Un estudio del espectro primo de anillos no conmutativos

Diego Arturo Niño Torres
Matemático

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
Octubre de 2018

Un estudio del espectro primo de anillos no conmutativos

Diego Arturo Niño Torres
Matemático

Trabajo de tesis para optar al título de
Magister en ciencias matemáticas

Director
Armando Reyes
Doctor en Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
Octubre de 2018

Título en español

Un estudio del espectro primo de anillos no conmutativos

Title in English

A study of the prime spectrum of noncommutative rings

Resumen: En el presente trabajo se estudia una caracterización de los ideales primos minimales en algunos tipos de anillos no conmutativos. Para lograr tal objetivo, se define la noción de anillo $\Sigma(*)$, que generaliza el concepto de anillo $\sigma(*)$ estudiado en extensiones de Ore, al contexto de las extensiones PBW torcidas.

Abstract: In this work we study a description of the minimal prime ideals in some classes of noncommutative rings. To achieve this aim, we define the notion of $\Sigma(*)$-ring, which generalizes the concept of $\sigma(*)$-ring studied in Ore extensions, to the context of skew PBW extensions.

Palabras clave: ideal primo minimal, extensión PBW torcida, anillo de Armendariz, anillo Σ-rígido, anillo reducido, anillo 2-primal.

Keywords: minimal prime ideal, skew PBW extension, Armendariz ring, Σ-rigid ring, reduced ring, 2-primal ring.

Dedicado a

A mis padres: Alice Torres y Adan Niño.

Agradecimientos

Agradezco de manera especial al profesor Armando Reyes por su amabilidad, paciencia y colaboración en el desarrollo de este trabajo. A mi familia por su apoyo incondicional y su infinito amor. Por último, pero no menos importante, a mis amigos y a Deniz, por tan felices momentos.

Índice general

Introducción

La importancia de los ideales primos minimales puede apreciarse en trabajos como [HJ65] donde se desarrolla una teoría de estos ideales para anillos conmutativos, la cual es una herramienta para el estudio del anillo de funciones continuas en ciertos espacios topológicos. Para ilustrar su pertinencia, recordamos que el espacio de los ideales primos minimales de $C(\mathbb{N}^*)$ (donde $\mathbb{N}^*$ es la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{N}$) es homeomorfo a la compactificación de Stone-Cêch de $\mathbb{N}$. Por otro lado, en [M+83], se estudiaron los ideales primos minimales de un anillo conmutativo reducido R buscando obtener información acerca del anillo total de fracciones de R (denotado por $Q(R)$) y de la envolvente inyectiva de R (denotada por $E(R)$); más precisamente, se mostró que $E(R)$ es plano si, y sólo si, $\mathrm{Min}(R)$ (el espectro primo minimal de R) es compacto. También se probó allí que si R es reducido y el conjunto de ideales primos minimales de R es finito, digamos $\{P_1, \ldots, P_n\}$, entonces $Q(R) \cong R_{P_1} \bigoplus \cdots \bigoplus R_{P_n}$. Con respecto a [HKLN09], allí se utilizó el espectro primo minimal como herramienta necesaria para generalizar ciertos resultados acerca de anillos conmutativos que satisfacen la condición a.c. (condición del anulador) al caso donde los anillos no sean conmutativos. La importancia de estos resultados radica en que la clase de anillos que satisfacen la propiedad a.c. es amplia: se destacan los anillos de Bezout, anillos quasi-Baer, los anillos semiprimos que satisfacen la condición de cadena ascendente, entre otros. Actualmente, los ideales primos minimales siguen siendo objeto de investigación. Por ejemplo, en [LL18] se da una descripción explícita de los ideales primos minimales de un anillo reducido R en términos de su anillo simétrico de cocientes de Martindale Q. De hecho, se prueba que todo ideal primo minimal de R es de la forma $\mathbf{m}Q \cap R$, para algún ideal maximal $\mathbf{m}$ de $\mathbf{B}$, donde $\mathbf{B}$ es el álgebra de los elementos idempotentes del centro del anillo simétrico de cocientes de Martindale.

En los trabajos mencionados y en otros más, notamos una noción transversal de suma importancia: el anillo debe ser reducido. Teniendo en cuenta este hecho, parte de este trabajo se centra en estudiar los ideales primos minimales en anillos que cumplan condiciones más débiles, las cuales puedan reemplazar la condición de ser reducido en el estudio de ideales primos minimales de anillos no conmutativos. Las clases de anillos en los cuales enfocaremos parte de nuestro trabajo son las extensiones PBW torcidas, los anillos Σ-rígidos y los anillos $\Sigma(*)$. Observaremos cómo la condición de ser reducido puede ser de utilidad para caracterizar los ideales primos minimales bajo ciertas condiciones. Cabe anotar que este trabajo da continuidad al estudio de los ideales en anillos no conmutativos realizado en [LAR15], [RS19] y [RS18d].

A continuación presentamos la estructura del trabajo. En el primer capítulo recordamos los conceptos necesarios para el desarrollo de nuestro trabajo. Recordamos las extensiones PBW torcidas y los anillos Σ-rígidos débiles; mencionamos algunos ejemplos y establecemos propiedades interesantes de estas clases de anillos. En el segundo capítulo estudiamos la noción de ideal primo minimal e investigamos ciertas caracterizaciones de estos ideales en diferentes tipos de anillos no conmutativos de tipo polinomial. Con el fin de lograr dicho objetivo, definimos los anillos $\Sigma(*)$ y a partir de esta definición, examinamos los ideales primos minimales de las extensiones PBW torcidas, junto con la condición de ser anillo 2-primal. Finalmente, en la última parte, esbozaremos un posible trabajo futuro que da continuidad a lo investigado aquí.

CAPÍTULO 1

Preliminares

En el presente capítulo presentamos los conceptos necesarios para el desarrollo de este trabajo. Omitiremos las demostraciones de ciertos resultados, puesto que son hechos conocidos; más bien, mencionamos las referencias correspondientes para su posible consulta.

1.1. Algunas familias de anillos no conmutativos

1.1.1. Extensiones PBW torcidas

La primer familia de anillos no conmutativos que presentamos son las extensiones PBW torcidas definidas en [GL11]. Estos anillos de tipo polinomial son de nuestro interés, pues buscamos generalizar propiedades estudiadas en las extensiones de Ore, definidas por Ore (véase [Ore33]), las cuales han sido ampliamente estudiadas en la literatura . Las extensiones PBW torcidas generalizan varias familias de anillos no conmutativos, las cuales incluyen varias álgebras que surgen en áreas como la física matemática, la teoría de representaciones, las álgebras de Hopf, los grupos cuánticos, las álgebras de Lie, entre otros. De hecho, varias propiedades de anillos y módulos han sido estudiadas (véase [Art15], [Gal16], [LAOV13], [LL17], [LV17], [RJ18], [RS17b], [RS18c], [RS17a] y [Rey14]). Por tal razón, damos una breve descripción de dicho tipo de anillos y algunos ejemplos más destacados.

Definición 1.1.1 ([GL11], definición 1)**.** Sean A y R anillos. Decimos que A es una **extensión PBW torcida** de R (también llamada extensión σ-PBW) la cual se denota por $A := \sigma(R)\langle x_1, \dots, x_n\rangle$, si se cumplen las siguientes condiciones:

(i) $R \subseteq A$;

(ii) Existen finitos elementos $x_1, \dots, x_n \in A$ tales que R es un A-módulo libre a izquierda con base $\text{Mon}(A) := \{x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \mid \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n\}$ $(x^0 := 1)$.

(iii) Para cada $1 \leq i \leq n$ y dado $r \in R \setminus \{0\}$, existe un elemento $c_{i,r} \in R \setminus \{0\}$ tal que $x_i r - c_{i,r} x_i \in R$.

(iv) Para cualquier par de elementos x_i, x_j con $1 \leq i, j \leq n$, existe $c_{i,j} \in R \setminus \{0\}$ tal que $x_jx_i - c_{i,j}x_ix_j \in R + Rx_1 + \cdots + Rx_n$ (es decir, existen elementos $r_0^{(i,j)}, r_1^{(i,j)}, \ldots, r_n^{(i,j)} \in R$ con $x_jx_i - c_{i,j}x_ix_j = r_0^{(i,j)} + \sum_{k=1}^{n} r_k^{(i,j)}x_k$).

Definición 1.1.2 ([GWJ04], página 33)**.** Sean R un anillo y $\sigma : R \longrightarrow R$ un endomorfismo de R. Decimos que una función $\delta : R \longrightarrow R$ es una **σ-derivación** si se cumple que δ es una función aditiva y $\delta(ab) = \delta(a)b + \sigma(a)\delta(b)$, para todo $a, b \in R$.

Proposición 1.1.3 ([NR17], proposición 2.3)**.** *Si A es una extensión PBW torcida de un anillo R, entonces para todo $1 \leq i \leq n$, existe un endomorfismo inyectivo $\sigma_i : R \longrightarrow R$ y una σ_i-derivación $\delta_i : R \longrightarrow R$ tales que $x_ir = \sigma_i(r)x_i + \delta_i(r)$, para todo $r \in R$. Denotamos como $\Sigma := \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ y $\Delta := \{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$.*

Definición 1.1.4 ([GL11], definición 4)**.** A es llamada una **extensión PBW torcida biyectiva**, si para cada $1 \leq i \leq n$ se tiene que σ_i es una aplicación biyectiva y se tiene que para cualesquiera $1 \leq i, j \leq n$, el elemento $c_{i,j}$ resulta ser invertible.

Las siguientes definiciones nos brindan una mayor claridad sobre los elementos de las extensiones PBW torcidas.

Definición 1.1.5 ([GL11], definición 6)**.** Sea A una extensión PBW torcida de R.

· Si $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n} \in \mathrm{Mon}(A)$, notaremos como $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$ donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

· Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, entonces $\alpha + \beta := (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$.

· Si $x^\alpha \in \mathrm{Mon}(A)$ entonces definimos el **exponente** del monomio como $\exp(x^\alpha) := \alpha$; se define el **grado** del monomio como $\deg(x^\alpha) := |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. Para más detalles sobre órdenes totales en $\mathrm{Mon}(A)$, véase [GL11].

· El símbolo $\succeq$ denota un orden total definido en $\mathrm{Mon}(A)$ (un orden total en $\mathbb{N}^n$). Si $x^\alpha \succeq x^\beta$ pero $x^\alpha \neq x^\beta$, entonces escribimos $x^\alpha \succ x^\beta$.

· Todo elemento $f \in A$ puede ser expresado de manera única como $f = a_0 + a_1X_1 + \cdots + a_mX_m$, con $a_i \in R$, y $X_m \succ \cdots \succ X_1$. Con esta notación, definimos el **monomio líder** de f como $\mathrm{lm}(f) = X_m$, el **coeficiente líder** de f como $\mathrm{lc}(f) = a_m$; el **término líder** de f como $\mathrm{lt}(f) = a_mX_m$; y $C_f := \{a_0, a_1, \ldots, a_m\}$. Si $f = 0$, entonces $\mathrm{lm}(f) := 0$, $\mathrm{lc}(f) = 0$ y $\mathrm{lm}(f) = 0$.

Proposición 1.1.6 ([GL11], teorema 7)**.** *Sea A un anillo de polinomios sobre un anillo R con respecto al conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$. A es una extensión PBW torcida de R si, y sólo si, se cumplen las siguientes condiciones:*

(i) *Para todo $x^\alpha \in \mathrm{Mon}(A)$ y todo $r \in R \setminus \{0\}$ existe un par de elementos únicos $r_\alpha := \sigma^\alpha(r) \in R \setminus \{0\}$, $p_{\alpha,r} \in A$ tales que $x^\alpha r = r_\alpha x^\alpha + p_{\alpha,r}$, donde $p_{\alpha,r} = 0$, o $\deg(p_{\alpha,r}) < |\alpha|$, si $p_{\alpha,r} \neq 0$; adicionalmente, si r es invertible, entonces r_α también lo es.*

(ii) *Para cada par de elementos* $x^{\alpha}, x^{\beta} \in \mathrm{Mon}(A)$ *existen un par de elementos únicos* $c_{\alpha,\beta} \in R$ *y* $p_{\alpha,\beta} \in A$ *tales que* $x^{\alpha}x^{\beta} = c_{\alpha,\beta}x^{\alpha+\beta} + p_{\alpha,\beta}$, *donde* $c_{\alpha,\beta}$ *es un elemento invertible a izquierda, donde* $p_{\alpha,\beta} = 0$ *o* $\deg(p_{\alpha,\beta}) < |\alpha+\beta|$, *si* $p_{\alpha,\beta} \neq 0$.

Observación 1.1.7 ([Rey15], observación 2.10)**.** Si A es una extensión PBW torcida de un anillo R, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.

1. Si $X_i := x_1^{\alpha_{i1}} \cdots x_n^{\alpha_{in}}$, $Y_j := x_1^{\beta_{j1}} \cdots x_n^{\beta_{jn}}$, y $a_i, b_j \in R$, entonces

$$\begin{aligned} a_iX_ib_jY_j = {} & a_i\sigma^{\alpha_i}(b_j)x^{\alpha_i}x^{\beta_j} + a_ip_{\alpha_{i1},\sigma_{i2}^{\alpha_{i2}}(\cdots(\sigma_{in}^{\alpha_{in}}(b_j)))}x_2^{\alpha_{i2}}\cdots x_n^{\alpha_{in}}x^{\beta_j} \\ & + a_ix_1^{\alpha_{i1}}p_{\alpha_{i2},\sigma_3^{\alpha_{i3}}(\cdots(\sigma_{in}^{\alpha_{in}}(b_j)))}x_3^{\alpha_{i3}}\cdots x_n^{\alpha_{in}}x^{\beta_j} \\ & + a_ix_1^{\alpha_{i1}}x_2^{\alpha_{i2}}p_{\alpha_{i3},\sigma_{i4}^{\alpha_{i4}}(\cdots(\sigma_{in}^{\alpha_{in}}(b_j)))}x_4^{\alpha_{i4}}\cdots x_n^{\alpha_{in}}x^{\beta_j} \\ & + \cdots + a_ix_1^{\alpha_{i1}}x_2^{\alpha_{i2}}\cdots x_{i(n-2)}^{\alpha_{i(n-2)}}p_{\alpha_{i(n-1)},\sigma_{in}^{\alpha_{in}}(b_j)}x_n^{\alpha_{in}}x^{\beta_j} \\ & + a_ix_1^{\alpha_{i1}}\cdots x_{i(n-1)}^{\alpha_{i(n-1)}}p_{\alpha_{in},b_j}x^{\beta_j}. \end{aligned}$$

De esta manera, cuando calculamos los sumandos de $a_iX_ib_jY_j$, obtenemos productos de a_i con diferentes evaluaciones de b_j en σ's y δ's que dependen de las entradas de α_i.

2. ([Rey15], proposición 2.9)**.** Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ y r es un elemento de R, entonces

$$\begin{aligned} x^{\alpha}r = {} & x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}x_n^{\alpha_n}r = x_1^{\alpha_1}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\left(\sum_{j=1}^{\alpha_n} x_n^{\alpha_n-j}\delta_n(\sigma_n^{j-1}(r))x_n^{j-1}\right) \\ & + x_1^{\alpha_1}\cdots x_{n-2}^{\alpha_{n-2}}\left(\sum_{j=1}^{\alpha_{n-1}} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}-j}\delta_{n-1}(\sigma_{n-1}^{j-1}(\sigma_n^{\alpha_n}(r)))x_{n-1}^{j-1}\right)x_n^{\alpha_n} \\ & + x_1^{\alpha_1}\cdots x_{n-3}^{\alpha_{n-3}}\left(\sum_{j=1}^{\alpha_{n-2}} x_{n-2}^{\alpha_{n-2}-j}\delta_{n-2}(\sigma_{n-2}^{j-1}(\sigma_{n-1}^{\alpha_{n-1}}(\sigma_n^{\alpha_n}(r))))x_{n-2}^{j-1}\right)x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}x_n^{\alpha_n} \\ & + \cdots + x_1^{\alpha_1}\left(\sum_{j=1}^{\alpha_2} x_2^{\alpha_2-j}\delta_2(\sigma_2^{j-1}(\sigma_3^{\alpha_3}(\sigma_4^{\alpha_4}(\cdots(\sigma_n^{\alpha_n}(r))))))x_2^{j-1}\right)x_3^{\alpha_3}x_4^{\alpha_4}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}x_n^{\alpha_n} \\ & + \sigma_1^{\alpha_1}(\sigma_2^{\alpha_2}(\cdots(\sigma_n^{\alpha_n}(r))))x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}, \qquad \sigma_j^0 := \mathrm{id}_R \text{ para } 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

A continuación mencionamos algunos ejemplos de anillos no conmutativos que resultan ser extensiones PBW torcidas, una lista detallada de extensiones PBW torcidas puede ser encontrada en [LR14], [Rey14], [RS17c] y [RS17b].

Ejemplo 1.1.8. 1. ([GL11], ejemplo 5)**.** Las **extensiones de Ore** $R[x;\sigma,\delta]$ con σ inyectivo.

2. ([GL11], ejemplo 5)**.** Cualquier **anillo de polinomios torcidos iterado** de la forma $R[x_1;\sigma_1,\delta_1]\cdots[x_n;\sigma_n,\delta_n]$ que satisfaga las siguientes condiciones:

   - σ_i es inyectiva para todo $1 \leq i \leq n$;
   - $\sigma_i(r)$, $\delta_i(r) \in R$ para todo $1 \leq i \leq n$ y todo $r \in R$;
   - $\sigma_j(x_i) = cx_i + d$ para $i < j$, donde $c, d \in R$ y c tiene inverso a izquierda;

- $\delta_j(x_i) \in R + Rx_1 + \cdots + R_i$ para $i < j$.

3. ([LR14], ejemplo 3.5, (a)). **El análogo aditivo del álgebra de Weyl**: Sea K un cuerpo. La K-álgebra denotada como $A_n(q_1, \ldots, q_n)$ generada por las indeterminadas $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ sujeta a las siguientes relaciones:

   - $x_j x_i = x_i x_j$, para todo $1 \leq i, j \leq n$.
   - $y_j y_i = y_i y_j$, para todo $1 \neq j$.
   - $y_i x_i = q_i x_i y_i$, para todo $1 \leq i \leq n$.

   donde $q_i \in R \setminus \{0\}$.

4. ([LR14], ejemplo 3.5, (b)). **El análogo multiplicativo del álgebra de Weyl**: Sea K un cuerpo. La K-álgebra $\mathcal{O}_n(\lambda_{ji})$ es generada por las indeterminadas $x_1, \ldots, x_n$ sujeta a las relaciones $x_j x_i = \lambda_{ji} x_i x_j$, $1 \leq i < j \leq n$, donde $\lambda_{ji} \in K \setminus \{0\}$.

