El problema de Cauchy asociado a una generalización de la ecuación r-BO bidimensional

Claudia Lorena Duarte Espitia

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2018

El problema de Cauchy asociado a una generalización de la ecuación del tipo r-BO bidimensional

Claudia Lorena Duarte Espitia

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias Matemáticas

Director:
Ph.D. Guillermo Rodríguez Blanco

Línea de Investigación:
Ecuaciones diferenciales parciales de Evolución no lineales

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2018

Resumen

En el presente trabajo se estudia el buen planteamiento y la continuación única, en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^2)$ y en los espacios de Sobolev anisotrópicos con pesos $F^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2)$, del problema de Cauchy asociado a la ecuación r-BO:

$$\begin{cases} u \in C\left([0,T], H^s(\mathbb{R}^2)\right) \\ u_t + \epsilon\mathcal{H}^x u_{xt} + \mathcal{H}^y u_{xy} + uu_x = 0 \\ u(0) = \varphi \in H^s(\mathbb{R}^2) \end{cases} \tag{0-1}$$

donde $\epsilon > 0$, $\mathcal{H}^x$ es la transformada de Hilbert en la variable x, $\mathcal{H}^y$ es la transformada de Hilbert en la variable y, y $u(t,x,y)$ es una función de valor real.

Palabras clave: Problema de Cauchy, Transformada de Hilbert, Buen planteamiento local y global, Ecuación r-BO.

Abstract

In this paper we study the well-posedness and unique continuation in Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R}^2)$ and anisotropic weigthed Sobolev spaces $F^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2)$, for the Cauchy problem associated to the equation r-BO:

$$\begin{cases} u \in C\left([0,T], H^s(\mathbb{R}^2)\right) \\ u_t + \epsilon H^x u_{xt} + H^y u_{xy} + uu_x = 0 \\ u(0) = \varphi \in H^s(\mathbb{R}^2) \end{cases}$$

where $\epsilon > 0$, H^x is the Hilbert transformed in the variable x and H^y is the Hilbert transformed in the variable y, and $u(t,x,y)$ is a real-valued function.

Keywords: Cauchy problem, Hilbert transformed, Local and Global well-posedness, Equation r-BO.

Contenido

1 Introducción

La teoría de ecuaciones diferenciales en general, y particularmente las ecuaciones diferenciales no lineales de evolución, representan para la matemática contemporánea una rama de gran interés, ya sea en su aplicación o en su teoría. En cuanto a la matemática aplicada, este tipo de ecuaciones son utilizadas en diversas áreas del conocimiento científico como la mecánica de fluidos, la física química, la física del estado sólido, la cinemática química, entre otras. Así mismo, desde el punto de vista teórico, podría decirse que es de gran importancia el estudio de estas ecuaciones; es decir, las generalidades del tipo buen planteamiento local y global, que comprenden las nociones de existencia, unicidad, y dependencia continua de las soluciones, así como los principios de continuación única de las mismas.

Por otro lado cabe resaltar que a lo largo del último siglo, las ecuaciones diferenciales no lineales de evolución más estudiadas son las que conocemos como la ecuación Korteweg-de Vries, la ecuación Benjamin-Bona-Mahony y la ecuación Benjamin-Ono.

- **Ecuación Korteweg-de Vries**

  $$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0,$$

  modela el comportamiento de las ondas superficiales en un canal de agua poco profundo. Se dedujo en [Korteweg and de Vries, 1835] y se estudia en forma detallada en [L. Escauriaza and Vega, 2007] y [C. E. Kenig and Vega, 2003]. Existen versiones bidimensionales de esta ecuación, entre ellas la ecuación de Zakharov-Kuznetsov y la ecuación Kadomtsev-Petviashvili estudiadas en [Kadomtsev and Petviashvili, 1970] y [Faminskii, 1995] respectivamente.

- **Ecuación Benjamin-Bona-Mahony**

  $$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0,$$

  modela la propagación de ondas largas de pequeña amplitud, cuyo efecto dispersión es puramente no lineal. Fue introducida y estudiada en [T.B. Benjamin and Mahony, 1972]. Su versión bidimensional más importante es ZK-BBM estudiada en [Johnson, 1986] y [Wazwaz, 2005].

- **Ecuación Benjamin-Ono**

$$u_t - \mathcal{H}^x u_{xx} + u u_x = 0,$$

introducida en [Benjamin, 1989] y estudiada en [G. Fonseca and Ponce, 2012], modela ondas internas largas en fluidos estratificados profundos. Una version bidimensional se encuentra en [Milanés, 2003].

En el presente trabajo se pretende estudiar algunas de las nociones mencionadas previamente para la versión bidimensional de la ecuación Benjamin-Ono con una regularización del tipo Benjamin-Bona-Smith,

$$u_t + \epsilon \mathcal{H}^x u_{xt} + \mathcal{H}^y u_{xy} + u u_x = 0,$$

tales como, el buen planteamiento local en el espacio $H^s(\mathbb{R}^2)$ para $s > 1$, en los espacios anisotrópicos $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$ para $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} < 2$, y en los espacios anisotrópicos con pesos $\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2)$ de forma que $0 \leq r_1 < \frac{5}{2}$, $0 \leq r_2 < \frac{3}{2}$, $s_2 \geq r_1$, para así llegar a los principios de continuación única en este espacio.

2 Preliminares

En este capítulo se presentan algunas definiciones y resultados necesarios para el desarrollo del trabajo. En algunas ocasiones se omitirá la prueba, acompañándola de su debida referencia bibliográfica.

2.1. Transformada de Fourier

Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, se define la longitud del vector x en la norma Euclideana usual como

$$|x| = \sqrt{(x_1^2 + \ldots + x_d^2)}.$$

Dada una d-úpla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d)$ de enteros no negativos, el monomio x^α se define por

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_d^{\alpha_d}.$$

Similarmente se define el operador diferencial $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$ por

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d}.$$

Definición 2.1.1. *El espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ consiste de todas las funciones infinitamente diferenciables f en $\mathbb{R}^d$ tales que:*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| x^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta f(x) \right| < \infty,$$

para cada multi-índice α y β.

Tomado de [Elias M. Stein, 2003, p.180].

Nota 2.1.1. *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, f y todas sus derivadas son rápidamente decrecientes.*

Definición 2.1.2 (Transformada de Fourier)**.** *La transformada de Fourier de una función de Schwartz está definida por*

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx, \quad \textit{para } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Tomado de [Elias M. Stein, 2003, p.181].
La siguiente proposición presenta algunas propiedades importantes de la transformada de Fourier.

Proposición 2.1.1. *Sea* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

- $f(x+h) \longrightarrow \widehat{f}(\xi)e^{-i\xi\cdot h}$ *para* $h \in \mathbb{R}^d$.
- $f(x)e^{-i\xi\cdot h} \longrightarrow \widehat{f}(\xi+h)$ *para* $h \in \mathbb{R}^d$.
- $f(\delta) \longrightarrow \delta^{-d}\widehat{f}(d^{-1}\xi)$ *para* $\delta > 0$.
- $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} f(x) \longrightarrow (i\xi)^{\alpha}\widehat{f}(\xi)$.
- $(-ix)\alpha f(x) \longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\alpha} \widehat{f}(\xi)$.

Demostración. Ver [Elias M. Stein, 2003, p. 181]. □

Teorema 2.1.2. *La transformada de Fourier* $\wedge : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *es un isomorfismo, biyectivo, continuo con inversa continua.*

Demostración. Ver [Rafael Jose Iorio Jr, 2001, p. 341]. □

Teorema 2.1.3. *Suponga* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, *entonces*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi,$$

además

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 dx.$$

Demostración. Ver [Elias M. Stein, 2003, p. 182]. □

2.2. Espacios de Sobolev

En este trabajo estudiaremos la ecuación bidimensional (0-1) en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^2)$, en los espacios de Sobolev anisotrópicos $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$ y en los espacios de Sobolev anisotrópicos con pesos $F^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2)$. Por lo tanto se darán algunas propiedades importantes de estos espacios.

Se denota por $\mathcal{S}$ al espacio de Schwartz para $d = 2$ y $\mathcal{S}'$ su dual topológico (espacio de las distribuciones temperadas).

Definición 2.2.1. *Sea $s \in \mathbb{R}$, se define el espacio de Sobolev de orden s, denotado por $H^s(\mathbb{R}^2)$, como*

$$H^s(\mathbb{R}^2) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2) : (1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^{s/2} \widehat{f}(\xi, \eta) \in L^2(\mathbb{R}^2) \right\},$$

con norma definida como $\|f\|_s = \left\| (1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^{s/2} \widehat{f}(\xi, \eta) \right\|_{L^2}$.

Tomado de [Linares, 2009, p. 47].

Proposición 2.2.1. *Para $s, s' \in \mathbb{R}$ se tienen los siguientes resultados:*

1. *Si $0 \leq s \leq s'$, entonces $H^{s'}(\mathbb{R}^2) \subset H^s(\mathbb{R}^2)$.*

2. *$H^s(\mathbb{R}^2)$ es un espacio de Hilbert con respecto al producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ definido como sigue:*
$$\langle f, g \rangle_s = \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^s \widehat{f}(\xi, \eta) \overline{\widehat{g}(\xi, \eta)}.$$

3. *Para cualquier $s \in \mathbb{R}$, el espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ es denso en $H^s(\mathbb{R}^2)$.*

Demostración. Ver [Linares, 2009, p.46]. □

Teorema 2.2.2. *Si $s > 1$, entonces $H^s(\mathbb{R}^2)$ está contenido continuamente en $C_\infty(\mathbb{R}^2)$, el espacio de funciones continuas que se anulan en el infinito. Además*

$$\|f\|_\infty \leq C_s \|f\|_s .$$

Demostración. Ver [Linares, 2009, p. 47]. □

Teorema 2.2.3. *Sean $s \in \mathbb{R}$ tal que $s > 1$. Entonces, el espacio $H^s(\mathbb{R}^2)$ con el producto usual es un álgebra de Banach. En particular para f, $g \in H^s(\mathbb{R}^2)$,*

$$\|fg\|_s \leq C_s \|f\|_s \|g\|_s .$$

Demostración. Ver [Linares, 2009, p. 49] □

Para los espacios de Sobolev anisotrópicos se tienen resultados similares con ciertas condiciones para s_1 y s_2.

Definición 2.2.2. *El espacio $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$ es el conjunto todas las funciones $f \in \mathcal{S}'$ tales que*

$$(1 + |\xi|^{s_1} + |\eta|^{s_2})\, \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

con norma definida por

$$\|f\|_{s_1,s_2} = \left\| (1 + |\xi|^{s_1} + |\eta|^{s_2})\, \widehat{f} \right\|_{L^2}$$

Lema 2.2.1. *Sea s_1, s_2 números reales positivos tales que $\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2} < 2$. Entonces, $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2) \subset C_\infty(\mathbb{R}^2)$(el conjunto de las funciones continuas en $\mathbb{R}^2$ que se anulan en el infinito), con inclusion continua.*

Demostración. Ver [Sánchez, 2015, p. 5]. □

Teorema 2.2.4. *Sean s_1, s_2 números reales positivos tales que $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} < 2$. Entonces, el espacio $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$ con el producto usual es un álgebra de Banach. En particular para f, $g \in H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$,*

$$\|fg\|_{s_1,s_2} \leq c\,\|f\|_{s_1,s_2}\,\|g\|_{s_1,s_2}\,.$$

Demostración. Ver [Sánchez, 2015, p.11] □

Definición 2.2.3. *El espacio $L^2_{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2)$ es el conjunto de todas las funciones $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ tales que*

$$(|x|^{r_1} + |y|^{r_2})f \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

Definición 2.2.4. *El espacio anisotrópico con pesos se define como $\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2) = H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2) \cap L^2_{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2)$, con norma dada por*

$$\|f\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}} = \|f\|_{s_1,s_2}\,\|f\|_{s_1,s_2} + \|f\|_{L_{r_1,0}} + \|f\|_{L_{0,r_2}}$$

Corolario 1. *Sean s_1, s_2, r_1, r_2 números reales positivos tales que $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} < 2$. Entonces, el espacio $\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2)$ con el producto usual es un álgebra de Banach. Además existe $c > 0$ tal que*

$$\|fg\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}} \leq c\,\|f\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}}\,\|g\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}}\,,$$

para todo f, $g \in \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2)$.

