(x) + \frac{\sqrt{1+4b}A_1(x) + a + A_1(x)}{x}\right)P_d = 0$, o
4. $P_d'' - \left(2A_1(x) - \frac{1-\sqrt{1+4b}}{x}\right)P_d' - \left(A_1'(x) + A_2(x) + \frac{-\sqrt{1+4b}A_1(x) + a + A_1(x)}{x}\right)P_d = 0$.

En tal caso, el algoritmo de Kovacic provee una solución dada por

1. $y = x^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4b})}P_d e^{\int A_1(x)dx}$, o
2. $y = x^{\frac{1}{2}(1-\sqrt{1+4b})}P_d e^{\int A_1(x)dx}$, o
3. $y = x^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4b})}P_d e^{-\int A_1(x)dx}$, o
4. $y = x^{\frac{1}{2}(1-\sqrt{1+4b})}P_d e^{-\int A_1(x)dx}$.

Por otro lado, si tal P_d no existe, el algortimo falla y debemos pasar al caso 2 (específicamente bajo las condiciones $\{c_2, \infty_3\}$). Por el paso 1 tenemos que

$$\begin{aligned} E_0 &= \{2 + r\sqrt{1+4b} | r = -2, 0, 2\} \cap \mathbb{Z},\ y \\ E_\infty &= \{-k\}. \end{aligned}$$

El hecho que los elementos de E_0 sean enteros, fuerza a b a tener la forma $\frac{l^2}{16} - \frac{1}{4}$, con $l \in \mathbb{Z}$. Suponga ahora que $|D| > 0$, es decir

1. $2d = -k - 2 > 0$, o
2. $2d = -k - 2 - 2\sqrt{1+4b} > 0$, o
3. $2d = -k - 2 + 2\sqrt{1+4b} > 0$.

Evidentemente la única posibilidad se tiene en el tercer caso. Entonces, para este d tenemos $\theta \in \mathbb{C}(x)$ definida como

$$\theta = \frac{1 + \sqrt{1+4b}}{x}$$

y busquemos P_d un polinomio mónico de grado d, tal que

$$\begin{aligned} P_d''' + \frac{3 - 3\sqrt{1+4b}}{x} P_d'' + \left(\frac{3\sqrt{1+4b}(-1 + \sqrt{1+4b})}{x^2} - 4L \right) P_d' - \\ - \left(\frac{4b\sqrt{1+4b}}{x^3} + \frac{4 - 4\sqrt{1+4b}}{x} L + 2L' \right) P_d = 0 \end{aligned}$$

si tal P_d existe, establezcamos $\phi = \theta + \frac{p_d'}{p_d}$ y sea ω solución de

$$\omega^2 + \phi\omega + (\frac{1}{2}\phi' + \frac{1}{2}\phi^2 - L) = 0$$

es decir,

$$\omega = \frac{1}{2}\big(-\phi \pm \sqrt{-2\phi' - \phi^2 - 4L} \big).$$

Entonces, una solución de (3.9) está dada por

$$y = e^{\int \omega}.$$

Por otro lado, si tal P_d no existe, el algoritmo de Kovacic también falla en el caso 2 y por tanto $DGal(\mathcal{L}) = SL_2(\mathbb{C})$.

Teorema 3.2.4. *La ecuación diferencial*

$$y'' = L\left(x, \frac{1}{x}\right) y \tag{3.10}$$

Donde

$$L\left(x, \frac{1}{x}\right) = \frac{a_{-(2q+1)}}{x^{2q+1}} + \cdots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k, \quad q \in \mathbb{Z}^+, k \in \mathbb{Z}_+$$

No posee soluciones Liouvillianas

Prueba: Por las condiciones necesarias, los casos 1 y 3 del algoritmo de Kovacic no ocurren. Luego debemos seguir el caso 2, específicamente bajo las condiciones $\{c_3, \infty_3\}$. Por tanto

$$E_0 = \{2q+1\}, \quad y \quad E_\infty = \{-k\}$$

Luego, solo existe una posibilidad a considerar para $d \in \mathbb{Z}_+$,

$$d = \frac{1}{2}(-k - 2q - 1),$$

o equivalentemente

$$2d = (-k - 2q - 1).$$

Evidentemente, tal d no existe. Por tanto el algoritmo falla y la ecuación (3.10) no posee soluciones Liouvillianas.

Observación 3.2.5. *Suponga que $L\big(x, \frac{1}{x}\big) = P\big(\frac{1}{x}\big) + A(x)$ es un polinomio de Laurent de grado $2p$, $p \geq 1$ y orden $2q$, $q \geq 2$, donde $A(x)$ es mónico. Por el lema 3.1.1 y usando coeficientes indeterminados, $L\big(x, \frac{1}{x}\big)$ tiene la siguiente escritura*

$$L\left(x, \frac{1}{x}\right) = \left[P_1\left(\frac{1}{x}\right)\right]^2 + P_2\left(\frac{1}{x}\right) + [A_1(x)]^2 + A_2(x) \tag{3.11}$$

donde

$$\begin{array}{ll} P_1\big(\frac{1}{x}\big) = \sum_{i=-q}^{-2} a_i x^i, & P_2\big(\frac{1}{x}\big) = \sum_{i=-(q+1)}^{-2} b_i x^i \\ A_1(x) = x^p + \sum_{i=0}^{p-1} c_i x^i, & A_2(x) = \sum_{i=0}^{p-1} d_i x^i \end{array}$$

y los coeficientes a_i, b_i, c_i, d_i son números complejos.

Teorema 3.2.6. *Consideremos la ecuación diferencial*

$$y'' = L\left(x, \frac{1}{x}\right) y \tag{3.12}$$

donde

$$L\left(x, \frac{1}{x}\right) = \frac{a_{-2q}}{x^{2q}} + \cdots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k, \; q \geq 2, k > 0. \tag{3.13}$$

Luego, uno de los siguientes casos ocurre

1. a) *$L\big(x, \frac{1}{x}\big)$ es de grado $k = 2p$, escrito en forma de la observación 3.2.5,*

   b) *$d_{p-1} - \frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}}$, o $d_{p-1} + \frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}}$, o $-d_{p-1} - \frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}}$, o $-d_{p-1} + \frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}}$ es un entero positivo de la forma $2d + p + q$, $d \in \mathbb{Z}_+$,*

c) *existe un polinomio mónico P_d de grado d, tal que*

$$P_d'' + 2\Big(A_1 + P_1 + \frac{1}{2}\frac{\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}} + q}{x}\Big)P_d'$$
$$+\left(A_1' - A_2 + P_1' - P_2 + \frac{\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}} + q}{x}(A_1 + P_1) + \frac{1}{4}\frac{\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}} + q}{x}\Big(\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}} + q - 2\Big)\right)P_d = 0, \text{ o}$$
$$P_d'' + 2\Big(A_1 - P_1 + \frac{1}{2}\frac{-\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}} + q}{x}\Big)P_d'$$
$$+\left(A_1' - A_2 - P_1' - P_2 + \frac{-\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}} + q}{x}(A_1 - P_1) + \frac{1}{4}\frac{-\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}} + q}{x}\Big(-\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}} + q - 2\Big)\right)P_d = 0, \text{ o}$$
$$P_d'' + 2\Big(-A_1 + P_1 + \frac{1}{2}\frac{\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}} + q}{x}\Big)P_d'$$
$$+\left(-A_1' - A_2 + P_1' - P_2 + \frac{\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}} + q}{x}(-A_1 + P_1) + \frac{1}{4}\frac{\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}} + q}{x}\Big(\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}} + q - 2\Big)\right)P_d = 0, \text{ o}$$
$$P_d'' + 2\Big(-A_1 - P_1 + \frac{1}{2}\frac{-\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}} + q}{x}\Big)P_d'$$
$$+\left(-A_1' - A_2 - P_1' - P_2 - \frac{-\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}} + q}{x}(A_1 + P_1) + \frac{1}{4}\frac{-\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}} + q}{x}\Big(-\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}} + q - 2\Big)\right)P_d = 0.$$

En tal caso, (3.12) tiene como únicas soluciones posibles

- $y = x^{\frac{1}{2}\left(\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}}+q\right)}P_d e^{\int(A_1+P_1)dx}$, *o*
- $y = x^{\frac{1}{2}\left(-\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}}+q\right)}P_d e^{\int(A_1-P_1)dx}$, *o*
- $y = x^{\frac{1}{2}\left(\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}}+q\right)}P_d e^{\int(P_1-A_1)dx}$, *o*
- $y = x^{\frac{1}{2}\left(-\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}}+q\right)}P_d e^{-\int(A_1+P_1)dx}$.

2. *La ecuación (3.12) no posee soluciones Liouvillianas.*

Prueba: Consideremos la ecuación diferencial

$$\mathcal{L} := y'' = L\Big(x, \frac{1}{x}\Big)y, \tag{3.14}$$

donde $L\big(x, \frac{1}{x}\big)$ es un polinomio de Laurent de grado $k > 0$ y orden $2q > 2$. En este caso $o(L_0) = 2q$ y $o(L_\infty) = -k$, por el teorema de condiciones necesarias, la ecuación (3.14) solo puede satisfacer el caso 1 del algoritmo de Kovacic, luego k debe ser un entero par. Si escribimos a $L\big(x, \frac{1}{x}\big)$ de acuerdo a la observación 3.2.5, tenemos que

$$\begin{array}{ll} [\sqrt{L}]_0 = P_1\big(\frac{1}{x}\big), & \alpha_0^{\pm} = \frac{1}{2}\big(\pm\frac{b_{-(q+1)}}{a_q} + q\big). \\ [\sqrt{L}]_\infty = A_1(x), & \alpha_\infty^{\pm} = \frac{1}{2}(\pm d_{p-1} - p). \end{array}$$

Ahora del paso 2 del algoritmo de Kovacic, establezcamos $D = \{d \in \mathbb{Z}_+ | d = \alpha_\infty^{s(\infty)} - \alpha_0^{s(0)}\}$. Luego $D = \emptyset$, lo que implica que $DGal(\mathcal{L}) = SL_2(\mathbb{C})$, *i.e.*, la ecuación (3.14) no es integrable en el sentido Liouville o $|D| > 0$, por lo que al menos uno de los siguientes casos se da

1. $2d = d_{p-1} - p - \frac{b_{-(q+1)}}{a_q} - q > 0$, o
2. $2d = d_{p-1} - p + \frac{b_{-(q+1)}}{a_q} - q > 0$, o
3. $2d = -d_{p-1} - p - \frac{b_{-(q+1)}}{a_q} - q > 0$, o
4. $2d = -d_{p-1} - p + \frac{b_{-(q+1)}}{a_q} - q > 0$.

De esta forma, para cada $d \in D$ tenemos $\omega \in \mathbb{C}(x)$ dada por

1. $\omega = A_1(x) + P_1\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\frac{\frac{b_{-(q+1)}}{a_q}+q}{x}$, o
2. $\omega = A_1(x) - P_1\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\frac{-\frac{b_{-(q+1)}}{a_q}+q}{x}$, o
3. $\omega = -A_1(x) + P_1\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\frac{\frac{b_{-(q+1)}}{a_q}+q}{x}$, o
4. $\omega = -A_1(x) - P_1\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\frac{-\frac{b_{-(q+1)}}{a_q}+q}{x}$

Ahora para cada $d \in D$ ha de existir un polinomio mónico P_d de grado d, tal que

1. $P_d'' + 2\left(A_1 + P_1 + \frac{1}{2}\frac{\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}}+q}{x}\right)P_d' + \left(A_1' - A_2 + P_1' - P_2 + \frac{\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}}+q}{x}(A_1 + P_1) + \frac{1}{4}\frac{\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}}+q}{x}\left(\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}} + q - 2\right)\right)P_d = 0,$
2. $P_d'' + 2\left(A_1 - P_1 + \frac{1}{2}\frac{-\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}}+q}{x}\right)P_d' + \left(A_1' - A_2 - P_1' - P_2 + \frac{-\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}}+q}{x}(A_1 - P_1) + \frac{1}{4}\frac{-\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}}+q}{x}\left(-\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}} + q - 2\right)\right)P_d = 0,$
3. $P_d'' + 2\left(-A_1 + P_1 + \frac{1}{2}\frac{\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}}+q}{x}\right)P_d' + \left(-A_1' - A_2 + P_1' - P_2 + \frac{\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}}+q}{x}(-A_1 + P_1) + \frac{1}{4}\frac{\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}}+q}{x}\left(\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}} + q - 2\right)\right)P_d = 0,$
4. $P_d'' + 2\left(-A_1 - P_1 + \frac{1}{2}\frac{-\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}}+q}{x}\right)P_d' + \left(-A_1' - A_2 - P_1' - P_2 - \frac{-\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}}+q}{x}(A_1 + P_1) + \frac{1}{4}\frac{-\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}}+q}{x}\left(-\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}} + q - 2\right)\right)P_d = 0.$

En tal caso, el algoritmo de Kovacic proporciona una solución dada por

1. $y = x^{\frac{1}{2}\left(\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}}+q\right)} P_d e^{\int (A_1+P_1)dx}$, o
2. $y = x^{\frac{1}{2}\left(-\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}}+q\right)} P_d e^{\int (A_1-P_1)dx}$, o
3. $y = x^{\frac{1}{2}\left(\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}}+q\right)} P_d e^{\int (P_1-A_1)dx}$, o
4. $y = x^{\frac{1}{2}\left(-\frac{b_{-(q+1)}}{a_{-q}}+q\right)} P_d e^{-\int (A_1+P_1)dx}$.

Por otro lado, si tal P_d no existe, $DGal(\mathcal{L}) = SL_2(\mathbb{C})$, *i.e.*, la ecuación (3.14) no posee soluciones Liouvillianas

3.3. Soluciones Polinomiales de Ecuaciones de Segundo Orden con Coeficientes Polinomiales

Teorema 3.3.1. *La ecuación diferencial*

$$(a_{2,0}x^2 + a_{2,1}x + a_{2,2})y'' + (a_{1,0}x + a_{1,1})y' - a_{0,0}y = 0 \tag{3.15}$$

tiene solución polinomial y_d *de grado* d *si*

$$a_{0,0} = d(d-1)a_{2,0} + a_{1,0}d, \;\; d = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.16}$$

Además, los polinomios y_d *pueden obtenerse de la relación de recurrencia*

$$y_{d+2} = (A_d x + B_d)y_{d+1} + C_d y_d \tag{3.17}$$

donde,

$$A_d = \frac{((2d+1)a_{2,0} + a_{1,0})(2(d+1)a_{2,0} + a_{1,0})}{a_{2,0}d + a_{1,0}}$$

$$B_d = \frac{((2d+1)a_{2,0} + a_{1,0})(2d(d+1)a_{2,0}a_{2,1} + 2(d+1)a_{1,0}a_{2,1} - 2a_{1,1}a_{2,0} + a_{1,0}a_{1,1})}{(a_{2,0}d + a_{1,0})(2a_{2,0}d + a_{1,0})}$$

$$C_d = \frac{(d+1)(2(d+1)a_{2,0} + a_{1,0})((4a_{2,2}a_{2,0}^2)d^2 + (4a_{2,0}a_{1,0}a_{2,2} - a_{1,0}a_{2,1}^2)d + a_{1,0}^2 a_{2,2} - a_{1,1}a_{1,0}a_{2,1} + a_{2,0}a_{1,1}^2)}{(a_{2,0}d + a_{1,0})(2a_{2,0}d + a_{1,0})}$$

iniciando con

$$y_0 = 1, \;\; y_1 = a_{1,0}x + a_{1,1}.$$

Prueba: La ecuación (3.15) tiene la forma

$$y'' = l_0 y' + r_0 y \tag{3.18}$$

donde $l_0 = -\frac{a_{1,0}x + a_{1,1}}{a_{2,0}x^2 + a_{2,1}x + a_{2,2}}$ y $r_0 = \frac{a_{0,0}}{a_{2,0}x^2 + a_{2,1}x + a_{2,2}}$. Utilizando el MIA, podemos determinar la existencia de soluciones polinomiales para la ecuación (3.15), mediante la condición $\delta_d = l_d r_{d-1} - l_{d-1} r_d$. Por conveniencia establezcamos $r_{-1} = 0$ y $l_{-1} = 1$. Luego tenemos para $d = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{array}{lc}
\delta_0 = 0 \Rightarrow & a_{0,0} = 0 \\
\delta_1 = 0 \Rightarrow & a_{0,0}(a_{0,0} - a_{1,0}) = 0 \\
\delta_2 = 0 \Rightarrow & a_{0,0}(a_{0,0} - a_{1,0})(a_{0,0} - 2a_{1,0} - 2a_{2,0}) = 0 \\
\delta_3 = 0 \Rightarrow & a_{0,0}(a_{0,0} - a_{1,0})(a_{0,0} - 2a_{1,0} - 2a_{2,0})(a_{0,0} - 3a_{1,0} - 6a_{2,0}) = 0 \\
\delta_4 = 0 \Rightarrow & a_{0,0}(a_{0,0} - a_{1,0})(a_{0,0} - 2a_{1,0} - 2a_{2,0})(a_{0,0} - 3a_{1,0} - 6a_{2,0})(a_{0,0} - 4a_{1,0} - 12a_{2,0}) = 0 \\
\delta_5 = 0 \Rightarrow & a_{0,0}(a_{0,0} - a_{1,0})(a_{0,0} - 2a_{1,0} - 2a_{2,0})(a_{0,0} - 3a_{1,0} - 6a_{2,0})(a_{0,0} - 4a_{1,0} - 12a_{2,0})(a_{0,0} - 5a_{1,0} - 20a_{2,0}) = 0
\end{array}$$