5. ([LR14], ejemplo 3.5, (j)). **El álgebra de Heisenberg**: Sea K un cuerpo. La K-álgebra $h_n(q)$ es generada por las indeterminadas $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n$, sujeta a las siguientes relaciones:

   - $x_j x_i = x_i x_j$, $z_j z_i = z_i z_j$, para todo $1 \leq i, j \leq n$.
   - $z_j y_i = y_i z_j$, $z_j x_i = x_i z_j$, $y_j x_i = x_i y_j$, $i \neq j$.
   - $z_i y_i = q y_i z_i$, $z_i x_i = q^{-1} x_i z_i + y_i$, $y_i x_i = q x_i y_i$, para todo $1 \leq i \leq n$, $q \in K \setminus \{0\}$.

6. ([LR14], ejemplo 3.1, (d)). Sean K un anillo conmutativo y $\mathcal{G}$ un álgebra de Lie de dimensión finita sobre K con base $\{x_1, \ldots, x_n\}$. La **envolvente universal de** $\mathcal{G}$, notada como $\mathcal{U}(\mathcal{G})$, es una extensión PBW torcida de K. En este caso, se tienen las siguientes relaciones:

   - $x_i r - r x_i = 0$.
   - $x_i x_j - x_j x_i = [x_i, x_j] \in K + Kx_1 + \cdots + Kx_n$.

   para todo $r \in K$ y $1 \leq i, j \leq n$.

7. ([LR14], ejemplo 3.5, (e)). Sean $K, \mathcal{G}, \{x_1, \ldots, x_n\}$ y $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ como en el ejemplo 6; sea R una K-álgebra que contenga a K. El **producto tensorial** $A := R \otimes_K \mathcal{U}(\mathcal{G})$ es una extensión PBW torcida de R.

8. ([LR14], ejemplo 3.5, (l)). **El álgebra de Hayashi:** Es notada por $W_q(J)$ y corresponde a la K-álgebra cuantizada generada por x_i, y_i, z_i, $1 \leq i \leq n$, sujeta a las siguientes relaciones:

   - $x_j x_i = x_i x_j$, $z_j z_i = z_i z_j$, para todo $1 \leq i, j \leq n$.
   - $z_j y_i = y_i z_j$, $z_j x_i = x_i z_j$, $y_j x_i = x_i y_j$, $i \neq j$.
   - $z_i y_i = q y_i z_i$, $z_i x_i = q^{-1} x_i z_i + y_i$, $y_i x_i = q x_i y_i$, para todo $1 \leq i \leq n$.
   - $(z_i x_i - q x_i z_i) y_i = 1 = y_i (z_i x_i - q x_i z i)$, $i = 1, \ldots, n$.

   Con $q \in K \backslash \{0\}$. $W_q(J)$ es una extensión PBW torcida de $K[y_1^{\pm}, \ldots, y_n^{\pm}]$

9. ([LR14], ejemplo 3.6). **Álgebras de Weyl generalizadas o anillos hiperbólicos:** Sea θ un automorfismo de un anillo R, sea ζ un elemento central de R. Denotamos por $R\{\theta, \zeta\}$ el anillo generado por las variables x, y con las siguientes relaciones:

   - $xr = \theta(r)x$, $ry = y\theta(r)$, para todo $r \in R$.
   - $xy = \zeta$, $yx = \theta^{-1}(\zeta)$

   $R\{\theta, \zeta\}$ es llamado el anillo hiperbólico de rango 1. Si $R\{\theta, \zeta\}$ es un anillo hiperbólico de rango 1, entonces $R\{\theta, \zeta\} \cong \sigma(R)\langle x, y\rangle$.

10. ([LR14], ejemplo 3.4). **Álgebras de difusión:** Una álgebra de difusión $\mathcal{A}$ es generada por $\{D_i, x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ sobre K con las relaciones $c_{ij}D_iD_j - c_{ji}D_jD_i = x_jD_i - x_iD_j$, $i < j$, $c_{ij}, c_{ji} \in K^*$. Se tiene que $\mathcal{A} \cong \sigma(K[x_1, \ldots, x_n])\langle D_1 \ldots, D_n\rangle$.

11. ([LR14], ejemplo 3.5, (r)). **Espacio cuántico simpléctico:** Dado un cuerpo K, para todo elemento no nulo $q \in K$, el espacio cuántico simpléctico $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}(K^{2n}))$ se define como la K-álgebra generada por las variables $y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_n$ sujeta a las siguientes relaciones:

    - $y_jx_i = q^{-1}x_iy_j$, $y_jy_i = qy_iy_j$, $1 \leq i < j \leq n$.
    - $x_jx_i = q^{-1}x_ix_j$, $x_jy_i = qy_ix_j$, $1 \leq i < j \leq n$.
    - $x_iy_i - q^2y_ix_i = (q^2 - 1)\sum_{l=1}^{i-1} q^{i-l}y_lx_l$, $1 \leq i < n$.

    A partir de estas relaciones, se tiene que el espacio cuántico simpléctico es isomorfo a una extensión PBW torcida.

12. ([LR14], ejemplo 3.5, (f)). **Álgebra de Weyl cuantizada multiparamétrica:** Sea $Q := [q_1, \ldots, q_n]$ un vector en K^n con componentes no nulas, y sea $\Gamma = [\gamma_{ij}]$ una matriz antisimétrica de tamaño $n \times n$ con entradas en K. La álgebra multiparamétrica de Weyl cuantizada $A_n^{Q,\Gamma}$ se define como la K-álgebra generada por las indeterminadas $y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_n$ sujeta a las siguientes relaciones:

    - $y_iy_j = \gamma_{ij}y_jy_i$, $1 \leq i, j \leq n$.
    - $x_ix_j = q_i\gamma_{ij}x_jx_i$, $1 \leq i < j \leq n$.
    - $x_iy_j = \gamma_{ji}y_jx_i$, $1 \leq i < j \leq n$.
    - $x_iy_j = q_j\gamma_{ji}y_jx_i$, $1 \leq j < i \leq n$.
    - $x_iy_j = q_jy_jx_i + 1 + \sum_{l<j}(q_l - 1)y_lx_l$, $1 \leq j < n$.

    A partir de las anteriores relaciones, se tiene que $A_n^{Q,\Gamma}$ es isomorfa a una extensión PBW torcida.

13. ([LR14], ejemplo 3.5, (e)). **Álgebra de Dispin:** Se denota por $\mathcal{U}(osp(1, 2))$, es generada por x, y, z sobre un anillo conmutativo K, donde se satisfacen las siguientes relaciones:

    $$yz - zy = z, \quad zx + xz = y, \quad xy - yx = x$$

    De esta manera, $\mathcal{U}(osp(1, 2)) \cong \sigma(K)\langle x, y, z\rangle$.

14. ([LR14], ejemplo 3.5, (f)). **Álgebra de Woronowicz:** Se denota por $\mathcal{W}_v(\mathfrak{sl}(2,k))$. Es generada por K y las variables x, y, z bajo las siguientes relaciones:

$$xz - v^4zx = (1+v^2)x, \quad xy - v^2yx = vz, \quad zy - v^4yz = (1+v^2)y$$

donde $v \in K \backslash \{0\}$ no es una raíz de la unidad. Se tiene que $\mathcal{W}_v(\mathfrak{sl}(2,K)) \cong \sigma(K)\langle x, y, z\rangle$.

15. ([LR14], ejemplo 3.5, (m)). **Álgebra de operadores diferenciales $D_q(S_q)$ sobre un espacio cuántico S_q:** Sea K un anillo conmutativo y sea $q = [q_{ij}]$ una matriz con entradas en K^* tal que $q_{ii} = 1 = q_{ij}q_{ji}$, para todo $1 \leq i, j \leq n$. La K-álgebra S_q es generada por las variables $x_1, \ldots, x_n$ sujeta a las relaciones $x_ix_j = q_{ij}x_jx_i$. La álgebra S_q es conocida como *la álgebra de funciones en un espacio cuántico*. El álgebra $D_q(S_q)$ de operadores q-diferenciales es definida por las siguientes relaciones:

    - $\partial_i x_j - q_{ij}x_j\partial_i = \delta_{ij}$, para todo i, j.
    - $\delta_i\delta_j = q_{ij}\partial_j\partial_i$, para todo i, j.

    Se tiene que $D_q(S_q) \cong \sigma(\sigma(K)\langle x_1, \ldots, x_n\rangle)\langle \partial_1, \ldots, \partial_n\rangle$.

1.1.2. Anillos Σ-rígidos débiles

En esta sección estudiamos la noción de anillo Σ-rígido débil, los cuales han sido estudiados en la literatura (véase [RS18c], [RS16], [RS19] y [RS18d]). Este concepto generaliza la noción de anillo Σ-rígido definido en [Rey15]. Veremos que esta generalización es particularmente interesante pues brinda condiciones para construir extensiones PBW torcidas que sean reducidas. Esta parte del trabajo la formulamos a partir del trabajo hecho en [RS18b], el cual generaliza el trabajo realizado en [Kre96].

Definición 1.1.9 ([Kre96], p. 7)**.** Sea R un anillo. Decimos que $\sigma : R \to R$ es un **endomorfismo rígido** de R si se cumple que $a\sigma(a) = 0$ si, y sólo si, $a = 0$, para todo $a \in R$. Decimos que R es un **anillo σ-rígido** si R tiene un automorfismo rígido σ.

En [Rey15] se estudió una primera generalización de los anillos σ-rígidos por medio de los anillos Σ-rígidos definidos a continuación.

Definición 1.1.10 ([NR17], definición 3.1)**.** Sea B un anillo y $\Sigma = \{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$ una familia de endomorfismos de B. Decimos que Σ es una **familia de endomorfismos rígidos**, si se tiene que $r\sigma^{\alpha}(r) = 0$ implica que $r = 0$, para todo $r \in B$ y para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Un anillo B se dice **anillo Σ-rígido** si existe una familia de endomorfismos rígidos Σ.

Recientemente, en [RS18b] se definió una generalización de los anillos Σ-rígidos, la cual recordamos a continuación. Siguiendo la notación usada en [NI16], denotaremos como $Nil_*(R)$ al radical primo de un anillo (intersección de todos sus ideales primos) y $Nil(R)$ al conjunto de todos los elementos nilpotentes de R.

Definición 1.1.11 ([RS18b], definición 3.2)**.** Sean $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ y $\Delta = \{\delta_1, \ldots \delta_n\}$ una familia de endomorfismos y Σ-derivaciones de un anillo R, respectivamente. R **es un anillo Σ-rígido débil**, si $a\sigma^{\alpha}(a) \in Nil(R) \Leftrightarrow a \in Nil(R)$, para todo elemento $a \in R$ y cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Como mencionamos en la introducción, otro concepto muy importante en nuestro trabajo es el concepto de anillo reducido, el cual profundizaremos en el capítulo 2 de este trabajo. A continuación, lo mencionamos dada su estrecha relación con los anillos Σ-rígidos.

Definición 1.1.12 ([Kre96], página 1)**.** Un anillo R es **reducido**, si $r^2 = 0$ implica que $r = 0$, para $r \in R$.

Observación 1.1.13. Notemos que si Σ es una familia de endomorfismos rígidos, entonces todo elemento $\sigma_i \in \Sigma$ es un monomorfismo. De hecho, los anillos Σ-rígidos son anillos reducidos: si B es un anillo Σ-rígido y $r^2 = 0$ para $r \in B$, entonces $0 = r\sigma^{\alpha}(r^2)\sigma^{\alpha}(\sigma^{\alpha}(r)) = r\sigma^{\alpha}(r)\sigma^{\alpha}(r)\sigma^{\alpha}(\sigma^{\alpha}(r)) = r\sigma^{\alpha}(r)\sigma^{\alpha}(r\sigma^{\alpha}(r))$, es decir, $r\sigma^{\alpha}(r) = 0$ y por tanto $r = 0$, así, B es reducido.

Ejemplo 1.1.14 ([RS18b], observación 3.3)**.** Sea σ un endomorfismo de un anillo σ-rígido R. Consideremos el anillo:

$$R_3 := \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in R \right\}$$

Si definimos $\overline{\sigma} : R_3 \to R_3$ como $\overline{\sigma}(a_{ij}) = \sigma(a_{ij})$, entonces $\overline{\sigma}$ es un automorfismo que hace a R_3 un anillo $\overline{\sigma}$-rígido débil (y por tanto Σ-rígido débil) pero que no es σ-rígido (por tanto no es Σ-rígido).

- R_3 no es $\overline{\sigma}$-rígido: basta considerar la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, con $c, d \neq 0$; por tanto $A \neq 0$, pero se tiene que:

$$\begin{aligned} A\overline{\sigma}(A) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma(0) & \sigma(0) & \sigma(c) \\ \sigma(0) & \sigma(0) & \sigma(d) \\ \sigma(0) & \sigma(0) & \sigma(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma(c) \\ 0 & 0 & \sigma(d) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- R_3 es $\overline{\sigma}$-rígido débil: Supongamos que $A \in R_3$ es tal que $A\overline{\sigma}(A) \in Nil(R_3)$. Veamos que esto implica que $A \in Nil(R_3)$: como $A\overline{\sigma}(A) \in Nil(R_3)$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $(A\overline{\sigma}(A))^n = 0$, es decir:

$$\begin{aligned} (A\overline{\sigma}(A))^n &= \left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma(a) & \sigma(b) & \sigma(c) \\ 0 & \sigma(a) & \sigma(d) \\ 0 & 0 & \sigma(a) \end{bmatrix} \right)^n = \left(\begin{bmatrix} a\sigma(a) & *** & *** \\ 0 & a\sigma(a) & *** \\ 0 & 0 & a\sigma(a) \end{bmatrix} \right)^n \\ &= 0, \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} (a\sigma(a))^n & *** & *** \\ 0 & a(\sigma(a))^n & *** \\ 0 & 0 & (a\sigma(a))^n \end{bmatrix} = 0.$$

Es decir, $(a\sigma(a))^n = 0$, pero esto implica que $a\sigma(a) = 0$, pues estamos suponiendo que R es σ-rígido, lo cual implica que R es reducido, pero esto significa que $a = 0$. De esta manera, obtenemos que $A = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Por tanto $A^3 = 0$, de donde $A \in Nil(R_3)$.
Recíprocamente, supongamos que $A \in Nil(R_3)$. Veamos que esto implica que $A\overline{\sigma}(A) \in Nil(R_3)$: como $A \in Nil(R_3)$, se tiene que $A^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Observamos que:

$$A^n = \left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \right)^n = \begin{bmatrix} a^n & *** & *** \\ 0 & a^n & *** \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix} = 0,$$

por consiguiente, $a^n = 0$, pero como R es reducido, concluimos que $a = 0$. De esta manera:

$$A\overline{\sigma}(A) = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma(b) & \sigma(c) \\ 0 & 0 & \sigma(d) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & *** & *** \\ 0 & 0 & *** \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de donde $A\overline{\sigma}(A) \in Nil(R_3)$. De esta manera, vemos que R_3 es Σ-rígido débil.

Teorema 1.1.15 ([RS18b], teorema 3.4)**.** *Sean $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ y $\Delta = \{\delta_1, \dots \delta_n\}$ una familia de endomorfsmos y Σ-derivaciones de un anillo R respectivamente. R es Σ-rígido si, y sólo si, R es Σ-rígido débil y reducido.*

Demostración. Supongamos que R es Σ-rígido, entonces R es reducido, por tanto resta probar que R es Σ-rígido débil, en efecto: si $a \in Nil(R)$, entonces $a = 0$ (pues R es reducido), por tanto $a\sigma^\theta(a) = 0$ para todo $\theta \in \mathbb{N}^n$, en particular, concluimos que $a\sigma^\theta(a) \in Nil(R)$. Ahora bien si, $a\sigma^\theta(a) \in Nil(R)$, entonces $a\sigma^\theta(a) = 0$, pues R es reducido, pero esto implica que $a = 0$, ya que estamos suponiendo que R es Σ-rígido.

Por otro lado, ahora supongamos que R es Σ-rígido débil y reducido. Veamos que esto implica que R es Σ-rígido: sea $a \in R$ tal que $a\sigma^\theta(a) = 0$ para todo $\theta \in \mathbb{N}^n$, entonces $a\sigma^\theta(a) \in Nil(R)$, por lo que $a \in Nil(R)$, pues R es Σ-rígido débil, pero esto implica que $a = 0$, pues estamos suponiendo que R es reducido. Por tanto R es un anillo Σ-rígido. □

A continuación mencionamos algunos ejemplos de anillos Σ-rígidos débiles:

Ejemplo 1.1.16. 1. Toda extensión PBW torcida A de un anillo R donde los coeficientes conmutan con las variables, es decir $\sigma_i = id_R$ y $\delta_i = 0$, para todo i. Algunos otros ejemplos de anillos Σ-rígidos débiles son los siguientes:

- Toda extensión PBW clásica definida por [BG88].
- El álgebra de operadores diferenciales parciales y el álgebra de operadores de diferenciales parciales lineales (véase [LR14]).

- **El análogo aditivo del álgebra de Weyl**: Sea K un cuerpo. La K-álgebra denotada como $A_n(q_1,\ldots,q_n)$ generada por las indeterminadas $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n$ sujeta a las siguientes relaciones:

  - $x_jx_i = x_ix_j$, para todo $1 \leq i,j \leq n$.
  - $y_jy_i = y_iy_j$, para todo $1 \neq j$.
  - $y_ix_i = q_ix_iy_i$, para todo $1 \leq i \leq n$.

  donde $q_i \in K \setminus \{0\}$.

- **El análogo multiplicativo del álgebra de Weyl:** Sea K un cuerpo. La K-álgebra $\mathcal{O}_n(\lambda_{ji})$ generada por las indeterminadas $x_1,\ldots,x_n$ sujeta a las relaciones $x_jx_i = \lambda_{ji}x_ix_j$, $1 \leq i < j \leq n$, con $\lambda_{ji} \in K - \{0\}$.

- La familia de álgebras polinomiales torcidas de dimensión 3, las cuales recordamos a continuación (véase también [RS17c]).

  Definición 1.1.17 ([RS17c], definición 2.1)**.** Sea $\Bbbk$ un cuerpo. *Una álgebra polinomial torcida 3-dimensional* $\mathcal{A}$ es una $\Bbbk$-algebra generada por las variables x,y,z sujeta a las relaciones $yz - \alpha zy = \lambda$, $zx - \beta xz = \mu$, y $xy - \gamma yx = \nu$, tal que

  (a) $\lambda,\mu,\nu \in \Bbbk + \Bbbk x + \Bbbk y + \Bbbk z$, y $\alpha,\beta,\gamma \in \Bbbk^*$;

  (b) El conjunto de monomios estándar $\{x^iy^jz^l \mid i,j,l \geq 0\}$ es una $\Bbbk$-base el álgebra.