Demostración. Ver [Sánchez, 2015, p.12]. □

2.3. Algunos conceptos y estimativas

Definición 2.3.1. *Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, un operador $\mathbf{U} \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ es una isometría si $\|\mathbf{U}(h)\|_{\mathscr{H}} = \|h\|_{\mathscr{H}}$, para todo $h \in \mathscr{H}$ (en particular $\mathbf{U}$ es inyectivo). $\mathbf{U}$ es unitario si es sobreyectivo.*

Definición 2.3.2. *Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert. Un grupo uniparamétrico fuertemente continuo en $\mathscr{H}$ es una función $t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathbf{U}(t) \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ tal que,*

1. *$\mathbf{U}(t)$ es unitario para todo $t \in \mathbb{R}$.*

2. $\mathbf{U}(t+t') = \mathbf{U}(t)\mathbf{U}(t')$, *para todo* $t, t' \in \mathbb{R}$.

3. $\lim_{t'\to t} \|\mathbf{U}(t)\phi - \mathbf{U}(t')\phi\|_{\mathscr{H}} = 0$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *y* $\varphi \in \mathscr{H}$.

Tomado de [Rafael Jose Iorio Jr, 2001, p. 222].

Nota 2.3.1. *Tomando* $t = t' = 0$ *en (2) tenemos que* $\mathbf{U}(0) = I$, *la función identidad.*

Definición 2.3.3. *Sean* X, Y *espacios de Banach,* $T_0 \in (0,\infty)$ *y sea* $F : (0,\infty) \times Y \to X$ *continua. El problema de Cauchy de valor inicial*

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = F(t, u(t)), & en\ X \\ u(0) = \varphi, & en\ Y \end{cases} \tag{2-1}$$

es localmente bien planteada en Y *si:*

1. *Existen* $T \in (0, T_0)$ *y* $u \in C([0,T], Y)$ *tal que* $u(0) = \varphi$ *y la ecuación diferencial es satisfecha en el siguiente sentido,*

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - F(t, u(t)) \right\|_X = 0.$$

2. *El problema 2-1 tiene solución única en* $C([0,T], Y)$.

3. *La aplicación* $\varphi \in Y \to u \in C([0,T], Y)$ *es continua. Si* $\varphi_n \in Y$ *para* $n = 1, 2, \ldots, \infty$, $\varphi_n \to \varphi_\infty$ *y* $u_n \in C([0,T_n], Y)$ *son las soliciones respectivas de 2-1. Si* $T \in (0, T_\infty]$, *entonces las soluciones pueden extenderse si es necesario al intervalo* $[0,T]$ *para* n *suficientemente grande y*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \|u_n(t) - u_\infty(t)\|_Y = 0.$$

Se dice que es globalmente bien planteado si el intervalo de existencia de la solución es $(0,\infty)$.

Tomado de [Rafael Jose Iorio Jr, 2001, p.227].

Lema 2.3.1. *Sean* a, b *números reales positivos y* $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$. *Si* $J_u = (1 - \partial_u^2)^{\frac{1}{2}}$ *y* $\langle v \rangle = (1 + v^2)^{\frac{1}{2}}$, *entonces para cualquier* $\theta \in (0,1)$

1.

$$\left\| \langle v \rangle^{(1-\theta)b} J_u^{\theta a} f \right\|_0 \le c \left\| \langle v \rangle^b f \right\|_0^{1-\theta} \|J_u^a f\|_0^\theta \le (1-\theta) \left\| \langle v \rangle^b f \right\|_0 + \theta \|J_u^a f\|_0 .$$

2.

$$\left\| J_u^{\theta a}\left(\langle v\rangle^{(1-\theta)b} f\right)\right\|_0 \leq c\left\|\langle v\rangle^b f\right\|_0^{1-\theta}\left\|J_u^a f\right\|_0^\theta \leq (1-\theta)\left\|\langle v\rangle^b f\right\|_0+\theta\left\|J_u^a f\right\|_0 .$$

Demostración. Ver Lema 1 [G. Fonseca, 2011]. □

Teorema 2.3.1 (Desigualdad de Gronwall)**.** *Sean $f, g, h \in C([a,b],\mathbb{R})$ con $g(t)\geq 0$ para todo $t\in[a,b]$, tales que*

$$h(t) \leq f(t)+\int_a^t h(s)g(s)ds,$$

para $a\leq t\leq b$. Entonces

$$h(t) \leq f(t)+\int_a^t h(s)g(s)e^{\int_a^t g(r)dr}ds,$$

para $a\leq t\leq b$. Además, si f es constante igual a cierto valor k entonces:

$$h(t)\leq ke^{\int_a^t g(r)dr}.$$

Demostración. Ver [Tello, 1979]. □

Definición 2.3.4. *Sea w una función localmente integrable no negativa en $\mathbb{R}$. Se dice que w cumple la condición A_p para $1<p<\infty$, si existe C, un número real positivo, tal que*

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I w\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I w^{-\frac{1}{p-1}}\right)\leq C,$$

para todo intervalo I abierto acotado no vacío en $\mathbb{R}$.

Tomado de [Zuazo and Zuazo., 1995, p,133].

Definición 2.3.5. *La transformada de Hilbert $\mathcal{H}$ en la variable x, se define como cualquiera de las siguientes expresiones equivalentes*

1.

$$\mathcal{H}^x f(x,y)=\frac{1}{\pi}v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\lambda,y)}{x-\lambda}d\lambda$$

2.

$$\widehat{\mathcal{H}^x f}(\xi,\eta)=-isgn(\xi)\widehat{f}(\xi,\eta)$$

para toda $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Tomado de [Zuazo and Zuazo., 1995, p. 51].

Teorema 2.3.2. *w satisface la condición A_p si, y sólo si, la transformada de Hilbert es un operador acotado en $L^p(w(x)dx)$. En otras palabras, w satisface la condición A_p si, y sólo si,*

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{H}f|^p \, w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f|^p \, w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2-2}$$

para toda $f \in L^p(w(x)dx)$.

Demostración. Ver [Hunt and Wheeden, 1973]. □

2.4. Derivada Fraccionaria y Derivada de Stein

Definición 2.4.1 (Derivada fraccionaria)**.** *La derivada fraccionaria se define como*

$$D^l f = (-\Delta)^{\frac{l}{2}} = \left(|\xi|^l \, \widehat{f}\right)^{\vee},$$

para $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, tal que $|\xi|^l \, \widehat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$.

Tomado de [Linares, 2009, p. 49].

Definición 2.4.2 (Derivada de Stein)**.** *La derivada de Stein se define para $b \in (0,1)$ y f medible en $\mathbb{R}^n$ con valores complejos, como*

$$\mathcal{D}^b f(x) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^{n+2b}} dy\right)^{1/2}.$$

El siguiente teorema se tiene tanto para la derivada de Stein como para la derivada fraccionada.

Teorema 2.4.1. *Sean $b \in (0,1)$ y $1 \leq p \leq \infty$. Si $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ son funciones medibles, entonces*

1. $\left\|\mathcal{D}^b(fg)\right\|_{L^p} \leq \|f\|_{\infty} \left\|\mathcal{D}^b g\right\|_{L^p} + \left\|g\mathcal{D}^b f\right\|_{L^p}$
2. $\left\|\mathcal{D}^b(fg)\right\|_{L^2} \leq \left\|f\mathcal{D}^b g\right\|_{L^2} + \left\|g\mathcal{D}^b f\right\|_{L^2}$

Demostración. Ver [Nahas and Ponce, 2009, Kenig and Vega, 1993, Kato and Ponce, 1988]. □

Definición 2.4.3. *Sea $s \in \mathbb{R}$, se define por $L_s^p(\mathbb{R}^2)$ el espacio de todas las funciones f en $L^p(\mathbb{R}^2)$ tales que $(1-\Delta)^{s/2} f \in L^p(\mathbb{R}^2)$. La norma en este espacio viene dada por*

$$\|f\|_{s,p} = \left\|(1-\Delta)^{s/2} f\right\|_{L^p}.$$

El siguiente teorema muestra la relación de los espacios $L_s^p(\mathbb{R}^2)$ con la derivada de Stein. Además dá una equivalencia entre la derivada fraccionaria y la derivada de Stein en términos de la norma en $L^p(\mathbb{R}^2)$.

Teorema 2.4.2. *Supongamos que $b \in (0,1)$ y $4/(2+2b) < p < \infty$. Entonces, $f \in L_b^p(\mathbb{R}^2)$ si, y sólo si,*

1. $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$.
2. $\mathcal{D}^b f(x) \in L^p(\mathbb{R}^2)$.

Además,

$$\|f\|_{b,p} = \left\|(1-\Delta)^{b/2} f\right\|_p \cong \|f\|_p + \left\|D^b f\right\|_p \cong \|f\|_p + \left\|\mathcal{D}^b f\right\|_p.$$

Demostración. Ver [Stein, 1961, Stein, 1970]. □

Teorema 2.4.3. *Sean $p \in (1,\infty)$ y $f \in L^p(\mathbb{R})$. Si para algún $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0+)$ y $f(x_0-)$ existen y son diferentes, entonces para cualquier $\delta > 0$, $D^{1/p} f \notin L_{loc}^p(B(x_0,\delta))$. En particular, $f \notin L_{\frac{1}{p}}(\mathbb{R})$.*

Proposición 2.4.4. *Si $\widehat{f}(0,\eta) = 0$ y $0 < \alpha < 1$ se tiene que:*

$$\left\|\mathcal{D}_\xi^\alpha \left(sgn(\xi)\widehat{f}\right)\right\|_0 \leq \left\|\widehat{f}\right\|_0 + \left\|\mathcal{D}_\xi \widehat{f}\right\|_0.$$

Demostración. Ver [Bolaños, 2018, p. 18]. □

Proposición 2.4.5. *Sea $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios de grado m y n respectivamente con $0 < m < n$, para $b \in (0,1)$, $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ y $\frac{P}{Q} \in C(\mathbb{R})$ se tiene:*

$$\left\|D_x^b \left(\frac{P}{Q}\varphi\right)\right\|_0 \leq c\left(\|\varphi\|_0 + \left\|\mathcal{D}_x^b \varphi\right\|_0\right).$$

Demostración. Ver [Bolaños, 2018, p. 12]. □

Lema 2.4.1. *Sea $0 < b < 1$, entonces*

$$\mathcal{D}_x^b \left(\frac{1}{(1+|x|)^n}\right) \leq \frac{C}{(1+|x|)^{1/2}}.$$

Demostración. Ver [Sánchez, 2015, p. 23]. □

Lema 2.4.2. *Sea $b \in (0,1)$ y $\alpha < 0$, entonces existe una constante $K(b)$ tal que*

$$\mathcal{D}_x^b\left(e^{\frac{i\alpha x}{1+|x|}}\right) \leq K(b)(-\alpha)^b.$$