En general tenemos que

$$\delta_d = 0 \Rightarrow \prod_{k=0}^{d}(a_{0,0} - ka_{1,0} - k(k-1)a_{2,0}) = 0$$

Por tanto la ecuación (3.15) tiene solución polinomial de grado d , si se satisface la condición

$$a_{0,0} = d(d-1)a_{2,0} + da_{1,0}, \;\; a_{2,0}^2 + a_{1,0}^2 \neq 0. \tag{3.19}$$

Las soluciones polinomiales pueden calcularse explícitamente con la fórmula

$$y_d(x) = e^{-\int^x \frac{r_{d-1}(t)}{l_{d-1}(t)} dt}. \tag{3.20}$$

Así

$$\begin{aligned}
&y_0(x) = e^{-\int^x \frac{r_{-1}(t)}{l_{-1}(t)} dt} = e^0 = 1 \\
&y_1(x) = e^{-\int^x \frac{r_0(t)}{l_0(t)} dt} = e^{\int^x \frac{a_{0,0}}{a_{1,0}t + a_{1,1}} dt} = a_{1,0}x + a_{1,1} \\
&y_2(x) = e^{-\int^x \frac{r_1(t)}{l_1(t)} dt} = (a_{2,0} + a_{1,0})(2a_{2,0} + a_{1,0})x^2 + 2(a_{2,0} + a_{1,0})(a_{2,1} + a_{1,1})x + a_{1,1}(a_{2,1} + a_{1,1}) \\
&\qquad + a_{2,2}(2a_{2,0} + a_{1,0}) \\
&y_3(x) = (2a_{2,0} + a_{1,0})(3a_{2,0} + a_{1,0})(4a_{2,0} + a_{1,0})x^3 + 3(2a_{2,0} + a_{1,0})(3a_{2,0} + a_{1,0})(2a_{2,1} + a_{1,1})x^2 \\
&\qquad + 3(2a_{2,0} + a_{1,0})(3a_{2,1}a_{1,1} + 2a_{2,1}^2 + 4a_{2,0}a_{2,2} + a_{2,2}a_{1,0} + a_{1,1}^2)x \\
&\qquad + 2a_{2,1}^2a_{1,1} + 3a_{2,1}a_{1,1}^2 + a_{1,1}^3 + 4a_{2,2}a_{2,1}a_{1,0} + 10a_{2,2}a_{2,0}a_{1,1} + 3a_{2,2}a_{1,1}a_{1,0} + 12a_{2,2}a_{2,1}a_{2,0}
\end{aligned}$$

Notemos que estas soluciones polinomiales satisfacen las relaciones de recurrencia

$$\begin{aligned}
y_2 &= \left(\frac{(2a_{2,0} + a_{1,0})(a_{2,0} + a_{1,0})}{a_{1,0}}x + \frac{(a_{2,0} + a_{1,0})(2a_{2,1}a_{1,0} + a_{1,1}a_{1,0} - 2a_{2,0}a_{1,1})}{a_{1,0}^2}\right)y_1 \\
&+ \left(\frac{(2a_{2,0} + a_{1,0})(a_{2,2}a_{1,0}^2 - a_{2,1}a_{1,1}a_{1,0} + a_{2,0}a_{1,1}^2)}{a_{1,0}^2}\right)y_0 \\
y_3 &= \left(\frac{(3a_{2,0} + a_{1,0})(4a_{2,0} + a_{1,0})}{a_{2,0} + a_{1,0}}x + \frac{(3a_{2,0} + a_{1,0})(4a_{2,1}a_{1,0} + a_{1,1}a_{1,0} + 4a_{2,1}a_{2,0} - 2a_{2,0}a_{1,1})}{(a_{2,0} + a_{1,0})(2a_{2,0} + a_{1,0})}\right)y_2 \\
&+ \left(\frac{2(4a_{2,0} + a_{1,0})(a_{2,2}a_{1,0}^2 - a_{2,1}a_{1,1}a_{1,0} + a_{2,0}a_{1,1}^2 + 4a_{2,2}a_{2,0}a_{1,0} - a_{2,1}^2a_{1,0} + 4a_{2,2}a_{2,0}^2 - a_{2,1}^2a_{2,0})}{(a_{2,0} + a_{1,0})(2a_{2,0} + a_{1,0})}\right)y_1
\end{aligned}$$

En general tenemos la siguiente relación de recurrencia a tres términos

$$\begin{aligned}
y_{d+2} = &\left(\frac{((2d+1)a_{2,0} + a_{1,0})(2(d+1)a_{2,0} + a_{1,0})}{a_{2,0}d + a_{1,0}}x \right.\\
&\left. + \frac{((2d+1)a_{2,0} + a_{1,0})(2d(d+1)a_{2,0}a_{2,1} + 2(d+1)a_{1,0}a_{2,1} - 2a_{1,1}a_{2,0} + a_{1,0}a_{1,1})}{(a_{2,0}d + a_{1,0})(2a_{2,0}d + a_{1,0})}\right)y_{d+1} \\
& + \frac{(d+1)(2(d+1)a_{2,0} + a_{1,0})((4a_{2,2}a_{2,0}^2)d^2 + (4a_{2,0}a_{1,0}a_{2,2} - a_{1,0}a_{2,1}^2)d + a_{1,0}^2a_{2,2} - a_{1,1}a_{1,0}a_{2,1} + a_{2,0}a_{1,1}^2)}{(a_{2,0}d + a_{1,0})(2a_{2,0}d + a_{1,0})}y_d
\end{aligned} \tag{3.21}$$

empezando por $y_0 = 1$ y $y_1 = a_{1,0}x + a_{1,1}$ □

Observación 3.3.2. *Observemos en el teorema anterior, que dado el caso en que* $a_{2,0} = a_{2,1} = 0$ *y* $a_{2,2} = 1$*, la condición de suficiencia para la existencia de soluciones polinomiales se ve reducida a*

$$a_{0,0} = a_{1,0}d, \ d = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.22}$$

Además, los polinomios y_d *pueden obtenerse de la relación de recurrencia*

$$y_{d+2} = (a_{1,0}x + a_{1,1})y_{d+1} + (d+1)a_{1,0}y_d \tag{3.23}$$

iniciando con

$$y_0 = 1, \ y_1 = a_{1,0}x + a_{1,1}.$$

Teorema 3.3.3. *La condición necesaria y la condición suficiente para que la ecuación*

$$(a_{3,0}x^3 + a_{3,1}x^2 + a_{3,2}x + a_{3,3})y'' - (a_{2,0}x^2 + a_{2,1}x + a_{2,2})y' - (a_{1,0}x + a_{1,1})y = 0 \tag{3.24}$$

posea soluciones polinomiales son, respectivamente,

$$a_{1,0} = d(d-1)a_{3,0} - a_{2,0}d, \;\; d = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.25}$$

y

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & & & & \\ \eta_1 & \alpha_1 & b_1 & \gamma_1 & & & \\ & \eta_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \eta_{d-2} & \alpha_{d-2} & \beta_{d-2} & \gamma_{d-2} \\ & & & & \eta_{d-1} & \alpha_{d-1} & \beta_{d-1} \\ & & & & & \eta_d & \alpha_d \end{vmatrix} = 0 \tag{3.26}$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_k &= a_{3,1}k(k-1) - a_{2,1}k - a_{1,1} & k &= 0, 1, 2, \ldots \\ \beta_k &= a_{3,2}k(k+1) - a_{2,2}(k+1) & k &= 0, 1, 2, \ldots \\ \gamma_k &= a_{3,3}(k+2)(k+1) & k &= 0, 1, 2, \ldots \\ \eta_k &= a_{3,0}(k-1)(k-2) - a_{2,0}(k-1) - a_{1,0} & k &= 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Prueba: supongamos que la ecuación (3.24) posee una solución de la forma

$$y = \sum_{i=0}^{d} v_i x^i \tag{3.27}$$

Reemplazando en (3.24) obtenemos

$$\begin{aligned} &\sum_{i=2}^{d} a_{3,0}i(i-1)v_i x^{i+1} + \sum_{i=2}^{d} a_{3,1}i(i-1)v_i x^i + \sum_{i=2}^{d} a_{3,2}i(i-1)v_i x^{i-1} \\ &+ \sum_{i=2}^{d} a_{3,3}i(i-1)v_i x^{i-2} + \sum_{i=1}^{d} -a_{2,0}iv_i x^{i+1} + \sum_{i=1}^{d} -a_{2,1}iv_i x^i \\ &+ \sum_{i=1}^{d} -a_{2,2}iv_i x^{i-1} + \sum_{i=0}^{d} -a_{1,0}v_i x^{i+1} + \sum_{i=0}^{d} -a_{1,1}v_i x^i = 0 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Luego desplazando índices tenemos que

$$\begin{aligned} &\sum_{k=3}^{d+1} a_{3,0}(k-2)(k-1)v_{k-1}x^k + \sum_{k=2}^{d} a_{3,1}k(k-1)v_k x^k + \sum_{k=1}^{d-1} a_{3,2}k(k+1)v_{k+1}x^k \\ &+ \sum_{k=0}^{d-2} a_{3,3}(k+2)(k+1)v_{k+2}x^k + \sum_{k=2}^{d+1} -a_{2,0}(k-1)v_{k-1}x^k + \sum_{k=1}^{d} -a_{2,1}kv_k x^k \\ &+ \sum_{k=0}^{d-1} -a_{2,2}(k+1)v_{k+1}x^k + \sum_{k=1}^{d+1} -a_{1,0}v_{k-1}x^k + \sum_{k=0}^{d} -a_{1,1}v_k x^k = 0 \end{aligned} \tag{3.29}$$

consideremos el coeficiente de x^{d+1}

$$-a_{2,0}dv_d - a_{1,0}v_d = 0$$

de donde obtenemos una condición necesaria

$$a_{1,0} = -a_{2,0}d.$$

Además, agrupando los coeficientes de los términos restantes y aplicando el principio de identidad, obtenemos las siguientes fórmulas de recurrencia a cuatro términos

$$\eta_k v_{k-1} + \alpha_k v_k + \beta_k c_{k+1} + \gamma_k c_{k+2} = 0,\ \ k = 0, \dots, d.\ v_{-1} = v_{d+1} = v_{d+2} = 0. \tag{3.30}$$

donde

$$\begin{array}{rcl} \alpha_k = a_{3,1}k(k-1) - a_{2,1}k - a_{1,1} & & k = 0, 1, 2, \dots \\ \beta_k = a_{3,2}k(k+1) - a_{2,2}(k+1) & & k = 0, 1, 2, \dots \\ \gamma_k = a_{3,3}(k+2)(k+1) & & k = 0, 1, 2, \dots \\ \eta_k = a_{3,0}(k-1)(k-2) - a_{2,0}(k-1) - a_{1,0} & & k = 1, 2, \dots \end{array}$$

Por tanto, la condición de suficiencia para que (3.24) posea soluciones polinomiales está dada por el sistema

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & & & & \\ \eta_1 & \alpha_1 & b_1 & \gamma_1 & & & \\ & \eta_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \eta_{d-2} & \alpha_{d-2} & \beta_{d-2} & \gamma_{d-2} \\ & & & & \eta_{d-1} & \alpha_{d-1} & \beta_{d-1} \\ & & & & & \eta_d & \alpha_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{d-2} \\ v_{d-1} \\ v_d \end{bmatrix} = 0 \tag{3.31}$$

Este sistema tiene solución distinta de cero si la matriz de coeficientes del sistema tiene determinante igual a cero, notemos tal determinante por

$$\Delta_{d+1} = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & & & & \\ \eta_1 & \alpha_1 & b_1 & \gamma_1 & & & \\ & \eta_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \eta_{d-2} & \alpha_{d-2} & \beta_{d-2} & \gamma_{d-2} \\ & & & & \eta_{d-1} & \alpha_{d-1} & \beta_{d-1} \\ & & & & & \eta_d & \alpha_d \end{vmatrix} \tag{3.32}$$

Podemos ver que Δ_d satisface la relación de recurrencia a cuatro términos dada por

$$\Delta_{d+1} = \alpha_d \Delta_d - \eta_d(\beta_{d-1}\Delta_{d-1} - \eta_{d-1}\gamma_{d-2}\Delta_{d-2}) \tag{3.33}$$

comenzando por

$$\Delta_0 = 1;\ \ \Delta_{-1} = \Delta_{-2} = 0.$$

esta relación puede ser usada para calcular el determiante Δ_k y así poder determinar si el sistema (3.31) posee soluciones no triviales.

Cuadro 3.1: Condiciones en los parámetros de (3.24) para obtener soluciones polinomiales

d	Δ_{d+1}
0	$\alpha_0 = 0$
1	$\alpha_0\alpha_1 - \beta_0\eta_1 = 0$
2	$-\alpha_2\beta_0\eta_1 - \alpha_0\beta_1\eta_2 + \alpha_0\alpha_1\alpha_2 + \gamma_0\eta_1\eta_2 = 0$
3	$-\alpha_2\alpha_3\beta_0\eta_1 - \alpha_0\alpha_3\beta_1\eta_2 - \alpha_0\alpha_1\beta_2\eta_3 + \alpha_3\gamma_0\eta_1\eta_2 + \alpha_0\gamma_1\eta_2\eta_3 + \alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \beta_0\beta_2\eta_1\eta_3 = 0$

Las soluciones polinomiales puden construirse a partir de (3.30)

$$v_d = 1,\ v_{k-1} = \frac{-\alpha_k v_k - \beta_k v_{k+1} - \gamma_k v_{k+2}}{\eta_k},\ v_{-1} = v_{d+1} = v_{d+2} = 0. \tag{3.34}$$

□

Lema 3.3.4. *Consideremos la matriz pentadiagonal A_{n+1} dada por*

$$\begin{bmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & & & & & & \\ d_1 & a_1 & b_1 & c_1 & & & & & \\ e_2 & d_2 & a_2 & b_2 & c_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & e_{n-4} & d_{n-4} & a_{n-4} & b_{n-4} & c_{n-4} & & \\ & & & e_{n-3} & d_{n-3} & a_{n-3} & b_{n-3} & c_{n-3} & \\ & & & & e_{n-2} & d_{n-2} & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} \\ & & & & & e_{n-1} & d_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & & & e_n & d_n & a_n \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

el determinante de esta matriz es la solución particular del sistema

$$\begin{aligned} \Delta^A_{n+1} &= e_n b_{n-1}\Delta^B_{n-1} - d_n\Delta^B_n + e_n e_{n-1} c_{n-2} c_{n-3}\Delta^A_{n-3} - e_n c_{n-2} a_{n-1}\Delta^A_{n-2} + a_n\Delta^A_n, \\ \Delta^B_{n-1} &= b_{n-2}\Delta^A_{n-2} - c_{n-3}(d_{n-2}\Delta^A_{n-3} - e_{n-2}\Delta^B_{n-3}). \end{aligned} \tag{3.36}$$

Con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} &\Delta^A_{-3} = \Delta^A_{-2} = \Delta^A_{-1} = \Delta^B_{-1} = \Delta^B_0 = 0, \\ &\Delta^A_0 = 1. \end{aligned}$$