  Observación 1.1.18. [[RS17c], observación 2.2] Si consideramos las variables $x_1 := x$, $x_2 := y$, $x_3 := z$, entonces las relaciones establecidas en la definición 1.1.17 pueden ser formuladas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_3x_2 - \alpha^{-1}x_2x_3 &= r_0^{(2,3)} + r_1^{(2,3)}x_1 + r_2^{(2,3)}x_2 + r_3^{(2,3)}x_3, \\ x_3x_1 - \beta x_1x_3 &= r_0^{(1,3)} + r_1^{(1,3)}x_1 + r_2^{(1,3)}x_2 + r_3^{(1,3)}x_3, \\ x_2x_1 - \gamma^{-1}x_1x_2 &= r_0^{(1,2)} + r_1^{(1,2)}x_1 + r_2^{(1,2)}x_2 + r_3^{(1,2)}x_3, \end{aligned}$$

  donde los elementos $r's$ pertenecen al cuerpo $\Bbbk$.

  La siguiente proposición establece una clasificación de las álgebras polinomiales torcidas 3-dimensionales

  Proposición 1.1.19 ([Ros95],[RS17c], proposición 2.3)**.** *Si $\mathcal{A}$ es una álgebra polinomial torcida 3-dimensional, entonces $\mathcal{A}$ es una de las siguientes algebras:*

  (a) *Si $|\{\alpha,\beta,\gamma\}| = 3$, entonces $\mathcal{A}$ está definida por las relaciones $yz - \alpha zy = 0$, $zx - \beta xz = 0$, $xy - \gamma yx = 0$.*

  (b) *Si $|\{\alpha,\beta,\gamma\}| = 2$ y $\beta \neq \alpha = \gamma = 1$, entonces $\mathcal{A}$ es una de las siguientes álgebras:*

  (i) $yz - zy = z$, $\quad zx - \beta xz = y$, $\quad xy - yx = x$;

  (ii) $yz - zy = z$, $\quad zx - \beta xz = b$, $\quad xy - yx = x$;

  (iii) $yz - zy = 0$, $\quad zx - \beta xz = y$, $\quad xy - yx = 0$;

  (iv) $yz - zy = 0$, $\quad zx - \beta xz = b$, $\quad xy - yx = 0$;

  (v) $yz - zy = az$, $\quad zx - \beta xz = 0$, $\quad xy - yx = x$;

(vi) $yz - zy = z, \quad zx - \beta xz = 0, \quad xy - yx = 0,$

donde a, b son cualquier par de elementos de $\Bbbk$. Todos los valores no nulos de b dan origen a álgebras isomorfas.

(c) *Si $|\{\alpha, \beta, \gamma\}| = 2$ y $\beta \neq \alpha = \gamma \neq 1$, entonces $\mathcal{A}$ es una de las siguientes álgebras:*

(i) $yz - \alpha zy = 0, \quad zx - \beta xz = y + b, \quad xy - \alpha yx = 0;$

(ii) $yz - \alpha zy = 0, \quad zx - \beta xz = b, \quad xy - \alpha yx = 0.$

En este caso, b es un elemento arbitrario de $\Bbbk$. De nuevo, todos los valores no nulos de b dan origen a álgebras isomorfas.

(d) *Si $\alpha = \beta = \gamma \neq 1$, entonces $\mathcal{A}$ es la álgebra definida por las relaciones $yz - \alpha zy = a_1x + b_1,\ zx - \alpha xz = a_2y + b_2,\ xy - \alpha yx = a_3z + b_3$. Si $a_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, entonces todos los valores no nulos de b_i dan origen a álgebras isomorfas.*

(e) *Si $\alpha = \beta = \gamma = 1$, entonces $\mathcal{A}$ es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras:*

(i) $yz - zy = x, \quad zx - xz = y, \quad xy - yx = z;$

(ii) $yz - zy = 0, \quad zx - xz = 0, \quad xy - yx = z;$

(iii) $yz - zy = 0, \quad zx - xz = 0, \quad xy - yx = b;$

(iv) $yz - zy = -y, \quad zx - xz = x + y, \quad xy - yx = 0;$

(v) $yz - zy = az, \quad zx - xz = z, \quad xy - yx = 0;$

Los parámetros $a, b \in \Bbbk$ son arbitrarios, y todos los valores no nulos de b dan origen a álgebras isomorfas.

- El álgebra de Woronowicz $\mathcal{W}_v(\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}))$; el álgebra q-Heisenberg $\mathbf{H}_n(q)$; el álgebra de Hayashi $W_q(J)$ (véase [LR14]).

Observación 1.1.20. Notemos que si A es una extensión PBW torcida biyectiva de un anillo Σ-rígido R, entonces A también es un anillo reducido. En efecto, si $f = a_0 + a_1X_1 + \ldots + a_tX_t \in A$ es un polinomio tal que $f^2 = 0$, entonces tenemos en particular que $a_t\sigma^{\alpha_t}(a_t)c_{\alpha_t,a_t}x^{2\alpha_t} = 0$. Esto se tiene pues el término líder de f^2 es precisamente $a_t\sigma^{\alpha_t}(a_t)c_{\alpha_t,a_t}x^{2\alpha_t} = 0$, por lo cual, $a_t\sigma^{\alpha_t}(a_t) = 0$ dado que A es una extensión biyectiva. De lo anterior se deduce que $a_t = 0$, ya que R es un anillo Σ-rígido. Análogamente, es posible deducir de manera inductiva que $a_i = 0$, para todo $0 \leq i \leq t$, por lo que concluimos que $f = 0$. Así, A es reducido.

CAPÍTULO 2

Ideales primos minimales y anillos 2-primales

En este capítulo estudiamos una caracterización de los ideales primos minimales en algunos tipos de anillos no conmutativos. En la sección 2.1 definimos la noción de ideal primo minimal, y evidenciamos cómo el concepto de anillo reducido es una pieza clave para una adecuada descripción de los ideales primos minimales. Luego, en la sección 2.2 estudiamos los anillos de Armendariz torcidos. Después, en la sección 2.3 los anillos (Σ, Δ)-compatibles. Finalmente en la sección 2.4 presentamos los anillos $\Sigma(*)$, los cuales son una generalización de los anillos $\sigma(*)$ definidos por Kwak (véase [Kwa03]). Esta parte contiene los resultados originales obtenidos durante la realización de este trabajo. Actualmente, estos resultados se encuentran sometidos a publicación.

2.1. Ideales primos minimales y anillos reducidos

En esta sección discutiremos algunos temas relacionados con la noción de ideal primo minimal, y cómo estos son caracterizados en algunas clases particulares de anillos.

Definición 2.1.1 ([GWJ04], página 50)**.** Un **ideal primo minimal** en un anillo R es un ideal primo que no contiene propiamente a ningún otro ideal primo.

Por ejemplo, si R es un anillo primo, entonces el ideal 0 es el único ideal primo minimal de R.

Proposición 2.1.2 ([GWJ04], proposición 3.3)**.** *Cualquier ideal P de un anillo R contiene a un ideal primo minimal.*

La importancia de los anillos reducidos se hace explícita a continuación.

Observación 2.1.3. Los anillos reducidos satisfacen las siguientes propiedades para cualesquiera elementos $x_1, x_2, x_3 \in R$: $x_1x_2 = 0 \Rightarrow x_2x_1 = 0$ y $x_1x_2 = 0 \Rightarrow x_1x_3x_2 = 0$.

Proposición 2.1.4 ([Kre96], corolario 1.4)**.** *Si R es un anillo reducido no necesariamente conmutativo, I es un ideal de R, y $X = R \setminus I$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *I es un ideal primo minimal de R;*

2. *I es un ideal primo minimal de R el cual es completamente primo;*

3. *Para cualquier subconjunto finito $B \subset I$ existe un elemento $x \in R$ tal que $xB = 0$;*

4. *X es un subsemigrupo multiplicativo maximal de $R \setminus \{0\}$.*

Bajo alguna de las anteriores condiciones se tiene que, para todo $r \in R$, se cumple que $r \in I$ si, y sólo si, existe un $x \in R$ tal que $xr = 0$.

El siguiente resultado relaciona los ideales primos minimales de anillos reducidos con anuladores:

Proposición 2.1.5 ([Kre96], lema 1.5)**.** *Si R es un anillo reducido, entonces se cumple lo siguiente:*

1. *Todo ideal primo minimal de R es unión de anuladores.*

2. *Todo anulador en R es intersección de ideales primos minimales.*

Demostración. 1. Sea P un ideal primo minimal de R. Consideremos $X = R \setminus P$, y para cada $x \in X$ definimos $I_x = \{r \in R : xr = 0\}$. De esta manera tenemos que $xI_x = 0$. Así, gracias a la observación 2.1.3, concluimos que $xRI_x = 0 \subset P$; ahora bien, como P es un ideal primo minimal, por la proposición 2.1.4, P es completamente primo, así $xR \nsubseteq P$, por tanto, tenemos que $I_x \subset P$. De esta manera, gracias al numeral 4 de la proposición 2.1.4, concluimos que P es unión de anuladores.

2. Sea I el anulador de un ideal J de R. Sea $x \in R \setminus I$. Existe $y \in J$ tal que $xy \neq 0$. Dado que R es reducido, tenemos que xy no es nilpotente, así, existe un ideal primo minimal $P_{xy} \subset R$ tal que $xy \notin P_{xy}$, por tanto $y \notin P_{xy}$, y así $J \nsubseteq P_{xy}$.

   Por otro lado, tenemos que $0 = IJ \subseteq P_{xy}$ lo cual implica que $I \subset P_{xy}$. Sin embargo, tenemos que $x \notin P_{xy}$. Por lo anterior, concluimos que I es intersección de los ideales primos minimales P_{xy}.

□

Proposición 2.1.6 ([Kre96], proposición 2.1)**.** *Si S es un anillo reducido y $R \subset S$ es un subanillo de S, entonces cualquier ideal primo minimal de R puede ser extendido (levantado) a un ideal primo minimal de S.*

Teorema 2.1.7 ([Kre96], teorema 2.2)**.** *Para un anillo R, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *R es reducido;*

2. *R es semiprimo y todos los ideales primos minimales son completamente primos;*

3. *R es un producto subdirecto de dominios.*

2.1.1. Anillos (Σ, Δ)-Armendariz

En esta sección nos basaremos en el trabajo hecho en [NR17], donde se estudian los anillos (Σ, Δ)-Armendariz que resultan ser una generalización de los anillos de Armendariz (una mayor discusión de estos anillos en el ámbito conmutativo y no conmutativo puede encontrarse en [NR17]). Cabe aclarar que mencionamos dicho estudio, porque la condición (Σ, Δ)-Armendariz juega un papel muy importante para establecer condiciones necesarias y suficientes para que una extensión PBW torcida sea un anillo reducido.

Definición 2.1.8 ([NR17], definición 3.4)**.** Sea A una extensión PBW torcida de un anillo R. Diremos que R es un anillo **(Σ, Δ)-Armendariz**, si para dados dos polinomios $f = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_tX_t$ y $g = b_0 + b_1Y_1 + b_2Y_2 + \cdots + b_mY_m$ en A, se tiene que $fg = 0$ implica que $a_iX_ib_jX_j = 0$, para todo $0 \leq i \leq t$ y todo $0 \leq j \leq m$.

Sin embargo, es posible considerar una clase más general de anillos debilitando la condición de Armendariz, esto lo hacemos vía la siguiente definición.

Definición 2.1.9 ([NR17], definición 3.5)**.** Sea A una extensión PBW torcida de un anillo R. Diremos que R es un anillo **(Σ, Δ)-Armendariz débil**, si para dados dos polinomios lineales $f = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ y $g = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n$ en A se tiene que $fg = 0$ implica que $a_ix_ib_jx_j = 0$, para todo $0 \leq i, j \leq n$.

Los anteriores anillos gozan de ciertas propiedades que facilitan en gran medida los cálculos en dichos anillos:

Proposición 2.1.10 ([NR17], proposición 3.8)**.** *Si R es un anillo (Σ, Δ)-Armendariz débil y $ab = 0$, entonces $\sigma^\alpha(a)\delta^\alpha(b) = \delta^\alpha(a)b = 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.*

Demostración. Notemos que es suficiente probar el caso en que $\sigma_i(a)\delta_i(b) = \delta_i(a)b = 0$, pues puede iterarse el argumento de manera adecuada para el caso general. En efecto, dado que $ab = 0$, tenemos que $\delta_i(ab) = 0$, es decir, $\sigma_i(a)\delta_i(b) + \delta_i(a)b = 0$. consideremos los polinomios $f_i = \sigma_i(a)x_i + \delta_i(a)$ y $g_i = bx_i + b$ en A, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
f_i(x)g_i(x) &= (\sigma_i(a)x_i + \delta_i(a))(bx_i + b) = \sigma_i(a)x_ibx_i + \sigma_i(a)x_ib + \delta_i(a)bx_i + \delta_i(a)b \\
&= \sigma_i(a)(\sigma_i(b)x_i + \delta_i(b))x_i + \sigma_i(a)(\sigma_i(b)x_i + \delta_i(b)) + \delta_i(a)bx_i + \delta_i(a)b \\
&= \sigma_i(a)\sigma_i(b)x_i^2 + \sigma_i(a)\delta_i(b)x_i + \sigma_i(a)\sigma_i(b)x_i + \sigma_i(a)\delta_i(b) + \delta_i(a)bx_i + \delta_i(a)b \\
&= \sigma_i(ab)x_i^2 + \sigma_i(a)\delta_i(b)x_i + \sigma_i(ab)x_i + \sigma_i(a)\delta_i(b) + \delta_i(a)bx_i + \delta_i(a)b \\
&= \sigma_i(a)\delta_i(b)x_i + \sigma_i(a)\delta_i(b) + \delta_i(a)bx_i + \delta_i(a)b \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por tanto usando la condición que R es (Σ, Δ)-Armendariz débil, concluimos que $\delta_i(a)b = 0 = \sigma_i(a)\delta_i(b)$.

□

Proposición 2.1.11 ([NR17], proposición 3.11)**.** *Si R es un anillo (Σ, Δ)-Armendariz débil, entonces $\sigma_i(e) = e$ y $\delta_i(e) = 0$, para todo idempotente $e \in R$.*

Mediante las siguientes proposiciones se logra establecer ciertas relaciones entre los anillos Σ-rígidos y los anillos (Σ, Δ)-Armendariz.

Proposición 2.1.12 ([Rey15], lema 3.3)**.** *Si R es un anillo Σ-rígido y $a, b \in R$, entonces:*

(i) *Si $ab = 0$, entonces $a\sigma^{\alpha}(b) = \sigma^{\alpha}(a)b = 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.*

(ii) *Si $ab = 0$, entonces $a\delta^{\beta}(b) = \delta^{\beta}(a)b = 0$, para todo $\beta \in \mathbb{N}^n$.*

(iii) *Si $ab = 0$, entonces $a\sigma^{\alpha}(\delta^{\beta}(b)) = a\delta^{\beta}(\sigma^{\alpha}(b)) = 0$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.*

(iv) *Si $a\sigma^{\theta}(b) = \sigma^{\theta}(a)b = 0$ para algún $\theta \in \mathbb{N}^n$, entonces $ab = 0$.*

Para la siguiente proposición, supondremos que los elementos $c_{i,j}$ son elementos invertibles y centrales de R.

Proposición 2.1.13. ([Rey15], proposición 3.6) *Supongamos que R es un anillo Σ-rígido. Sean $f = a_0 + a_1X_1 + \cdots + a_mX_m$, $g = b_0 + b_1Y_1 + \cdots + b_tY_t$ elementos de una extensión PBW torcida A de R. Se tiene que $fg = 0$ si, y sólo si $a_ib_j = 0$, para todo $0 \leq i \leq m,\ 0 \leq j \leq t$.*

Proposición 2.1.14 ([NR17], proposición 3.6)**.** *Todo anillo Σ-rígido es un anillo (Σ, Δ)-Armendariz.*

Demostración. La afirmación es precisamente el contenido de las proposiciones 2.1.12, 2.1.13. □

Los siguientes resultados son importantes, ya que logran caracterizar los elementos idempotentes de una extensión PBW torcida de un anillo (Σ, Δ)-Armendariz R.

Proposición 2.1.15 ([NR17], proposición 3.12)**.** *Sea A una extensión PBW torcida de un anillo (Σ, Δ)-Armendariz R. Si $e = e_0 + e_1X_1 + \cdots + e_mX_m$ es un elemento idempotente de A entonces $e = e_0$.*

Teorema 2.1.16 ([NR17], teorema 3.9)**.** *Si A es una extensión PBW torcida de un anillo R, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) *R es reducido y (Σ, Δ)-Armendariz;*

(ii) *R es un anillo Σ-rígido.*

(iii) *A es reducido.*

Demostración.

- (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) Sea R un anillo Σ-rígido y supongamos que A no es reducido. Existe un elemento $f \neq 0$ en A tal que $f^2 = 0$. Como R es reducido, tenemos que $f \notin R$, así $f = \sum_{i=0}^{m} a_iX_i$, con $a_i \in R$, $a_m \neq 0$ y $X_i = x^{\alpha_i}$ con $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})$, y $X_m \succ X_{m-1} \succ \cdots \succ X_1$. Notemos que

$$\begin{aligned}
f^2 &= (a_mX_m + \cdots + a_1X_1 + a_0)(a_mX_m + \cdots + a_1X_1 + a_0)\\
&= a_mX_ma_mX_m + \text{otros términos con grado menor que } X_mX_m\\
&= a_m[\sigma^{\alpha_m}(a_m)X_m + p_{\alpha_m,\alpha_m}]X_m + \cdots
\end{aligned}$$

$$= a_m\sigma^{\alpha_m}(a_m)X_mX_m + a_mp_{\alpha_m,\alpha_m}X_m + \cdots$$
$$= a_m\sigma^{\alpha_m}(a_m)[c_{\alpha_m,\alpha_m}x^{2\alpha_m} + p_{\alpha_m,\alpha_m}] + a_mp_{\alpha_m,\alpha_m}X_m + \cdots$$

donde $p_{\alpha_m,a_m} = 0$ o $\deg(p_{\alpha_m,a_m}) < |\alpha_m|$ si $p_{\alpha_m,a_m} \neq 0$, y $p_{\alpha_m,\alpha_m} = 0$ o $\deg(p_{\alpha_m,\alpha_m}) < |\alpha_m + \alpha_m|$ si $p_{\alpha_m,\alpha_m} \neq 0$. Ahora bien, a partir de la igualdad tenemos que $\mathrm{lc}(f^2) = a_m\sigma^{\alpha_m}(a_m)c_{\alpha_m,\alpha_m} = 0$ por tanto $a_m\sigma^{\alpha_m}(a_m) = 0$ (pues c_{α_m,α_m} es invertible), por tanto $a_m^2 = 0$ y esto implica que $a_m = 0$ pues R es reducido, pero esto es una contradicción, por tanto A es reducido.