Demostración. De la definición se sigue que

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{D}_x^b\left(e^{\frac{i\alpha}{1+|x|}}\right)\right)^2 &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|e^{\frac{i\alpha}{1+|x|}} - e^{\frac{i\alpha}{1+|y|}}\right|^2}{|x-y|^{1+2b}} dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|1 - e^{\frac{i\alpha}{1+|y|} - \frac{i\alpha}{1+|x|}}\right|^2}{|x-y|^{1+2b}} dy\end{aligned}$$

tomando $u = x - y$, obtenemos

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{D}_x^b\left(e^{\frac{i\alpha x}{1+|x|}}\right)\right)^2 &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|1 - e^{i\alpha\left(\frac{x-u}{1+|x-u|} - \frac{x}{1+|x|}\right)}\right|^2}{|u|^{1+2b}} du \\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{\left|1 - e^{i\alpha\left(\frac{x-u}{1+|x-u|} - \frac{x}{1+|x|}\right)}\right|^2}{|u|^{1+2b}} du + \int_{x}^{\infty} \frac{\left|1 - e^{i\alpha\left(\frac{x-u}{1+|x-u|} - \frac{x}{1+|x|}\right)}\right|^2}{|u|^{1+2b}} du \\ &= I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Supongamos $x > 0$, luego en I_1 se tiene que $x - u > 0$ y

$$\begin{aligned}\frac{x-u}{1+(x-u)} - \frac{x}{1+x} &= \frac{(x-u)(1+x) - x(1+(x-u))}{(1+x)(1+(x-u))} \\ &= \frac{x\left((1+x) - (1+(x-u)) - u(1+x)\right)}{(1+x)(1+(x-u))} \\ &= \frac{xu - u(1+x)}{(1+x)(1+(x-u))} \\ &= \frac{-u}{(1+x)(1+(x-u))} \\ &= f(u) = ug(u).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$I_1 = \int_{-\infty}^{x} \frac{\left|1 - e^{i\alpha \cdot ug(u)}\right|^2}{|u|^{1+2b}} du,$$

si $w = -\alpha u$, entonces

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\infty}^{-\alpha x} \frac{\left|1 - e^{-iw\cdot g\left(\frac{w}{-\alpha}\right)}\right|^2}{\left|\frac{w}{-\alpha}\right|^{1+2b} \cdot (-\alpha)} dw \\
&= (-\alpha)^{2b} \int_{-\infty}^{-\alpha x} \frac{\left|1 - e^{-iw\cdot g\left(\frac{w}{-\alpha}\right)}\right|^2}{|w|^{1+2b}} dw \\
&= (-\alpha)^{2b} \int_{-\infty}^{-1} \frac{\left|1 - e^{-iw\cdot g\left(\frac{w}{-\alpha}\right)}\right|^2}{|w|^{1+2b}} dw + (-\alpha)^{2b} \int_{-1}^{-\alpha x} \frac{\left|1 - e^{-iw\cdot g\left(\frac{w}{-\alpha}\right)}\right|^2}{|w|^{1+2b}} dw \\
&\leq (-\alpha)^{2b} \int_{-\infty}^{-1} \frac{4}{|w|^{1+2b}}\, dw + (-\alpha)^{2b} \int_{-1}^{-\alpha x} \frac{\left|1 - e^{-iw\cdot g\left(\frac{w}{-\alpha}\right)}\right|^2}{|w|^{1+2b}} dw \\
&= 4(-\alpha)^{2b}\, \frac{(-w)^{-2b}}{2b}\Bigg|_{-\infty}^{-1} + (-\alpha)^{2b} \int_{-1}^{-\alpha x} \frac{\left|1 - e^{-iw\cdot g\left(\frac{w}{-\alpha}\right)}\right|^2}{|w|^{1+2b}} dw \\
&= 4(-\alpha)^{2b}\, \frac{(-w)^{-2b}}{2b}\Bigg|_{-\infty}^{-1} + (-\alpha)^{2b} \int_{-1}^{-\alpha x} \frac{\left|1 - e^{-iw\cdot g\left(\frac{w}{-\alpha}\right)}\right|^2}{|w|^{1+2b}} dw \\
&= 2\frac{(-\alpha)^{2b}}{b} + I_{1,1}.
\end{aligned}$$

Ahora estimaremos $I_{1,1}$. Por la desigualdad

$$\left|e^{i\theta} - 1\right| = \left|\int_0^\theta e^{ix} dx\right| \leq \int_0^\theta \left|e^{ix}\right| dx = |\theta|\,.$$

y como $w \leq -\alpha x$ el cual implica $x + \frac{w}{\alpha} \geq 0$, entonces el numerador del integrando en $I_{1,1}$

$$\begin{aligned}
\left|1 - e^{-iw\cdot g\left(\frac{w}{-\alpha}\right)}\right| &\leq \left|iw \cdot g\left(\frac{w}{-\alpha}\right)\right| \\
&= \left|iw \cdot \frac{f\left(\frac{w}{-\alpha}\right)}{\frac{w}{-\alpha}}\right| \\
&= \left|\frac{w}{\left(1 + \left(x + \frac{w}{\alpha}\right)\right)(1 + x)}\right| \\
&\leq |w|\,.
\end{aligned}$$

Así pues,

$$I_{1,1} \leq (-\alpha)^{2b} \int_{-1}^{-\alpha x} \frac{|w|^2}{|w|^{1+2b}}\, dw = (-\alpha)^{2b} \int_{-1}^{-\alpha x} |w|^{1-2b}\, dw,$$

dado que la función $|w|^{1-2b}$ es par y positiva, vamos a considerar dos casos;

1. Si $-\alpha x \leq 1$

$$\begin{aligned} I_{1,1} &\leq (-\alpha)^{2b} \int_{-1}^{1} |w|^{1-2b}\, dw \\ &\leq 2(-\alpha)^{2b} \int_{0}^{1} w^{1-2b} dw \\ &= \frac{(-\alpha)^{2b}}{1-b}. \end{aligned}$$

2. Si $-\alpha x \geq 1$

$$\begin{aligned} I_{1,1} &\leq (-\alpha)^{2b} \int_{-1}^{1} |w|^{1-2b}\, dw + (-\alpha)^{2b} \int_{-1}^{-\alpha x} \frac{\left|1 - e^{-iw\cdot g\left(\frac{w}{-\alpha}\right)}\right|^2}{|w|^{1+2b}} dw \\ &\leq \frac{(-\alpha)^{2b}}{1-b} + 4(-\alpha)^{2b} \int_{1}^{\infty} w^{-1-2b} dw \\ &= \frac{(-\alpha)^{2b}}{1-b} + \frac{2(-\alpha)^{2b}}{b} \\ &= (-\alpha)^{2b}\, \frac{-b+2}{b-b^2} \\ &\leq \frac{2(-\alpha)^{2b}}{b-b^2}. \end{aligned}$$

Para la integral I_2, se tiene que $x \leq u$, luego $u - x \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{x-u}{1+(u-x)} - \frac{x}{1+x} &= \frac{(x-u)(1+x) - x(1+(u-x))}{(1+x)(1+(u-x)} \\ &= \frac{x(1+x) - u(1+x) - x(1+(u-x))}{(1+(u-x))\,(1+x)}, \end{aligned}$$

ahora bien, si $w = -\alpha u$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_x^\infty \frac{\left|1 - e^{i\alpha\left(\frac{x(1+x)-u(1+x)-x(1+(u-x))}{(1+(u-x))(1+x)}\right)}\right|^2}{|u|^{1+2b}} du \\
&= \int_x^\infty \frac{\left|1 - e^{i\alpha\left(\frac{x(1+x)-\frac{w}{-\alpha}(1+x)-x(1+(\frac{w}{-\alpha}-x))}{\left(1+(\frac{w}{-\alpha}-x)\right)(1+x)}\right)}\right|^2}{\left|\frac{w}{-\alpha}\right|^{1+2b}\cdot(-\alpha)} dw \\
&= (-\alpha)^{2b}\int_x^\infty \frac{\left|1 - e^{i\left(\frac{\alpha x\left[x-\left(\frac{w}{-\alpha}-x\right)\right]+w(1+x)}{\left(1+(\frac{w}{-\alpha}-x)\right)(1+x)}\right)}\right|^2}{|w|^{1+2b}} dw.
\end{aligned}
$$

1. Si $-\alpha x \geq 1$

$$
I_2 \leq (-\alpha)^{2b}\int_1^\infty \frac{4}{|w|^{1+2b}}\, dw = 2\frac{(-\alpha)^{2b}}{b}.
$$

2. Si $-\alpha x \leq 1$

$$
\begin{aligned}
I_2 &\leq (-\alpha)^{2b}\int_{-\alpha x}^1 \frac{\left|1 - e^{i\left(\frac{\alpha x\left[x-\left(\frac{w}{-\alpha}-x\right)\right]+w(1+x)}{\left(1+(\frac{w}{-\alpha}-x)\right)(1+x)}\right)}\right|^2}{|w|^{1+2b}} dw + 2\frac{(-\alpha)^{2b}}{b} \\
&\leq (-\alpha)^{2b}\int_{-\alpha x}^1 \frac{\left|\frac{\alpha x\left[x-\left(\frac{w}{-\alpha}-x\right)\right]+w(1+x)}{\left(1+(\frac{w}{-\alpha}-x)\right)(1+x)}\right|}{|w|^{1+2b}} dw + 2\frac{(-\alpha)^{2b}}{b} \\
&\leq (-\alpha)^{2b}\int_{-\alpha x}^1 \frac{9\,|w|^2}{|w|^{1+2b}} + 2\frac{(-\alpha)^{2b}}{b} \\
&\leq 9(-\alpha)^{2b}\int_0^1 |w|^{1-2b}\, dw + 2\frac{(-\alpha)^{2b}}{b} \\
&= 9\frac{(-\alpha)^{2b}}{2-2b} + 2\frac{(-\alpha)^{2b}}{b}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\left(\mathcal{D}_x^b\left(e^{\frac{i\alpha x}{1+|x|}}\right)\right)^2 &\leq 6\frac{(-\alpha)^{2b}}{b} + \frac{(-\alpha)^{2b}}{1-b} + \frac{2(-\alpha)^{2b}}{b-b^2} + 9\frac{(-\alpha)^{2b}}{2-2b} \\
&\leq K(b)(-\alpha)^{2b}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Lema 2.4.3. *Sea $b \in (0,1)$ y $\alpha < 0$, entonces existe $K(b)$ tal que*

$$\mathcal{D}_x^b \left(e^{i\alpha|x|}\right) \leq K(b)(-\alpha)^b.$$

Demostración. Tomando $y = u + x$ en la definición

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{D}_x^b \left(e^{i\alpha|x|}\right)\right)^2 &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|e^{i\alpha|x|} - e^{i\alpha|y|}\right|^2}{|x-y|^{1+2b}} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|e^{i\alpha|x|} - e^{i\alpha|u+x|}\right|^2}{|u|^{1+2b}} du \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|e^{-i|-\alpha x|} - e^{-i|-\alpha u-\alpha x|}\right|^2}{|u|^{1+2b}} du,
\end{aligned}$$

con $w = -\alpha u$,

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|e^{-i|-\alpha x|} - e^{-i|w-\alpha x|}\right|^2}{\left|\frac{w}{-\alpha}\right|^{1+2b} \cdot (-\alpha)} dw \\
&= (-\alpha)^{2b} \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|e^{-i|-\alpha x|} - e^{-i|w-\alpha x|}\right|^2}{|w|^{1+2b}} dw \\
&= (-\alpha)^{2b} I(-\alpha x).
\end{aligned}$$

Para acotar la integral $I(y)$, supongamos $|y| \geq 1$ y tomemos dos conjuntos B_1, B_2 tales que $\mathbb{R} = B_1 \cup B_2$ definidos por

$$B_1 = \{w \in \mathbb{R} \ ; |w| < 1\}, \qquad B_2 = \{w \in \mathbb{R} \ ; |w| \geq 1\}.$$

Aplicando el teorema del valor medio para $f(y) = e^{-i|y|}$, obtenemos que la integral $I(y)$ sobre B_1

$$\int_{B_1} \frac{\left|e^{-i|y|} - e^{-i|w+y|}\right|^2}{|w|^{1+2b}} dw \leq \int_{B_1} \frac{|w|^2}{|w|^{1+2b}} dw = \frac{1}{1-b}.$$