Donde Δ^A_{n+1} es el determinante de A_{n+1} y Δ^B_n es el determinante de la matriz auxiliar

$$B_n = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & & & & & \\ d_1 & a_1 & b_1 & c_1 & & & & \\ e_2 & d_2 & a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & e_{n-4} & d_{n-4} & a_{n-4} & b_{n-4} & c_{n-4} & \\ & & & e_{n-3} & d_{n-3} & a_{n-3} & b_{n-3} & 0 \\ & & & & e_{n-2} & d_{n-2} & a_{n-2} & c_{n-2} \\ & & & & & e_{n-1} & d_{n-1} & b_{n-1} \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

Prueba: Consideremos la matriz pentadiagonal A_{n+1} y las matrices auxiliares B_n y C_n, con

$$C_n = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & & & & & & \\ d_1 & a_1 & b_1 & c_1 & & & & & \\ e_2 & d_2 & a_2 & b_2 & c_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & e_{n-4} & d_{n-4} & a_{n-4} & b_{n-4} & 0 & & \\ & & & e_{n-3} & d_{n-3} & a_{n-3} & c_{n-3} & 0 & \\ & & & & e_{n-2} & d_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} \\ & & & & & e_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

Notemos por Δ_n^C al determinante de C_n. Entonces tenemos que

$$\Delta_{n+1}^A = a_n\Delta_n^A - d_n\Delta_n^B + e_n\Delta_n^C \tag{3.39}$$

Ahora establezcamos una recurrencia en Δ_n^B, por medio del teorema de expansión de Laplace en la última fila de B_n, tenemos

$$\begin{aligned} \Delta_n^B &= b_{n-1}\Delta_{n-1}^A - d_{n-1}c_{n-2}\Delta_{n-2}^A + e_{n-1}c_{n-2}\Delta_{n-2}^B \\ &= b_{n-1}\Delta_{n-1}^A - c_{n-2}(d_{n-1}\Delta_{n-2}^A + e_{n-1}\Delta_{n-2}^B) \end{aligned} \tag{3.40}$$

También, deducimos una recurrencia en Δ_n^C, nuevamente por el teorema de expansión de Laplace en la última columna de C_n, obtenemos

$$\Delta_n^c = b_{n-1}\Delta_{n-1}^B - c_{n-2}(a_{n-1}\Delta_{n-2}^A + e_{n-1}c_{n-3}\Delta_{n-3}^C) \tag{3.41}$$

reemplazando (3.41) en (3.39), tenemos que

$$\Delta_{n+1}^A = e_nb_{n-1}\Delta_{n-1}^B - d_n\Delta_n^B + e_ne_{n-1}c_{n-2}c_{n-3}\Delta_{n-3}^A - e_nc_{n-2}a_{n-1}\Delta_{n-2}^A + a_n\Delta_n^A$$

Por consiguiente, Δ_{n+1}^A satisface el siguiente sistema de relaciones de recurrencia

$$\begin{aligned} &\Delta_{n+1}^A = e_nb_{n-1}\Delta_{n-1}^B - d_n\Delta_n^B + e_ne_{n-1}c_{n-2}c_{n-3}\Delta_{n-3}^A - e_nc_{n-2}a_{n-1}\Delta_{n-2}^A + a_n\Delta_n^A, \\ &\Delta_{n-1}^B = b_{n-2}\Delta_{n-2}^A - c_{n-3}(d_{n-2}\Delta_{n-3}^A - e_{n-2}\Delta_{n-3}^B). \end{aligned}$$

comenzando por

$$\begin{aligned} &\Delta_{-3}^A = \Delta_{-2}^A = \Delta_{-1}^A = \Delta_{-1}^B = \Delta_0^B = 0, \\ &\Delta_0^A = 1. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.3.5. *La condición necesaria para que la ecuación*

$$y'' - (a_{3,0}x^3 + a_{3,1}x^2 + a_{3,2}x + a_{3,3})y' - (a_{2,0}x^2 + a_{2,1}x + a_{2,2})y = 0 \tag{3.42}$$

posea soluciones polinomiales es

$$a_{2,0} = -da_{3,0},\ d = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.43}$$

Mientras que las condiciones necesarias para que posea soluciones polinomiales, están dadas por

$$\Delta_{d+1}^{A,1} = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & & & & \\ \delta_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & & & \\ \eta_2 & \delta_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \eta_{d-2} & \delta_{d-2} & \alpha_{d-2} & \beta_{d-2} & \gamma_{d-2} \\ & & & \eta_{d-1} & \delta_{d-1} & \alpha_{d-1} & \beta_{d-1} \\ & & & & \eta_d & \delta_d & \alpha_d \end{vmatrix} = 0 \tag{3.44}$$

y

$$\Delta_{d+1}^{A,2} = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & & & & \\ \delta_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & & & \\ \eta_2 & \delta_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \eta_{d-2} & \delta_{d-2} & \alpha_{d-2} & \beta_{d-2} & \gamma_{d-2} \\ & & & \eta_{d-1} & \delta_{d-1} & \alpha_{d-1} & \beta_{d-1} \\ & & & & 0 & \eta_{d+1} & \delta_{d+1} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.45}$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_k &= -a_{3,2}k - a_{2,2}, && k = 0, 1, 2, \dots \\ \beta_k &= -a_{3,3}(k+1), && k = 0, 1, 2, \dots \\ \gamma_k &= (k+2)(k+1), && k = 0, 1, 2, \dots \\ \delta_k &= -a_{3,1}(k-1) - a_{2,1}, && k = 1, 2, 3 \dots \\ \eta_k &= -a_{3,0}(k-2) - a_{2,0}, && k = 2, 3, 4 \dots \end{aligned}$$

Prueba: Suponga que (3.42) posee una solución de la forma

$$y = \sum_{i=0}^{d} v_i x^i \tag{3.46}$$

por lo cual

$$\sum_{i=2}^{d} i(i-1)v_i x^{i-2} - (a_{3,0}x^3 + a_{3,1}x^2 + a_{3,2}x + a_{3,3}) \sum_{i=0}^{d} i v_i x^{i-1} - (a_{2,0}x^2 + a_{2,1}x + a_{2,2}) \sum_{i=0}^{d} v_i x^i = 0 \tag{3.47}$$

desplazando índices y agrupando coeficientes tenemos

$$\begin{aligned} \Bigg(\sum_{k=0}^{d-2} (k+2)(k+1)v_{k+2} + \sum_{k=3}^{d+2} -a_{3,0}(k-2)v_{k-2} + \sum_{k=2}^{d+1} -a_{3,1}(k-1)v_{k-1} + \sum_{k=1}^{d} -a_{3,2}kv_k \\ \sum_{k=0}^{d-1} a_{-3,3}(k+1)v_{k+1} + \sum_{k=2}^{d+2} -a_{2,0}v_{k-2} + \sum_{k=1}^{d+1} -a_{2,1}v_{k-1} + \sum_{k=0}^{d} -a_{2,2}v_k \Bigg) x^k = 0 \end{aligned} \tag{3.48}$$

por lo tanto el coeficiente de x^{d+2} es

$$-a_{3,0}dc_d - a_{2,0}c_d$$

Por consiguiente

$$a_{2,0} = -d a_{3,0}$$

Además, por medio del principio de identidad en (3.48) obtenemos la siguiente relación de recurrencia

$$\eta_k v_{k-2} + \delta_k v_{k-1} + \alpha_k c_k + \beta_k v_{k+1} + \gamma_k v_{k+2}, \; k = 0, 1, 2, \ldots, d+1. \tag{3.49}$$

donde $v_{-2} = v_{-1} = v_{d+1} = v_{d+2} = v_{d+3} = v_{+4} = 0$ y

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= -a_{3,2}k - a_{2,2}, & k &= 0, 1, 2, \ldots\\
\beta_k &= -a_{3,3}(k+1), & k &= 0, 1, 2, \ldots\\
\gamma_k &= (k+2)(k+1), & k &= 0, 1, 2, \ldots\\
\delta_k &= -a_{3,1}(k-1) - a_{2,1}, & k &= 1, 2, 3 \ldots\\
\eta_k &= -a_{3,0}(k-2) - a_{2,0}, & k &= 2, 3, 4 \ldots
\end{aligned}$$

de (3.49) se sigue inmediatamente que las condiciones suficientes para que la ecuación (3.42) tenga soluciones polinomiales están dadas por el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix}
\alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & & & & \\
\delta_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & & & \\
\eta_2 & \delta_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & \eta_{d-2} & \delta_{d-2} & \alpha_{d-2} & \beta_{d-2} & \gamma_{d-2}\\
 & & & \eta_{d-1} & \delta_{d-1} & \alpha_{d-1} & \beta_{d-1}\\
 & & & & \eta_d & \delta_d & \alpha_d\\
 & & & & 0 & \eta_{d+1} & \delta_{d+1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} v_0\\ v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_{d-2}\\ v_{d-1}\\ v_d \end{bmatrix} = 0 \tag{3.50}$$

este sistema posee solución distinta de cero si

$$\Delta_{d+1}^{A,1} = \begin{vmatrix}
\alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & & & & \\
\delta_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & & & \\
\eta_2 & \delta_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & \eta_{d-2} & \delta_{d-2} & \alpha_{d-2} & \beta_{d-2} & \gamma_{d-2}\\
 & & & \eta_{d-1} & \delta_{d-1} & \alpha_{d-1} & \beta_{d-1}\\
 & & & & \eta_d & \delta_d & \alpha_d
\end{vmatrix} = 0 \tag{3.51}$$

y

$$\Delta_{d+1}^{A,2} = \begin{vmatrix}
\alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & & & & \\
\delta_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & & & \\
\eta_2 & \delta_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & \eta_{d-2} & \delta_{d-2} & \alpha_{d-2} & \beta_{d-2} & \gamma_{d-2}\\
 & & & \eta_{d-1} & \delta_{d-1} & \alpha_{d-1} & \beta_{d-1}\\
 & & & & 0 & \eta_{d+1} & \delta_{d+1}
\end{vmatrix} = 0 \tag{3.52}$$

del lema 3.3.4, $\Delta_{d+1}^{A,1}$ y $\Delta_{d+1}^{A,2}$ satisfacen los sistemas de ecuaciones en recurrencia (respectivamente)

$$\begin{aligned}
&\Delta_{d+1}^{A,1} = \eta_d\beta_{d-1}\Delta_{d-1}^{B,1} - \delta_d\Delta_d^{B,1} + \eta_d\eta_{d-1}\gamma_{d-2}\gamma_{d-3}\Delta_{d-3}^{A,1} - \eta_d\gamma_{d-2}\alpha_{d-1}\Delta_{d-2}^{A,1} + a_d\Delta_d^{A,1},\\
&\Delta_{d-1}^{B,1} = \beta_{d-2}\Delta_{d-2}^{A,1} - \gamma_{d-3}(\delta_{d-2}\Delta_{d-3}^{A,1} - \eta_{d-2}\Delta_{d-3}^{B,1}).
\end{aligned} \tag{3.53}$$

y

$$
\begin{aligned}
\Delta_{d+1}^{A,2} &= -\eta_{d+1}\Delta_{d}^{B,2} + \delta_{d+1}\Delta_{d}^{A,2}, \\
\Delta_{d-1}^{B,2} &= \beta_{d-2}\Delta_{d-2}^{A,2} - \gamma_{d-3}(\delta_{d-2}\Delta_{d-3}^{A,2} - \eta_{d-2}\Delta_{d-3}^{B,2}).
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

□

Observación 3.3.6. *En general una condición necesaria para que la ecuación*

$$
y'' - \left(\sum_{j=0}^{k+1} a_{k+1,j}x^{k+1-j}\right)y' - \left(\sum_{j=0}^{k} a_{k,j}x^{k-j}\right)y = 0 \tag{3.55}
$$

tenga solución polinomial de grado d es

$$
a_{k,0} = -da_{k+1,0},\ k = 0, 1, 2\dots \tag{3.56}
$$

Más aún, una condición necesaria para que la ecuación

$$
\left(\sum_{j=0}^{k+2} a_{k+2,j}x^{k+2-j}\right)y'' - \left(\sum_{j=0}^{k+1} a_{k+1,j}x^{k+1-j}\right)y' - \left(\sum_{j=0}^{k} a_{k,j}x^{k-j}\right)y = 0 \tag{3.57}
$$

tenga solución polinomial de grado d es

$$
a_{k,0} = d(d-1)a_{k+2,0} - da_{k+1,0},\ k = 0, 1, 2\dots \tag{3.58}
$$

La prueba de esta observación se basa en los teoremas anteriores, reemplazando $y = \sum_{j=0}^{d} v_j x^j$ en (3.57) y luego distribuyendo y aplicando el principio de identidad al resultado. El coeficiente de la mayor potencia de x establece la condición necesaria.

Lema 3.3.7. *Considere la matriz A_{n+1} dada por*

$$
A_{n+1} = \begin{bmatrix}
a_0 & b_0 & c_0 & & & & & & & \\
e_1 & a_1 & b_1 & c_1 & & & & & & \\
f_2 & e_2 & a_2 & b_2 & c_2 & & & & & \\
g_3 & f_3 & e_3 & a_3 & b_3 & c_3 & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & g_{n-4} & f_{n-4} & e_{n-4} & a_{n-4} & b_{n-4} & c_{n-4} & & \\
 & & & g_{n-3} & f_{n-3} & e_{n-3} & a_{n-3} & b_{n-3} & c_{n-3} & \\
 & & & & g_{n-2} & f_{n-2} & e_{n-2} & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} \\
 & & & & & g_{n-1} & f_{n-1} & e_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\
 & & & & & & g_n & f_n & e_n & a_n
\end{bmatrix} \tag{3.59}
$$

El determinante de esta matriz es solución particular del sistema

$$
\begin{aligned}
\Delta_{n+1}^{A} &= a_n\Delta_n^A - e_n\Delta_n^B \\
&\quad + f_n(b_{n-1}\Delta_{n-1}^B - a_{n-1}c_{n-2}\Delta_{n-2}^A + f_{n-1}c_{n-2}c_{n-3}\Delta_{n-3}^A - g_{n-1}c_{n-2}c_{n-3}\Delta_{n-3}^B) \\
&\quad - g_n(b_{n-1}(b_{n-2}\Delta_{n-2}^B - a_{n-2}c_{n-3}\Delta_{n-3}^A + f_{n-2}c_{n-3}c_{n-4}\Delta_{n-4}^A - g_{n-2}c_{n-3}c_{n43}\Delta_{n-4}^B) \\
&\quad - a_{n-1}c_{n-2}\Delta_{n-2}^B + e_{n-1}c_{n-2}c_{n-3}\Delta_{n-3}^A - g_{n-1}c_{n-2}c_{n-3}c_{n-4}\Delta_{n-4}^A), \\
\Delta_n^B &= b_{n-1}\Delta_{n-1}^A - e_{n-1}\Delta_{n-2}^A + f_{n-1}c_{n-2}\Delta_{n-2}^B \\
&\quad - g_{n-1}c_{n-2}(b_{n-3}\Delta_{n-3}^B - a_{n-3}c_{n-4}\Delta_{n-4}^A + f_{n-3}c_{n-4}c_{n-5}\Delta_{n-5}^A - g_{n-3}c_{n-4}c_{n-5}\Delta_{n-5}^B).
\end{aligned}
\tag{3.60}
$$