Ahora supongamos que A es reducido, entonces en particular, R resulta ser reducido como subanillo. Veamos que R es Σ-rígido: sea $a \in R$ tal que $a\sigma^{\alpha}(a) = 0$, entonces se tiene que $0 = \sigma^{\alpha}(a)x^{\alpha}a\sigma^{\alpha}(a)x^{\alpha}a = (\sigma^{\alpha}(a)x^{\alpha}a)^2$, por tanto $\sigma^{\alpha}(a)x^{\alpha}a = 0$, es decir $0 = \sigma^{\alpha}(a)[\sigma^{\alpha}(a)x^{\alpha} + p_{\alpha,a}] = (\sigma^{\alpha}(a))^2x^{\alpha} + \sigma^{\alpha}(a)p_{\alpha,a}$ con $p_{\alpha,a} = 0$ o $\deg(p_{\alpha,a}) < |\alpha|$ si $p_{\alpha,a} \neq 0$, por tal razón comparando los monomios de mayor grado, obtenemos que $(\sigma^{\alpha}(a))^2 = 0$, es decir $\sigma^{\alpha}(a) = 0$, pero como σ^{α} es biyectivo, concluimos que $a = 0$, por tanto R es Σ-rígido.

- (ii)⇒(i): Anteriormente vimos que todo anillo Σ-rígido es un anillo reducido, luego la afirmación se deduce de la proposición 2.1.14.

- (i)⇒(ii): Supongamos que R es reducido, (Σ, Δ)-Armendariz pero que no es Σ-rígido. Existe $\beta \in \mathbb{N}^n$ con $a\sigma^{\beta}(a) = 0$ y $a \neq 0$. Notemos que $\sigma^{\beta}(a)\sigma^{\beta}(\sigma^{\beta}(a)) = \sigma^{\beta}(a\sigma^{\beta}(a)) = 0$. Ahora bien, como R es reducido, tenemos que la igualdad $(\sigma^{\beta}(a)a)^2 = \sigma^{\beta}(a)a\sigma^{\beta}(a)a = 0$ implica que $\sigma^{\beta}(a)a = 0$. Equivalentemente, dado que $a \neq 0$, σ^{β} es inyectivo, y R es reducido, entonces tenemos que $\sigma^{\beta}(a) \neq 0$ y $(\sigma^{\beta}(a))^2 \neq 0$. Dicho esto, consideremos los elementos $f = \sigma^{\beta}(a) + \sigma^{\beta}(a)x^{\beta}$, $g = a - \sigma^{\beta}(a)x^{\beta}$. Entonces

$$\begin{aligned} fg &= (\sigma^{\beta}(a) + \sigma^{\beta}(a)x^{\beta})(a - \sigma^{\beta}(a)x^{\beta}) \\ &= \sigma^{\beta}(a)a - (\sigma^{\beta}(a))^2x^{\beta} + \sigma^{\beta}(a)x^{\beta}a - \sigma^{\beta}(a)x^{\beta}\sigma^{\beta}(a)x^{\beta} \\ &= -(\sigma^{\beta}(a))^2x^{\beta} + \sigma^{\beta}(a)[\sigma^{\beta}(a)x^{\beta} + p_{\beta,a}] - \sigma^{\beta}(a)[\sigma^{\beta}(\sigma^{\beta}(a))x^{\beta} + q_{\beta,\sigma^{\beta}(a)}]x^{\beta} \\ &= \sigma^{\beta}(a)p_{\beta,a} - \sigma^{\beta}(a\sigma^{\beta}(a))x^{\beta}x^{\beta} - \sigma^{\beta}(a)q_{\beta,\sigma^{\beta}(a)}x^{\beta} \\ &= \sigma^{\beta}(a)p_{\beta,a} - \sigma^{\beta}(a)q_{\beta,\sigma^{\beta}(a)}x^{\beta}, \end{aligned}$$

  donde $p_{\beta,a} = 0$ o $\deg(p_{\beta,a}) < |\beta|$, si $p_{\beta,a} \neq 0$, y $q_{\beta,\sigma^{\beta}(a)} = 0$ o $\deg(q_{\beta,\sigma^{\beta}(a)}) < |\beta|$, si $q_{\beta,\sigma^{\beta}(a)} \neq 0$. Puesto que $a\sigma^{\beta}(a) = \sigma^{\beta}(a)a = 0$, La observación 1.1.7 y la proposición 2.1.10 garantizan que $\sigma^{\beta}(a)p_{\beta,a} = \sigma^{\beta}(a)q_{\beta,\sigma^{\beta}(a)}x^{\beta} = 0$, es decir $fg = 0$. Por hipótesis, R es (Σ, Δ)-Armendariz, es decir, $-(\sigma^{\beta}(a))^2 = 0$, pero $-(\sigma^{\beta}(a))^2 \neq 0$, por tanto, hemos llegado a una contradicción. Por tanto, concluimos que R es Σ-rígido.

□

A partir de lo anterior, podemos formular la siguiente proposición:

Proposición 2.1.17. *Si A es una extensión PBW torcida de un anillo R reducido y (Σ, Δ)-Armendariz, entonces todo ideal primo minimal de A es completamente primo.*

Demostración. El teorema 2.1.16 garantiza que la extensión PBW torcida es un anillo reducido. Por tanto, usando el teorema 2.1.7, concluimos que todo ideal primo minimal de A es completamente primo. □

2.2. Anillos de Armendariz torcidos

En esta sección, investigamos dos nociones de Armendariz para extensiones PBW torcidas que resultan generalizar las nociones trabajadas en la sección anterior: los anillos (Σ, Δ)-Armendariz torcidos y los anillos (Σ, Δ)-Armendariz torcidos débiles. Cabe resaltar que existen varias generalizaciones de la noción de anillo de Armendariz que hacen uso de estructuras polinomiales no conmutativas (como en el caso de los anillos (Σ, Δ)-Armendariz, véase [RS16]). A continuación hacemos una breve recopilación de dichos tipos de anillos antes de presentar la definición de anillo de Armendariz torcido; esta parte fue estudiada y desarrollada en [RS17d].

Definición 2.2.1 ([RS16], definición 3.3)**.** Sea A una extensión PBW torcida de un anillo R. R es un anillo **Σ-Armendariz torcido**, si cumple que si $f = \sum_{i=0}^{m} a_i X_i$ y $g = \sum_{j=0}^{t} b_j X_j$ son elementos de A, la igualdad $fg = 0$ implica que $a_i \sigma^{\alpha_i}(b_j) = 0$, para todo $0 \leq i \leq m$ y $0 \leq j \leq t$, donde $\alpha_i = \exp(X_i)$. R se dice anillo **Σ-Armendariz torcido débil**, si $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i$ y $g = \sum_{j=0}^{n} b_j x_j$ son elementos de A, la igualdad $fg = 0$ implica que $a_i \sigma_i(b_j) = 0$, para todo $0 \leq i, j \leq n$ ($x_0 := 1$, $\sigma_0 = \mathrm{id}_R$).

Notemos que todo anillo Σ-Armendariz torcido es, de hecho, un anillo Σ-Armendariz débil.

Observación 2.2.2 ([HKK03], ejemplo 1)**.** Se cumplen las siguientes afirmaciones:

- Consideremos el anillo $B = \left\{ \begin{bmatrix} a & t \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{Q} \right\}$. Definimos el automorfismo σ de R dado por
$$\sigma\left(\begin{bmatrix} a & t \\ 0 & a \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & \frac{t}{2} \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$
R es un anillo Σ-Armendariz torcido que no es un anillo Σ-rígido donde $\Sigma = \{\sigma\}$: En efecto tomando la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, se tiene que $A \neq 0$, pero
$$A\sigma(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Consideremos el anillo $B = \mathbb{Z}_2[x]$, y además σ el endomorfismo de B dado por $\sigma(f(x)) = f(0)$. Tenemos que B es un anillo Σ-Armendariz torcido que no es un anillo Σ-rígido, donde $\Sigma = \{\sigma\}$: en efecto, $f(x) = x$ es un elemento no nulo pero $f(x)\sigma(f(x)) = x(f(0)) = 0$.

A partir de las definiciones dadas hasta ahora, podemos establecer las siguientes relaciones:

$$\text{anillos } \Sigma\text{-rígidos} \subsetneq \text{anillos } (\Sigma, \Delta)\text{-Armendariz} \subsetneq \text{anillos } (\Sigma, \Delta)\text{-Armendariz débiles.}$$

$$\text{anillos } \Sigma\text{-rígidos} \subsetneq \Sigma\text{-Armendariz torcidos} \subsetneq \text{anillos } \Sigma\text{-Armendariz torcidos débiles.}$$

$$\text{anillos } (\Sigma, \Delta)\text{-Armendariz} \subsetneq \text{anillos } \Sigma\text{-Armendariz torcidos.}$$

$$\text{anillos } (\Sigma, \Delta)\text{-Armendariz débiles} \subsetneq \text{anillos } \Sigma\text{-Armendariz torcidos débiles.}$$

Definición 2.2.3 ([RS17d], definición 4.1)**.** Sean R un anillo y A una extensión PBW torcida de R. Decimos que R es un **anillo de Armendariz torcido**, si para cualquier pareja de polinomios $f = a_0 + a_1X_1 + \cdots + a_mX_m$ y $g = b_0 + b_1X_1 + \cdots + b_tX_t$ en A, se tiene que si $fg = 0$, entonces $a_0b_k = 0$, para todo $1 \leq k \leq t$.

Definición 2.2.4 ([RS17d], definición 4.2)**.** Sean R un anillo y A una extensión PBW torcida de R. Decimos que R es un **anillo de Armendariz torcido débil**, si para cualquier pareja de polinomios lineales $f = a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_n$ y $g = b_0+b_1x_1+\cdots+b_nx_n$ en A, se tiene que si $fg = 0$, entonces $a_0b_k = 0$, para todo $0 \leq k \leq n$.

Lema 2.2.5 ([RS17d], lema 4.3)**.** *Si R es un anillo de Armendariz torcido débil, entonces la igualdad $ab = 0$ implica que $\sigma^\alpha(a)\delta^\alpha(b) = \delta^\alpha(a)b = 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.*

Demostración. Notemos que basta probar el caso $\sigma_i(a)\delta_i(b) = \delta_i(a)b = 0$ para $i = 1, \ldots, n$, pues a partir de este hecho se puede argumentar de manera recurrente. Como por hipótesis tenemos que $ab = 0$, entonces se tiene que $\delta_i(ab) = 0$, es decir que $0 = \sigma_i(a)\delta_i(b) + \delta_i(a)b$, por tanto $\delta_i(a)b = -\sigma_i(a)\delta_i(b)$.
Ahora bien, para usar la condición de Armendariz, consideramos los polinomios: $f = \delta_i(a) + \sigma_i(a)x_i$ y $g = b + bx_1 + \cdots + bx_n$. Notemos que:

$$\begin{aligned}
fg &= (\delta_i(a) + \sigma_i(a)x_i)(b + bx_1 + \cdots + bx_n)\\
&= \delta_i(a)(b + bx_1 + \cdots + bx_n) + \sigma_i(a)x_i(b + bx_1 + \cdots + bx_n)\\
&= \delta_i(a)b + \delta_i(a)bx_1 + \cdots + \delta_i(a)bx_n + \sigma_i(a)x_ib + \sigma_i(a)x_ibx_1 + \cdots + \sigma_i(a)x_ibx_n\\
&= -\sigma_i(a)\delta_i(b) - \sigma_i(a)\delta_i(b)x_1 - \cdots - \sigma_i(a)\delta_i(b)x_n + \sigma_i(a)x_ib\\
&+ \sigma_i(a)x_ibx_1 + \cdots + \sigma_i(a)x_ibx_n\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, usando que R es un anillo de Armendariz torcido débil, concluimos que $\delta_i(a)b = 0$, por tanto $\sigma_i(a)\delta_i(b) = 0$. □

Teorema 2.2.6 ([RS17d], teorema 4.4)**.** *Si A es una extensión PBW torcida de un anillo R, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *R es un anillo reducido y Armendariz torcido;*
2. *R es Σ-rígido;*
3. *A es reducido.*

Demostración.

- (2. $\Leftrightarrow$ 3.) : Esta demostración fue hecha en la prueba de la proposición 2.1.16.
- (2. $\Rightarrow$ 1.) : Supongamos que R es un anillo Σ-rígido, se sigue que R es reducido; además, como mencionamos anteriormente en la proposición 2.1.14, todo anillo Σ-rígido es de hecho un anillo (Σ, Δ)-Armendariz, y por tanto, es un anillo de Armendariz torcido.

- (1. $\Rightarrow$ 2.) : Razonaremos por contradicción: supongamos que R es un anillo reducido y Armendariz torcido pero que no es Σ-rígido. Por tanto existe $\beta \in \mathbb{N}^n$ tal que $a\sigma^{\beta}(a) = 0$ y $a \neq 0$. Ahora bien, como $a\sigma^{\beta}(a) = 0$, tenemos que $0 = \sigma^{\beta}(a\sigma^{\beta}(a)) = \sigma^{\beta}(a)\sigma^{\beta}(\sigma^{\beta}(a))$. Además, notemos que $(\sigma^{\beta}(a)a)^2 = (\sigma^{\beta}(a)a)(\sigma^{\beta}(a)a) = \sigma^{\beta}(a)(a\sigma^{\beta}(a))a = 0$, es decir, $\sigma^{\beta}(a)a$ es un elemento nilpotente, como por hipótesis, R es reducido, concluimos que $\sigma^{\beta}(a)a = 0$. Por otro lado, notemos que dado que $a \neq 0$, y σ^{β} es inyectivo, tenemos que $\sigma^{\beta}(a) \neq 0$, y como R es reducido, esto implica que $(\sigma^{\beta}(a))^2 \neq 0$.

  Ahora bien, consideremos los polinomios $f = \sigma^{\beta}(a) + \sigma^{\beta}(a)x^{\beta}$ y $g = a - \sigma^{\beta}(a)x^{\beta}$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
fg &= (\sigma^{\beta}(a) + \sigma^{\beta}(a)x^{\beta})(a - \sigma^{\beta}(a)x^{\beta})\\
&= \sigma^{\beta}(a)a - \sigma^{\beta}(a)\sigma^{\beta}(a)x^{\beta} + \sigma^{\beta}(a)x^{\beta}a - \sigma^{\beta}(a)x^{\beta}\sigma^{\beta}(a)x^{\beta}\\
&= -(\sigma^{\beta}(a))^2x^{\beta} + \sigma^{\beta}(a)[\sigma^{\beta}(a)x^{\beta} + p_{\beta,a}] - \sigma^{\beta}(a)[\sigma^{\beta}(\sigma^{\beta}(a))x^{\beta} + q_{\beta,\sigma^{\beta}(a)}]x^{\beta}\\
&= -(\sigma^{\beta}(a))^2x^{\beta} + \sigma^{\beta}(a)\sigma^{\beta}(a)x^{\beta} + \sigma^{\beta}(a)p_{\beta,a} - \sigma^{\beta}(a)\sigma^{\beta}(\sigma^{\beta}(a))x^{\beta}x^{\beta}\\
&- \sigma^{\beta}(a)q_{\beta,\sigma^{\beta}(a)}x^{\beta}\\
&= \sigma^{\beta}(a)p_{\beta,a} - \sigma^{\beta}(a)\sigma^{\beta}(\sigma^{\beta}(a))x^{\beta}x^{\beta} - \sigma^{\beta}(a)q_{\beta,\sigma^{\beta}(a)}x^{\beta}\\
&= \sigma^{\beta}(a)p_{\beta,a} - \sigma^{\beta}(a)q_{\beta,\sigma^{\beta}(a)}x^{\beta}
\end{aligned}$$

  donde $p_{\beta,a} = 0$ ó $\deg(p_{\beta,a}) < |\beta|$ en caso que $p_{\beta,a} \neq 0$ y, $q_{\beta,a} = 0$ ó $\deg(q_{\beta,a}) < |\beta|$ en caso que $q_{\beta,a} \neq 0$. Ahora bien, como $a\sigma^{\beta}(a) = \sigma^{\beta}(a)a = 0$, tenemos gracias al lema 2.2.3. que $\sigma^{\beta}(a)p_{\beta,\alpha} = \sigma^{\beta}(a)q_{\beta,\alpha}x^{\beta} = 0$, por tanto $fg = 0$. De esta manera, como R es anillo de Armendariz torcido, tenemos en particular que $-(\sigma^{\beta}(a))^2 = 0$, pero esto contradice el hecho que $-(\sigma^{\beta}(a))^2 \neq 0$, de esta manera concluimos que R es un anillo Σ-rígido.

□

A partir del anterior resultado podemos formular una proposición que de hecho generaliza la proposición 2.1.17.

Proposición 2.2.7. *Si A es una extensión PBW torcida de un anillo reducido R el cual es Armendariz torcido, entonces todo ideal primo minimal de A es completamente primo.*

Demostración. Gracias al teorema 2.2.6, la extensión PBW torcida es un anillo reducido. Luego, usando el teorema 2.1.7 concluimos que todo ideal primo minimal de A es completamente primo. □

Proposición 2.2.8 ([RS17d], proposición 4.7)**.** *Si R es un anillo de Armendariz torcido débil, y $e \in R$ es un elemento idempotente, entonces tenemos que $\sigma_i(e) = e$ y $\delta_i(e) = 0$, para todo $i = 1\ldots,n$.*

Demostración. Sea e un elemento idempotente de R.