Para B_2

$$\int_{B_2} \frac{\left|e^{-i|y|} - e^{-i|w+y|}\right|^2}{|w|^{1+2b}} dw \leq \int_{B_2} \frac{4}{|w|^{1+2b}} dw = \int_1^{\infty} \frac{8}{|w|^{1+2b}} dw = \frac{4}{b}.$$

Supongamos $|y|<1$ y sean B_1, B_2, B_3 tales que $\mathbb{R}=B_1\cup B_2\cup B_3$ definidos por

$$B_1=\{w\in\mathbb{R}\,;|w|<|y|\}\,,\quad B_2=\{w\in\mathbb{R}\,;|w|\geq 1\}\,,\quad B_3=\{w\in\mathbb{R}\,;|y|\leq|w|<1\}\,.$$

Para B_1, B_2 se tiene de manera análoga al anterior caso, en B_3 aplicando el teorema del valor medio

$$\begin{aligned}\int_{B_3}\frac{\left|e^{-i|y|}-e^{-i|w+y|}\right|^2}{|w|^{1+2b}}dw &\leq \int_{B_3}|w|^{1-2b}\,dw\\ &= 2\int_{|y|}^{1}w^{1-2b}dw\\ &= \frac{1}{1-b}-\frac{2\,|y|^{2-2b}}{2-2b}\\ &< \frac{1}{1-b},\end{aligned}$$

luego

$$\left(\mathcal{D}_x^b\left(e^{\frac{i\alpha}{1+|x|}}\right)\right)^2\leq\left(\frac{2}{1-b}+\frac{4}{b}\right)(-\alpha)^{2b}.$$

$\square$

3 Buen Planteamiento Local en $H^s(\mathbb{R}^2)$

En este capítulo estudiaremos el buen planetamiento local, en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^2)$ con $s > 1$, del problema de valor inicial,

$$\begin{cases} u_t + \epsilon\mathcal{H}^x u_{xt} + \mathcal{H}^y u_{xy} + uu_x = 0 \\ u(0) = \varphi \in H^s(\mathbb{R}^2) \end{cases} \tag{3-1}$$

el cual se escribe como,

$$\begin{cases} u_t + Au = Fu^2 \\ u(0) = \varphi \in H^s(\mathbb{R}^2) \end{cases} \tag{3-2}$$

donde A y F son los operadores

$$A = \frac{\mathcal{H}^y \partial_x \partial_y}{I + \epsilon\mathcal{H}^x \partial_x}, \tag{3-3}$$

$$F = -\frac{1}{2}\frac{\partial_x}{I + \epsilon\mathcal{H}^x \partial_x}. \tag{3-4}$$

Proposición 3.0.1. *La aplicación $\mathbf{U} : \mathbb{R} \longmapsto \mathcal{B}(H^s(\mathbb{R}^2))$ definida por $\mathbf{U}(t)\varphi = e^{-At}\varphi = \left(e^{-\frac{it|\eta|\xi}{1+\epsilon|\xi|}}\widehat{\varphi}\right)^\vee$ para $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^2)$, es un grupo unitario fuertemente continuo.*

Demostración. Para cada $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{U}(t)$ es un operador lineal acotado. En efecto, sea $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}(t)\varphi\|_s^2 &= \left\| \left(e^{-\frac{it|\eta|\xi}{1+\epsilon|\xi|}}\widehat{\varphi}\right)^\vee \right\|_s^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^s \left| e^{-\frac{it|\eta|\xi}{1+\epsilon|\xi|}}\widehat{\varphi} \right|^2 d\xi d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^s |\widehat{\varphi}|^2 d\xi d\eta \\ &= \|\varphi\|_s^2 . \end{aligned}$$

La linealidad se debe a que e^{-At} es un operador definido apartir de la transformada de Fourier y del multiplicador $e^{-\frac{it|\eta|\xi}{1+\epsilon|\xi|}}$.

$\mathbf{U}$ es un grupo uniparamétrico, en efecto,

1. $\mathbf{U}(t)$ es unitario para todo $t \in \mathbb{R}$, debido a la anterior igualdad.
2. Sean t, $t' \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(t+t')\varphi &= \left(e^{-\frac{i(t+t')|\eta|\xi}{1+\epsilon|\xi|}}\widehat{\varphi}\right)^{\vee} \\ &= \left(e^{-\frac{it|\eta|\xi}{1+\epsilon|\xi|}}e^{-\frac{it'|\eta|\xi}{1+\epsilon|\xi|}}\widehat{\varphi}\right)^{\vee} \\ &= \left(e^{-\frac{it|\eta|\xi}{1+\epsilon|\xi|}}\left(e^{-\frac{it'|\eta|\xi}{1+\epsilon|\xi|}}\widehat{\varphi}\right)\right)^{\vee} \\ &= \mathbf{U}(t)\mathbf{U}(t')\varphi.\end{aligned}$$

3. Sea $t_n \to 0$, definamos

$$f_n = \left(1+|\xi|^2+|\eta|^2\right)^s \left|\left(e^{-\frac{it_n|\eta|\xi}{1+\epsilon|\xi|}}-1\right)\widehat{\varphi}\right|^2,$$

y

$$g = \left(1+|\xi|^2+|\eta|^2\right)^s |\widehat{\varphi}|^2,$$

como f_n, g son integrables y $|f_n| \leq g$, por el teorema de la convergencia dominada se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{U}(t_n)\varphi - \mathbf{U}(0)\varphi\|_s^2 &= \lim_{n\to\infty} \left\|\left(\left(e^{-\frac{it_n|\eta|\xi}{1+\epsilon|\xi|}}-1\right)\widehat{\varphi}\right)^{\vee}\right\|_s^2 \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2}(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^s\left|\left(e^{-\frac{it_n|\eta|\xi}{1+\epsilon|\xi|}}-1\right)\widehat{\varphi}\right|^2 d\xi d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\lim_{n\to\infty}(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^s\left|e^{-\frac{it_n|\eta|\xi}{1+\epsilon|\xi|}}-1\right|^2|\widehat{\varphi}|^2 d\xi d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^s|1-1|^2|\widehat{\varphi}|^2 d\xi d\eta \\ &= 0.\end{aligned}$$

Luego, $\lim_{n\to\infty}\|\mathbf{U}(t_n)\varphi - \mathbf{U}(0)\varphi\|_s = 0.$

□

Nota 3.0.1. *La función $h(x) = \frac{x}{1+\epsilon x}$ para $x \geq 0$, $\epsilon > 0$ es continua y acotada por $C_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}$.*

Teorema 3.0.2. *F es un operador lineal acotado en $H^s(\mathbb{R}^2)$.*

Demostración. Sea $u \in H^s(\mathbb{R}^2)$, la linealidad de F se debe a que es un operador definido apartir de la transformada de Fourier y del multiplicador $-\frac{1}{2}\frac{i\xi}{1+\epsilon|\xi|}$, resta ver que es acotado,

$$\begin{aligned}
\|Fu\|_s^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(1+|\xi|^2+|\eta|^2\right)^s \left|-\frac{1}{2}\frac{i\xi}{1+\epsilon|\xi|}\widehat{u}\right|^2 d\xi d\eta \\
&= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} \left(1+|\xi|^2+|\eta|^2\right)^s \left(\frac{\xi}{1+\epsilon|\xi|}\right)^2 |\widehat{u}|^2 d\xi d\eta \\
&\leq \frac{C_\epsilon^2}{4}\int_{\mathbb{R}^2} \left(1+|\xi|^2+|\eta|^2\right)^s |\widehat{u}|^2 d\xi d\eta \\
&= \frac{C_\epsilon^2}{4}\|u\|_s^2 .
\end{aligned}$$

□

Nota 3.0.2. *Para u, $v \in H^s(\mathbb{R}^2)$ y $s > 1$, por los teoremas 3.0.2 y 2.2.3 se tiene que*

$$\begin{aligned}
\left\|F(u^2(t)) - F(v^2(t))\right\|_s &= \left\|F(u^2(t) - v^2(t))\right\|_s \\
&\leq \frac{C_\epsilon}{2}\left\|u^2(t) - v^2(t)\right\|_s \\
&= \frac{C_\epsilon}{2}\left\|(u(t)-v(t))\,(u(t)+v(t))\right\|_s \\
&\leq \frac{C_\epsilon C_s}{2}\left\|u(t)-v(t)\right\|_s \left\|u(t)+v(t)\right\|_s .
\end{aligned}$$

3.1. Existencia y Unicidad

Por propiedades de la transformada de Fourier la ecuación (3-2), es equivalente a la ecuación integral

$$u(t) = e^{-At}\varphi + \int_0^t e^{-A(t-t')}F(u^2(t'))dt', \tag{3-5}$$

la cual está bien definida en $H^s(\mathbb{R}^2)$ para $s > 1$, debido a los teoremas 3.0.2, 2.2.2 y la proposición 3.0.1. Más precisamente:

Teorema 3.1.1. *Para $s > 1$, sea $u \in C\left([0,T], H^s(\mathbb{R}^2)\right)$ solución de (3-1) . Entonces u satisface (3-5). Inversamente, si $u \in C\left([0,T], H^s(\mathbb{R}^2)\right)$ es una solución de (3-5), entonces u satisface (3-1), es decir,*

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h} + Au(t) - F(u^2(t))\right\|_{s-1} = 0.$$

Demostración. Ver [Rafael Jose Iorio Jr, 2001]. $\square$

Definamos para $s > 1$, la función dada por

$$\Psi(u(t)) = e^{-At}\varphi + \int_0^t e^{-A(t-t')}F(u^2(t'))dt'. \tag{3-6}$$

El objetivo en lo que sigue, es definir para $M > 0$ fijo, la anterior función en un espacio métrico completo adecuado, tal que sea una contracción. Así, podrémos utilizar el Teorema Punto Fijo de Banach para encontrar una única solución.

Teorema 3.1.2. *Si $s > 1$ y $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^2)$, el conjunto definido por*

$$\mathfrak{X}_s(T, M, \varphi) = \left\{u \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^2)); \left\|u(t) - e^{-At}\varphi\right\|_s < M, \text{ para todo } t \in [0,T]\right\} \tag{3-7}$$

es un espacio métrico completo, dotado de la métrica

$$d_s(u, v) = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - v(t)\|_s = \|u - v\|_{s,\infty}$$

para u, $v \in \mathfrak{X}_s(T, M, \varphi)$ y $T > 0$.

Demostración. Veamos primero que el espacio $\left(C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^2)), \|\cdot\|_{s,\infty}\right)$ es completo. Como $C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^2))$ es un espacio vectorial normado, sea u_n una sucesión de funciones en $C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^2))$ de Cauchy, es decir, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si m, $n \in \mathbb{N}$ y m, $n > \mathbb{N}$, entonces

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_n(t) - u_m(t)\|_s < \epsilon. \tag{3-8}$$

Para cada t fijo, como $H^s(\mathbb{R}^2)$ es un espacio de Hilbert, entonces existe $u_t \in H^s(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$u_n(t) \to u_t,$$

sea $u(t) = u_t$, si tomamos el limite cuando $m \to \infty$ en (3-8) tenemos

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_n(t) - u(t)\|_s < \epsilon.$$

Como la convergencia es uniforme y las funciones u_n son continuas, la función $u(t) \in C\left([0,T], H^s(\mathbb{R}^2)\right)$.