Con condiciones iniciales

$$\begin{aligned}
&\Delta^A_{-5} = \Delta^A_{-4} = \Delta^A_{-3} = \Delta^A_{-2} = \Delta^A_{-1} = 0,\\
&\Delta^B_{-5} = \Delta^B_{-4} = \Delta^B_{-3} = \Delta^B_{-2} = \Delta^B_{-1} = \Delta^B_{0} = 0,\\
&\Delta^A_0 = 1.
\end{aligned}$$

donde Δ^B_n, Δ^C_n *y* Δ^D_n *denotan los determinantes de las matrices auxiliares (respectivamente)*

$$B_n = \begin{bmatrix}
a_0 & b_0 & c_0 &&&&&&&\\
e_1 & a_1 & b_1 & c_1 &&&&&&\\
f_2 & e_2 & a_2 & b_2 & c_2 &&&&&\\
g_3 & f_3 & e_3 & a_3 & b_3 & c_3 &&&&\\
& \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots &&&\\
&& g_{n-5} & f_{n-5} & e_{n-5} & a_{n-5} & b_{n-5} & c_{n-5} & 0 & 0\\
&&& g_{n-4} & f_{n-4} & e_{n-4} & a_{n-4} & b_{n-4} & c_{n-4} & 0\\
&&&& g_{n-3} & f_{n-3} & e_{n-3} & a_{n-3} & b_{n-3} & 0\\
&&&&& g_{n-2} & f_{n-2} & e_{n-2} & a_{n-2} & c_{n-2}\\
&&&&&& g_{n-1} & f_{n-1} & e_{n-1} & b_{n-1}
\end{bmatrix},$$

$$C_n = \begin{bmatrix}
a_0 & b_0 & c_0 &&&&&&&\\
e_1 & a_1 & b_1 & c_1 &&&&&&\\
f_2 & e_2 & a_2 & b_2 & c_2 &&&&&\\
g_3 & f_3 & e_3 & a_3 & b_3 & c_3 &&&&\\
& \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots &&&\\
&& g_{n-5} & f_{n-5} & e_{n-5} & a_{n-5} & b_{n-5} & c_{n-5} & 0 & 0\\
&&& g_{n-4} & f_{n-4} & e_{n-4} & a_{n-4} & b_{n-4} & 0 & 0\\
&&&& g_{n-3} & f_{n-3} & e_{n-3} & a_{n-3} & c_{n-3} & 0\\
&&&&& g_{n-2} & f_{n-2} & e_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2}\\
&&&&&& g_{n-1} & f_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1}
\end{bmatrix}, \ y$$

$$D_n = \begin{bmatrix}
a_0 & b_0 & c_0 &&&&&&&\\
e_1 & a_1 & b_1 & c_1 &&&&&&\\
f_2 & e_2 & a_2 & b_2 & c_2 &&&&&\\
g_3 & f_3 & e_3 & a_3 & b_3 & c_3 &&&&\\
& \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots &&&\\
&& g_{n-5} & f_{n-5} & e_{n-5} & a_{n-5} & b_{n-5} & c_{n-5} & 0 & 0\\
&&& g_{n-4} & f_{n-4} & e_{n-4} & a_{n-4} & c_{n-4} & 0 & 0\\
&&&& g_{n-3} & f_{n-3} & e_{n-3} & b_{n-3} & c_{n-3} & 0\\
&&&&& g_{n-2} & f_{n-2} & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2}\\
&&&&&& g_{n-1} & e_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1}
\end{bmatrix}.$$

Prueba: Mediante el teorema de expansión de Laplace tenemos que

$$\Delta^A_{n+1} = a_n\Delta^A_n - e_n\Delta^B_n + f_n\Delta^C_n - g_n\Delta^D_n \tag{3.61}$$

Al igual que en el lema 3.3.4 busquemos recurrencias en los determinantes de B_n, C_n y D_n. Nuevamente por medio del teorema de expansión de Laplace en la última fila de estas matrices obtenemos que

$$\Delta_n^B = b_{n-1}\Delta_{n-1}^A - e_{n-1}\Delta_{n-2}^A + f_{n-1}c_{n-2}\Delta_{n-2}^B - g_{n-1}c_{n-2}\Delta_{n-2}^C, \tag{3.62}$$

$$\Delta_n^C = b_{n-1}\Delta_{n-1}^B - a_{n-1}c_{n-2}\Delta_{n-2}^A + f_{n-1}c_{n-2}c_{n-3}\Delta_{n-3}^A - g_{n-1}c_{n-2}c_{n-3}\Delta_{n-3}^B, \tag{3.63}$$

$$\Delta_n^D = b_{n-1}\Delta_{n-1}^C - a_{n-1}c_{n-2}\Delta_{n-2}^B + e_{n-1}c_{n-2}c_{n-3}\Delta_{n-3}^A - g_{n-1}c_{n-2}c_{n-3}c_{n-4}\Delta_{n-4}^A. \tag{3.64}$$

Usando la recurrencia (3.63) en (3.62) y (3.64) (respectivamente) tenemos

$$\begin{aligned}\Delta_n^B &= b_{n-1}\Delta_{n-1}^A - e_{n-1}\Delta_{n-2}^A + f_{n-1}c_{n-2}\Delta_{n-2}^B \\ &\quad - g_{n-1}c_{n-2}(b_{n-3}\Delta_{n-3}^B - a_{n-3}c_{n-4}\Delta_{n-4}^A + f_{n-3}c_{n-4}c_{n-5}\Delta_{n-5}^A - g_{n-3}c_{n-4}c_{n-5}\Delta_{n-5}^B).\end{aligned} \tag{3.65}$$

y

$$\begin{aligned}\Delta_n^D =& b_{n-1}(b_{n-2}\Delta_{n-2}^B - a_{n-2}c_{n-3}\Delta_{n-3}^A + f_{n-2}c_{n-3}c_{n-4}\Delta_{n-4}^A - g_{n-2}c_{n-3}c_{n-4}\Delta_{n-4}^B) \\ &- a_{n-1}c_{n-2}\Delta_{n-2}^B + e_{n-1}c_{n-2}c_{n-3}\Delta_{n-3}^A - g_{n-1}c_{n-2}c_{n-3}c_{n-4}\Delta_{n-4}^A.\end{aligned} \tag{3.66}$$

Por tanto el determinante de A_{n+1} satisface el sistema de ecuaciones en recurrencia

$$\begin{aligned}\Delta_{n+1}^A &= a_n\Delta_n^A - e_n\Delta_n^B \\ &\quad + f_n(b_{n-1}\Delta_{n-1}^B - a_{n-1}c_{n-2}\Delta_{n-2}^A + f_{n-1}c_{n-2}c_{n-3}\Delta_{n-3}^A - g_{n-1}c_{n-2}c_{n-3}\Delta_{n-3}^B) \\ &\quad - g_n(b_{n-1}(b_{n-2}\Delta_{n-2}^B - a_{n-2}c_{n-3}\Delta_{n-3}^A + f_{n-2}c_{n-3}c_{n-4}\Delta_{n-4}^A - g_{n-2}c_{n-3}c_{n-4}\Delta_{n-4}^B) \\ &\quad - a_{n-1}c_{n-2}\Delta_{n-2}^B + e_{n-1}c_{n-2}c_{n-3}\Delta_{n-3}^A - g_{n-1}c_{n-2}c_{n-3}c_{n-4}\Delta_{n-4}^A), \\ \Delta_n^B &= b_{n-1}\Delta_{n-1}^A - e_{n-1}\Delta_{n-2}^A + f_{n-1}c_{n-2}\Delta_{n-2}^B \\ &\quad - g_{n-1}c_{n-2}(b_{n-3}\Delta_{n-3}^B - a_{n-3}c_{n-4}\Delta_{n-4}^A + f_{n-3}c_{n-4}c_{n-5}\Delta_{n-5}^A - g_{n-3}c_{n-4}c_{n-5}\Delta_{n-5}^B).\end{aligned} \tag{3.67}$$

con condiciones iniciales

$$\begin{aligned}&\Delta_{-5}^A = \Delta_{-4}^A = \Delta_{-3}^A = \Delta_{-2}^A = \Delta_{-1}^A = 0, \\ &\Delta_{-5}^B = \Delta_{-4}^B = \Delta_{-3}^B = \Delta_{-2}^B = \Delta_{-1}^B = \Delta_0^B = 0, \\ &\Delta_0^A = 1.\end{aligned}$$

□

Teorema 3.3.8. *Las condiciones suficientes para que la ecuación diferencial*

$$\begin{aligned}(a_{5,0}x^5 + a_{5,1}x^4 + a_{5,2}x^3 + a_{5,3}x^2 + a_{5,4}x + a_{5,5})y'' + (a_{4,0}x^4 + a_{4,1}x^3 + a_{4,2}x^2 + a_{4,3} + a_{4,4})y' \\ - (a_{3,0}x^3 + a_{3,1}x^2 + a_{3,2} + a_{3,3})y = 0\end{aligned} \tag{3.68}$$

donde $a_{5,0}^2 + a_{4,0}^2 \neq 0$ y al menos uno de los coeficientes $a_{5,i}$ con $i \in \{0,1,2,3,4,5\}$ es distinto de cero, tenga solución polinomial de grado d están dadas por las soluciones del sistema

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & & & & & \\ \delta_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & & & & \\ \eta_2 & \delta_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & & & \\ \mu_3 & \eta_3 & \delta_3 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{d-2} & \eta_{d-2} & \delta_{d-2} & \alpha_{d-2} & \beta_{d-2} & \gamma_{d-2} \\ & & & \mu_{d-1} & \eta_{d-1} & \delta_{d-1} & \alpha_{d-1} & \beta_{d-1} \\ & & & & \mu_d & \eta_d & \delta_d & \alpha_d \\ & & & & & \mu_{d+1} & \eta_{d+1} & \delta_{d+1} \\ & & & & & & \mu_{d+2} & \eta_{d+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{d-2} \\ v_{d-1} \\ v_d \end{bmatrix} = 0 \tag{3.69}$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_k &= k(k-1)a_{5,3} + a_{4,3}k - a_{3,3}, & k &= 0,1,2,\ldots \\ \beta_k &= k(k+1)a_{5,4} - a_{4,4}(k+1), & k &= 0,1,2,\ldots \\ \gamma_k &= (k+2)(k+1)a_{5,5}, & k &= 0,1,2,\ldots \\ \delta_k &= (k-1)(k-2)a_{5,2} - a_{4,2}(k-1) - a_{3,2}, & k &= 1,2,3\ldots \\ \eta_k &= (k-2)(k-3)a_{5,1} - a_{4,1}(k-2) - a_{3,1}, & k &= 2,3,4\ldots \\ \mu_k &= (k-3)(k-4)a_{5,0} - a_{4,0}(k-3) - a_{3,0}, & k &= 3,4,5,\ldots \end{aligned}$$

Observación 3.3.9. *El sistema (3.69) posee solución distinta de cero si*

$$\Delta_{d+1}^{A,1} = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & & & & & \\ \delta_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & & & & \\ \eta_2 & \delta_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & & & \\ \mu_3 & \eta_3 & \delta_3 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{d-2} & \eta_{d-2} & \delta_{d-2} & \alpha_{d-2} & \beta_{d-2} & \gamma_{d-2} \\ & & & \mu_{d-1} & \eta_{d-1} & \delta_{d-1} & \alpha_{d-1} & \beta_{d-1} \\ & & & & \mu_d & \eta_d & \delta_d & \alpha_d \end{vmatrix} = 0, \tag{3.70}$$

$$\Delta_{d+1}^{A,2} = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & & & & & \\ \delta_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & & & & \\ \eta_2 & \delta_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & & & \\ \mu_3 & \eta_3 & \delta_3 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{d-2} & \eta_{d-2} & \delta_{d-2} & \alpha_{d-2} & \beta_{d-2} & \gamma_{d-2} \\ & & & \mu_{d-1} & \eta_{d-1} & \delta_{d-1} & \alpha_{d-1} & \beta_{d-1} \\ & & & & 0 & \mu_{d+1} & \eta_{d+1} & \delta_{d+1} \end{vmatrix} = 0, \ y \tag{3.71}$$

$$\Delta_{d+1}^{A,3}=\begin{vmatrix}
\alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & & & & & \\
\delta_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & & & & \\
\eta_2 & \delta_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & & & \\
\mu_3 & \eta_3 & \delta_3 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & \mu_{d-2} & \eta_{d-2} & \delta_{d-2} & \alpha_{d-2} & \beta_{d-2} & \gamma_{d-2} \\
 & & & \mu_{d-1} & \eta_{d-1} & \delta_{d-1} & \alpha_{d-1} & \beta_{d-1} \\
 & & & & 0 & 0 & \mu_{d+2} & \eta_{d+2}
\end{vmatrix}=0. \tag{3.72}$$

Por otra parte, el lema 3.3.7 permite obtener un sistema de recurrencias para cada $d \in \mathbb{Z}_+$.

Teorema 3.3.10. *Las condiciones suficientes para que la ecuación diferencial*

$$\begin{aligned}
&(a_{6,0}x^6 + a_{6,1}x^5 + a_{6,2}x^4 + a_{6,3}x^3 + a_{6,4}x^2 + a_{6,5}x + a_{6,6})y'' \\
&+ (a_{5,0}x^5 + a_{5,1}x^4 + a_{5,2}x^3 + a_{5,3}x^2 + a_{5,4}x + a_{5,5})y' - (a_{4,0}x^4 + a_{4,1}x^3 + a_{4,2}x^2 + a_{4,3} + a_{4,4})y = 0
\end{aligned} \tag{3.73}$$

donde $a_{6,0}^2 + a_{5,0}^2 \neq 0$ y al menos uno de los coeficientes $a_{6,i}$ con $i \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ es distinto de cero, tenga solución polinomial de grado d están dadas por las soluciones del sistema

$$\begin{bmatrix}
\alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & & & & & & \\
\delta_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & & & & & \\
\eta_2 & \delta_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & & & & \\
\mu_3 & \eta_3 & \delta_3 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & & & \\
\zeta_4 & \mu_4 & \eta_4 & \delta_4 & \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & \zeta_{d-2} & \mu_{d-2} & \eta_{d-2} & \delta_{d-2} & \alpha_{d-2} & \beta_{d-2} & \gamma_{d-2} \\
 & & & \zeta_{d-1} & \mu_{d-1} & \eta_{d-1} & \delta_{d-1} & \alpha_{d-1} & \beta_{d-1} \\
 & & & & \zeta_d & \mu_d & \eta_d & \delta_d & \alpha_d \\
 & & & & & \zeta_{d+1} & \mu_{d+1} & \eta_{d+1} & \delta_{d+1} \\
 & & & & & & \zeta_{d+2} & \mu_{d+2} & \eta_{d+2} \\
 & & & & & & & \zeta_{d+3} & \mu_{d+3}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{d-2} \\ v_{d-1} \\ v_d \end{bmatrix} = 0 \tag{3.74}$$

donde

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= k(k-1)a_{6,4} + a_{5,4}k - a_{4,4}, && k = 0,1,2,\ldots \\
\beta_k &= k(k+1)a_{6,5} - a_{5,5}(k+1), && k = 0,1,2,\ldots \\
\gamma_k &= (k+2)(k+1)a_{6,6}, && k = 0,1,2,\ldots \\
\delta_k &= (k-1)(k-2)a_{6,3} - a_{5,3}(k-1) - a_{4,3}, && k = 1,2,3\ldots \\
\eta_k &= (k-2)(k-3)a_{6,2} - a_{5,2}(k-2) - a_{4,2}, && k = 2,3,4\ldots \\
\mu_k &= (k-3)(k-4)a_{6,1} - a_{5,1}(k-3) - a_{4,1}, && k = 3,4,5,\ldots \\
\zeta_k &= (k-4)(k-5)a_{6,0} - a_{5,0}(k-4) - a_{4,1}, && k = 4,5,6\ldots
\end{aligned}$$