1. $\delta_i(e) = 0$; para i fijo:
   Notemos que $\delta_i(e) = \delta_i(ee) = \sigma_i(e)\delta_i(e) + \delta_i(e)e$. Además, recordemos que $\delta_i(1) = 0$, de esta manera consideramos los polinomios $f = \delta_i(e) + \sigma_i(e)x_i$ y $g = (e-1) + (e-1)x_1 + \cdots + (e-1)x_n$. Veamos que $fg = 0$:

$$
\begin{aligned}
fg &= (\delta_i(e) + \sigma_i(e)x_i)((e-1) + (e-1)x_1 + \cdots + (e-1)x_n) \\
&= \delta_i(e)\left((e-1) + \sum_{j=1}^{n}(e-1)x_j\right) + \sigma_i(e)x_i\left((e-1) + \sum_{j=1}^{n}(e-1)x_j\right) \\
&= \delta_i(e)(e-1) + \left(\sum_{j=1}^{n}\delta_i(e)(e-1)x_j\right) + \sigma_i(e)x_i(e-1) \\
&+ \left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_i(e)x_i(e-1)x_j\right) \\
&= \delta_i(e)(e-1) + \left(\sum_{j=1}^{n}\delta_i(e)(e-1)x_j\right) + \sigma_i(e)[\sigma_i(e-1)x_i + \delta_i(e-1)] \\
&+ \left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_i(e)[\sigma_i(e-1)x_i + \delta_i(e-1)]x_j\right) \\
&= \delta_i(e)(e-1) + \left(\sum_{j=1}^{n}\delta_i(e)(e-1)x_j\right) + \sigma_i(e)[\sigma_i(e)x_i - x_i + \delta_i(e) - \delta_i(1)] \\
&+ \left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_i(e)[\sigma_i(e)x_i - x_i + \delta_i(e) - \delta_i(1)]x_j\right) \\
&= \delta_i(e)(e-1) + \left(\sum_{j=1}^{n}\delta_i(e)(e-1)x_j\right) + \sigma_i(e)[\sigma_i(e)x_i - x_i + \delta_i(e)] \\
&+ \left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_i(e)[\sigma_i(e)x_i - x_i + \delta_i(e)]x_j\right) \\
&= \delta_i(e)e - \delta_i(e) + \left(\sum_{j=1}^{n}(\delta_i(e)e - \delta_i(e))x_j\right) + \sigma_i(e)x_i - \sigma_i(e)x_i + \sigma_i(e)\delta_i(e) \\
&+ \left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_i(e)[\sigma_i(e)x_i - \sigma_i(e)x_i + \sigma_i(e)\delta_i(e)]x_j\right) \\
&= \delta_i(e)e - \delta_i(e) + \sum_{j=1}^{n}\delta_i(e)ex_j - \sum_{j=1}^{n}\delta_i(e)x_j + \sigma_i(e)\delta_i(e) \\
&+ \sum_{j=1}^{n}\sigma_i(e)\sigma_i(e)\delta_i(e)x_j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= [\delta_i(e)e - \delta_i(e) + \sigma_i(e)\delta_i(e)] + \sum_{j=1}^{n} [\delta_i(e)e - \delta_i(e) + \sigma_i(e)\delta_i(e)]x_j \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Por tanto, como R es un anillo de Armendariz torcido, concluimos que $\delta_i(e)(e-1) = 0$, por lo cual $\delta_i(e)e = \delta_i(e)$ y por tanto $\sigma_i(e)\delta_i(e) = 0$.

Ahora bien, consideremos los elementos $s = \delta_i(e) - (1 - \sigma_i(e))x_i$ y $t = e + \sum_{j=1}^{n} ex_j$, veamos que $st = 0$:

$$
\begin{aligned}
st &= (\delta_i(e) - (1 - \sigma_i(e))x_i) \left(e + \sum_{j=1}^{n} ex_j \right) \\
&= \delta_i(e)e + \sum_{j=1}^{n} \delta_i(e)ex_j - (1 - \sigma_i(e))x_i e - \sum_{j=1}^{n} (1 - \sigma_i(e))x_i)ex_j \\
&= \delta_i(e)e + \sum_{j=1}^{n} \delta_i(e)ex_j - (1 - \sigma_i(e))(\sigma_i(e)x_i + \delta_i(e)) \\
&- \sum_{j=1}^{n} (1 - \sigma_i(e))x_i ex_j \\
&= \delta_i(e)e + \delta_1(e)e \sum_{j=1}^{n} x_j - (\sigma_i(e)x_i - \sigma_i(e)x_i + \delta_i(e) - \sigma_i(e)\delta_i(e)) \\
&- (1 - \sigma_i(e))x_i)e \sum_{j=1}^{n} x_j \\
&= \delta_i(e)e + \delta_1(e)e \sum_{j=1}^{n} x_j - (\delta_i(e) - \sigma_i(e)\delta_i(e)) \\
&- ((1 - \sigma_i(e))(\sigma_i(e)x_i + \delta_i(e))) \sum_{j=1}^{n} x_j \\
&= \delta_i(e)e + \delta_1(e)e \sum_{j=1}^{n} x_j - (\delta_i(e) - \sigma_i(e)\delta_i(e)) \\
&- (\sigma_i(e)x_i + \delta_i(e) - \sigma_i(e)x_i - \sigma_i(e)\delta_i(e)) \sum_{j=1}^{n} x_j \\
&= 0
\end{aligned}
$$

pues tenemos que $\delta_i(e)e = \delta_i(e)$ y $\sigma_i(e)\delta_i(e) = 0$. Ahora bien, como R es un anillo de Armendariz torcido, concluimos en particular que $\delta_i(e)e = 0$. De esta manera $\delta_i(e) = \sigma_i(e)\delta_i(e) + \delta_i(e)e = 0 + 0 = 0$.

2. $\sigma_e = e$: Consideremos $u = (1 - e) + (1 - e)\sigma_i(e)x_i$ y $v = e + (e - 1)\sigma_i(e)x_i$. Notemos que:

$$
uv = ((1 - e) + (1 - e)\sigma_i(e)x_i)(e + (e - 1)\sigma_i(e)x_i)
$$

$$
\begin{aligned}
&= (1-e)e + (1-e)(e-1)\sigma_i(e)x_i + ((1-e)\sigma_i(e)x_i)e \\
&+ ((1-e)\sigma_i(e)x_i)((e-1)\sigma_i(e)x_i) \\
&= e + (e-1)\sigma_i(e)x_i - e^2 - e(e-1)\sigma_i(e)x_i + (1-e)\sigma_i(e)x_i e \\
&+ (1-e)\sigma_i(e)x_i(e-1)\sigma_i(e)x_i \\
&= e\sigma_i(e)x_i - \sigma_i(e)x_i - e\sigma_i(e)x_i + e\sigma_i(e)x_i + (1-e)\sigma_i(e)(\sigma_i(e)x_i + \delta_i(e)) \\
&+ (1-e)\sigma_i(e)(\sigma_i(e)x_i - x_i + \delta_i(e))\sigma_i(e)x_i \\
&= -\sigma_i(e)x_i + e\sigma_i(e)x_i + \sigma_i(e)x_i + \sigma_i(e)\delta_i(e) - e\sigma_i(e)x_i - e\sigma_i(e)\delta_i(e) \\
&+ [\sigma_i(e)x_i - \sigma_i(e) + \sigma_i(e)\delta_i(e) - e\sigma_i(e)x_i + e\sigma_i(e)x_i - e\sigma_i(e)\delta_i(e)]\sigma_i(e)x_i \\
&= 0
\end{aligned}
$$

A partir de $\delta_i(e) = 0$, concluimos que $uv = 0$. Por tal razón, usando que R es un anillo de Armendariz torcido, tenemos que $(1-e)(e-1)\sigma_i(e) = 0$, es decir $e\sigma_i(e) = \sigma_i(e)$. Por último, consideremos los polinomios $w = e + e(1-\sigma_i(e))$ y $z = 1 - e - e(1-\sigma_i(e))x_i$. Observamos que:

$$
\begin{aligned}
wz &= e - e^2 - e^e(1-\sigma_i(e))x_i + e(1-\sigma_i(e))x_i - e(1-\sigma_i(e))x_i e \\
&- e(1-\sigma_i(e))x_i e(1-\sigma_i(e))x_i \\
&= -e(1-\sigma_i(e))(\sigma_i(e)x_i + \delta_i(e)) \\
&- e(1-\sigma_i(e))[\sigma_i(e(1-\sigma_i(e)))x_i + \delta_i(e(1-\sigma_i(e)))]x_i
\end{aligned}
$$

Dado que $\delta_i(e) = 0$ y $\delta_i(e) = 0$ y que $e\sigma_i(e) = \sigma_i(e)$, deducimos que $wz = 0$, y de nuevo, usando que el anillo R es Armendariz torcido, concluimos que $e(-(1-\sigma_i(e))) = 0$, por lo cual se tiene que $e\sigma_i(e) = e$, y por tanto $\sigma_i(e) = e$.

□

Proposición 2.2.9 ([RS17d], proposición 4.8)**.** *Sea R un anillo de Armendariz torcido. Si $e^2 = e \in A$, con $e = \sum_{i=0}^{m} e_i X_i$, entonces $e \in R$.*

Demostración. Si $e = e_0 + e_1X_1 + \cdots + e_mX_m$ es un elemento idempotente de A, entonces tenemos que $(1-e)e = e(1-e)$:

$$
\begin{aligned}
&(e_0 + e_1X_1 + \cdots + e_nX_n)((1-e_0) - e_1X_1 - \cdots - e_nX_n) \\
&= ((1-e_0) - e_1X_1 - \cdots - e_nX_n)(e_0 + e_1X_1 + \cdots + e_nX_n),
\end{aligned}
$$

de donde $e_0(1-e_0)(1-e_0)e_i = e_0e_i = 0$, para todo $1 \leq i \leq n$. De esta manera, $e_i = 0$, para todo $1 \leq i \leq n$, lo cual prueba que $e = e_0$. □

2.3. Anillos (Σ, Δ)-compatibles

En esta parte estudiaremos el comportamiento de los ideales primos minimales en una clase de anillos más general que los anillos Σ-rígidos; esta clase son los anillos (Σ, Δ)-compatibles. Veremos que bajo esta condición y bajo una noción un poco más general que el concepto de anillo noetheriano, es posible realizar una descripción precisa de los ideales primos minimales de una extensión PBW torcida.

Definición 2.3.1 ([RS18a], definición 3.2)**.** Consideremos un anillo R con familias finitas de endomorfismos Σ y Σ-derivaciones Δ.

1. R se dice Σ-*compatible*, si para cada $a, b \in R$, se cumple que $a\sigma^{\alpha}(b) = 0$ si, y sólo si, $ab = 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$;
2. R se dice Δ-*compatible*, si para todo $a, b \in R$, $ab = 0$ implica $a\delta^{\beta}(b) = 0$, para todo $\beta \in \mathbb{N}^n$.

Si R es Σ-compatible y Δ-compatible, entonces decimos que R es (Σ, Δ)-*compatible.*

Cabe resaltar que si Σ es una familia de endomorfismos de un anillo R y Δ es una familia de Σ-derivaciones de un anillo Σ-rígido R, entonces R es (Σ, Δ)-compatible. Sin embargo, el recíproco es falso (véase [RS18a], proposición 3.4). No obstante, tenemos un resultado que relaciona varios conceptos que hemos manejado hasta ahora:

Proposición 2.3.2 ([RS18a], proposición 3.9)**.** *Si A es una extensión PBW torcida de un anillo R, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *R es reducido y (Σ, Δ)-compatible;*
2. *R es Σ-rígido;*
3. *A es reducido.*

A partir de la anterior proposición podemos afirmar lo siguiente: dado que las extensiones PBW torcidas de anillos que son dominios resultan ser dominios (véase LR14, proposición 4.1), y sabemos que todo dominio es un anillo reducido, podemos concluir que dichas extensiones son anillos reducidos, y sus anillos de coeficientes son reducidos, Σ-rígidos y (Σ, Δ)-compatibles y Σ-Armendariz torcidos.

Proposición 2.3.3 ([RS18a], teorema 3.8)**.** *Sea R un anillo (Σ, Δ)-compatible. Para todo par de elementos $a, b \in R$, tenemos que:*

1. *Si $ab = 0$, entonces $a\sigma^{\theta}(b) = \sigma^{\theta}(a)b = 0$, para cada $\theta \in \mathbb{N}^n$.*
2. *Si $\sigma^{\beta}(a)b = 0$ para algún $\beta \in \mathbb{N}^n$, entonces $ab = 0$.*
3. *Si $ab = 0$, entonces $\sigma^{\theta}(a)\delta^{\beta}(b) = \delta^{\beta}(b)\sigma^{\theta}(a) = 0$, para todo $\theta, \beta \in \mathbb{N}^n$.*

A continuación, daremos una serie de definiciones y hechos que serán útiles para establecer los resultados clave de esta sección.

Definición 2.3.4 ([RS19], definición 2.1; [LAR15], definición 2.1)**.** Sea A una extensión PBW torcida de un anillo R.

1. Un ideal I de R se dice **Σ-invariante**, si $\sigma_i(I) \subseteq I$, para todo $1 \leq i \leq n$.
2. Un ideal I de R se dice **Δ-invariante**, si $\delta_i(I) \subseteq I$, para todo $1 \leq i \leq n$.

3. Si I es un ideal Σ-invariante y Δ-invariante, entonces decimos que I es **(Σ, Δ)-invariante.**

4. Un ideal Σ-invariante propio se dice **Σ-primo**, si se cumple que si el producto de dos ideales Σ-invariantes está contenido en I, entonces uno de los dos ideales está contenido en I.

5. Un ideal Δ-invariante propio se dice **Δ-primo**, si se cumple que si el producto de dos ideales Δ-invariantes está contenido en I, entonces uno de los dos ideales está contenido en I.

6. Definimos $P_{(\Sigma,\Delta)} := \text{Spec}(R; \Sigma, \Delta)$ como el conjunto de todos los (Σ, Δ)-ideales de R, y $Nil_*(R; \Sigma, \Delta) = \bigcap_{P \in P_{(\Sigma,\Delta)}} P$.

7. R es un anillo **Σ-semiprimo** si $Nil_*(R; \Sigma) = 0$, se define de manera análoga la noción de anillo **Δ-semiprimo** y anillo **(Σ, Δ)-semiprimo.**

Sea S un subconjunto de R. Si A es una extensión PBW torcida de un anillo R, entonces denotaremos SA al conjunto $SA := \{a_0 + a_1X_1 + \cdots + a_mX_m \in A \mid a_i \in S, \text{para todo}\, i\}$. Por otro lado, recordemos que si $U \subset R$, defininimos el anulador derecho de U en R como $r_R(U) := \{r \in R \mid ur = 0 \text{ para todo } u \in U\}$. De manera análoga, definimos el anulador izquierdo de U en R como $l_R(U) := \{r \in R \mid ru = 0 \text{ para todo } u \in U\}$.

Proposición 2.3.5 ([LAR15], proposición 2.6; [RS18d], proposición 9)**.** *Si A es una extensión PBW torcida de R, $A = \sigma(R)\langle x_1, \dots, x_n\rangle$, e I es un ideal (Σ, Δ)-invariante de R, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(i) *IA es un ideal de A y $IA \cap R = I$. IA es un ideal propio de A si, y sólo si, I es un ideal propio en R. Más aún, si σ_i es biyectiva y $\sigma_i(I) = I$, para todo i, entonces $IA = AI$.*

(ii) *Si I es propio y $\sigma_i(I) = I$, para todo $1 \leq i \leq n$, entonces A/IA es una extensión PBW torcida de R/I. De hecho, si I es propio y A es biyectiva, entonces A/IA es una extensión PBW torcida de R/I, es decir, $A/IA = \widehat{\sigma}(R/IR)\langle x_1, \dots, x_n\rangle$.*

Demostración. (i) Es claro que IA es un ideal derecho, sin embargo, dado que I es (Σ, Δ)- invariante, se tiene que IA es también un ideal izquierdo de A. Notemos que $IA \cap R = I$, por lo cual, IA es propio si,y sólo si, I es propio. Ahora bien, usando de nuevo que I es (Σ, Δ)-invariante, obtenemos que $IA \subseteq AI$. De hecho, si σ_i es biyectiva y $\sigma_i(I) = I$ para todo i, deducimos que $IA \subseteq AI$.

(ii) Por la parte (i), basta demostrar que $\overline{A} := A \backslash IA$ es una extensión PBW torcida de $\overline{R} := R \backslash I$. Con este objetivo en mente, verificaremos que se satisfacen las cuatro condiciones de la definición 1.1.1. Es claro que $\overline{R} \subseteq \overline{A}$, de hecho, $\overline{A}$ es un $\overline{R}$-módulo izquierdo con conjunto de generadores $\text{Mon}\{\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}\}$. Debemos verificar que $\text{Mon}\{\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}\}$ es linealmente independiente. Consideremos la expresión $\overline{r_1}\overline{X_1} + \cdots + \overline{r_n}\overline{X_n} = \overline{0}$, donde $X_i \in \text{Mon}(A)$ para cada i. Tenemos por tanto que $r_1X_1 + \cdots + r_nX_n \in IA$ y por consiguiente

$$r_1X_1 + \cdots + r_nX_n = r'_1X_1 + \cdots + r'_nX_n$$

con $r'_i \in I$, $i = 1, \ldots, n$. Así, $(r_1 - r'_1)X_1 + \cdots + (r_n - r'_n)X_n = 0$, por lo cual, $r_i \in I$, es decir, $\overline{r_i} = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Para verificar la condición (iii), sea $\overline{r} \neq \overline{0}$, con $r \in R$. Tenemos por tanto que $r \notin IA$, y por consiguiente, $r \notin I$, en particular, $r \neq 0$, luego existe $c_{i,r} := \sigma_i(r) \neq 0$ tal que $x_ir = c_{i,r}x_i + \delta_i(r)$. Así, $\overline{x_ir} = \overline{c_{i,r}x_i} + \overline{\delta_i(r)}$. Notemos que $\overline{c_{i,r}} \neq \overline{0}$; pues de ser así, $c_{i,r} = \sigma_i(r) \in IA \cap R = I = \sigma_i(I)$, es decir, $r \in I$, lo cual es una contradicción.

Para la condición (iv), recordemos que en A tenemos que $x_jx_i - c_{i,j}x_ix_j \in \sum_{t=1}^{n} Rx_t$, con $c_{i,j} \in R\ \{0\}$, por lo que, en $\overline{A}$ tenemos que $\overline{x_jx_i} - \overline{c_{i,j}x_ix_j} \in \overline{R} + \sum_{t=1}^{n} \overline{R}\overline{x_t}$. Dado que I s ideal propio y $c_{i,j}$ es invertible a izquierda para $i < j$, e invertible a derecha para $i > j$, entonces $\overline{c_{i,j}} \neq \overline{0}$.

Por [LAR15], proposición 2.2, si σ_i es biyectiva, entonces $\overline{\sigma_i}$ es biyectiva. De hecho, es evidente que si cada constante c_{ij} es invertible, entonces $\overline{c_{ij}}$ es invertible. Finalmente, todas las condiciones de conmutatividad de tienen por [LAR15], proposición 2.2.

□

Observación 2.3.6 ([RS19], observación 4)**.** Si R es (Σ, Δ)-compatible y Σ-Armendariz torcido, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. R es semiprimo;
2. R es (Σ, Δ)-semiprimo;
3. R es Δ-semiprimo y A is semiprimo.

Lema 2.3.7 ([RS19], lema 1)**.** *Sea A una extensión PBW torcida de un anillo (Σ, Δ)-compatible y Σ-Armendariz torcido R. Si $p_1, \ldots, p_l$ son elementos de A tales que $p_1 \cdots p_l = 0$, entonces $a_1 \cdots a_l = 0$, donde $a_i \in C_{f_i}$, para cada i.*

Demostración. Razonamos por inducción, usando la notación de la proposición 1.1.6. Si $l = 2$, sea $p_1 = \sum_{i=0}^{m} a_iX_i,\ p_2 = \sum_{j=0}^{t} b_jY_j$. Por hipótesis, tenemos que $a_i\sigma^{\alpha_i}(b_j) = 0$, para todo i, j, usando la Σ-compatibilidad de R, $a_ib_j = 0$, para todo i y j, por tanto se tiene la afirmación.