El conjunto $\mathfrak{X}_s(T, M, \varphi)$ es cerrado y no vacío, en efecto, $e^{-At}\varphi \in \mathfrak{X}_s(T, M, \varphi)$, sea $\phi \in \overline{\mathfrak{X}_s(T, M, \varphi)}$, entonces existe una sucesión $\phi_n \in \mathfrak{X}_s(T, M, \varphi)$ tal que

$$\phi_n \to \phi,$$

en la norma $\|\cdot\|_{s,\infty}$. Por lo tanto, para $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, se tiene que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\phi_n(t) - \phi(t)\|_s < \epsilon,$$

además, como $\left\|\phi_n(t) - e^{-At}\varphi\right\| < M$ para todo $t \in [0,T]$, entonces

$$\left\|\phi(t) - e^{-At}\varphi\right\|_s \leq \|\phi(t) - \phi_n(t)\|_s + \left\|\phi_n(t) - e^{-At}\varphi\right\|_s < \epsilon + M,$$

para todo ϵ. Luego

$$\left\|\phi(t) - e^{-At}\varphi\right\|_s < M,$$

así $\phi \in \mathfrak{X}_s(T, M, \varphi)$. $\square$

Lema 3.1.1. *Para $s > 1$ y $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^2)$, existe $T_1 > 0$ tal que si $u \in \mathfrak{X}_s(T_1, M, \varphi)$, entonces $\Psi(u) \in \mathfrak{X}_s(T_1, M, \varphi)$.*

Demostración. Se debe encontrar $T_1 > 0$, tal que $\left\|\Psi(u(t)) - e^{-At}\varphi\right\|_s < M$, para todo $t \in [0, T_1]$, es decir,

$$\begin{aligned}
\left\|e^{-At}\varphi + \int_0^t e^{-A(t-t')}F(u^2(t'))dt' - e^{-At}\varphi\right\|_s &= \left\|\int_0^t e^{-A(t-t')}F(u^2(t'))dt'\right\|_s \\
&\leq \int_0^t \left\|e^{-A(t-t')}F(u^2(t'))\right\|_s dt' \\
&= \int_0^t \left\|F(u^2(t'))\right\|_s dt' \\
&\leq \frac{C_\epsilon C_s}{2} \int_0^t \|u(t')\|_s^2 \, dt' \\
&\leq \frac{C_\epsilon C_s}{2} \int_0^t \left\|u(t') - e^{-At'}\varphi + e^{-At'}\varphi\right\|_s^2 dt' \\
&\leq \frac{C_\epsilon C_s}{2} \int_0^t \left(\left\|u(t') - e^{-At'}\varphi\right\|_s + \left\|e^{-At'}\varphi\right\|_s\right)^2 dt' \\
&< \frac{C_\epsilon C_s}{2} \int_0^t (M + \|\varphi\|_s)^2 \, dt' \\
&= \frac{C_\epsilon C_s}{2} (M + \|\varphi\|_s)^2 \, T_1,
\end{aligned}$$

luego si tomamos

$$0 < T_1 < \frac{2M}{C_\epsilon C_s \left(M + \|\varphi\|\right)^2},$$

se tiene el resultado esperado y la función $\Psi : \mathfrak{X}_s(T_1, M, \varphi) \to \mathfrak{X}_s(T_1, M, \varphi)$. $\square$

Lema 3.1.2. *Existe $T > 0$ tal que Ψ es un contracción, es decir, para algún $0 < \lambda < 1$ se tiene*

$$\|\Psi(u) - \Psi(v)\|_{s,\infty} \leq \lambda \|u - v\|_{s,\infty},$$

para todo u, $v \in \mathfrak{X}_s(T, M, \varphi)$.

Demostración. Sean u, $v \in \mathfrak{X}_s(T_2, M, \varphi)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\Psi(u) - \Psi(v)\|_{s,\infty} &= \sup_{t\in[0,T_2]} \left\| \int_0^t e^{-A(t-t')} \left(F(u^2(t')) - F(v^2(t')) \right) dt' \right\|_s \\
&\leq \sup_{t\in[0,T_2]} \int_0^t \left\| \left(F(u^2(t')) - F(v^2(t')) \right) dt' \right\|_s \\
&= \sup_{t\in[0,T_2]} \int_0^t \left\| \left(-\frac{1}{2} \frac{i\xi}{1+\epsilon|\xi|} (u^2(\widehat{t') - v}^2(t')) \right)^\vee dt' \right\|_s \\
&= \sup_{t\in[0,T_2]} \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^s \left| \frac{i\xi}{1+\epsilon|\xi|} \widehat{u^2(t')} - \widehat{v^2(t')} \right|^2 d\xi d\eta \right)^{\frac{1}{2}} dt' \\
&\leq \sup_{t\in[0,T_2]} C_\epsilon \int_0^t \left\| u^2(t') - v^2(t') \right\|_s dt' \\
&\leq \sup_{t\in[0,T_2]} C_\epsilon \int_0^t C_s \|u(t') - v(t')\|_s \|u(t') + v(t')\|_s dt' \\
&\leq \sup_{t\in[0,T_2]} 2C_\epsilon C_s (M + \|\varphi\|_s) \int_0^t \|u(t') - v(t')\|_s dt' \\
&\leq 2C_\epsilon C_s (M + \|\varphi\|_s) \sup_{t\in[0,T_2]} \int_0^t \|u(t') - v(t')\|_s dt' \\
&\leq 2C_\epsilon C_s (M + \|\varphi\|_s) \|u(t') - v(t')\|_{s,\infty} T_2,
\end{aligned}$$

tomando

$$0 < T_2 < \frac{1}{2C_\epsilon C_s (M + \|\varphi\|_s)},$$

se tiene que Ψ es una contracción para $T = \text{mín}\{T_1, T_2\}$. □

Teorema 3.1.3. *Para $s > 1$ y $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^2)$, existe $T = T(\|\varphi\|_s, M)$ tal que existe una solución en $\mathfrak{X}_s(T, M, \varphi)$ para el problema (3-1).*

Demostración. Como la función Ψ es una contracción en el espacio métrico completo $\mathfrak{X}_s(T, M, \varphi)$, por el teorema Punto Fijo de Banach Ψ posee un único punto fijo en $\mathfrak{X}_s(T, M, \varphi)$. □

El anterior teorema nos garantiza solución única en la bola $\mathfrak{X}_s(T, M, \varphi)$, verificaremos que ésta solución es única en $C([0,T], H^s(\mathbb{R}^2))$.

Teorema 3.1.4. *El problema de valor inicial (3-1) tiene única solución en $C([0,T], H^s(\mathbb{R}^2))$, para $s > 1$.*

Demostración. Sean φ_1, φ_2 condiciones iniciales de la ecuación (3-1), con soluciones respectivas $u_1 \in C([0,T_1]; H^s(\mathbb{R}^2))$ y $u_2 \in C([0,T_2]; H^s(\mathbb{R}^2))$. Tomemos $T = \text{mín}\{T_1, T_2\}$ y $t \in [0,T]$, entonces

$$\begin{aligned}
\|u_1(t) - u_2(t)\|_s &= \left\| e^{-At}(\varphi_1 - \varphi_2) + \int_0^t e^{-A(t-t')} \left(F(u_1^2(t')) - F(u_2^2(t')) \right) dt' \right\|_s \\
&\leq \left\| e^{-At}(\varphi_1 - \varphi_2) \right\|_s + \left\| \int_0^t e^{-A(t-t')} \left(F(u_1^2(t')) - F(u_2^2(t')) \right) dt' \right\|_s \\
&\leq \|(\varphi_1 - \varphi_2)\|_s + \int_0^t \left\| \left(F(u_1^2(t')) - F(u_2^2(t')) \right) \right\|_s dt' \\
&\leq \|(\varphi_1 - \varphi_2)\|_s + C_\epsilon C_s \int_0^t \|u_1(t') - u_2(t')\|_s \|u_1(t') + u_2(t')\|_s \, dt'.
\end{aligned}$$

Como u_1, u_2 y $\|\cdot\|_s$ son funciones continuas y $[0,T]$ es un intervalo compacto, existe

$$M_s = \text{máx} \left\{ \sup_{t\in[0,T]} \|u_1(t)\|_s, \sup_{t\in[0,T]} \|u_2(t)\|_s \right\}.$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall 2.3.1 tenemos

$$\begin{aligned}
\|u_1(t) - u_2(t)\|_s &\leq \|(\varphi_1 - \varphi_2)\|_s + 2C_\epsilon C_s M_s \int_0^t \|u_1(t') - u_2(t')\|_s \, dt' \\
&\leq \|(\varphi_1 - \varphi_2)\|_s \, e^{C_\epsilon C_s M_s t} \\
&\leq \|(\varphi_1 - \varphi_2)\|_s \, e^{C_\epsilon C_s M_s T}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\varphi_1 = \varphi_2$, se tiene que $u_1(t) = u_2(t)$ para todo $t \in [0,T]$. □

3.2. Dependencia Continua

Ahora veamos la dependecia continua de la solución respecto a la condición inicial.

Teorema 3.2.1. *Sea $s > 1$, $\varphi_n \in H^s(\mathbb{R}^2)$, para $n = 1, 2, \ldots \infty$ tal que $\varphi_n \to \varphi_\infty$. Sean $u_n \in C([0,T_n]; H^s(\mathbb{R}^2))$ las soluciones respectivas, donde $T_n = T_n(\|\varphi\|_s, M)$. Si $T \in (0, T_\infty)$, entonces las soluciones estan definidas en $[0,T]$ para n suficientemente grande y*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,T]} \|u_n(t) - u_\infty(t)\|_s = 0.$$

Demostración. Sea $T : H^s(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$T(\varphi) = \text{mín}\left\{\frac{2M}{C_\epsilon C_s\left(M + \|\varphi\|\right)^2}, \frac{1}{2C_\epsilon C_s\left(M + \|\varphi\|_s\right)}\right\},$$

la cual es continua debido a que sus componentes también lo son. Así, si $\varphi_n \to \varphi_\infty$ entonces $T(\varphi_n) \to T(\varphi_\infty)$. Ahora bien, sea $T \in (0, T(\varphi_\infty))$ luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T < T(\varphi_n)$ para todo $n > N$. Entonces u_n está bien definida en $[0, T]$ para todo $n > N$. Así $u_n \in \mathfrak{X}_s(T, M, \varphi_n)$, es decir, para todo t se tiene

$$\|u_n(t)\| - \left\|e^{-At}\varphi_n\right\|_s \le \left\|u_n(t) - e^{-At}\varphi_n\right\|_s < M,$$

luego,

$$\|u_n(t)\|_s < M + \|\varphi_n\|_s\,. \tag{3-9}$$

Por otro lado, tenemos que para $\epsilon = 1$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que si $m > M$, entonces

$$\|\varphi_m\|_s < 1 + \|\varphi_\infty\|_s\,,$$

luego existe

$$K = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n\|_s\,,$$

así (3-9) se convierte en

$$\|u_n(t)\|_s < M + K.$$

Por la demostración del teorema anterior tenemos que

$$\|u_n(t) - u_\infty(t)\|_s \le \|(\varphi_n - \varphi_\infty)\|_s\, e^{2C_\epsilon C_s(M+K)T},$$

por lo tanto se concluye

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \|u_n(t) - u_\infty(t)\|_s = 0.$$

□

Gracias al anterior teorema y a 3.1.4 el problema (3-1) está localmente bien planteado en $H^s(\mathbb{R}^2)$, para $s > 1$.

4 Espacios de Sobolev con pesos y continuación única

En este capítulo trabajaremos el buen plateamiento local del problema (3-1) en los espacios de Sobolev anisotrópicos, y en los espacios de Sobolev anisotrópicos con pesos. Por último se dará un resultado de continuación única.

4.1. Buen planteamiento local en $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$

Debido a los siguientes resultados se deduce la existencia, unicidad, y dependencia continua de las soluciones de (3-1) en $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$, de la misma manera que en el capítulo anterior.