Teorema 3.3.11. *Las condiciones suficientes para que la ecuación diferencial*

$$\begin{aligned}
&(a_{7,0}x^7 + a_{7,1}x^6 + a_{7,2}x^5 + a_{7,3}x^4 + a_{7,4}x^3 + a_{7,5}x^2 + a_{7,6}x + a_{7,7})y'' \\
&+ (a_{6,0}x^6 + a_{6,1}x^5 + a_{6,2}x^4 + a_{6,3}x^3 + a_{6,4}x^2 + a_{6,5}x + a_{6,6})y' \\
&- (a_{5,0}x^5 + a_{5,1}x^4 + a_{5,2}x^3 + a_{5,3}x^2 + a_{5,4}x + a_{5,5})y = 0
\end{aligned} \tag{3.75}$$

donde $a_{7,0}^2 + a_{6,0}^2 \neq 0$ *y al menos uno de los coeficientes* $a_{7,i}$ *con* $i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ *es distinto de cero, tenga solución polinomial de grado* d *están dadas por las soluciones del sistema*

$$\begin{bmatrix}
\alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & & & & & & & \\
\delta_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & & & & & & \\
\eta_2 & \delta_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & & & & & \\
\mu_3 & \eta_3 & \delta_3 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & & & & \\
\zeta_4 & \mu_4 & \eta_4 & \delta_4 & \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & & & \\
\rho_5 & \zeta_5 & \mu_5 & \eta_5 & \delta_5 & \alpha_5 & \beta_5 & \gamma_5 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & \rho_{d-2} & \zeta_{d-2} & \mu_{d-2} & \eta_{d-2} & \delta_{d-2} & \alpha_{d-2} & \beta_{d-2} & \gamma_{d-2} \\
 & & & \rho_{d-1} & \zeta_{d-1} & \mu_{d-1} & \eta_{d-1} & \delta_{d-1} & \alpha_{d-1} & \beta_{d-1} \\
 & & & & \rho_d & \zeta_d & \mu_d & \eta_d & \delta_d & \alpha_d \\
 & & & & & \rho_{d+1} & \zeta_{d+1} & \mu_{d+1} & \eta_{d+1} & \delta_{d+1} \\
 & & & & & & \rho_{d+2} & \zeta_{d+2} & \mu_{d+2} & \eta_{d+2} \\
 & & & & & & & \rho_{d+3} & \zeta_{d+3} & \mu_{d+3} \\
 & & & & & & & & \rho_{d+4} & \zeta_{d+4}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{d-2} \\ v_{d-1} \\ v_d \end{bmatrix} = 0 \tag{3.76}$$

donde

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= k(k-1)a_{7,5} + a_{6,5}k - a_{5,5}, & k &= 0,1,2,\ldots \\
\beta_k &= k(k+1)a_{7,6} - a_{6,6}(k+1), & k &= 0,1,2,\ldots \\
\gamma_k &= (k+2)(k+1)a_{7,7}, & k &= 0,1,2,\ldots \\
\delta_k &= (k-1)(k-2)a_{7,4} - a_{6,4}(k-1) - a_{5,4}, & k &= 1,2,3\ldots \\
\eta_k &= (k-2)(k-3)a_{7,3} - a_{6,3}(k-2) - a_{5,3}, & k &= 2,3,4\ldots \\
\mu_k &= (k-3)(k-4)a_{7,2} - a_{6,2}(k-3) - a_{5,2}, & k &= 3,4,5,\ldots \\
\zeta_k &= (k-4)(k-5)a_{7,1} - a_{6,1}(k-4) - a_{5,1}, & k &= 4,5,6\ldots \\
\rho_k &= (k-5)(k-6)a_{7,0} - a_{6,0}(k-5) - a_{5,0}, & k &= 5,6,7\ldots
\end{aligned}$$

Los teoremas 3.3.8, 3.3.10 y 3.3.11 se pueden probar mediante el método de Frobenius

Capítulo 4

Soluciones Liouvillianas de la Ecuación de Schödinger con Potencial Polinomial

Durante este capítulo y el siguiente, estaremos interesados en la integrabilidad de la Ecuación de Schrödinger. Al conjunto de todos los autovalores para los cuales esta ecuación es integrable lo llamaremos espectro algebraico y lo denotaremos por $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$. Dependiendo de la naturaleza de Λ podemos clasificar los potenciales

Definición 4.0.1. *Decimos que el potencial $V(x) \in \mathbb{C}(x)$ es:*

1. *Algebraicamente resoluble, si Λ es un conjunto infinito, o*
2. *Algebraicamente cuasi-resoluble, si Λ es un conjunto finito, o*
3. *Algebraicamente no resoluble, si Λ es vacío.*

Existe una conexión, no del todo conocida, entre el conjunto Λ y el $Spec(\partial_x^2 - V)$ en ciertos espacios funcionales. En muchos casos se tiene que los valores propios del problema de Sturm-Liouville correspondientes a valores bajos de energía coincide con el conjunto Λ. En otros casos el $Spec(\partial_x^2 - V)$ es un subconjunto de Λ, véase por ejemplo [5, 8, 15, 25].

En este capítulo consideraremos la ecuación de Schrödinger uno-dimensional (no relativista, estacionaria)

$$\Psi'' = (V(x) - \hat{\lambda})\Psi, \quad V(x) = x^{2p} + \sum_{i=0}^{2p-1} v_i x^i, \quad -\infty < x < +\infty \tag{4.1}$$

donde $p \in \mathbb{Z}^+$ y los coeficientes $v_i \in \mathbb{C}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el potencial $V(x)$ está escrito en la forma del lema 3.1.1. Por tanto, podemos reescribir la ecuación 4.1 de la siguiente manera

$$\Psi'' = \left(\left(x^p + \sum_{i=0}^{p-1} c_i x^i \right)^2 + \sum_{i=1}^{p-1} d_i x^i - \lambda \right) \Psi \tag{4.2}$$

y de esta forma analizar la existencia de soluciones Liouvillianas para la ecuación (4.1) mediante los teoremas de caracterización Galoisiana.

4.1. Potencial de Grado Dos

Consideremos el caso cuando $V(x) = (x+c_0)^2+d_0$. Realizando el cambio de variables $z = x+c_0$, basta analizar el caso del oscilador armónico. Por tanto, sin pérdida de generalidad, sea

$$\Psi'' = (z^2 - \lambda)\Psi, \ \lambda = \hat{\lambda} - d_0 \tag{4.3}$$

la ecuación de Schrödinger en estudio. El teorema 3.1.2 fuerza a λ a tener la siguiente forma

$$\begin{cases} -\lambda = 2d+1, \ o \\ \ \ \lambda = 2d+1. \end{cases}$$

Además, debe existir un polinomio $P_d(z)$ de grado d que satisfaga alguna de las relaciones (3.4), en este caso

$$P_d''(z) + 2zP_d'(z) - 2dP_d(z) = 0, \ o \tag{4.4}$$
$$P_d''(z) - 2xP_d'(z) + 2dP_d(z) = 0. \tag{4.5}$$

Por tanto, la integrabilidad de la ecuación (4.3) depende de la existencia de soluciones polinomiales para las ecuaciones (4.4) y (4.5).
Utilizando el teorema 3.3.1 sobre la ecuación (4.4) encontramos que sus soluciones polinomiales están dadas por

$$\begin{aligned}
P_0(z) &= 1 \\
P_1(z) &= 2z \\
P_2(z) &= 4z^2 + 2 \\
P_3(z) &= 8z^3 + 12z \\
P_4(z) &= 16z^4 + 48z^2 + 12 \\
P_5(z) &= 32z^5 + 160z^3 + 120z
\end{aligned}$$

En general, la solución polinomial de grado d está dada por:

$$P_d(z) = \hat{H}_d(z) = d! \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \frac{1}{k!(d-2k)!}(2z)^{d-2k} \tag{4.6}$$

Por otro lado, la ecuación diferencial (4.5) es una ecuación tipo Hermite, por lo tanto sus soluciones están dadas por

$$P_d(z) = H_d(z) = d! \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \frac{(1)^k}{k!(d-2k)!}(2z)^{d-2k} \tag{4.7}$$

Por tanto la ecuación (4.3) es integrable para todo $\lambda \in 2\mathbb{Z}+1$ y las soluciones Liouvillianas están dadas por

$$\Psi(z) = \begin{cases} H_d(z)e^{-\frac{z^2}{2}} & si, \ \lambda = 2d+1, \\ \hat{H}_d(z)e^{\frac{z^2}{2}} & si, \ \lambda = -(2d+1). \end{cases} \tag{4.8}$$

4.2. Potencial de Grado Cuatro

Consideremos la ecuación de Schrödinger

$$\Psi'' = (V(x) - \hat{\lambda})\Psi \tag{4.9}$$

donde

$$V(x) = (x^2 + c_1 x + c_0)^2 + d_1 x + d_0$$

aplicando el cambio de variables $x = z + \frac{-a_1}{2}$, la ecuación (4.9) se transforma en la siguiente ecuación diferencial

$$\Psi'' = ((z^2 + \alpha)^2 + d_1 z - \lambda)\Psi \tag{4.10}$$

si $\Lambda \neq \emptyset$

1. d_1 debe ser un número entero de la forma

$$\begin{cases} 2d + 2, & o \\ -2d - 2 \end{cases}$$

2. debe existir un polinomio mónico P_d, de grado d, que satisfaga las relaciones (3.4), a saber

$$\begin{aligned} P_d'' + 2(z^2 + \alpha)P_d' + (-2dz + \lambda)P_d &= 0, \quad o & (4.11) \\ P_d'' - 2(z^2 + \alpha)P_d' + (2dz + \lambda)P_d &= 0. & (4.12) \end{aligned}$$

Las condiciones de suficiencia para que las ecuaciones (4.11) y (4.12) posean soluciones polinomiales, están dadas por el teorema 3.3.3. En el caso de la ecuación (4.11) tenemos que

$$\begin{aligned} &a_{2,0} = -2, \quad a_{2,1} = 0, \quad a_{2,2} = -2\alpha, \\ &a_{1,0} = 2d, \quad a_{1,1} = -\lambda. \end{aligned}$$

Por lo que

$$\alpha_k = \lambda, \quad \beta_k = 2(k+1)\alpha, \quad \gamma_k = (k+2)(k+1), \quad \eta_k = 2(k-1) - 2d.$$

- Para $d = 0$, $P_0(z) = 1$, sujeto a $\Delta_1 = \lambda = 0$.
- Para el caso del polinomio de primer grado, podemos calcular la condición suficiente, por medio de la relación (3.33)

  $$\Delta_{2,1}(\lambda) = \lambda, \ \Delta_2(\lambda) = \lambda^2 + 4\alpha$$

  Por otro lado, la ecuación (3.34) nos permite encontrar los coeficientes de la solución polinomial

  $$v_0 = \frac{\lambda}{2}$$

  por lo que

  $$P_1(z) = z + \frac{\Delta_{2,1}(\lambda)}{2}, \text{ donde } \Delta_2(\lambda) = 0.$$

- Para el caso del polinomio de segundo grado, tenemos que

$$\Delta_{3,1}(\lambda) = \lambda, \;\; \Delta_{3,2}(\lambda) = \lambda^2 + 8\alpha, \;\; y \;\; \Delta_3(\lambda) = \lambda^3 + 16\alpha\lambda + 16$$

por otra parte, los coeficientes de $P_2(z)$ son

$$v_1 = \frac{\lambda}{2}, \;\; v_0 = \frac{\lambda^2}{8} + \alpha$$

y la solución polinomial de grado dos para (4.11) está dada por

$$P_2(z) = z^2 + \frac{\Delta_{3,1}(\lambda)}{2} z + \frac{\Delta_{3,2}(\lambda)}{8}, \;\; \text{donde} \;\; \Delta_3(\lambda) = 0.$$

- Para $d = 3$, tenemos

$$\begin{array}{ll} \Delta_{4,1}(\lambda) = \lambda, & \Delta_{4,3}(\lambda) = \lambda^3 + 28\alpha\lambda + 48 \\ \Delta_{4,2}(\lambda) = \lambda^2 + 12\alpha, & \Delta_4(\lambda) = \lambda^4 + 40\alpha\lambda^2 + 64\lambda + 144\alpha^2 \end{array}$$

los coeficientes de $P_3(z)$ son

$$v_2 = \frac{\lambda}{2}, \;\; , v_1 = \frac{\lambda^2}{8} + \frac{3}{3}\alpha, \;\; v_0 = \frac{\lambda^3}{48} + \frac{7}{12}\alpha\lambda + 1 \tag{4.13}$$

por lo que

$$P_3(z) = z^3 + \frac{\Delta_{4,1}(\lambda)}{2} z^2 + \frac{\Delta_{4,2}(\lambda)}{8} z + \frac{\Delta_{4,3}(\lambda)}{48}, \;\; \text{donde} \; \Delta_4(\lambda) = 0. \tag{4.14}$$

En general, la solución de grado d para la ecuación (4.11) están dadas por

$$P_d(z) = z^d + \sum_{k=1}^{d} \frac{\Delta_{d+1,k}(\lambda)}{2^k k!} z^{d-k} \tag{4.15}$$

sujeta a la condición

$$\Delta_{d+1}(\lambda) = \lambda\Delta_{d+1,d}(\lambda) + 2[2d\alpha\Delta_{d+1,d-1}(\lambda) + 4(d-1)d\Delta_{d+1,d-2}(\lambda)] = 0. \tag{4.16}$$

Además, la solución a la ecuación (4.10) está dada por

$$\Psi_d(z) = P_d e^{\frac{z^3}{3} + \alpha z} \tag{4.17}$$

De forma análoga para la ecuación (4.12), la solución polinomial está dada por

$$P_d(z) = z^d + \sum_{k=1}^{d} \frac{(-1)^k \Delta_{d+1,k}(\lambda)}{2^k k!} z^{d-k} \tag{4.18}$$

sujeta a la condición

$$\Delta_{d+1}(\lambda) = \lambda\Delta_{d+1,d}(\lambda) + 2[2d\alpha\Delta_{d+1,d-1}(\lambda) + 4(d-1)d\Delta_{d+1,d-2}(\lambda)] = 0. \tag{4.19}$$

Por otra parte, en este caso la solución a la ecuación (4.10) está dada por

$$\Psi_d(z) = P_d e^{-\frac{z^3}{3} - \alpha z} \tag{4.20}$$

4.3. Potencial de Grado Seis

Consideremos la ecuación de Schrödinger

$$\Psi''(z) = ((z^3 + c_1 z + c_0)^2 + d_2 z^2 + d_1 z - \lambda)\Psi. \tag{4.21}$$

podemos determinar la existencia de soluciones Liouvillianas por medio del teorema 3.1.2, Por tanto si $\Lambda \neq \emptyset$, debemos tener que

$$d_2 = 2d + 3, \ o \ -d_2 = 2d + 3 \tag{4.22}$$

Luego, debe existir un polinomio mónico $P_d(z)$ de grado d, tal que

$$\begin{aligned} P_d'' + (2z^3 + 2c_1 z + 2c_0)P_d' + (-2dz^2 - d_1 z + c_1 + \lambda)P_d &= 0, \quad o & (4.23)\\ P_d'' - (2z^3 + 2c_1 z + 2c_0)P_d' - (-2dz^2 + d_1 z + c_1 - \lambda)P_d &= 0. & (4.24)\end{aligned}$$

Las condiciones de suficiencia para que las ecuaciones (4.23) y (4.24) posean soluciones polinomiales están dadas por el teorema 3.3.5. En el caso de la ecuación (4.23) tenemos que

$$\begin{array}{llll} a_{3,0} = -2, & a_{3,1} = 0, & a_{3,2} = -2c_1, & a_{3,3} = -2c_0 \\ a_{2,0} = 2d, & a_{2,1} = d_1, & a_{2,2} = -(c_1 + \lambda) & \end{array}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \alpha_k &= (2k+1)c_1 + \lambda, \\ \beta_k &= 2(k+1)c_0, \\ \gamma_k &= (k+1)(k+2), \\ \delta_k &= -d_1, \\ \eta_k &= 2(k-2) - 2d. \end{aligned}$$

Así los coeficientes de las soluciones polinomiales pueden calcularse mediante la fórmula

$$v_{k-2} = \frac{-d_1 v_{k-1} + [(2k+1)c_1 + \lambda]v_k + 2(k+1)c_0 v_{k+1}(k+1)(k+2)v_{k+2}}{2d - 2(k-2)} \tag{4.25}$$

Para la solución polinomial de grado cero tenemos,

$$P_0(z) = 1 \tag{4.26}$$

Siempre que

$$d_1 = 0, \ y \ \lambda + c_1 = 0 \tag{4.27}$$

Para la solución polinomial de primer grado tenemos que,

$$\Delta_{2,1}^{A,1}(\lambda) = \Delta_{2,1}^{A,2}(\lambda) = c_1 + \lambda \tag{4.28}$$

Por lo que

$$\begin{cases} \Delta_2^{A,1}(\lambda) = & \lambda^2 + 4c_1\lambda + 3c_1^2 + 2c_0 d_1 \quad = 0, \ y \\ \Delta_2^{A,2}(\lambda) = & -\lambda d_1 + 4c_0 - d_1 c_0 \quad = 0 \end{cases} \tag{4.29}$$