Sea $l > 2$. Si definimos $h := p_2p_3 \cdots p_l$, entonces $p_1h = 0$, y por el razonamiento anterior, $a_1a_h = 0$, donde $a_1 \in C_{p_1},\ a_h \in C_h$. Teniendo en cuenta la forma de los elementos h, esto es, $a_h = a_2 \cdots a_l$, donde $a_2 \in C_{f_2}, \ldots, a_l \in C_{f_l}$ (lo cual es debido a que R es Σ-Armendariz torcido y Σ-compatible), entonces obtenemos que $a_1 \cdots a_l = 0$. □

El siguiente teorema establece una relación entre los radicales de una extensión PBW torcida y su anillo de coeficientes R.

Teorema 2.3.8 ([RS19], teorema 3)**.** *Si A es una extensión PBW torcida de un anillo (Σ, Δ)-compatible y Σ-Armendariz torcido R, entonces se tiene que $Nil_*(R)A = Nil_*(A)$.*

Con el fin de probar las afirmaciones clave de esta sección, defininimos la siguiente condición que servirá como puente para establecer ciertas equivalencias.

Definición 2.3.9 ([RS18a], definición 4.1)**.** Sea A una extensión PBW torcida de un anillo R. Decimos que R satisface la **condición (SA1)**, si se cumple que, si $fg = 0$ para $f = a_0 + a_1X_1 + \cdots + a_mX_m$ y $g = b_0 + b_1X_1 + \cdots + b_tX_t$ elementos de A, entonces $a_ib_j = 0$ para todo i, j.

Proposición 2.3.10 ([RS19], proposición 7)**.** *Si A es una extensión PBW torcida de un anillo R, entonces R es (Σ, Δ)-compatible y Σ-Armendariz torcido si, y sólo si, R satisface la propiedad $(SA1)$.*

Demostración. Supongamos que R es (Σ, Δ)-compatible y (Σ, Δ)-Armendariz torcido. Consideremos los polinomios $f = \sum_{i=0}^{m} a_iX_i$ y $g = \sum_{j=0}^{t} b_jY_j$ en A. Es posible verificar que $fg = 0$. Por tal razón, gracias a que R es Σ-Armendariz torcido tenemos que $a_i\sigma^{\alpha_i}(b_j) = 0$, para todo i, j. Ahora bien, usando la Σ-compatibilidad de R, obtenemos que $a_ib_j = 0$, para todo i, j. Por otro lado, como $f, g \in A$ con $a_ib_j = 0$, para $0 \leq i \leq m$ y $0 \leq j \leq t$, a partir de la observación 1.1.7 junto con la proposición 2.3.3 , concluimos que $fg = 0$.

Recíprocamente, supongamos que para $f = \sum_{i=0}^{m} a_iX_i$ y $g = \sum_{j=0}^{t} b_jY_j$, se tiene que, $fg = 0$ si, y sólo si, $a_ib_j = 0$, para todo i, j. Veamos que entonces se tiene que R es (Σ, Δ)-compatible: sea $a, b \in R$ con $ab = 0$. Por hipótesis sobre R, si $f = ax^{\alpha}$ (para algún $\alpha \in \mathbb{N}$) y $g = b$, entonces $fg = 0$, esto es, $0 = ax^{\alpha}(b) = a\sigma^{\alpha}(b)x^{\alpha} + ap_{\alpha,b}$, de donde $a\sigma^{\alpha}(b) = a\delta^{\alpha}(b) = 0$. De modo similar, si $a\sigma^{\theta}(b) = 0$, para algún $\theta \in \mathbb{N}$, entonces $x^{\theta}a\sigma^{\theta}(b) = 0$, es decir, $(\sigma^{\theta}(a)x^{\theta} + p_{\theta,a})\sigma^{\theta}(b) = 0$, por lo que $\sigma^{\theta}(ab) = 0$; lo cual prueba que $ab = 0$ pues σ^{θ} es inyectiva. La prueba de que R es Σ-Armendariz torcido es totalmente análoga. □

Teorema 2.3.11 ([RS19], teorema 5)**.** *Si A es una extensión PBW torcida de un anillo (Σ, Δ)-compatible y Σ-Armendariz torcido R, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *La aplicación $\varphi : \{r_R(U) \mid U \subseteq R\} \to \{r_A(U) \mid U \subseteq A\}$; $C \to CA$ es biyectiva.*
2. *La aplicación $\psi : \{l_R(U) \mid U \subseteq R\} \to \{l_A(U) \mid U \subseteq A\}$; $D \to AD$ es biyectiva.*

Demostración. 1. Sea $\varphi : \{r_R(U) \mid U \subseteq R\} \to \{r_A(U) \mid U \subseteq A\}$ definida por $C \to CA$ para cada $C \in \{r_R(U) \mid U \subseteq R\}$ y sea $\varphi' : \{r_A(U) \mid U \subseteq A\} \to \{r_R(U) \mid U \subseteq R\}$ definida por $B \mapsto B \cap R$, para cada $B \in \{r_A(U) \mid U \subseteq A\}$. Dado que $r_R(U)A = r_A(U)$, para todo $U \subseteq R$, se tiene que φ está bien definida. Ahora bien, como estamos suponiendo que R es (Σ, Δ)-compatible, deducimos que $r_A(V) \cap R = r_R(V_0)$, para todo $V \subseteq A$, considerando V_0 como el conjunto de coeficientes de todos los elementos de V. Por lo anterior, podemos decir que φ' está bien definida. Más aún, se tiene que $\varphi'\varphi = \mathrm{id}_R$, por lo que φ es inyectiva. Ahora bien, si $B \in \{r_A(U) \mid U \subseteq A\}$, entonces $B = r_A(J)$, para algún $J \subseteq A$. Sean B_1 y J_1 los conjuntos de los coeficientes de todos los elementos de B y J, respectivamente, veamos que $r_R(J_1) = B_1R$: sean $f = \sum_{i=0}^{m} a_iX_i \in J$ y $g = \sum_{j=0}^{t} b_jY_j \in B$. Entonces $fg = 0$, así, usando el hecho de que R es Σ-Armendariz torcido y (Σ, Δ)-compatible, tenemos que $a_ib_j = 0$, para todo a_i y b_j (proposición 2.3.10). Por lo cual $J_1B_1 = 0$, y por tanto $B_1 \subseteq r_R(J_1)$. Por último, la (Σ, Δ)-compatibilidad de R implica que

$r_R(J_1) \subseteq B_1 R$, de donde tenemos que $r_R(J_1) = B_1 R$, es decir, $r_A(J) = B_1 A$; por tanto φ es sobreyectiva. De esta manera concluimos que φ es biyectiva.

□

A partir del anterior teorema se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.3.12 ([RS19], corolario 2)**.** *Si A es una extensión PBW torcida de un anillo (Σ, Δ)-compatible y Σ-Armendariz torcido R, entonces R satisface la condición de cadena ascendente de anuladores derechos (izquierdos) si, y sólo si, A la satisface.*

A continuación, mencionamos algunos resultados concernientes a los ideales primos minimales en esta clase de anillos, objeto de estudio de este trabajo.

Lema 2.3.13 ([RS19], lema 5)**.** *Si R es un anillo (Σ, Δ)-compatible semiprimo, entonces todo anulador (Σ, Δ)-primo P de R es un ideal (Σ, Δ)-primo minimal de R.*

Demostración. Sea P' un ideal (Σ, Δ)-primo de R tal que $P' \subseteq P$. Si $l_R(P) \subseteq P'$, entonces $l_R(P) \subseteq P$, y por tanto $l_R(P)l_R(P) = 0$. Sin embargo, usando que R es semiprimo, tenemos que $l_R(P) = 0$, lo cual es una contradicción, por tanto $l_R(P) \nsubseteq P'$. No obstante, $l_R(P)P = 0$ y P es un ideal (Σ, Δ)-primo de R. Ahora, usando la (Σ, Δ)-compatibilidad de R, concluimos que $l_R(P)$ es un ideal (Σ, Δ)-primo de R, y por tanto $P \subseteq P'$, esto significa que $P = P'$. □

Lema 2.3.14 ([RS19], lema 4)**.** *Sea A una extensión PBW torcida de una anillo semiprimo, (Σ, Δ)-compatible y Σ-Armendariz torcido R que satisface la condición de cadena ascendente sobre anuladores a derecha. Si P es un ideal primo minimal de A, entonces $P \cap R$ es un ideal (Σ, Δ)-primo minimal de R.*

Demostración. A partir del teorema 2.3.11 y la observación 2.3.6 sabemos que A es semiprimo y cumple la condición de cadena ascendente para anuladores derechos (esto es gracias a la biyectividad de la aplicaciones definidas en el teorema 2.3.11). Pr otro lado, debido a [MRS01], sección 2.2.14, $P = r_A(U)$ para algún subconjunto U de A. Consideremos el conjunto V que consiste de los coeficientes de todos los elementos de U. Usando la (Σ, Δ)-compatibilidad de R obtenemos que $P \cap R = r_R(V)$. Ahora bien, para todo $a \in P \cap R$ y $v \in V$, tenemos que $av = 0$ y por tanto $\sigma^\theta(a)v = \delta^\theta(a)v = 0$, para todo $\theta \in \mathbb{N}$ (proposición 2.3.3), lo cual prueba que $P \cap R$ es un ideal (Σ, Δ) de R. Si $IJ \subseteq P \cap R$, para una pareja de ideales (Σ, Δ) I, J de R, entonces $IAJA \subseteq P$ y por ende $I \subseteq P \cap R$, de donde $I \subseteq P \cap R$ o $J \subseteq P \cap R$. Esto significa que $P \cap R$ es un anulador que es es un ideal (Σ, Δ)-primo de R, de esta manera el lema 2.3.13 nos permite concluir el resultado deseado. □

Proposición 2.3.15 ([RS19], proposición 16)**.** *Si R es un anillo (Σ, Δ)-compatible semiprimo que cumple la condición de cadena ascendente para anuladores derechos, entonces todo ideal primo minimal de R es un ideal (Σ, Δ)-primo minimal de R y viceversa.*

Demostración. A partir de [MRS01], sección 2.2.14, sabemos que un ideal primo de R es minimal si, y sólo si, es un ideal anulador. Sea P un ideal primo minimal de R y sea $P = r_R(U)$ para algún subconjunto U de R. Entonces $UP = 0$, lo que significa que para todo $r \in P$ y todo $u \in U$, $ur = 0$. Por hipótesis, R es (Σ, Δ)-compatible, por tanto $u\sigma^{\theta}(r) = u\delta^{\theta}(r) = 0$, para algún $\theta \in \mathbb{N}^n$ (proposición 2.3.3), por consiguiente $U\delta^{\theta}(r) = U\sigma^{\theta}(r) = 0$, es decir, P es un ideal (Σ, Δ)-primo y por tal razón P es un ideal (Σ, Δ)-primo de R (lema 2.3.13).

Recíprocamente, sea P un ideal (Σ, Δ)-primo minimal de R. Sabemos que $rad(P) = \bigcap Q_i$ ($rad(P)$ denota el radical primo del ideal P), donde Q_i es un ideal primo minimal de R con $P \subseteq Q_i$, para todo i. Es claro que $P \subseteq rad(P) \subseteq Q_i$, para cada i, y dado que Q_i es un ideal primo minimal de R, entonces es también un ideal (Σ, Δ)-primo minimal, como vimos anteriormente. Por tal razón $P = Q_i$ y por tanto $rad(P) = P$, lo cual prueba que P es un ideal primo minimal de R. □

Proposición 2.3.16 ([RS19], proposición 17). *Sea A una extensión PBW torcida de un anillo (Σ, Δ)-compatible, Σ-Armendariz torcido semiprimo R que satisface la condición de cadena ascendente para anuladores derechos. R. Si P es un ideal (Σ, Δ)-primo minimal de R, entonces PA es un ideal primo minimal de A.*

Demostración. Sea P un ideal (Σ, Δ)-primo minimal de R. Usando la proposición 2.3.15 tenemos que P es un ideal primo minimal de R. Es posible probar que PA es un ideal primo de A. Si Q es un ideal primo minimal de A con $Q \subseteq PA$, por el lema 2.3.14, $Q \cap R$ es un ideal (Σ, Δ)-primo minimal de R y $Q \cap R \subseteq P$, de donde tenemos que $Q \cap R = P$. Por lo tanto, $Q = (Q \cap R)A = PA$, concluyendo la prueba.

□

Proposición 2.3.17 ([RS19], teorema 6). *Si A es una extensión PBW torcida de un anillo semiprimo (Σ, Δ)-compatible, Σ-Armendariz torcido R que satisface la condición de cadena ascendente para anuladores derechos, entonces A tiene finitos ideales primos minimales $Q_1, \ldots, Q_m$ con $Q_1 \cdots Q_m = 0$, y $Q_i = p_iA = q_iA$, para cada i, donde $\{p_1, \ldots, p_m\}$ es el conjunto de todos los ideales primos minimales de R y $\{q_1, \ldots, q_m\}$ es el conjunto de todos los ideales (Σ, Δ)-primos minimales de R.*

Demostración. Sea R un anillo semiprimo que satisface la condición de cadena ascendente para anuladores. Entonces R tiene finitos ideales primos minimales $p_1, \ldots, p_m$ ([GWJ04], sección 2.2.15). A partir de la observación 2.3.6 y el teorema 2.3.11 concluimos que A es semiprimo y cumple la condición de cadena ascendente sobre anuladores derechos. De nuevo, gracias a [MRS01], sección 2.2.15, A tiene finitos ideales primos minimales $Q_1, \ldots, Q_t$, tales que $Q_1Q_2 \cdots Q_t = 0$. Notemos que si P es un ideal primo minimal de R, entonces P es un ideal (Σ, Δ)-primo de R (proposición 2.3.15), y además PA es un ideal primo minimal de A (proposición 2.3.16). De esta forma, si Q es un ideal primo minimal de A, entonces $Q \cap R$ es un ideal primo minimal de R (lema 2.3.14). Por tal razón, $m = t$ y usando proposición 2.3.15 obtenemos el resultado deseado. □

A continuación definimos el concepto de anillo 2-primal, el cual tendrá especial importancia en la sección 2.3 en el estudio de los anillos $\Sigma(*)$.

Definición 2.3.18 ([Mar03], página 2). Sea R un anillo. R es un anillo **2-primal** si se cumple que $Nil(R) = Nil_*(R)$.

Evidentemente, todo anillo conmutativo y todo anillo reducido es 2-primal. Por tal razón, esta condición obliga a que ciertos anillos no conmutativos tengan ciertas afinidades con el caso conmutativo. En [Mar03], se realiza un estudio amplio de las condiciones que implican 2-primalidad. El siguiente resultado es uno de los más importantes de [RS19].

Proposición 2.3.19 ([RS19], teorema 7)**.** *Si A es una extensión PBW torcida de un anillo (Σ, Δ)-compatible y Σ-Armendariz torcido R, entonces R es 2-primal si, y sólo si, A es 2-primal.*

Demostración. Consideremos un elemento $f = \sum_{i=0}^{m} a_i X_i$ de $Nil(A)$. Entonces $f^l = 0$, para algún $l \in \mathbb{N}$. A partir del lema 2.3.7 tenemos que $a_i^l = 0$, para todo $0 \leq i \leq m$. Esto significa que $a_i \in Nil(R)$, para todo i. Por hipótesis, tenemos que R es 2-primal, por tanto $a_i \in Nil_*(R)$, para cada i, y por tanto $f \in Nil_*(R)A = Nil_*(A)$ (teorema 2.3.8). Por tanto A es 2-primal. □

2.4. Anillos $\Sigma(*)$

Esta sección esta motivada principalmente por el trabajo de Kwak (véase [Kwa03]), donde se definen y se estudian los anillos $\sigma(*)$ de la siguiente manera: sea B un anillo y σ un endomorfismo de B. B se dice un anillo $\sigma(*)$, si se cumple que $a\sigma(a) \in Nil_*(R)$ implica que $a \in Nil_*(R)$. Con el objetivo de extender dichos resultados al caso de las extensiones PBW torcidas, definimos los anillos $\Sigma(*)$ de forma completamente natural.

Definición 2.4.1. Sea R un anillo con una familia de endomorfismos $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$. Decimos que R es un anillo $\Sigma(*)$, si se cumple que $a\sigma_i(a) \in Nil_*(R)$ implica que $a \in Nil_*(R)$, para todo $a \in R$ y todo i.

Observación 2.4.2. A partir de todas las clases de anillos que hemos presentado hasta ahora, podemos establecer las siguientes relaciones:

$$\text{anillos reducidos} \subsetneq \text{anillos 2-primales} \nsubseteq \text{anillos } \Sigma(*).$$

$$\text{anillos } \Sigma\text{-rígidos} \subsetneq \text{anillos reducidos}.$$

$$\text{anillos } \Sigma\text{-rígidos} \subsetneq \text{anillos } \Sigma\text{-rígidos débiles}.$$

$$\text{anillos } \Sigma(*) \subsetneq \text{anillos } \Sigma\text{-rígidos}.$$

1. **anillos reducidos $\subsetneq$ anillos 2-primales** [[Mar03], ejemplo 3.4]: Consideremos $p \in \mathbb{N}$ un número primo, sea F un cuerpo de característica p y sea G un p-grupo cíclico. Definamos el anillo grupo $R = FG$, y supongamos que σ es un automorfismo no trivial de R. Si $S = R[x; \sigma]$, entonces S resulta ser un anillo que no es reducido pero es 2-primal.

2. **anillos 2-primales $\nsubseteq$ anillos** $\Sigma(*)$ [[Bha10], ejemplo 2]: Sea $R = F[x]$ el anillo de polinomios sobre un cuerpo F. R es un dominio y por tanto es un anillo 2-primal

con $Nil_*(R) = 0$. Sea $\sigma : R \to R$ definida por $\sigma(f(x)) = f(0)$, sea $f(x) = ax$ con $a \neq 0$. Tenemos que $ax\sigma(ax) = ax(0) = 0 \in Nil_*(R)$ pero $ax \notin Nil_*(R)$, por tanto R no es $\Sigma(*)$ con $\Sigma = \{\sigma\}$.

3. **anillos Σ-rígidos $\subsetneq$ anillos reducidos** [[HKK00], ejemplo 9]: Consideremos el anillo $R = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \mid a \equiv b \pmod 2\}$ y $\sigma : R \to R$ el automorfismo definido por $\sigma((a,b)) = (b,a)$. Entonces R es reducido pero no es Σ-rígido, con $\Sigma = \{\sigma\}$.