Proposición 4.1.1. *La aplicación $\mathbf{U} : \mathbb{R} \longmapsto \mathcal{B}(H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2))$ definida por $\mathbf{U}(t)\varphi = e^{-At}\varphi$, donde A es definido en (3-3), es un grupo unitario fuertemente continuo.*

Proposición 4.1.2. *El operador F definido en (3-4) es acotado en $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$.*

Definamos el espacio

$$\mathfrak{X}_{s_1,s_2}(T,M,\varphi) = \Big\{u \in C([0,T], H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)); \left\|u(t) - e^{-At}\varphi\right\|_{s_1,s_2} < M, \text{ para todo } t \in [0,T]\Big\} \tag{4-1}$$

el cual es un espacio métrico completo con la métrica

$$d_{s_1,s_2}(f,g) = \sup_{t\in[0,T_s]} \|f(t) - g(t)\|_{s_1,s_2} = \|f - g\|_{s_1,s_2,\infty}$$

y la función

$$\Psi(u(t)) = e^{-At}\varphi + \int_0^t e^{-A(t-t')} F(u^2(t'))dt'. \tag{4-2}$$

Proposición 4.1.3. *Para $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} < 2$ y $\varphi \in H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$ se tienen los siguientes resultados para Ψ.*

1. *Existe $T_1(M, \|\varphi\|_{s_1,s_2}) \geq 0$, tal que para todo $\varphi \in \mathfrak{X}_{s_1,s_2}(T_1,M,\varphi)$, $\Psi(\varphi) \in \mathfrak{X}_{s_1,s_2}(T_2,M,\varphi)$.*

2. Existe $T_2(M, \|\varphi\|_{s_1,s_2}) \geq 0$, tal que Ψ es un contracción.

Teorema 4.1.4. *Para $\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2} < 2$ y $\varphi \in H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$, existen $T = T(\|\varphi\|_{s_1,s_2}, M)$ y una única función $u \in C([0,T]; H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2))$ que satisfacen la ecuación (3-1).*

Teorema 4.1.5. *Sea $\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2} < 2$, $\varphi_n \in H^s(\mathbb{R}^2)$, para $n = 1, 2, \dots \infty$ tal que $\varphi_n \to \varphi_\infty$. Sea $u_n \in C([0,T_n]; H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2))$ las soluciones respectivas, donde $T_n = T_n(\|\varphi\|_{s_1,s_2}, M)$. Si $T \in (0, T_\infty)$, entonces las soluciones estan definidas en $[0,T]$ para n suficientemente grande y*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,T]} \|u_n(t) - u_\infty(t)\|_{s_1,s_2} = 0.$$

La demostración de las proposiciones y teoremas anteriores es análoga a la realizada en el capítulo anterior para $H^s(\mathbb{R}^2)$. Por lo tanto, el problema (3-2) está bien planteado localmente en $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$.

4.2. Buen planteamiento local en $\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}$

En esta sección estudiaremos el buen plateamiento local en los espacios $\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}$ de (3-2) para $\epsilon = 1$. Para ello es suficiente mostrar que los operadores F y $\mathbf{U}(t)$ son acotados para todo $t \geq 0$, en estos espacios.

Observemos que

$$\begin{aligned}
\partial_\xi \left(\frac{\xi}{1+|\xi|}\right) &= \frac{1}{(1+|\xi|)^2}, \\
\partial_\xi^2 \left(\frac{\xi}{1+|\xi|}\right) &= -\frac{2\, sgn(\xi)}{(1+|\xi|)^3}, \\
\partial_\xi^3 \left(\frac{\xi}{1+|\xi|}\right) &= -4\delta_\xi + \frac{6}{(1+|\xi|)^4}.
\end{aligned}$$

Proposición 4.2.1. *F es un operador acotado en $\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}$ para $r_1 < \frac{5}{2}$.*

Demostración. La linealidad se debe a que F actúa como un operador de multiplicación en la transformada.
Para la acotación, sea $v \in \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}$, dado que

$$\|F(v)\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}} = \|F(v)\|_{s_1,s_2} + \|F(v)\|_{L^2_{r_1,0}} + \|F(v)\|_{L^2_{0,r_2}}$$

basta con mostrar que cada término en el miembro derecho de la igualdad es acotado en el espacio. Así

$$\begin{aligned}
\|F(v)\|^2_{s_1,s_2} &= \int_{\mathbb{R}^2} (1+|\xi|^{s_1}+|\eta|^{s_2})^2 \left|\widehat{F(v)}\right|^2 d\xi\, d\eta \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (1+|\xi|^{s_1}+|\eta|^{s_2})^2 \left|\left(-\frac{1}{2}\frac{i\xi}{1+|\xi|}\right)\widehat{v}\right|^2 d\xi\, d\eta \\
&\leq \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} (1+|\xi|^{s_1}+|\eta|^{s_2})^2 \left|\widehat{v}\right|^2 d\xi\, d\eta \\
&\leq \|v\|^2_{s_1,s_2}.
\end{aligned}$$

Además, por el teorema de Plancherel

$$\begin{aligned}
\|F(v)\|_{L^2_{0,r_2}} &= \|y^{r_2}F(v)\|_0 \\
&= \|F(y^{r_2}v)\|_0 \\
&= \left\|\widehat{F(y^{r_2}v)}\right\|_0 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left|-\frac{1}{2}\frac{i\xi}{1+|\xi|}\right|^2 \left|\widehat{y^{r_2}v}\right|^2 d\xi\, d\eta \\
&\leq \frac{1}{4}\|y^{r_2}v\|_0 \\
&= \|v\|_{L^2_{0,r_2}}.
\end{aligned}$$

Para estimar $\|F(v)\|_{L^2_{r_1,0}}$ primero tomemos $r_1 = 1$, así

$$\begin{aligned}
\|F(v)\|_{L^2_{1,0}} &= \|xF(v)\|_0 \\
&= \left\|\partial_\xi\widehat{F(v)}\right\|_0 \\
&= \left\|\partial_\xi\left(-\frac{1}{2}\frac{i\xi}{1+|\xi|}\,\widehat{v}\right)\right\|_0 \\
&= \frac{1}{2}\left(\left\|\partial_\xi\left(\frac{\xi}{1+|\xi|}\right)\widehat{v}\right\|_0 + \left\|\left(\frac{\xi}{1+|\xi|}\right)\cdot\partial_\xi\widehat{v}\right\|_0\right) \\
&\leq \left\|\frac{1}{(1+|\xi|)^2}\,\widehat{v}\right\|_0 + \|\partial_\xi\widehat{v}\|_0 \\
&\leq \|\widehat{v}\|_0 + \|\partial_\xi\widehat{v}\|_0 \\
&\leq C_{r_1}\|v\|_{L^2_{1,0}},
\end{aligned}$$

ahora bien, si $r_1 = 2$

$$\begin{aligned}
\|F(v)\|_{L^2_{2,0}} &= \left\|x^2 F(v)\right\|_0 \\
&= \left\|\partial_\xi^2\left(-\frac{1}{2}\frac{i\xi}{1+|\xi|}\widehat{v}\right)\right\|_0 \\
&= \left\|\partial_\xi^2\left(-\frac{1}{2}\frac{i\xi}{1+|\xi|}\right)\widehat{v}\right\|_0 + 2\left\|\partial_\xi\left(-\frac{1}{2}\frac{i\xi}{1+|\xi|}\right)\partial_\xi\widehat{v}\right\|_0 + \left\|\left(-\frac{1}{2}\frac{i\xi}{1+|\xi|}\right)\partial_\xi^2\widehat{v}\right\|_0 \\
&\leq \left\|\frac{sgn(\xi)}{(1+|\xi|)^3}\widehat{v}\right\|_0 + \left\|\frac{1}{(1+|\xi|)^2}\partial_\xi\widehat{v}\right\|_0 + \left\|\partial_\xi^2\widehat{v}\right\|_0 \\
&\leq \|\widehat{v}\|_0 + \|\partial_\xi\widehat{v}\|_0 + \left\|\partial_\xi^2\widehat{v}\right\|_0 \\
&\leq C_{r_2}\|v\|_{L^2_{2,0}}.
\end{aligned}$$

Por el teorema de interpolación de Stein-Weiss (Teorema 5.4.1 de [Bergh and Löfström, 1976]) y en particular las dos estimaciones anteriores se tiene que

$$\|x^r F(v)\|_0 \leq C_r \|x^r v\|_0, \quad \text{para todo } 0 \leq r \leq 2. \tag{4-3}$$

Ahora para $2 < r_1 < \frac{5}{2}$, tomemos $r_1 = 2 + b$ donde $0 < b < \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
\|F(v)\|_{L^2_{r_1,0}} &= \left\|x^b\left(x^2 F(v)\right)\right\|_0 \\
&= \left\|D_\xi^b\left(\partial_\xi^2\left(-\frac{1}{2}\frac{i\xi}{1+|\xi|}\widehat{v}\right)\right)\right\|_0 \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\left\|D_\xi^b\left(\partial_\xi^2\left(\frac{i\xi}{1+|\xi|}\right)\widehat{v}\right)\right\|_0 + \left\|D_\xi^b\left(\partial_\xi\left(\frac{i\xi}{1+|\xi|}\right)\partial_\xi\widehat{v}\right)\right\|_0\right) + \left\|D_\xi^b\left(-\frac{1}{2}\frac{i\xi}{1+|\xi|}\partial_\xi^2\widehat{v}\right)\right\|_0 \\
&= \left\|D_\xi^b\left(\frac{sgn(\xi)}{(1+|\xi|)^3}\widehat{v}\right)\right\|_0 + \left\|D_\xi^b\left(\frac{1}{(1+|\xi|)^2}\partial_\xi\widehat{v}\right)\right\|_0 + \left\|D_\xi^b\left(\frac{i\xi}{1+|\xi|}\partial_\xi^2\widehat{v}\right)\right\|_0 \\
&= D_1 + D_2 + D_3
\end{aligned}$$

en el término D_1 utilizamos el hecho de que $\mathcal{H}$ es un operador acotado en los espacios con peso $x^{2\theta}$, así por el teorema 2.3.2 y la proposición 2.4.5

$$\begin{aligned}
\left\| D^b_\xi \left(\frac{sgn(\xi)}{(1+|\xi|)^3} \widehat{v} \right) \right\|_0 &= \left\| |x|^b \, \mathcal{H} \left(\frac{1}{(1+|\xi|)^3} \widehat{v} \right)^\vee \right\|_0 \\
&\leq c^* \left\| |x|^b \left(\frac{1}{(1+|\xi|)^3} \widehat{v} \right)^\vee \right\|_0 \\
&= c^* \left\| D^b_\xi \left(\frac{1}{(1+|\xi|)^3} \widehat{v} \right) \right\|_0 \\
&\leq c \left(\|\widehat{v}\|_0 + \left\| \mathcal{D}^b_\xi \widehat{v} \right\|_0 \right) \\
&\leq c \left(\|v\|_0 + \left\| |x|^b \, v \right\|_0 \right) \\
&\leq c_{r_1} \|v\|_{L^2_{r_1,0}} .
\end{aligned}$$

En virtud de la proposición 2.4.5 para D_2

$$\begin{aligned}
\left\| D^b_\xi \left(\frac{1}{(1+|\xi|)^2} \partial_\xi \widehat{v} \right) \right\|_0 &\leq c \left(\|\partial_\xi \widehat{v}\|_0 + \left\| \mathcal{D}^b_\xi \partial_\xi \widehat{v} \right\|_0 \right) \\
&= c \left(\| |x| \, v \|_0 + \left\| |x|^{1+b} \, \widehat{v} \right\|_0 \right) \\
&\leq k_{r_1} \|v\|_{L^2_{r_1,0}} ,
\end{aligned}$$

para estimar D_3 tenemos presente la ecuación (4-3), así

$$\begin{aligned}
\left\| D^b_\xi \left(-\frac{1}{2} \frac{i\xi}{1+|\xi|} \partial^2_\xi \widehat{v} \right) \right\|_0 &= \left\| |x|^b \, F(x^2 v) \right\|_0 \\
&\leq C_b \left\| |x|^b \, x^2 v \right\|_0 \\
&\leq C_b \|v\|_{L^2_{r_1,0}} .
\end{aligned}$$

Quedando así demostrada la proposición. □

A continuación mostraremos que el operador $\mathbf{U}(t)$ es acotado en ciertos espacios $\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, considerando en principio dos casos; primero valores enteros; luego valores reales entre estos enteros.