Si el parámetro $d_1 \neq 0$, la condición necesaria y suficiente para que $\Delta_2^{A,1}(\lambda) = 0$ y $\Delta_2^{A,2}(\lambda) = 0$ posean una solución común está dada por

$$Res(\Delta_2^{A,1}(\lambda), \Delta_2^{A,2}(\lambda)) = 0 \tag{4.30}$$

donde $Res(\cdot, \cdot)$ denota el determinante de la matriz de Sylvester. Por tanto,

$$P_1(z) = z - \frac{d_1}{2}, \tag{4.31}$$

siempre que

$$2c_0 d_1^3 + 8c_0 c_1 d_1 + 16c_0^2 = 0$$

Por otro lado, en caso de que el parámetro $d_1 = 0$, de las ecuaciones (4.29) el parámetro c_0 sería forzado a anularse, mientras que el parámetro c_1 quedaría libre, por ende el sistema espectral (4.29) quedaría reducido a una sola ecuación

$$\lambda^2 + 4c_1\lambda + 3c_1^2 = 0. \tag{4.32}$$

Para el caso de la solución polinomial de segundo grado tenemos que,

$$\begin{aligned} \Delta_{3,1}^{A,1}(\lambda) &= \Delta_{3,1}^{A,2}(\lambda) = c_1 + \lambda, \\ \Delta_{3,2}^{A,1}(\lambda) &= \Delta_{3,2}^{A,1}(\lambda) = \lambda^2 + 4c_1\lambda + 3c_1^2 + 2c_0 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Por lo que

$$\begin{cases} \Delta_3^{A,1}(\lambda) = & \lambda^3 + 9c_1\lambda^2 + \lambda\left(6c_0d_1 + 23c_1^2 + 8\right) + 14c_0c_1d_1 + 15c_1^3 - 32c_0^2 + 24c_1 + 2d_1^2 & = 0, \ y \\ \Delta_3^{A,2}(\lambda) = & -d_1\lambda^2 + \lambda\left(8c_0 - 4c_1d_1\right) - 2c_0d_1^2 - 3c_1^2d_1 + 8c_0c_1 + 4d_1 & = 0 \end{cases} \tag{4.34}$$

De forma similar al caso anterior, el sistema espectral (4.34) posee al menos una solución si

$$Res(\Delta_3^{A,1}(\lambda), \Delta_3^{A,2}(\lambda)) = 0 \tag{4.35}$$

Por tanto

$$P_2(z) = z^2 - \frac{d_1}{2}z + \frac{d_1^2}{8} + \frac{5c_1 + \lambda}{4} \tag{4.36}$$

siempre que

$$16384c_0^5 - 8192c_0^3c_1 + 4608c_0^3c_1^2 + 4608c_0^3c_1^3 + 2048c_0^2d_1 + 2304c_0^2c_1d_1 - 22528c_0^4c_1d_1 + 15872c_0^2c_1^2d_1 - 5184c_0^2c_1^3d_1 - 5184c_0^2c_1^4d_1 + 4608c_0^3d_1^2 - 3968c_0c_1d_1^2 + 1152c_0^3c_1d_1^2 - 1728c_0c_1^2d_1^2 + 14080c_0^3c_1^2d_1^2 - 10136c_0c_1^3d_1^2 + 4248c_0c_1^4d_1^2 + 3600c_0c_1^5d_1^2 + 576d_1^3 - 1792c_0^4d_1^3 + 864c_1d_1^3 - 1984c_0^2c_1d_1^3 + 3668c_1^2d_1^3 - 720c_0^2c_1^2d_1^3 + 2232c_1^3d_1^3 - 3168c_0^2c_1^3d_1^3 + 4365c_1^4d_1^3 - 972c_1^5d_1^3 - 729c_1^6d_1^3 - 224c_0d_1^4 - 288c_0c_1d_1^4 + 1664c_0^3c_1d_1^4 - 994c_0c_1^2d_1^4 - 720c_0c_1^3d_1^4 - 1044c_0c_1^4d_1^4 + 64c_1d_1^5 - 144c_0^2c_1d_1^5 + 72c_1^2d_1^5 - 756c_0^2c_1^2d_1^5 + 180c_1^3d_1^5 - 32c_0^3d_1^6 - 56c_0c_1d_1^6 - 4d_1^7 = 0$$

En caso de que $d_1 \neq 0$ el sistema (4.34) tendrá exactamente dos soluciones si se cumple la condición adicional

$$rem(\Delta_3^{A,1}(\lambda), \Delta_3^{A,2}(\lambda)) = 0, \tag{4.37}$$

donde $rem(\cdot,\cdot)$ denota el resto de la división euclidea de polinomios. Esta condición puede ser expresada en términos de los coeficientes del potencial por medio de un sistema polinomial, a saber,

$$\begin{aligned} -48c_0^2+8c_1+27c_1^3+\frac{64c_0^2c_1}{d_1^2}+\frac{32c_0}{d_1}-\frac{56c_0c_1^2}{d_1}+22c_0c_1d_1+2d_1^2=0, \ y \\ 12+9c_1+36c_1^2+\frac{64c_0^2}{d_1^2}-\frac{56c_0c_1}{d_1}+4c_0d_1=0 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Observación 4.3.1. *Por definición*

$$\Delta^{A,1}_{d+1}(\lambda)=Det(A_{d+1}) \tag{4.39}$$

donde

$$A_{d+1}=\begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & & & & \\ \delta_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & & & \\ \eta_2 & \delta_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \eta_{d-2} & \delta_{d-2} & \alpha_{d-2} & \beta_{d-2} & \gamma_{d-2} \\ & & & \eta_{d-1} & \delta_{d-1} & \alpha_{d-1} & \beta_{d-1} \\ & & & & \eta_d & \delta_d & \alpha_d \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

Por tanto, de la fórmula de Leibniz para determinantes

$$\Delta^{A,1}_{d+1}(\lambda)=\sum_{\sigma\in S_{d+1}}\left(sgn(\sigma)\prod_{k=1}^{d+1}a_{k,\sigma(k)}\right) \tag{4.41}$$

donde $a_{i,j}$ son las entradas de A_{d+1}. Como α_k son las únicas entradas dependientes de λ, el término en (4.41) que determina el grado de $\Delta^{A,1}_{d+1}(\lambda)$ es

$$sgn(Id)\prod_{k=1}^{d+1}a_{k,k}=\prod_{k=0}^{d}\alpha_k=\prod_{k=0}^{d}((2k+1)c_1+\lambda) \tag{4.42}$$

de donde concluimos que $\Delta^{A,1}_{d+1}(\lambda)$ es un polinomio mónico de grado $d+1$.
De forma análoga, podemos decir que $\Delta^{A,2}_{d+1}(\lambda)$ es un polinomio de grado d siempre que $d_1\neq 0$. Si no, $deg(\Delta^{A,2}_{d+1}(\lambda))\leq d-1$.

En general, para $d\in\mathbb{Z}_+$, $Res(\Delta^{A,1}_{d+1}(\lambda),\Delta^{A,2}_{d+1}(\lambda))=0$ da una relación polinomial entre los coeficientes del potencial de grado seis, la cual es condición necesaria y suficiente para que $\Delta^{A,1}_{d+1}(\lambda)=0$ y $\Delta^{A,2}_{d+1}(\lambda)=0$ posean una solución común. Bajo estas consideraciones hemos demostrado el siguiente teorema

Teorema 4.3.2. *Existe una colección numerable de hipersuperficies $V_{d,1}$, cuyos puntos están asociados a potenciales cuasi-resolubles de grado seis con un valor de energía.*

Sin embargo, puede ocurrir que nuestro sistema espectral posea dos o más soluciones. Por ejemplo, la condición $rem(\Delta^{A,1}_{d+1}(\lambda),\Delta^{A,2}_{d+1}(\lambda))=0$ da lugar a un sistema polinomial en $\mathbb{C}[c_0,c_1,d_1]$, cuyas soluciones convierte a $\Delta^{A,2}_{d+1}(\lambda)$ en un factor de $\Delta^{A,1}_{d+1}(\lambda)$. También puede ocurrir que $\Delta^{A,2}_{d+1}(\lambda)$ sea idénticamente cero, en cuyo caso obtendríamos exactamente $d+1$ valores para λ. Dependiendo a la circunstancia, pasaríamos de considerar la hipersuperficie $V_{d,1}$ a considerar una cadena de hipersuperficies

$$V_{d,d+1} \subset V_{d,d} \subset \cdots \subset V_{d,2} \subset V_{d,1} \tag{4.43}$$

donde $V_{d,k}$ denota la hipersuperficie cuyos puntos están asociados a potenciales cuasi-resolubles de grado seis con k valores de energía.

4.4. Potencial Canónico

Consideremos ahora el potencial

$$V(z) = z^{2n} + \mu z^{n-1}, \;\; \mu \in \mathbb{C} \tag{4.44}$$

en virtud del teorema 3.1.2 una condición necesaria para la integrabilidad de la ecuación de Schrödinger

$$\psi'' = (z^{2n} + \mu z^{n-1}) - \lambda)\psi \tag{4.45}$$

es que

$$\begin{aligned} \mu &= 2d + n, \;\; o \\ -\mu &= 2d + n. \end{aligned} \tag{4.46}$$

Observación 4.4.1. *De (4.46) podemos deducir que una condición necesaria para que un potencial de la forma*

$$V(z) = z^{4n+2} + \mu z^{2n} \tag{4.47}$$

sea cuasi-resoluble es que μ sea un entero impar. Más aún, podemos encontrar estados acotados si μ es un entero impar negativo.
De forma análoga, si un potencial de la forma

$$V(z) = z^{4n} + \mu z^{2n-1} \tag{4.48}$$

es cuasi-resoluble, entonces μ es un entero par. Para este caso, solo podremos encontrar estados anti-acotados.

Con el fin de establecer integrabilidad para la ecuación (4.45), el teorema 3.1.2 precisa de la existencia de un polinomio mónico de grado d, que satisfaga una de las ecuaciones de segundo orden

$$P_d'' + 2z^n P_d' - (2dz^{n-1} - \lambda)P_d = 0, \;\; o \tag{4.49}$$

$$P_d'' - 2z^n P_d' - (-2dz^{n-1} - \lambda)P_d = 0. \tag{4.50}$$

Por lo que la integrabilidad de la ecuación (4.45) depende de la existencia de soluciones polinomiales para las ecuaciones (4.49) y (4.50). Para $d = 0$, es evidente que $P_0 = 1$ es solución tanto de (4.49) como de (4.50), siempre que $\lambda = 0$. Por otro lado, para $d = 1$ supongamos que $P_1 = z + \alpha$, entonces reemplazando en (4.49), tenemos

$$-2\alpha z^{n-1} + \lambda z + \alpha\lambda = 0$$

de donde $\alpha = 0$ y $\lambda = 0$. Similarmente, reemplazando P_1 en (4.50) tenemos que

$$2\alpha z^{n-1} + \lambda z + \alpha\lambda = 0$$

de donde $\alpha = 0$ y $\lambda = 0$.
Para analizar la existencia de soluciones polinomiales para $d \geq 2$ consideremos la ecuación diferencial

$$y'' - (az^n)y' - (bz^{n-1} + c)y = 0, \;\; a, b, c \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}^+. \tag{4.51}$$

de la observación (3.3.6) tenemos que una condición necesaria para la existencia de soluciones polinomiales de grado d está dada por la relación

$$b = -ad \tag{4.52}$$

para establecer condiciones suficientes, supongamos que la ecuación (4.51) posee una solución de la forma

$$f(z) = \sum_{i=0}^{d} v_i z^i \tag{4.53}$$

reemplazando $f(z)$ en (4.51) tenemos que

$$\begin{gathered}\sum_{i=2}^{d} i(i-1)v_i z^{i-2} + \sum_{i=1}^{d} -aiv_i z^{i+n-1} \\ \sum_{i=0}^{d} -bv_i z^{i+n-1} + \sum_{i=0}^{d} -cv_i z^i = 0\end{gathered} \tag{4.54}$$

Luego, desplazando índices tenemos la siguiente ecuación algebraica

$$\begin{gathered}\sum_{k=0}^{d-2}(k+1)(k+2)v_{k+2}z^k + \sum_{k=n}^{d+n-1} -a(k-n+1)v_{k-n+1}z^k \\ \sum_{i=n-1}^{d+n-1} -bv_{k-n+1}z^k + \sum_{k=0}^{d} -cv_k z^k = 0\end{gathered} \tag{4.55}$$

Por el principio de identidad, obtenemos la siguiente ecuación en recurrencia a tres términos

$$\alpha_k v_k + \gamma_k v_{k+2} + \delta_k v_{k-n+1} = 0, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots, d+n-2. \tag{4.56}$$

donde

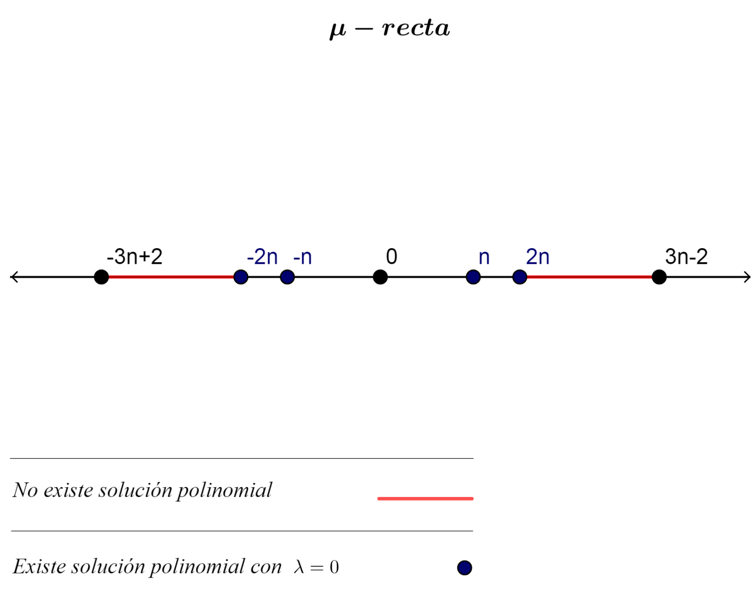
$$\begin{aligned}\alpha_k &= -c, & k &= 0, 1, 2, \ldots \\ \gamma_k &= (k+2)(k+1), & k &= 0, 1, 2, \ldots \\ \delta_k &= -a(k-n+1) - b, & k &= n-1, n, n+1, \ldots\end{aligned}$$

En consecuencia, la condición suficiente para la existencia de soluciones polinomiales para la ecuación (4.51) viene dada por el sistema de ecuaciones lineales

$$
\begin{bmatrix}
\alpha_0 & 0 & \gamma_0 & & \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
\vdots & & \alpha_{d-2} & 0 & \gamma_{d-2} \\
\delta_{n-1} & & & \alpha_{d-1} & 0 \\
 & \ddots & & & \alpha_d \\
 & & \ddots & & \vdots \\
 & & & \ddots & 0 \\
 & & & & \delta_{d+n-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
v_0 \\ \vdots \\ v_{d-2} \\ v_{d-1} \\ v_d
\end{bmatrix} = 0 \tag{4.57}
$$

Un hecho a notar es que si $d+1 < n$ no pueden existir soluciones polinomiales para la ecuación (4.51). Por tanto, de ahora en adelante supondremos que $d+1 \geq n$.

Figura 4.1: Criterios de integrabilidad y no integrabilidad para un n fijo.



En la siguiente tabla podemos ver algunas soluciones polinomiales para algunos valores fijos de n.