4. **anillos $\Sigma(*)$ $\subsetneq$ anillos Σ-rígidos** [[Bha14], ejemplo 1]: Sea $R = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & F \end{bmatrix}$, donde F es un cuerpo, consideremos $\sigma : R \to R$ definida por $\sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$. Entonces R es $\Sigma(*)$ pero no es Σ-rígido, donde $\Sigma = \{\sigma\}$.

Observación 2.4.3. Con el propósito de formular nuestros resultados, en esta sección usaremos los siguientes hechos, los cuales son consecuencia inmediata de las propiedades de los anillos $\sigma(*)$ y la definición 2.4.1: Bhat [Bha10], proposiciones 1, 2, 3 y teorema 3; Bhat [Bha13], teorema 1 y Bhat [Bha14], proposición 2. De hecho, en [Bha13], proposición 1, hay un error que fue corregido en [Bha14], proposición 2 y observación 2.

(1) Sean R un anillo y Σ una familia de automorfismos de R. Si R es un anillo $\Sigma(*)$, entonces $Nil_*(R)$ es completamente semiprimo.

(2) Sean R un anillo noetheriano y Σ una familia de automorfismos de R. Si R es un anillo $\Sigma(*)$, entonces R es un anillo 2-primal.

(3) Sea R un anillo noetheriano que a su vez es una $\mathbb{Q}$-álgebra. Sea Σ una familia de automorfismos de R tal que R es un anillo $\Sigma(*)$, y sea Δ una familia de Σ-derivaciones de R. Si $\sigma_i\delta_j = \delta_j\sigma_i$, para todo $1 \leq i, j \leq n$, entonces $\delta_i(U) \subseteq U$, para todo $U \in \operatorname{MinSpec}(R)$.

(4) Si R es un anillo noetheriano y Σ es una familia de automorfismos de R, entonces R es un anillo $\Sigma(*)$ si, y sólo si, para todo ideal primo minimal U de R, se tiene que $\sigma_i(U) = U$, para todo i, y U es un ideal completamente primo de R.

Comenzamos con el siguiente teorema, el cual generaliza la proposición 3 de [Bha14].

Teorema 2.4.4. *Si R es un anillo noetheriano y Σ es una familia de automorfismos de R tal que R es un anillo $\Sigma(*)$, entonces R es un anillo Σ- rígido débil. Recíprocamente, todo anillo Σ-rígido débil 2-primal es $\Sigma(*)$.*

Demostración. Supongamos que Σ es una familia de automorfismos de R tal que R es un anillo $\Sigma(*)$. A partir de la observación 2.4.3, numeral (2), sabemos que R es un anillo 2-primal, es decir, $Nil(R) = Nil_*(R)$, de donde $a\sigma^\theta(a) \in Nil(R) = Nil_*(R)$, para todo $\theta \in \mathbb{N}^n$, pero esto implica que $a \in Nil_*(R) = Nil(R)$, para todo $\theta \in \mathbb{N}^n$. Así, concluimos que R es un anillo Σ-rígido débil.

Ahora bien, supongamos que R es un anillo Σ-rígido débil 2-primal. Por tanto $Nil(R) = Nil_*(R)$ y $a\sigma^\theta(a) \in Nil(R) \Rightarrow a \in Nil(R)$, para todo $\theta \in \mathbb{N}^n$. así, tenemos que $a\sigma^\theta(a) \in Nil_*(R) \Rightarrow a \in Nil_*(R)$, para todo $\theta \in \mathbb{N}^n$, por consiguiente, R es un anillo $\Sigma(*)$. □

Corolario 2.4.5. *Si R es un anillo conmutativo noetheriano y Σ es una familia de automorfismos de R, entonces, R es un anillo Σ-rígido débil 2-primal si, y sólo si, para todo ideal primo minimal U de R, se tiene que $\sigma_i(U) = U$, y U es un ideal completamente primo de R.*

Demostración. Gracias al teorema 2.4.4, tenemos que R es un anillo Σ-rígido débil 2-primal si, y sólo si, R es $\Sigma(*)$. Adicionalmente, el numeral (4) de la observación 2.4.3 afirma que R es $\Sigma(*)$ si, y sólo si, para todo ideal primo minimal U de R, se tiene que $\sigma_i(U) = U$, y U es un ideal completamente primo de R. Por tanto se tiene la afirmación enunciada. □

El siguiente teorema generaliza [Bha10], teorema 6.

Teorema 2.4.6. *Si R es un anillo conmutativo noetheriano y Σ es una familia de automorfismos tal que R es Σ-rígido débil, entonces $Nil(R)$ es completamente semiprimo.*

Demostración. Es posible verificar que $\sigma_i(Nil(R)) = Nil(R)$ gracias al hecho de que σ_i es automorfismo, para todo i. Sea R un anillo Σ-rígido y considere $a \in R$ tal que $a^2 \in Nil(R)$. Dado que $a\sigma^\theta(a)\sigma^\theta(a\sigma^\theta(a)) = a\sigma^\theta(a)\sigma^\theta(a)\sigma^\theta(\sigma^\theta(a)) \in \sigma^\theta(Nil(R)) = Nil(R)$, entonces $a\sigma^\theta(a) \in Nil(R)$ implica que $a \in Nil(R)$, para todo $\theta \in \mathbb{N}^n$, lo que significa que $Nil(R)$ es completamente semiprimo. □

Observación 2.4.7 ([BKG13], ejemplo 3)**.** El recíproco del teorema 2.4.6 es falso. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, sea $R = \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, y consideremos el automorfismo σ de R definido por $\sigma((a, b)) = (b, a)$ con $a, b \in \mathbb{K}$. De esta manera, notamos que R es un anillo reducido, por lo cual $Nil_*(R) = 0$, es decir, $Nil_*(R)$ es completamente semiprimo pero R no es un anillo $\Sigma(*)$ pues $(1, 0)\sigma((1, 0)) = (0, 0)$ y $(1, 0) \notin Nil_*(R)$.

La siguiente afirmación generaliza [Bha10], proposición 5.

Proposición 2.4.8. *Si A es una extensión PBW torcida de un anillo $\Sigma(*)$ noetheriano y conmutativo R, entonces $Nil(R)A = Nil(A)$.*

Demostración. El numeral (2) de la observación 2.4.3 muestra que R es 2-primal. Es posible ver que $N(R)A \subseteq N(A)$, por tal razón, solamente probaremos que $N(A) \subseteq N(R)A$. Sea $f = \sum_{i=0}^{m} a_i X_i$ un elemento de $N(A)$ (con $X_1 \prec X_2 \prec \cdots \prec X_m$), y sea $X_m := x^{\alpha_m} = x_1^{\alpha_{m1}} \cdots x_n^{\alpha_{mn}}$. como una ilustración, vemos que

$$
\begin{aligned}
f^2 &= (a_m X_m + \cdots + a_1 x_1 + a_0)(a_m X_m + \cdots + a_1 x_1 + a_0)\\
&= a_m X_m a_m X_m + \text{ términos menores que}\} \exp(X_m)\\
&= a_m[\sigma^{\alpha_m}(a_m) X_m + p_{\alpha_m, a_m}] X_m + \text{ términos menores que}\} \exp(X_m)\\
&= a_m \sigma^{\alpha_m}(a_m) X_m X_m + a_m p_{\alpha_m, a_m} X_m + \text{ términos menores que}\} \exp(X_m)\\
&= a_m \sigma^{\alpha_m}(a_m)[c_{\alpha_m, \alpha_m} x^{2\alpha_m} + p_{\alpha_m, \alpha_m}] + a_m p_{\alpha_m, a_m} X_m + \text{ términos menores que}\} \exp(X_m)\\
&= a_m \sigma^{\alpha_m}(a_m) c_{\alpha_m, \alpha_m} x^{2\alpha_m} + \text{ términos menores que}\} \exp(x^{2\alpha_m}),
\end{aligned}
$$

por tanto,

$$
f^3 = (a_m \sigma^{\alpha_m}(a_m) c_{\alpha_m, \alpha_m} x^{2\alpha_m} + \text{ términos menores que}\} \exp(x^{2\alpha_m}))(a_m X_m + \cdots + a_1 x_1 + a_0)
$$

$$= a_m\sigma^{\alpha_m}(a_m)c_{\alpha_m,\alpha_m}x^{2\alpha_m}a_mX_m + \text{ términos menores que}\} \exp(x^{3\alpha_m})$$
$$= a_m\sigma^{\alpha_m}(a_m)c_{\alpha_m,\alpha_m}[\sigma^{2\alpha_m}(a_m)x^{2\alpha_m} + p_{2\alpha_m,a_m}]X_m + \text{ términos menores que}\} \exp(x^{3\alpha_m})$$
$$= a_m\sigma^{\alpha_m}(a_m)c_{\alpha_m,\alpha_m}\sigma^{2\alpha_m}(a_m)x^{2\alpha_m}X_m + \text{ términos menores que}\} \exp(x^{3\alpha_m})$$
$$= a_m\sigma^{\alpha_m}(a_m)c_{\alpha_m,\alpha_m}\sigma^{2\alpha_m}(a_m)[c_{2\alpha_m,\alpha_m}x^{3\alpha_m} + p_{2\alpha_m,\alpha_m}]$$
$$= a_m\sigma^{\alpha_m}(a_m)c_{\alpha_m,\alpha_m}\sigma^{2\alpha_m}(a_m)c_{2\alpha_m,\alpha_m}x^{3\alpha_m} + \text{ términos menores que}\} \exp(x^{3\alpha_m}).$$

Continuando de esta manera, es posible mostrar que f^k cumple lo siguiente,

$$f^k = a_m\prod_{l=1}^{k-1}\sigma^{l\alpha_m}(a_m)c_{l\alpha_m,\alpha_m}x^{k\alpha_m} + \text{ términos menores que } \exp(x^{k\alpha_m}),$$

de donde $0 = \mathrm{lc}(f^k) = a_m\prod_{l=1}^{k-1}\sigma^{l\alpha_m}(a_m)c_{l\alpha_m,\alpha_m}$, ahora, como los elementos c's son centrales en R e invertibles a izquierda (proposición 1.1.6), tenemos que $0 = \mathrm{lc}(f^k) = a_m\prod_{l=1}^{k-1}\sigma^{l\alpha_m}(a_m)$. Como $0 \subseteq P$, para todo $P \in \mathrm{MinSpec}(R)$, entonces para algún $1 \leq j \leq l$, $a_m\sigma^{j\alpha_m}(a_m) \in P$, para todo $P \in \mathrm{MinSpec}(R)$, de donde $\sigma^{-j\alpha_m}(a_m)a_m \in \sigma^{-j\alpha_m}(P) = P$, por consiguiente, se debe tener que $a_m \in P$, para todo $P \in \mathrm{MinSpec}(R)$, así $a_m \in P(R)$. Ahora bien, usando que R es 2-primal, obtenemos que $a_m \in N(R)$, lo que significa que $a_mX_m \in N(R)A \subseteq N(A)$, es decir, $\sum_{i=0}^{m-1}a_iX_i \in N(A)$. Repitiendo este argumento, es posible ver que $a_i \in P(R) = N(R)$, para todo $0 \leq i \leq m-1$, por tanto $f \in N(R)A$. De esta manera, tenemos que $N(A) \subseteq N(R)A$. □

Antes de enunciar un resultado importante de este trabajo, necesitamos la siguiente proposición preliminar que describe como extender las familias de funciones Σ y Δ de R a familias de funciones $\overline{\Sigma}$ y $\overline{\Delta}$ de una extensión PBW torcida A de R.

Proposición 2.4.9 ([RS17d], teorema 5.1)**.** *Sea A una extensión PBW torcida de un anillo R. Supongamos que $\sigma_i\delta_j = \delta_j\sigma_i$, $\delta_i\delta_j = \delta_j\delta_i$, y $\delta_k(c_{i,j}) = \delta_k(r_l^{(i,j)}) = 0$, para $1 \leq i,j,k,l \leq n$, donde $c_{i,j}$ y $r_l^{(i,j)}$ son los elementos determinados en la proposición 1.1.3. Si $\overline{\sigma_k} : A \to A$ y $\overline{\delta_k} : A \to A$ son las aplicaciones definidas por $\overline{\sigma_k}(f) = \sigma_k(a_0) + \sigma_k(a_1)X_1 + \cdots + \sigma_k(a_m)X_m$ y $\overline{\delta_k}(f) := \delta_k(a_0) + \delta_k(a_1)X_1 + \cdots + \delta_k(a_m)X_m$, para $f = a_0 + a_1X_1 + \cdots + a_mX_m \in A$ respectivamente, y $\overline{\sigma_k}(r) := \sigma_k(r)$, para todo $1 \leq k \leq n$, entonces, $\overline{\sigma_k}$ es un endomorfismo inyectivo de A y $\overline{\delta_k}$ es una $\overline{\sigma_k}$-derivación de A, para todo $1 \leq k \leq n$.*

El siguiente teorema generaliza [Bha10], teorema 7.

Teorema 2.4.10. *Sea A una extensión PBW torcida de un anillo conmutativo, noetheriano y 2-primal R. Supongamos además que se satisfacen las condiciones de la proposición 2.4.9. Si R es un anillo Σ-rígido débil, entonces A es un anillo $\overline{\Sigma}$-rígido débil.*

Demostración. Supongamos que R es un anillo Σ-rígido débil. Por el teorema 2.4.4 tenemos que R es un anillo $\Sigma(*)$, y por la proposición 2.4.8, $Nil(A) = Nil(R)A$. Fijando un orden monomial en Mon(A), consideremos $f \in A$ dado por $f = \sum_{i=0}^{m}a_iX_i$ tal que $f\overline{\sigma^{\theta}}(f) \in Nil(A)$. Usaremos inducción sobre m para probar la afirmación. Si $m = 1$, entonces $f = a_0 + a_1X_1$. Notemos que $f\overline{\sigma^{\theta}}(f) \in Nil(A)$, implica que $(a_0 + a_1X_1)(\sigma^{\theta}(a_0) + \sigma^{\theta}(a_1)X_1) \in$

$Nil(A) = Nil(R)A$, es decir, $a_0\sigma^\theta(a_0)+a_0\sigma^\theta(a_1)X_1+a_1X_1\sigma^\theta(a_0)+a_1X_1\sigma^\theta(a_1)X_1$, o equivalentemente, $a_0\sigma^\theta(a_0)+a_0\sigma^\theta(a_1)X_1+a_1(\sigma^{\alpha_1}(\sigma^\theta(a_0))X_1+p_{\alpha_1,\sigma^\theta(a_0)})+a_1(\sigma^{\alpha_1}(\sigma^\theta(a_1))X_1+p_{\alpha_1,\sigma^\theta(a_0)})X_1$ pertenece a $Nil(A)$. De lo anterior deducimos que $a_0\sigma^\theta(a_0)$, $a_1\sigma^{\alpha_1}(\sigma^\theta(a_1)) \in Nil(A)$, y usando que $\sigma_i(Nil(R)) = Nil(R)$, para cada i, obtenemos finalmente que $a_0, a_1 \in Nil(R)$, y por tanto $f \in Nil(R)(A) = Nil(A)$. Un argumento inductivo nos permite concluir el resultado. □

El siguiente resultado generaliza [Bha13], teorema 2.

Teorema 2.4.11. *Sea A una extensión PBW torcida de un anillo R noetheriano que a su vez es un álgebra sobre $\mathbb{Q}$. Supongamos que todo elemento de $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ es un automorfismo y que se cumplen las condiciones de la proposición 2.4.9. Si R es un anillo $\Sigma(*)$, entonces A es un anillo $\overline{\Sigma}(*)$ noetheriano.*

Demostración. A partir de [LR14], Corolario 2.4, tenemos que A es noetheriano. Veamos que A es un anillo $\overline{\Sigma}(*)$. Para esto, mostraremos que todo ideal primo minimal P de A es completamente primo y que $\overline{\sigma_i}(P) = P$, para todo i. Es sencillo verificar que $P \cap R \in \text{MinSpec}(R)$. Ahora bien, como R es un anillo $\Sigma(*)$, tenemos que $\sigma_i(P \cap R) = P \cap R$, y usando el numeral (4) de la observación 2.4.3, $P \cap R$ es un ideal completamente primo de R. Ahora, el numeral (3) de la observación 2.4.3 garantiza que $\delta_i(P \cap R) \subseteq P \cap R$, para todo i. Podemos verificar que $(P \cap R)A$ es un ideal completamente primo de A. De esta manera, $(P \cap R)A \subseteq P$ implica que $(P \cap R) = P$ pues P es minimal. Así, usando que $\sigma_i(P \cap R) = P \cap R$, para cada i, se sigue que $\overline{\sigma_i}(P) = P$, para todo i. Por tal razón, usando el numeral (4) de la observación 2.4.3 concluimos lo deseado. □

El siguiente resultado generaliza [Bha13], teorema 3.

Teorema 2.4.12. *Sea A una extensión PBW torcida de un anillo noetheriano y $\Sigma(*)$ R el cual es un álgebra sobre $\mathbb{Q}$. Supongamos que se tienen las condiciones establecidas en la proposición 2.4.9. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *Si U es un ideal primo minimal de R, entonces UA es un ideal primo minimal de A y $UA \cap R = U$.*

2. *Si P es un ideal primo minimal de A, entonces $P \cap R$ es un ideal primo minimal de R.*

Demostración. 1. Los numerales (3) y (4) de 2.4.3 nos permiten afirmar que $\sigma_i(U) = U$ y $\delta_i(U) \subseteq U$, para todo $i = 1, \dots, n$. Es claro que $UA \in \text{Spec}(A)$ y $UA \cap R = U$.

2. Por el teorema 2.4.11, A es un anillo $\overline{\Sigma}(*)$ noetheriano. Por otro lado, las partes (3) y (4) de la observación 2.4.3 prueban que $\overline{\sigma_i}(P) = P$ y $\overline{\delta_i}(P) = P$, para todo i. De esta manera, $\sigma_i(P \cap R) = P \cap R$ y $\delta_i(P \cap R) \subseteq P \cap R$, para todo i. Es posible probar que $P \cap R \in \text{Spec}(R)$, de donde $(P \cap R)A \in \text{Spec}(A)$. Finalmente, dado que $(P \cap R)A \subseteq P$, concluimos que $(P \cap R)A = P$.

□

El siguiente teorema generaliza [Bha14], teorema 1.