Consideremos $E(\xi,\eta,t)=e^{\frac{-it\xi|\eta|}{1+|\xi|}}$ y sus primeras derivadas con respecto a ξ y a η,

$$
\begin{aligned}
\partial_\xi E(\xi,\eta,t) &= -\frac{it\left|\eta\right|}{\left(1+|\xi|\right)^2}E(t,\xi,\eta),\\
\partial_\xi^2 E(\xi,\eta,t) &= \frac{2itsgn(\xi)\left|\eta\right|}{\left(1+|\xi|\right)^3}E(t,\xi,\eta)-\frac{t^2\left|\eta\right|^2}{\left(1+|\xi|\right)^4}E(t,\xi,\eta),\\
\partial_\xi^3 E(\xi,\eta,t) &= \frac{it^3\left|\eta\right|^3}{\left(1+|\xi|\right)^6}E(t,\xi,\eta)+\frac{6t^2\left|\eta\right|^2 sgn(\xi)}{\left(1+|\xi|\right)^5}E(t,\xi,\eta)-\frac{6it\left|\eta\right|}{\left(1+|\xi|\right)^4}E(t,\xi,\eta)+4it\left|\eta\right|\delta_0,\\
\partial_\eta E(\xi,\eta,t) &= -\frac{it\xi sgn(\eta)}{1+|\xi|}E(t,\xi,\eta),\\
\partial_\eta^2 E(\xi,\eta,t) &= -\frac{t^2\xi^2}{\left(1+|\xi|\right)^2}E(t,\xi,\eta)-\frac{it\xi\delta_0}{1+|\xi|}E(t,\xi,\eta),\\
\partial_\eta^3 E(\xi,\eta,t) &= \frac{it^3\xi^3 sgn(\eta)}{\left(1+|\xi|\right)^3}E(t,\xi,\eta)-\frac{it\xi}{1+|\xi|}\delta_0'.
\end{aligned}
$$

Proposición 4.2.2. *Sea* $\mathbf{U}(t)=e^{-At}$, *para* s_1, $s_2\in\mathbb{R}$ *y* $r_1\in\mathbb{N}$ *con* $s_2\geq r_1$, *se tiene que*

1. *Si* $r_1=1$ *o* 2,

$$\left\|\mathbf{U}(t)\varphi\right\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,0}}\leq P_{r_1}(t)\left\|\varphi\right\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,0}},$$

donde $P_r(t)$ *es un polinomio de grado* r_1 *con coeficientes positivas.*

2. *Si* $r_1\geq 3$ *y* $\varphi\in\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,0}(\mathbb{R}^2)$, $\mathbf{U}(t)\varphi\in C\left([0,\infty];\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,0}\right)$ *si, y sólo si*

$$\partial_\xi^j\widehat{\varphi}(0,\eta)=0,\ \textit{para todo}\ j=0,1,\cdots,r_1-3.$$

Demostración. Sea $\varphi\in\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,0}(\mathbb{R}^2)$, entonces

1. Si $r_1 = 1$, por el teorema de Plancherel

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{1,0}} &= \|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{s_1,s_2} + \|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{L^2_{1,0}} \\
&= \left\|\left(1+|\xi|^{s_1}+|\eta|^{s_2}\right)e^{-\frac{it|\eta|\xi}{1+|\xi|}}\widehat{\varphi}\right\|_0 + \|x\mathbf{U}(t)\varphi\|_0 \\
&\leq \|\left(1+|\xi|^{s_1}+|\eta|^{s_2}\right)\widehat{\varphi}\|_0 + \|\partial_\xi\left(E\cdot\widehat{\varphi}\right)\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_{s_1,s_2} + \|\partial_\xi E\cdot\widehat{\varphi}\|_0 + \|E\cdot\partial_\xi\widehat{\varphi}\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_{s_1,s_2} + \left\|\frac{-it\,|\eta|}{(1+|\xi|)^2}\widehat{\varphi}\right\|_0 + \|\partial_\xi\widehat{\varphi}\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_{s_1,s_2} + t\,\||\eta|\,\widehat{\varphi}\|_0 + \|\varphi\|_{L_{1,0}} \\
&\leq \|\varphi\|_{s_1,s_2} + c_{s_2}t\,\|\left(1+|\xi|^{s_1}+|\eta|^{s_2}\right)\widehat{\varphi}\|_0 + \|\varphi\|_{L_{1,0}} \quad (s_2\geq 1) \\
&\leq (1+c_{s_2}t)\left(\|\varphi\|_{s_1,s_2} + \|\varphi\|_{L_{1,0}}\right) \\
&\leq P_{r_1}(t)\,\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,0}}\,.
\end{aligned}$$

2. Si $r_1 = 2$,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{2,0}} &= \|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{s_1,s_2} + \|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{L^2_{2,0}} \\
&= \left\|\left(1+|\xi|^{s_1}+|\eta|^{s_2}\right)e^{-\frac{it|\eta|\xi}{1+|\xi|}}\widehat{\varphi}\right\|_0 + \left\|x^2\mathbf{U}(t)\varphi\right\|_0 \\
&\leq \|\left(1+|\xi|^{s_1}+|\eta|^{s_2}\right)\widehat{\varphi}\|_0 + \left\|\partial_\xi^2\left(E\cdot\widehat{\varphi}\right)\right\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_{s_1,s_2} + \left\|\partial_\xi^2 E\cdot\widehat{\varphi}\right\|_0 + 2\,\|\partial_\xi E\cdot\partial_\xi\widehat{\varphi}\|_0 + \left\|E\cdot\partial_\xi^2\widehat{\varphi}\right\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_{s_1,s_2} + \left\|\frac{2itsgn(\xi)\,|\eta|}{(1+|\xi|)^3}E\cdot\widehat{\varphi}\right\|_0 + \left\|\frac{t^2\,|\eta|^2}{(1+|\xi|)^4}E\cdot\widehat{\varphi}\right\|_0 \\
&\quad + 2\left\|-\frac{it\,|\eta|}{(1+|\xi|)^2}E\cdot\partial_\xi\widehat{\varphi}\right\|_0 + \left\|E\cdot\partial_\xi^2\widehat{\varphi}\right\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_{s_1,s_2} + 2t\,\||\eta|\,\widehat{\varphi}\|_0 + t^2\left\||\eta|^2\,\widehat{\varphi}\right\|_0 + 2t\,\||\eta|\,\partial_\xi\widehat{\varphi}\|_0 + \left\|\partial_\xi^2\widehat{\varphi}\right\|_0
\end{aligned}$$

los dos primeros términos se estiman de la siguiente manera, debido a que $s_2 \geq 2$

$$\begin{aligned}
\|\eta\widehat{\varphi}\|_0 &\leq c_{s_2}\,\|\left(1+|\xi|^{s_1}+|\eta|^{s_2}\right)\widehat{\varphi}\|_0 \leq c_{s_2}\,\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{2,0}}\,, \\
\left\|\left(1+\eta^2\right)\widehat{\varphi}\right\|_0 &\leq c_{s_2}\,\|\left(1+|\xi|^{s_1}+|\eta|^{s_2}\right)\widehat{\varphi}\|_0 \leq c_{s_2}\,\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{2,0}}\,,
\end{aligned}$$

para estimar el tercer término se utiliza el lema (2.3.1), con $(1-\theta)b = 1$, $\theta a = 1$ y tomando $a=b=2$ se obtiene,

$$\begin{aligned}
\|\eta\partial_\xi\widehat{\varphi}\|_0 &\le \left\|\left(1+\eta^2\right)^{1/2}\partial_\xi\widehat{\varphi}\right\|_0 \\
&= \|xJ_y\varphi\|_0 \\
&\le \|\langle x\rangle J_y\varphi\|_0 \le \left(\left\|\langle x\rangle^2\varphi\right\|_0+\left\|J_y^2\varphi\right\|\right),
\end{aligned} \tag{4-4}$$

por otro lado tenemos que

$$\left\|\langle x\rangle^2\varphi\right\|_0=\left\|\left(1+x^2\right)\varphi\right\|_0\le\|\varphi\|_{s_1,s_2}+\|\varphi\|_{L_{2,0}}=\|\varphi\|_{\mathcal{F}_{2,0}^{s_1,s_2}},$$

como $s_2\ge 2$, entonces

$$\left\|J_y^2\varphi\right\|_0=\left\|\left(1+\eta^2\right)\varphi\right\|\le c_{s_2}\left\|\left(1+|\xi|^{s_1}+|\eta|^{s_2}\right)\varphi\right\|_0<c_{s_2}\|\varphi\|_{\mathcal{F}_{2,0}^{s_1,s_2}}.$$

Luego

$$\|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{\mathcal{F}_{r_1,0}^{s_1,s_2}}\le P_{r_1}(t)\|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r_1,0}^{s_1,s_2}}.$$

3. Para $r_1=3$, supongamos que $\widehat{\varphi}(0,\eta)=0$,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{\mathcal{F}_{3,0}^{s_1,s_2}} &= \|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{s_1,s_2}+\|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{L^2_{3,0}} \\
&= \left\|\left(1+|\xi|^{s_1}+|\eta|^{s_2}\right)e^{-\frac{it|\eta|\xi}{1+|\xi|}}\widehat{\varphi}\right\|_0+\left\|x^3\mathbf{U}(t)\varphi\right\|_0 \\
&\le \left\|\left(1+|\xi|^{s_1}+|\eta|^{s_2}\right)\widehat{\varphi}\right\|_0+\left\|\partial_\xi^3\left(E\cdot\widehat{\varphi}\right)\right\|_0 \\
&\le \|\varphi\|_{s_1,s_2}+\left\|\partial_\xi^3E\cdot\widehat{\varphi}\right\|_0+3\left\|\partial_\xi^2E\cdot\partial_\xi\widehat{\varphi}\right\|_0+3\left\|\partial_\xi E\cdot\partial_\xi^2\widehat{\varphi}\right\|_0 \\
&\quad+\left\|E\cdot\partial_\xi^3\widehat{\varphi}\right\|_0 \\
&\le \|\varphi\|_{s_1,s_2}+\left\|\frac{it^3|\eta|^3}{(1+|\xi|)^6}E\cdot\widehat{\varphi}\right\|_0+\left\|\frac{6t^2|\eta|^2sgn(\xi)}{(1+|\xi|)^5}E\cdot\widehat{\varphi}\right\|_0 \\
&\quad+\left\|\frac{6it|\eta|}{(1+|\xi|)^4}E\cdot\widehat{\varphi}\right\|_0+\|4it|\eta|\delta_0\widehat{\varphi}\|_0+3\left\|\frac{2itsgn(\xi)|\eta|}{(1+|\xi|)^3}E\cdot\partial_\xi\widehat{\varphi}\right\|_0 \\
&\quad+3\left\|\frac{t^2|\eta|^2}{(1+|\xi|)^4}E\cdot\partial_\xi\widehat{\varphi}\right\|_0+3\left\|-\frac{it|\eta|}{(1+|\xi|)^2}E\cdot\partial_\xi^2\widehat{\varphi}\right\|_0 \\
&\quad+\left\|\partial_\xi^3\widehat{\varphi}\right\|_0 \\
&\le \|\varphi\|_{s_1,s_2}+t^3\left\||\eta|^3\widehat{\varphi}\right\|_0+6t^2\left\||\eta|^2\widehat{\varphi}\right\|_0+6t\left\||\eta|\widehat{\varphi}\right\|_0+3t\left\||\eta|\partial_\xi\widehat{\varphi}\right\|_0 \\
&\quad+3t^2\left\||\eta|^2\partial_\xi\widehat{\varphi}\right\|_0+3t\left\||\eta|\partial_\xi^2\widehat{\varphi}\right\|_0+\left\|\partial_\xi^3\widehat{\varphi}\right\|_0,
\end{aligned}$$

para estimar el segundo, tercer y cuarto término utilizamos que $s_2 \geq 3$. En el quinto término se toma la acotación del caso anterior y en los siguientes términos se utiliza el lema 2.3.1.