Cuadro 4.1: Soluciones polinomiales para (4.49) y (4.50)

d	n	λ	$P_{d,n}$ $(\mu = 2d+n)$	$P_{d,n}$ $(\mu = -(2d+n))$
5	4	0	z^5+2	z^5-2
6	4	0	z^6+3z	z^6-3z
6	5	0	$z^6+\frac{5}{2}$	$z^6-\frac{5}{2}$
7	5	0	$z^7+\frac{7}{2}z$	$z^7-\frac{7}{2}z$
7	6	0	z^7+3	z^7-3
8	6	0	z^8+4z	z^8-4z
8	7	0	$z^8+\frac{7}{2}$	$z^8-\frac{7}{2}$
9	7	0	$z^9+\frac{9}{2}z$	$z^9-\frac{9}{2}z$
9	8	0	z^9+4	z^9-4
10	8	0	$z^{10}+5z$	$z^{10}-5z$

Por otro lado, dado un n fijo, las soluciones para la ecuación (4.45) están dadas por

$$\begin{aligned} \Psi_{d,n} &= P_{d,n} e^{\frac{z^{n+1}}{n+1}},\ \ si\ \mu = 2d+n,\ \ o \\ \Psi_{d,n} &= P_{d,n} e^{-\frac{z^{n+1}}{n+1}},\ \ si\ \mu = -(2d+n) \end{aligned} \tag{4.58}$$

Capítulo 5

Soluciones Liouvillianas de la Ecuación de Schödinger con Potencial Polinomio de Laurent

5.1. Potencial Lennard-Jones 12-6

Consideremos el potencial $V(r) = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6} + \frac{C}{r^2}$ donde $A > 0$, $B > 0$ y $C \geq 0$. Y la ecuación de Schrödinger asociada al potencial,

$$\frac{d^2\tilde{\Psi}}{dr^2} = \left(\frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6} + \frac{C}{r^2} - \lambda\right)\tilde{\Psi} \tag{5.1}$$

Realizando el cambio de variables $z = r^2$, obtenemos que $\frac{d\tilde{\Psi}}{dz} = \frac{1}{2r}\frac{d\tilde{\Psi}}{dr}$ y $\frac{d^2\tilde{\Psi}}{dr^2} = 4z\frac{d^2\tilde{\Psi}}{dz^2} + 2\frac{d\tilde{\Psi}}{dz}$. Lo que nos lleva a la ecuación

$$\tilde{\Psi}'' + \frac{1}{2z}\tilde{\Psi}' - \left(\frac{A}{4z^7} - \frac{B}{4z^4} + \frac{C}{4z^2} - \frac{\lambda}{4z}\right)\tilde{\Psi} = 0 \tag{5.2}$$

Ahora aplicando la transformada de D'Alambert $\tilde{\Psi} \mapsto \frac{1}{\sqrt[4]{z}}\Psi$, obtenemos la siguiente ecuación tipo Schrödinger

$$\Psi'' = \left(\frac{A/4}{z^7} - \frac{B/4}{z^4} + \frac{(C/4 - 3/16)}{z^2} - \frac{\lambda/4}{z}\right)\Psi \tag{5.3}$$

Por el teorema 3.2.4 la ecuación (5.3) no es integrable para ningún valor de los parámetros A, B, C o la energía.

5.2. Oscilador Armónico perturbado

Considere el potencial $V(z) = z^2 + \frac{b}{z^2}$, $b \in \mathbb{C}^*$. Y la ecuación de Schrödinger asociada

$$\Psi'' = \left(z^2 - \lambda + \frac{b}{z^2}\right)\Psi \tag{5.4}$$

En virtud del teorema 3.2.6, existen dos casos en los cuales la ecuación (5.4) podría tener soluciones Liouvillianas.

Caso 1: Por simplicidad supongamos que $b = m(m+1)$, $m \in \mathbb{C}$. Entonces, por el ítem b) en el numeral 1) tenemos las siguientes posibilidades para λ

1. $-\lambda = 2d + 2m + 3$
2. $-\lambda = 2d - 2m + 1$
3. $\lambda = 2d + 2m + 3$
4. $\lambda = 2d - 2m + 1$

Luego, debe existir un polinomio mónico P_d de grado d tal que satisface alguna de las siguientes ecuaciones de orden dos

$$\begin{aligned} zP_d'' + (2z^2 + 2m + 2)P_d' - 2dzP_d &= 0, \quad o && (5.5)\\ zP_d'' + (2z^2 - 2m)P_d' - 2dzP_d &= 0, \quad o && (5.6)\\ zP_d'' - (2z^2 - (2m+2))P_d' + 2dzP_d &= 0, \quad o && (5.7)\\ zP_d'' - (2z^2 + 2m)P_d' + 2dzP_d &= 0 && (5.8) \end{aligned}$$

El teorema 3.24 nos da condiciones bajo las que estas ecuaciones auxiliares poseen solución polinomial.
En caso de la ecuación (5.5)

$$\begin{array}{cccc} a_{3,0} = 0, & a_{3,1} = 0, & a_{3,2} = 1, & a_{3,3} = 0 \\ a_{2,0} = -2, & a_{2,1} = 0, & a_{2,2} = -(2m+2) & \\ a_{1,0} = 2d, & a_{1,1} = 0 & & \end{array} \qquad (5.9)$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \alpha_k &= 0 && (5.10)\\ \beta_k &= (k+1)(2m+2+k) && (5.11)\\ \gamma_k &= 0 && (5.12)\\ \eta_k &= 2(k-1) - 2d && (5.13) \end{aligned}$$

Por otro lado, sabemos que Δ_{d+1} obedece a la fórmula de recurrencia con respecto a sus menores principales dada por

$$\Delta_{d+1} = -\eta_d \beta_{d-1} \Delta_{d+1,d-1} \qquad (5.14)$$

como $\beta_{d-1} = d(2m+d+1)$ y $\eta_d = -2$, tenemos que

$$\Delta_{d+1} = 2d(2m+d+1)\Delta_{d+1,d-1} \qquad (5.15)$$

Para el caso del polinomio constante, $d = 0$, $\Delta_1 = 0$ trivialmente.
Para el caso del polinomio lineal, $d = 1$, tenemos

$$\Delta_2 = 2(2m+2)\Delta_{2,0} = 4m + 4. \qquad (5.16)$$

lo que nos lleva a que $m = -1$. Pero esto es absurdo, ya que $b = m(m+1) \neq 0$.
Para el caso del polinomio cuadrático, $d = 2$,

$$\Delta_3 = 4(2m+3)\Delta_{3,1} = 0 \qquad (5.17)$$

Puesto que el menor de orden uno es cero ($\alpha_0 = 0$).
Para el caso del polinomio cúbico, $d = 3$,

$$\Delta_4 = 6(2m+4)\Delta_{4,2} \tag{5.18}$$

note que $\Delta_{4,2} = 6(2m+2)$, por lo que

$$\Delta_4 = 36(2m+4)(2m+2) \tag{5.19}$$

en general si $d = 2n$,

$$\Delta_{2n+1} = -\eta_d\beta_{d-1}(-\eta_{d-2}\beta_{d-3}(\cdots(-\eta_1\beta_0\Delta_{d+1,1})\cdots)) \tag{5.20}$$

Como el menor $\Delta_{d+1,1} = 0$, $\Delta_{d+1} = 0$ siempre que d sea un número par. Por otro lado, podemos obtener los coeficientes de la solución polinomial a partir de la relación (3.34), a saber

$$v_d = 1, \quad v_{k-1} = \frac{\beta_k}{-\eta_k} v_{k+1} \tag{5.21}$$

de esta forma la solución a la ecuación (5.5) está dada por

$$P_{2n}(z) = z^{2n} + \sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=0}^{k-1}\frac{(2n-2j)(2(m+n-j)+1)}{2d-4(n-j-1)}\right)z^{2(n-k)} \tag{5.22}$$

Por otra parte, si $d = 2n+1$

$$\Delta_{2n+2} = -\eta_d\beta_{d-1}(-\eta_{d-2}\beta_{d-3}(\cdots(-\eta_1\beta_0\Delta_{d+1,0})\cdots)) \tag{5.23}$$

Por tanto, la condición suficiente para que existan soluciones polinomiales para la ecuación (5.5) está dada por

$$\prod_{k=1}^{n+1}(m+k) = 0. \tag{5.24}$$

Además, las soluciones polinomiales están dadas por

$$P_{2n+1}(z) = z^{2n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{k}\frac{2(2n-2j+3)(m+n-j+2)}{2d-2(2(n-j+1)-1)}\right)z^{2(n-k)+1} \tag{5.25}$$

En cualquiera de los casos, la solución de la ecuación (5.4) está dada por

$$\Psi(z) = z^{m+1}P_d e^{\frac{1}{2}z^2} \tag{5.26}$$

Análogamente, para las ecuaciones (5.6), (5.7) y (5.8) las soluciones polinomiales existen para todo $\lambda = -(2d-2m+1)$, $\lambda = 2d+2m+3$, $\lambda = 2d-2m+1$, respectivamente, siempre que $d = 2n$ y están dadas por

$$P_{2n}(z) = z^{2n} + \sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=0}^{k-1}\frac{(2n-2j)(2(n-m-j)-1)}{2d-4(n-j-1)}\right)z^{2(n-k)}, \ o \tag{5.27}$$

$$P_{2n}(z) = z^{2n} + \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \frac{(2n-2j)(2(m+n-j)+1)}{4(n-j-1)-2d} \right) z^{2(n-k)}, \ o \tag{5.28}$$

$$P_{2n}(z) = z^{2n} + \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \frac{(2n-2j)(2(n-m-j)-1)}{4(n-j-1)-2d} \right) z^{2(n-k)} \tag{5.29}$$

respectivamente.
Por otro lado, la existencia de soluciones polinomiales para $d = 2n+1$, al igual que en el caso anterior, está condicionado para ciertos valores de m. La ecuación (5.7) comparte estas condiciones con la ecuación (5.5). En cambio las ecuaciones (5.6) y (5.8) comparten la condición de suficiencia dada por

$$\prod_{k=0}^{n} (k-m) = 0. \tag{5.30}$$

Asimismo, las soluciones polinomiales de grado impar para (5.6), (5.7) y (5.8) están dadas por

$$P_{2n+1}(z) = z^{2n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{k} \frac{2(2n-2j+3)(n-m-j+1)}{2d-2(2(n-j+1)-1)} \right) z^{2(n-k)+1}, \ o \tag{5.31}$$

$$P_{2n+1}(z) = z^{2n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{k} \frac{2(2n-2j+3)(m+n-j+2)}{2(2(n-j+1)-1)-2d} \right) z^{2(n-k)+1}, \ o \tag{5.32}$$

$$P_{2n+1}(z) = z^{2n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{k} \frac{2(2n-2j+3)(n-m-j+1)}{2(2(n-j+1)-1)-2d} \right) z^{2(n-k)+1} \tag{5.33}$$

En cualquiera de los casos las soluciones a la ecuación (5.4) están dadas por

$$\Psi_d(z) = z^{-m} P_d e^{\frac{1}{2}z^2}, \ o \tag{5.34}$$

$$\Psi_d(z) = z^{m+1} P_d e^{-\frac{1}{2}z^2}, \ o \tag{5.35}$$

$$\Psi_d(z) = z^{-m} P_d e^{-\frac{1}{2}z^2} \tag{5.36}$$

respectivamente.

Caso 2: Si no existe tal polinomio en el caso anterior, pasamos al ítem 2 del teorema 3.2.6.

a) b es un número de la forma $\frac{(l-2)(l+2)}{16}$ con $l \in \mathbb{Z}$. Nota: $2\sqrt{1+4b} = l$.

b) $l = 2d+4$, $d \in \mathbb{Z}_+$.

c) debe existir un polinomio mónico P_d de grado d, tal que satisface la ecuación de tercer orden

$$\begin{aligned} P_d''' + \frac{3-3\sqrt{1+4b}}{z} P_d'' + \left(\frac{3\sqrt{1+4b}(\sqrt{1+4b}-1)}{z^2} - 4V \right) P_d' \\ - \left(\frac{4b\sqrt{1+4b}}{z^3} + \frac{4+4\sqrt{1+4b}}{z} V + 2V' \right) P_d = 0 \end{aligned} \tag{5.37}$$

Cuadro 5.1: Parámetros adecuados en (5.4) y la solución P_d en (5.5)

d	m	λ	P_d
0	$\mathbb{C}^*$	$-(2m+3)$	1
1	$\emptyset$	$\emptyset$	
2	$\mathbb{C}^*$	$-(2m+7)$	$z^2 + \frac{2m+3}{2}$
3	$\{-2\}$	$-(2m+9)$	$z^3 + \frac{3(2m+4)}{4} z$
4	$\mathbb{C}^*$	$-(2m+11)$	$z^4 + (2m+5)z^2 + \frac{(2m+3)(2m+5)}{4}$
5	$\{-2,-3\}$	$-(2m+13)$	$z^5 + \frac{5(2m+6)}{4} z^3 + \frac{15(2m+4)(2m+6)}{32} z$
6	$\mathbb{C}^*$	$-(2m+15)$	$z^6 + \frac{3(2m+7)}{2} z^4 + \frac{3(2m+5)(2m+7)}{4} z^2 + \frac{(2m+3)(2m+5)(2m+7)}{8}$
7	$\{-2,-3,-4\}$	$-(2m+17)$	$z^7 + \frac{7(2m+8)}{4} z^5 + \frac{35(2m+6)(2m+8)}{32} z^3 + \frac{35(2m+4)(2m+6)(2m+8)}{128} z$
8	$\mathbb{C}^*$	$-(2m+19)$	$z^8 + 2(2m+9)z^6 + \frac{3(2m+7)(2m+9)}{2} z^4 + \frac{(2m+5)(2m+7)(2m+9)}{2} z^2 + \frac{(2m+3)(2m+5)(2m+7)(2m+9)}{16}$
9	$\{-2,-3,-4,-5\}$	$-(2m+21)$	$z^9 + \frac{9(2m+10)}{4} z^7 + \frac{36(2m+8)(2m+10)}{32} z^5 + \frac{105(2m+6)(2m+8)(2m+10)}{128} z^3 + \frac{315(2m+4)(2m+6)(2m+8)(2m+10)}{2048}$

o equivalentemente, en términos de l,

$$\begin{aligned} z^3 P_d''' + \left(3 - \frac{3}{2}l\right) z^2 P_d'' + \left(-4z^5 + 4\lambda z^3 + \frac{1}{2}\left(l^2 - 3l + 2\right) z\right) P_d' \\ + \left((2l-8)z^4 - (2l-4)\lambda z^2\right) P_d = 0 \end{aligned} \tag{5.38}$$

Supongamos que $P_d = z^d + \cdots$, reemplazando en (5.38) tenemos que

$$\begin{aligned} z^3(d(d-1)(d-2)z^{d-3} + \cdots) + \left(3 - \frac{3}{2}l\right) z^2 (d(d-1)z^{d-2} + \cdots) \\ + \left(-4z^5 + 4\lambda z^3 + \frac{1}{2}\left(l^2 - 3l + 2\right) z\right)(dz^{d-1} + \cdots) \\ + \left((2l-8)z^4 - (2l-4)\lambda z^2\right)(z^d + \cdots) = 0 \end{aligned} \tag{5.39}$$

Ahora, del coeficiente de z^{d+2} obtenemos que $(4d - 2l + 4)\lambda = 0$, y como $l = 2d + 4$, se sigue que $\lambda = 0$ para cualquiera que sea d. Sin embargo, la exclusividad del teorema 3.2.3 implica la no viabilidad de este caso.