Teorema 2.4.13. *Si R es un anillo conmutativo noetheriano y Σ es una familia de automorfismos de R, entonces R es un anillo Σ-rígido débil si, y sólo si, $Nil(R)$ es un ideal completamente semiprimo de R.*

Demostración. Seguimos la línea de razonamiento de Bhat [Bha14]. Como primera medida, notemos que $Nil(R)$ es un ideal de R gracias a la conmutatividad de R. Ahora bien, veamos que $\sigma_i(Nil(R)) = Nil(R)$, para todo i. Fijemos un i. Dado que $\sigma_i(Nil(R))$ es un ideal nilpotente de R, entonces $\sigma_i(Nil(R)) \subseteq Nil(R)$, y como σ_i es un automorfismo para todo i, tenemos que para todo elemento $r \in Nil(R)$, existe un único elemento $s \in R$ tal que $\sigma_i(s) = r$. Consideremos el conjunto $J := \sigma_i^{-1}(Nil(R)) = \{s \in R \mid \sigma_i(s) = r\}$. Es claro que J es un ideal de R, más aún, J es nilpotente, de donde $J \subseteq Nil(R)$ y por tanto $Nil(R) \subseteq \sigma_i(Nil(R))$. De esta manera $\sigma_i(Nil(R)) = Nil(R)$, para todo i.

Supongamos que R es un anillo Σ-rígido débil. Sea $a \in R$ tal que $a^2 \in Nil(R)$. Usando que $a\sigma^\theta(a)\sigma^\theta(a\sigma^\theta(a)) = a\sigma^\theta(a)\sigma^\theta(a)\sigma^\theta(\sigma^\theta(a)) = a\sigma^\theta(a^2)\sigma^\theta(\sigma^\theta(a)) \in \sigma^\theta(Nil(R)) = Nil(R)$, para todo $\theta \in \mathbb{N}^n$, tenemos que $a\sigma^\theta(a) \in Nil(R)$, de donde $a \in Nil(R)$, lo cual significa que $Nil(R)$ es completamente semiprimo.

Recíprocamente, supongamos que $Nil(R)$ es completamente semiprimo. Considere un elemento r de R tal que $a\sigma^\theta(a) \in Nil(R)$, para todo $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{N}^n$. Como se tiene que $a\sigma^\theta(a)\sigma^{-\theta^{\mathrm{op}}}(a\sigma^\theta(a)) \in Nil(R)$, donde $-\theta^{\mathrm{op}} := (-\theta_n, \theta_{n-1}, \ldots, \theta_1)$, entonces $a^2 \in Nil(R)$, y por tal razón $a \in Nil(R)$. Así, concluimos que R es un anillo Σ-rígido débil. □

La siguiente proposición generaliza [Bha14], proposición 4.

Proposición 2.4.14. *Sea A una extensión PBW torcida de un anillo noetheriano R que es un álgebra sobre $\mathbb{Q}$. Si R es un anillo $\Sigma(*)$ y $\delta_i(\sigma_i(r)) = \sigma_i(\delta_i(r))$, para todo i y cada $r \in R$, entonces para todo $P \in \mathrm{MinSpec}(R)$ se tiene que PA es un ideal completamente primo de A.*

Demostración. Consideremos $P \in \mathrm{MinSpec}(R)$. Los numerales (2), (3) y (4) de la observación 2.4.3 garantizan que R es 2-primal, $\sigma_i(P) = P$ y $\delta_i(P) = P$, para todo i, y P es completamente primo. Considerando las familias de funciones $\widehat{\Sigma}$ y $\widehat{\Delta}$ definidas en la proposición 2.3.5, es sencillo verificar que $A/PA \cong \widehat{\sigma}(R/P)\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, lo cual prueba que PA es un ideal completamente primo de A. □

El siguiente resultado generaliza [Bha14], teorema 3.

Teorema 2.4.15. *Sea A una extensión PBW torcida de un anillo noetheriano R que es un álgebra sobre $\mathbb{Q}$. Si R es un anillo $\Sigma(*)$ y $\delta_i(\sigma_i(r)) = \sigma_i(\delta_i(r))$, para todo i y todo $r \in R$, entonces para cada $P \in \mathrm{MinSpec}(R)$ tenemos que $PA \in \mathrm{MinSpec}(A)$.*

Demostración. Consideremos $P \in \mathrm{MinSpec}(R)$. Entonces las partes (2), (3) y (4) de la observación 2.4.3 implican que $\sigma_i(P) = P$ y $\delta_i(P) \subseteq P$, para todo i. Veamos que $PA \in \mathrm{MinSpec}(A)$. Si $PA \notin \mathrm{MinSpec}(A)$, entonces existe $P_1 \in \mathrm{MinSpec}(A)$ tal que $P_1 \subset PA$. Por tanto $P_1 = (P_1 \cap R)A \subset PA \in \mathrm{MinSpec}(R)$, de donde $P_1 \cap R \subset P$, lo cual es una contradicción, pues tenemos que $P_1 \cap R \in \mathrm{Spec}(R)$. De esta manera, $PA \in \mathrm{MinSpec}(A)$. □

El siguiente teorema generaliza [Bha14], teorema 4.

Teorema 2.4.16. *Sea A una extensión PBW torcida de un anillo noetheriano R que es un álgebra sobre $\mathbb{Q}$. Si R es un anillo $\Sigma(*)$ y $\delta_i(\sigma_i(r)) = \sigma_i(\delta_i(r))$, para todo i y todo $r \in R$, entonces A es 2-primal si, y sólo si, $Nil_*(R)A = Nil_*(A)$.*

Demostración. Supongamos que A es un anillo 2-primal. Por el teorema 2.4.15, $Nil_*(A) \subseteq Nil_*(R)A$. Consideremos un elemento $f = \sum_{i=0}^{m} a_i X_i$ de $Nil_*(R)A$. Notemos que R es un anillo 2-primal (observación 2.4.3, numeral (2)). Por tanto, todo elemento a_i es nilpotente, por tanto $a_i \in Nil(A) = Nil_*(A)$, para todo i, de donde $f \in Nil_*(A)$, por tanto $Nil_*(R)A = Nil_*(A)$.

Recíprocamente, supongamos que $Nil_*(R)A = Nil_*(A)$ con algún orden monomial fijo sobre Mon(A). Sea $g = \sum_{j=0}^{t} b_j Y_j \in A$ tal que $g^2 \in Nil_*(R)A = Nil_*(A)$. La idea es probar que $g \in Nil_*(A)$. Con esto en mente, notemos que $\mathrm{lc}(g^2) \in \mathrm{Nil}_*(R) \subseteq P$, para todo $P \in$ MinSpec(R), y dado que $\sigma_i(P) = P$ y P es completamente primo (teorema 2.4.15), se sigue que $b_t \in P$, para todo $P \in$ MinSpec(R), es decir, $b_t \in Nil_*(R)$. Ahora bien, la parte (4) de la observación 2.4.3 garantiza que $\delta_i(P) \subseteq P$, para todo i y todo $P \in$ MinSpec(R), de donde podemos afirmar que $\sum_{j=0}^{t-1} b_j Y_j \in Nil_*(A) = Nil_*(R)A$, y de manera análoga, tenemos que $b_{t-1} \in Nil_*(R)$. Repitiendo el argumento, podemos ver que $b_j \in Nil_*(R)$, para todo j, y por tanto $g \in Nil_*(R)A = Nil_*(A)$. Así, $Nil_*(A)$ es un ideal completamente semiprimo, y por tanto, A es 2-primal. □

El siguiente resultado generaliza [Bha14], proposición 5.

Proposición 2.4.17. *Sea A una extensión PBW torcida de un anillo Σ-rígido débil, 2-primal y noetheriano R que es un álgebra sobre $\mathbb{Q}$. Si R es un anillo $\Sigma(*)$ y $\delta_i(\sigma_i(r)) = \sigma_i(\delta_i(r))$, para todo i y todo $r \in R$, entonces $Nil(R)A = Nil(A)$.*

Demostración. Los argumentos de esta prueba son completamente similares a los argumentos usados en la prueba de la proposición 2.4.8. Basta considerar R anillo 2-primal en lugar de conmutativo. □

Nuestro último teorema generaliza [Bha14], teorema 5.

Teorema 2.4.18. *Sea A una extensión PBW torcida de un anillo Σ-rígido débil noetheriano 2-primal R que es un álgebra sobre $\mathbb{Q}$, tal que $\sigma_i \in \Sigma$ es un automorfismo. Si se cumplen las condiciones de la proposición 2.4.9, entonces A es un anillo $\overline{\Sigma}$-rígido débil noetheriano 2-primal.*

Demostración. A partir de [LR14], corolario 2.4, sabemos que A es un anillo noetheriano. Por hipótesis, R es Σ-rígido débil 2-primal, así, el teorema 2.4.4 implica que R es un anillo $\Sigma(*)$. Ahora bien, el teorema 2.3.6 garantiza que si $P \in \mathrm{MinSpec}(A)$, entonces $P \cap R \in \mathrm{MinSpec}(R)$. El teorema 2.4.15 prueba que $Nil_*(R)A = Nil_*(A)$, de donde concluimos que A es 2-primal por el teorema 2.4.16. Finalmente, el teorema 2.3.8 implica que A es un anillo $\overline{\Sigma}$-rígido débil. Por lo tanto, A $\overline{\Sigma}$-rígido débil noetheriano 2-primal. □

Trabajo futuro

Al tener en cuenta la relación entre los ideales primos minimales y los anuladores en el contexto de los anillos reducidos ([Kre96], lema 1.5), resulta interesante encontrar caracterizaciones de los anuladores en este tipo de anillos. De esta manera, como trabajo futuro, nos planteamos el problema de determinar anuladores en extensiones PBW torcidas sobre anillos reducidos. Por otro lado, dado que la propiedad de compatibilidad ha sido investigada para extensiones PBW torcidas asumiendo ciertas condiciones en el sentido de [RS18a], consideramos importante investigar esta propiedad en el contexto de los módulos sobre extensiones PBW torcidas bajo dichas condiciones (véase [Rey19]). Ahora bien, teniendo en cuenta lo dicho en la introducción acerca del trabajo de Matlis sobre la importancia de los ideales primos minimales en un anillo conmutativo reducido con el fin de obtener información de su anillo total de fracciones, una pregunta interesante es si es posible extender este resultado al caso de anillos no conmmutativos, como es el caso de las extensiones PBW torcidas, pues así tendríamos una descomposición del anillo total de fracciones de estas extensiones utilizando sumas directas de localizaciones por ideales primos minimales de las mismas. Por último, pero no menos importante, encontramos interesante caracterizar el espectro primo de las extensiones PBW torcidas y de otros anillos no conmutativos de tipo polinomial, utilizando la técnica de H-estratificación (véase [BG12]), la cual ha demostrado ser muy efectiva en el estudio del espectro primo de las álgebras envolventes universales cuantizadas, o como también se les conoce, grupos cuánticos.

Bibliografía

[Art15] Viacheslav Alexandrovich Artamonov. Derivations of Skew PBW Extensions. *Communications in Mathematics and Statistics*, 3(4):449–457, 2015. 1

[BG88] A.D. Bell and Ken R. Goodearl. Uniform Rank over Differential Operator Rings and Poincaré-Birkhoff-Witt Extensions. *Pacific Journal of Mathematics*, 131(1):13–37, 01 1988. 8

[BG12] Ken Brown and Ken R Goodearl. *Lectures on Algebraic Quantum Groups*. Birkhäuser, 2012. 35

[Bha10] Vijay Kumar Bhat. Ore Extensions over Weak σ-rigid Rings and $\sigma(*)$-rings. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 3(4):695–703, 2010. 28, 29, 30, 31

[Bha13] Vijay Kumar Bhat. Minimal prime ideals of $\sigma(*)$-rings and their extensions. *Armenian Journal of Mathematics*, 5(2):98–104, 2013. 29, 32

[Bha14] Vijay Kumar Bhat. On 2-primal Ore extensions over Noetherian weak σ-rigid rings. *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica*, (2):51–59, 2014. 29, 32, 33, 34

[BKG13] Vijay Bhat, Neetu Kumari, and Smarti Gosani. Skew Polynomial Rings over Weak σ-rigid Rings and $\sigma(*)$-rings. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 6(1):59–65, 2013. 30

[Gal16] Claudia Gallego. Matrix computations on projective modules using Gröbner bases. *Journal of Algebra, Number Theory: Advances and Applications*, 15(2):101–139, 2016. 1

[GL11] Claudia Gallego and Oswaldo Lezama. Gröbner Bases for Ideals of σ-PBW Extensions. *Communications in Algebra*, 39(1):50–75, 01 2011. 1, 2, 3

[GWJ04] Kenneth R Goodearl and Robert Warfield Jr. *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*. Cambridge University Press, 2004. 2, 11, 27

[HJ65] Melvin Henriksen and Meyer Jerison. The space of minimal prime ideals of a commutative ring. *Transactions of the American Mathematical Society*, 115:110–130, 1965. II

[HKK00] Chan Yong Hong, Nam Kyun Kim, and Tai Keun Kwak. Ore extensions of Baer and p.p.-rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 151(3):215–226, 2000. 29

[HKK03] Chan Yong Hong, Nam Kyun Kim, and Tai Keun Kwak. On skew Armendariz rings. *Communications in Algebra*, 31(1):103–122, 2003. 16

[HKLN09] Chan Yong Hong, Nam Kyun Kim, Yang Lee, and Pace P Nielsen. The minimal prime spectrum of rings with annihilator conditions. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 213(7):1478–1488, 2009. II

[Kre96] Jan Krempa. Some examples of reduced rings. *Algebra Colloquium*, 3(4):289–300, 1996. 6, 7, 11, 12, 35

[Kwa03] Tai Keun Kwak. Prime radicals of skew-polynomial rings. *International Journal of Mathematical Sciences*, 2(2):219–227, 2003. 11, 28

[LAOV13] Oswaldo Lezama, Juan Pablo Acosta, C. Ojeda, and Cesar Venegas. Ore and Goldie theorems for skew PBW extensions. *Asian-European Journal of Mathematics*, 6(4):1350061–1 – 1350061–20, 2013. 1

[LAR15] Oswaldo Lezama, Juan Pablo Acosta, and Armando Reyes. Prime ideals of skew PBW extensions. *Revista de la Unión Matemática Argentina*, 52(2):39–55, 2015. II, 22, 23, 24

[LL17] Oswaldo Lezama and Edward Latorre. Non-commutative algebraic geometry of semi-graded rings. *International Journal of Algebra and Computation*, 27(4):371–389, 2017. 1

[LL18] Tsiu-Kwen Lee and Jheng-Huei Lin. Minimal prime ideals of reduced rings. *Communications in Algebra*, 46(8):3436–3441, 2018. II

[LR14] Oswaldo Lezama and Armando Reyes. Some Homological Properties of Skew PBW Extensions. *Communications in Algebra*, 42(3):1200–1230, 2014. 3, 4, 5, 6, 8, 10, 22, 32, 34

[LV17] Oswaldo Lezama and H. Venegas. Some homological properties of skew PBW extensions arising in non-comutative algebraic geometry. *Discussiones Mathematicae-General Algebra and Applications*, 37(1):45–57, 2017. 1

[M$^+$83] Eben Matlis et al. The minimal prime spectrum of a reduced ring. *Illinois Journal of Mathematics*, 27(3):353–391, 1983. II

[Mar03] Greg Marks. A taxonomy of 2-primal rings. *Journal of Algebra*, 266(2):494–520, 2003. 27, 28

[MRS01] John C McConnell, James Christopher Robson, and Lance W Small. *Noncommutative Noetherian Rings*, volume 30. American Mathematical Society, 2001. 26, 27

[NI16] A.R. Nasr-Isfahani. Radicals of Ore Extension of skew Armendariz rings. *Communications in Algebra*, 44(3):1302–1320, 2016. 6

[NR17] Arturo Niño and Armando Reyes. Some ring theoretical properties of skew Poincaré-Birkhoff-Witt extensions. *Boletín de Matemáticas*, 24(2):131–148, 2017. 2, 6, 13, 14

[Ore33] Oystein Ore. Theory of Non-Commutative Polynomials. *Annals of Mathematics, Second Series*, 34(3):480–508, 07 1933. 1

[Rey14] Armando Reyes. Jacobson's conjecture and skew PBW extensions. *Revista Integración, temas de matemáticas*, 32(2):139–152, 2014. 1, 3

[Rey15] Armando Reyes. Skew PBW Extensions of Baer, quasi-Baer, p.p. and p.q.-rings. *Revista Integración, temas de matemáticas*, 33(2):173–189, 2015. 3, 6, 14

[Rey19] Armando Reyes. Armendariz modules over skew PBW extensions. *Communications in Algebra*, 47(3):1248–1270, 4 2019. 35

[RJ18] Armando Reyes and Julio Jaramillo. Symmetry and reversibility properties for quantum algebras and skew Poincaré-Birkhoff-Witt extensions. *Ingeniería y Ciencia*, 14(27):29–52, 2018. 1

[Ros95] Alexander Rosenberg. *Noncommutative algebraic geometry and representations of quantized algebras*, volume 330. Mathematics and its applications., 1995. 9

[RS16] Armando Reyes and Hector Suarez. Armendariz property for skew PBW extensions and their classical ring of quotients. *Revista Integración, temas de matemáticas*, 34(2):147–168, 2016. 6, 16

[RS17a] Armando Reyes and Hector Suarez. Calabi-yau property for graded skew PBW extensions. *Revista Colombiana de Matemáticas*, 51(2):221–238, 2017. 1

[RS17b] Armando Reyes and Hector Suarez. A generalized Koszul property for skew PBW extensions. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 101(2):301–320, 2017. 1, 3

[RS17c] Armando Reyes and Hector Suarez. PBW bases for some 3-dimensional skew polynomial algebras. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 101(6):1207–1228, 2017. 3, 9

[RS17d] Armando Reyes and Héctor Suárez. σ-PBW Extensions of Skew Armendariz rings. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 27(4):3197–3224, 2017. 16, 17, 18, 21, 31

[RS18a] Armando Reyes and Héctor Suárez. A notion of compatibility for Armendariz and Baer properties over skew PBW extensions. *Revista de la Unión Matemática Argentina*, 59(1):157–178, 2018. 22, 25, 35

[RS18b] Armando Reyes and Héctor Suárez. Skew Poincaré-Birkhoff-Witt extensions over weak σ-rigid rings. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 106 (2):421–440, 2018. 6, 7, 8

[RS18c] Armando Reyes and Hector Suarez. Skew Poincaré-Birkhoff-Witt extensions over weak zip rings. *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, https://doi.org/10.1007/s13366-018-0412-8, 2018. 1, 6

[RS18d] Armando Reyes and Yésica Suárez. On the ACCP in skew Poincaré–Birkhoff–Witt extensions. *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, 59(4):625–643, 2018. II, 6, 23

[RS19] Armando Reyes and Hector Suárez. Radicals and Köthe's conjecture for Skew PBW Extensions. *Communications in Mathematics and Statistics, por aparecer*, 2019. II, 6, 22, 24, 25, 26, 27, 28