5.3. Potencial Polinomio de Fourier

En esta sección haremos uso del algoritmo de la algebrización Hamiltoniana, véase [1, 5], el cual describimos a continuación. Consideremos la ecuación de Schrödinger

$$\tilde{\Psi}'' = (P(e^{\mu_1 x}, \ldots, e^{\mu_n x}) - \lambda)\tilde{\Psi}, \quad P \in \mathbb{C}[e^{\mu_1 x}, \ldots, e^{\mu_n x}], \; \mu_i \in \mathbb{C}^* \tag{5.40}$$

donde $\frac{\mu_i}{\mu_j} \in \mathbb{Q}^*$, $1 \leq i, j \leq n$. Luego

$$\mu_i = \frac{p_i}{q_i}\mu, \;\; \mu \in \mathbb{C}^*, \;\; p_i, q_i \in \mathbb{Z}^*, \;\; (p_i, q_i) = 1$$

y para el cambio de variables Hamiltoniano $z = e^{\frac{u}{q}x}$, $q = mcm(q_1, \ldots, q_n)$, la algebrización de la ecuación (5.40) es

$$\tilde{\Psi}'' + \frac{1}{z}\tilde{\Psi}' - \frac{q^2}{\mu^2}\frac{(P(z^{m_1}, \ldots, z^{m_n}) - \lambda)}{z^2}\tilde{\Psi}, \quad m_i = q\frac{p_i}{q_i} \tag{5.41}$$

Note que $m_i \in \mathbb{Z}^*$. Por lo que $P(z^{m_1}, \ldots, z^{m_n}) = \tilde{P}\big(z, \frac{1}{z}\big)$. Ahora, por medio de la transformada de D'Alambert obtenemos la ecuación diferencial tipo Schrödinger

$$\Psi'' = \frac{q^2}{4\mu^2 z^2}\left(4\tilde{P}\big(z, 1/z\big) - 4\lambda - \frac{\mu^2}{q^2}\right)\Psi \tag{5.42}$$

5.3.1. Potencial de Morse: $V(x) = e^{-2x} - e^{-x}$

Considere la ecuación de Schrödinger

$$\tilde{\Psi}'' = (e^{-2x} - e^{-x} - \lambda)\tilde{\Psi} \tag{5.43}$$

Notemos que $\mu_1 = -2$ y $\mu_2 = -1$. A través del cambio de variables $z = e^{-x}$, podemos llevar la ecuación anterior a una tipo Schrödinger, dada por

$$\Psi'' = \frac{1}{z^2}\left(z^2 - z - \lambda - \frac{1}{4}\right)\Psi \tag{5.44}$$

En virtud del teorema 3.2.3, existen dos casos en los cuales la ecuación (5.44) podría tener soluciones Liouvillianas

Caso 1: De acuerdo al ítem b) en el caso uno del teorema citado,

$$-\sqrt{-\lambda} = d+1, \quad \lambda = -(d+1)^2 \tag{5.45}$$
$$\sqrt{-\lambda} = d+1, \quad \lambda = -(d+1)^2 \tag{5.46}$$
$$-\sqrt{-\lambda} = d, \qquad \lambda = -d^2 \tag{5.47}$$
$$\sqrt{-\lambda} = d, \qquad \lambda = -d^2 \tag{5.48}$$

donde d es un entero no negativo. Luego, de acuerdo al ítem c, debe de existir un polinomio P_d de grado d, tal que satisface alguna de las siguientes ecuaciones,

$$z^2 P_d'' + (2z + 2d + 3)P_d' + 2(d+2)P_d = 0 \tag{5.49}$$
$$z^2 P_d'' + (2z - (1+2d))P_d' - 2dP_d = 0 \tag{5.50}$$
$$z^2 P_d'' - (2z - (1+2d))P_d' - 2dP_d = 0 \tag{5.51}$$
$$z^2 P_d'' + (2z - (1-2d))P_d' + 2dP_d = 0 \tag{5.52}$$

La estructura de estas ecuaciones auxiliares, permiten la utilización del teorema 3.3.1.
En el caso de la ecuación (5.49), tenemos que

$$\begin{array}{ccc} a_{20} = 0 & a_{21} = 1 & a_{22} = 0 \\ a_{10} = 2 & a_{11} = 2d+3 & \\ a_{00} = -2(d+2) & & \end{array} \tag{5.53}$$

Esta ecuación posee solución de grado d si, $-2(d+1) = 2d$, lo cual es absurdo, ya que $d \in \mathbb{Z}_+$. Por tanto, no existen soluciones polinomiales para este caso.

En el caso de la ecuación (5.50), tenemos que

$$\begin{array}{ccc} a_{20} = 0 & a_{21} = 1 & a_{22} = 0 \\ a_{10} = 2 & a_{11} = -(1+2d) & \\ a_{00} = 2d & & \end{array} \tag{5.54}$$

La condición exigida para la existencia de soluciones polinomiales por el 3.3.1 se satisface trivialmente. Las soluciones se pueden construir inductivamente mediante la fórmula a tres términos

$$P_{d+2} = (2z+1)P_{d+1} + (d+1)^2 P_d \tag{5.55}$$

comenzando por $P_0 = 1$ y $P_1 = 2z - 3$. Por otra parte, la ecuación (5.44) tiene como solución

$$\Psi_d(z) = z^{-\frac{2d+1}{2}} P_d e^z \tag{5.56}$$

En el caso de la ecuación (5.51), tenemos que

$$\begin{array}{lll} a_{20}=0 & a_{21}=1 & a_{22}=0 \\ a_{10}=-2 & a_{11}=1+2d & \\ a_{00}=2d & & \end{array} \tag{5.57}$$

La ecuación posee solución polinomial siempre que $d=-d$. En este caso, la única solución posible se da para $d=0$. Además, la solución a la ecuación (5.44) está dada por

$$\Psi_0(z)=\sqrt{z}e^{-z} \tag{5.58}$$

En el caso de la ecuación (5.52), tenemos que

$$\begin{array}{lll} a_{20}=0 & a_{21}=1 & a_{22}=0 \\ a_{10}=-2 & a_{11}=1-2d & \\ a_{00}=-2d & & \end{array} \tag{5.59}$$

Posee solución polinomial para todo $d\in\mathbb{Z}_+$. Además, las soluciones se pueden construir inductivamente mediante la fórmula a tres términos

$$P_{d+2}=(3-2z)P_{d+1}+(d^2-1)P_d \tag{5.60}$$

comenzando por $P_0=1$ y $P_1=-2z-1$. Por otro lado, la ecuación (5.44) tiene como solución

$$\Psi_d(z)=z^{\frac{1-2d}{2}}P_de^{-z} \tag{5.61}$$

Caso 2: De acuerdo al ítem b) del caso dos en el teorema 3.2.3,

$$4\sqrt{-\lambda}=2d,\ \ i.e.,\ \ \lambda=-\left(\frac{d+1}{2}\right)^2 \tag{5.62}$$

Luego, según el ítem c) debe de existir un polinomio P_d de grado d que satisfaga la ecuación de tercer orden

$$z^2P_d'''-3dzP_d''-(4z^2-4z-2d-d)P_d'+(4dz-(4d+2))P_d=0 \tag{5.63}$$

Supongamos que $P_d=\sum_{i=0}^{d}v_iz^i$, y luego reemplazando en (5.63) tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=3}^{d}i(i-1)(i-2)v_iz^{i-1}+\sum_{i=2}^{d}-3di(i-1)v_iz^{i-1}+\sum_{i=1}^{d}-4iv_iz^{i+1}+\sum_{i=1}^{d}4iv_iz^{i} \\ \sum_{i=1}^{d}(2d^2+d)iv_iz^{i-1}+\sum_{i=0}^{d}4dv_iz^{i+1}\sum_{i=0}^{d}-(4d+2)v_iz^{i}=0 \end{aligned} \tag{5.64}$$

desplazando índices obtenemos

$$\sum_{k=0}^{d}[\eta_kv_{k-1}+\alpha_kv_k+\beta_kv_{k+1}]z^k=0 \tag{5.65}$$

donde

$$\alpha_k = 4k - (4d+2), \qquad k = 0,1,\dots \tag{5.66}$$
$$\beta_k = (k+1)(2d^2 - 3dk + d + (k-1)k), \qquad k = 0,1,\dots \tag{5.67}$$
$$\eta_k = 4d - 4(k-1), \qquad k = 1,2,\dots \tag{5.68}$$

Del principio de identidad tenemos la siguiente fórmula de recurrencia a tres términos

$$v_{k-1} = \frac{\alpha_k v_k + \beta_k v_{k+1}}{-\eta_k} \tag{5.69}$$

Por otra parte, podemos afirmar que la condición suficiente para la existencia de soluciones polinomiales está dada por,

$$\Delta_{d+1} = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & & & \\ \eta_1 & \alpha_1 & \beta_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \eta_{d-1} & \alpha_{d-1} & \beta_{d-1} \\ & & & \eta_d & \alpha_d \end{vmatrix} = 0 \tag{5.70}$$

Como Δ_{d+1} es el determinante de una matriz tridiagonal,

$$\Delta_{d+1} = \alpha_d \Delta_{d+1,d} - \eta_d \beta_{d-1} \Delta_{d+1,d-1} \tag{5.71}$$

donde $\Delta_{d+1,0} = 1$ y $\Delta_{d+1,-1} = 0$

Cuadro 5.2: Valores de Δ_{d+1} para la ecuación (5.63).

d	Δ_{d+1}
0	Absurdo
1	0
2	360
3	0
4	-1360800
5	0
6	27243216000
7	0
8	-1750649060160000

En general, estos polinomios solo existirán para $d = 2n-1$, $n \geq 1$. Sin embargo, Los valores que se obtienen para el parámetro λ

$$\lambda = -\left(\frac{d+1}{2}\right)^2 = -n^2 \tag{5.72}$$

hacen parte del caso anterior. Si bien existen soluciones polinomiales para la ecuación (5.63), la exclusividad del teorema 3.2.3 implica la no viabilidad de este caso.

Observaciones Finales

1. Mediante los teoremas 3.2.1, 3.2.3, 3.2.4 y 3.2.6 podemos caracterizar Galoisianamente las ecuaciones diferenciales lineales normalizadas de segundo orden con coeficiente polinomio de Laurent, en particular la Ecuación de Schrödinger.

2. Dados los resultados en el capítulo 4, en especial el teorema 4.3.2, existe evidencia para conjeturar que podrían existir hipersuperficies $V_{d,k}^n$ cuyos puntos estén relacionados a potenciales cuasi-resolubles de grado n con k valores de energía.

3. Conjeturamos que existirán soluciones polinomiales para la ecuación auxiliar en el caso del potencial canónico de grado $2n$, cuando d iguale a $(n+1)k$ o $(n+1)k+1$, donde k es un entero no negativo, además λ será nula en cualquiera de los casos. Al parecer la demostración de este hecho requiere técnicas del álgebra diferencial, distintas a las desarrolladas en este trabajo. En caso de ser cierto, podemos afirmar que:

$$P_{n+1} = z^{n+1} \pm \frac{n}{2},$$
$$P_{n+2} = z^{n+2} \pm \frac{n+2}{2} z.$$

4. Podemos construir potenciales polinomiales cuasi-resolubles de cualquier grado vía potencial canónico.

5. Debido a que el teorema 3.2.4 otorga un criterio de no integrabilidad para potenciales polinomios de Laurent, podemos concluir la no integrabilidad del potencial de Lennard-Jones 12-6 de una manera más sencilla que en los resultados presentados en [3] referentes a este potencial.

6. Hemos descrito explícitamente las soluciones Liouvillianas del oscilador armónico perturbado, así como también hemos expresado las condiciones suficientes para la existencia de estas soluciones.

7. El problema de la integrabilidad en el sentido Liouville de la Ecuación de Schrödinger con potencial polinomio de Fourier, puede ser reducido a discernir si existe o no integrabilidad para determinada ecuación tipo Schrödinger con potencial polinomio de Laurent.

8. Contrastado con los resultados en [1, 5] referentes al potencial de Morse, no solo extendemos los resultados, añadiendo más valores para d, el grado de la solución polinomial de la ecuación auxiliar, sino que se reduce al caso uno del algoritmo de Kovacic el analisis Galoisiano de este potencial.

Debido a los resultados obtenidos a lo largo de este trabajo, podemos concluir que el uso de métodos asintóticos incrementa la eficacia de las herramientas de la teoría de Galois diferencial.
Esto induce la necesidad de un estudio profundo de las representaciones asintóticas y el comportamiento de las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficiente polinomio de Laurent en función de sus parámetros con el fin de mejorar las técnicas ya conocidas y ayudar a determinar soluciones a problemas establecidos desde el punto de vista de la teoría de Galois diferencial.

Bibliografía

[1] P. Acosta-Humánez, *Galoisian Approach to Supersymmetric Quantum Mechanics:The integrability analysis of the Schrödinger equation by means of differential Galois theory*, Saarbrücken, Alemania, VDM Verlag Dr. Müller GmbH, 2010.

[2] P. Acosta-Humánez, *La teoría de Morales-Ramis y el algoritmo de Kovacic. Lecturas Matemáticas*, 2006, Vol. 2, pág. 21-56.

[3] M. Acosta-Humánez , P. Acosta-Humánez, E. Tuirán, *Generalized Lennard-Jones Potentials, SUSYQM and Differential Galois Theory*, por aparecer en Symmetry Integrability and Geometry: Methods and Applications, disponible en: arXiv:1803.01247

[4] P. Acosta-Humánez, D. Blázquez-Sanz, *Non-Integrability of some hamiltonian systems with rational potential, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*, 2008, Vol. 10, pág. 265–293.

[5] P. Acosta-Humánez, J. Morales-Ruiz J.-A. Weil, *Galoisian approach to integrability of Schrödinger equation. Reports on Mathematical Physics*, 2011, Vol. 67, Núm. 3, pág. 305-374.

[6] P. Acosta-Humánez, H. Venegas, *Liouvillian Solutions of Schrödinger Equation with Polynomial Potentials using Gröbner Basis*, Pre-Print 2015.

[7] W. Balser, *From Divergent Power Series to Analytic Functions: Theory and Application of Multisummable Power Series*, Germany, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994.

[8] D. Blázquez-Sanz, K. Yagasaki *Galoisian approach for a Sturm-Liouville problem on the infinite interval. Methods and Applications of Analysis*, 2012, Vol. 19, Núm. 3, pág. 267 - 288.

[9] J. Borowska, L. Łacińska, J. Rychlewska, *A system of linear recurrence equations for determinant of pentadiagonal matrix . Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 2014, Vol. 13, Núm. 2, pág. 5 - 12.

[10] D.Brandon, N. Saad, S. Dong, *On some polynomial potentials in d-dimensions. Journal of Mathematical Physics*, 2013, Vol. 54, Núm. 8, pág. 082106.

[11] J. Cano, J. P. Ramis, *Théorie de Galois différentielle, multisommabilité et phénomènes de Stokes*, por publicar.

[12] H. Ciftci, R. Hall, N. Saad, *Asymptotic iteration method for eigenvalue problems,Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2003, Vol. 36, Núm. 47, pág. 11807.

[13] H. Ciftci, R. Hall, N. Saad, E. Dogu, *Physical applications of second-order linear differential equations that admit polynomial solutions. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2010, Vol. 43, Núm. 41, pág. 415206.

[14] T. Crespo, Z. Hajto *Algebraic Groups and Differential Galois Theory*, Providence, USA, American Mathematical Society, 2011.

[15] F. Fauvet, J.-P. Ramis, F. Richard-Jung, J. Thomann *Stokes phenomenon for the prolate spheroidal Wave Equation. Applied Numerical Mathematics*, 2010, Vol. 60, Núm. 12, pág. 1309-1319.

[16] P. Hsieh, Y. Sibuya *On the asymptotic integration of second order linear ordinary differential equations with polynomial coefficients. Journal of mathematical analysis and applications*, 1996, Vol. 16, pág. 84-103.

[17] I. Kaplansky, *An introduction to differential algebra*, Publications de l'institut de mathématique de l'université de nancago, Hermann/Paris, volume V, 1957

[18] E. Kolchin, *Differential Algebra and Algebraic Groups*, Academic Press, 1973.

[19] J. Kovacic, *An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations. Journal of Symbolic Computation* , 1986, Vol. 2, Núm. 1, pág. 3-43.

[20] A. Magid, *Lectures on Differential Galois Theory*, University Lecture Series, American Mathematical Society, Vol. 7, 1994.

[21] F. Mullin *On the regular perturbation of the subdominant solution to second order linear ordinary differential equations with polynomial coefficients. Funkcialaj Ekvacioj*, 1968, Vol. 11, pág. 1-38.

[22] E. Picard, *Sur les équations différentielles linéaires et les groupes algébriques de transformations*, Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1$^{\text{er}}$ série, 1887, Vol. 1, Núm 1, pág. A1–A15

[23] E. Picard, *Sur les groupes de transformations des équations differentielles linéares*, Comptes Rendus Acad. Sci, 1883, Vol. 96, pág. 1131-1134.

[24] M. van der Put, M. Singer, *Galois Theory of differential equation*, Berlin, Springer, 2003.

[25] F. Richard-Jung, J.-P. Ramis, J. Thomann, F. Fauvet *New characterizations for the eigenvalues of the prolate spheroidal Wave Equation. Studies in Applied Mathematics*, 2017, Vol. 138, Núm. 1, pág. 3-24.

[26] J.F. Ritt, *Differential Algebra*, AMS Publications, 1950.

[27] N. Saad, R. L. Hall, H. Ciftci, *Criterion for polynomial solutions to a class of linear differential equations of second order. Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2006, Vol. 39, Núm. 43, pág. 13445.

[28] Y. Sibuya, *Global theory of a second order linear ordinary differential equation with a polynomial coefficient*, Amsterdam, North-Holland Pub. Co., 1975.

[29] G. Simmons, *Differential equations with applications and historical notes*, U.S.A., McGraw-hill, inc., 2ª ed., 1991.

[30] H. Venegas, *Integrability of Schrödinger Equation with Polynomial Potentials*, B.S. thesis, Universidad del Atlántico, Barranquilla, 2015.

[31] E. Vessiot, *Sur l'intégration des équations différentielles linéaires*, Ann. Sci. de l'École Norm. Sup., 1892, Vol. 9, Núm. 3, pág. 192-280 .

[32] B. L. van der Waerden, *Modern Algebra II*, New York, Frederick Ungar Publishing Co, 1950.

[33] W. Wasow, *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*, New York, Dover Pubns, 1987.