Para el sexto término $(1-\theta)b = 2$, $\theta a = 1$, tomando $b = 3$ se obtiene $a = 3$,

$$\left\| |\eta|^2 \partial_\xi \widehat{\varphi} \right\|_0 \leq \left\| J_y^2 \left(\langle x \rangle \varphi \right) \right\|_0 \leq \left\| \langle x \rangle^3 \varphi \right\|_0 + \left\| J_y^3 \varphi \right\|_0 \leq c \left\| \varphi \right\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{3,0}},$$

de igual manera en el septimo término se utiliza el lema, con $(1-\theta)b = 1$, $\theta a = 2$, tomando $b = 3$ se obtiene $a = 3$,

$$\left\| |\eta| \partial_\xi^2 \widehat{\varphi} \right\|_0 \leq \left\| J_y \left(\langle x \rangle^2 \varphi \right) \right\|_0 \leq \left\| \langle x \rangle^3 \varphi \right\|_0 + \left\| J_y^3 \varphi \right\|_0 \leq c \left\| \varphi \right\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{3,0}},$$

por el teorema de Plancherel

$$\left\| \partial_\xi^3 \widehat{\varphi} \right\|_0 = \left\| x^3 \varphi \right\|_0 = \left\| \varphi \right\|_{L_{3,0}},$$

por lo tanto

$$\left\| \mathbf{U}(t) \varphi \right\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,0}} \leq P_{r_1}(t) \left\| \varphi \right\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,0}}.$$

Para la condición necesaria supongamos que $r_1 = 3$ y $\mathbf{U}(t)\varphi \in C([0,T]; \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{3,0})$, es decir, para todo $t \in [0,T]$, $x^3 \mathbf{U}(t)\varphi \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Por el teorema de Placherel, se tiene que $\partial_\xi^3 \left(E \cdot \widehat{\varphi} \right) \in L^2(\mathbb{R}^2)$, en particular $\partial_\xi^3 E \cdot \widehat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^2)$, donde aparece el término $4it\,|\eta|\,\delta_0 \widehat{\varphi}$, lo cual quiere decir $\widehat{\varphi}(0,\eta) \in L^2(\mathbb{R}^2)$, así $\widehat{\varphi}(0,\eta) = 0$ para todo $\eta \in \mathbb{R}$. Si $r_1 > 3$, se hace un razonamiento análogo al anterior.

$\square$

Proposición 4.2.3. *Sea $\mathbf{U}(t) = e^{-At}$, para s_1, $s_2 \in \mathbb{R}$ y $r_2 \in \mathbb{N}$ con $s_2 \geq r_1$, se tiene que*

1. *Si $r_2 = 1$*

$$\left\| \mathbf{U}(t) \varphi \right\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r_2}} \leq P_{r_2}(t) \left\| \varphi \right\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r_2}},$$

   donde $P_r(t)$ es un polinomio de grado r_2 con coeficientes positivos.

2. *Si $r_2 \geq 3$ y $\varphi \in \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r_2}(\mathbb{R}^2)$, $\mathbf{U}(t)\varphi \in C\left([0,\infty]; \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r_2}\right)$ si, y sólo si*

$$\partial_\eta^j \widehat{\varphi}(\eta, 0) = 0, \ \textit{para todo}\ j = 0, 1, \cdots, r_2 - 2.$$

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r_2}$, entonces

1. Si $r_2 = 1$,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,1}} &= \|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{s_1,s_2} + \|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{L^2_{0,1}} \\
&= \left\|(1+|\xi|^{s_1}+|\eta|^{s_2})\, e^{-\frac{it|\eta|\xi}{1+|\xi|}}\widehat{\varphi}\right\|_0 + \|y\mathbf{U}(t)\varphi\|_0 \\
&\leq \|(1+|\xi|^{s_1}+|\eta|^{s_2})\,\widehat{\varphi}\|_0 + \|\partial_\eta\,(E\cdot\widehat{\varphi})\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_{s_1,s_2} + \|\partial_\eta E\cdot\widehat{\varphi}\|_0 + \|E\cdot\partial_\eta\widehat{\varphi}\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_{s_1,s_2} + \left\|-\frac{it\xi sgn(\eta)}{1+|\xi|}E\cdot\widehat{\varphi}\right\|_0 + \|\partial_\eta\widehat{\varphi}\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_{s_1,s_2} + t\,\|\varphi\|_0 + \|\varphi\|_{L_{0,1}} \\
&\leq (1+t)\left(\|\varphi\|_{s_1,s_2} + \|\varphi\|_{L_{0,1}}\right) \\
&\leq P_{r_2}(t)\,\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r_2}}\,.
\end{aligned}$$

2. Si $r_2 = 2$,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,2}} &= \|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{s_1,s_2} + \|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{L^2_{0,2}} \\
&= \left\|(1+|\xi|^{s_1}+|\eta|^{s_2})\, e^{-\frac{it|\eta|\xi}{1+|\xi|}}\widehat{\varphi}\right\|_0 + \left\|y^2\mathbf{U}(t)\varphi\right\|_0 \\
&\leq \|(1+|\xi|^{s_1}+|\eta|^{s_2})\,\widehat{\varphi}\|_0 + \left\|\partial_\eta^2\,(E\cdot\widehat{\varphi})\right\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_{s_1,s_2} + \left\|\partial_\eta^2 E\cdot\widehat{\varphi}\right\|_0 + 2\,\|\partial_\eta E\cdot\partial_\eta\widehat{\varphi}\|_0 + \left\|E\cdot\partial_\eta^2\widehat{\varphi}\right\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_{s_1,s_2} + \left\|-\frac{t^2\xi^2}{(1+|\xi|)^2}E\cdot\widehat{\varphi}\right\|_0 + \left\|-\frac{it\xi\delta_0}{1+|\xi|}E\cdot\widehat{\varphi}\right\|_0 \\
&\quad + 2\left\|-\frac{it\xi sgn(\eta)}{1+|\xi|}E\cdot\partial_\eta\widehat{\varphi}\right\|_0 + \left\|E\cdot\partial_\eta^2\widehat{\varphi}\right\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_{s_1,s_2} + t^2\,\|\widehat{\varphi}\|_0 + t\,\|\widehat{\varphi}(\xi,0)\| + 2t\,\|\partial_\eta\widehat{\varphi}\|_0 + \left\|\partial_\eta^2\widehat{\varphi}\right\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_{s_1,s_2} + t^2\,\|\widehat{\varphi}\|_0 + 2t\,\|\varphi\|_{L^2_{0,2}} + \|\varphi\|_{L^2_{0,2}} \\
&\leq P_{r_2}(t)\,\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r_2}}\,.
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $r_2 = 2$ y $\mathbf{U}(t)\varphi \in C([0,T];\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r_2})$, entonces para todo $t\in[0,T]$ se tiene que $y^2\mathbf{U}(t)\varphi\in L^2(\mathbb{R}^2)$. Por el teorema de Plancherel $\partial_\eta\,(E\cdot\widehat{\varphi})\in L^2(\mathbb{R}^2)$, donde un término es $-\frac{it\xi\delta_0}{1+|\xi|}E\cdot\widehat{\varphi}$, luego $\widehat{\varphi}(\xi,0)=0$ para todo $\xi\in\mathbb{R}$. Para $r_2>2$ se realiza un proceso análogo.

$\square$

Corolario 2. *Sea* $\mathbf{U}(t) = e^{-At}$*, para* $s_1,\ s_2 \in \mathbb{R}$*,* $r_1 = 0,1,2$ *y* $r_2 = 0,1$ *se tiene para* $s_2 \geq r_1$ *que*

$$\|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}} \leq P_r(t)\, \|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}}\,,$$

donde $P_r(t)$ *es un polinomio de grado* $r = \max\{r_1, r_2\}$ *con coeficientes positivos.*

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}$, con $r_1 = 0,1,2$ y $r_2 = 0,1$, por las anteriores proposiciones se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}} &= \|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{s_1,s_2} + \|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{L^{s_1,s_2}_{r_1,0}} + \|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{L^{s_1,s_2}_{0,r_2}} \\
&\leq \|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,0}} + \|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r_2}} \\
&\leq P_{r_1}(t)\, \|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,0}} + P_{r_2}(t)\, \|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r_2}} \\
&\leq (P_{r_1}(t) + P_{r_2}(t)) \left(\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,0}} + \|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r_2}} \right) \\
&\leq P_r(t)\, \|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}}\,.
\end{aligned}$$

□

Proposición 4.2.4. *Sea* $\mathbf{U}(t) = e^{-At}$*, si* $s_1,\ s_2 \in \mathbb{R}$*,* $0 \leq r_1 < \frac{5}{2}$ *y* $s_2 \geq r_1$ *entonces para* $\varphi \in \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,0}$ *se tiene*

$$\|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{F^{s_1,s_2}_{r_1,0}} \leq C(t)\, \|\varphi\|_{F^{s_1,s_2}_{r_1,0}}\,,$$

donde $C(t)$ *es una función continua y creciente en* t*.*

Demostración. Como ya tenemos los casos enteros, ahora vamos considerar los casos reales, primero tomaremos $r_1 = b$ donde $0 < b < 1$. Utilizando el teorema 2.4.1, el lema 2.4.2 y las propiedades de la derivada de Stein, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,0}} &= \|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{s_1,s_2} + \|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{L^2_{r_1,0}} \\
&\leq \|\varphi\|_{s_1,s_2} + \left\| |x|^b\, \mathbf{U}(t)\varphi \right\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_{s_1,s_2} + \left\| \mathcal{D}^b_\xi\, (E \cdot \widehat{\varphi}) \right\|_0 \\
&= \|\varphi\|_{s_1,s_2} + \left\| \mathcal{D}^b_\xi\, (E) \cdot \widehat{\varphi} \right\|_0 + \left\| E \cdot \mathcal{D}^b_\xi \widehat{\varphi} \right\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_{s_1,s_2} + \left\| K(b) t^b\, |\eta|^b\, \widehat{\varphi} \right\|_0 + \left\| \mathcal{D}^b_\xi \widehat{\varphi} \right\|_0 \qquad s_2 \geq b \\
&\leq \|\varphi\|_{s_1,s_2} + K(b, s_2) t^b\, \|\varphi\|_{s_1,s_2} + \|\varphi\|_{L^2_{r_1,0}} \\
&\leq \left(1 + K(b, s_2) t^b\right) \|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,0}}\,.
\end{aligned}$$

Ahora vamos a tomar $r_1 = 1 + b$ donde $0 < b < 1$, utilizando las mismas herramientas que en el proceso anterior junto con el lema 2.4.2 tenemos

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,0}} &= \|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{s_1,s_2} + \|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{L^2_{r_1,0}} \\
&\leq \|\varphi\|_{s_1,s_2} + \left\| |x|^b\, x\mathbf{U}(t)\varphi \right\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_{s_1,s_2} + \left\| D^b_\xi \partial_\xi \left(E\cdot\widehat{\varphi}\right)\right\|_0 \\
&= \|\varphi\|_{s_1,s_2} + \left\| \mathcal{D}^b_\xi \left(\partial_\xi E\cdot\widehat{\varphi}\right)\right\|_0 + \left\| \mathcal{D}^b_\xi \left(E\cdot\partial_\xi\widehat{\varphi}\right)\right\|_0 \\
&= \|\varphi\|_{s_1,s_2} + \left\| \mathcal{D}^b_\xi \partial_\xi E\cdot\widehat{\varphi}\right\|_0 + \left\| \partial_\xi E\cdot \mathcal{D}^b_\xi\widehat{\varphi}\right\|_0 \\
&+ \left\| \mathcal{D}^b_\xi E\cdot\partial_\xi\widehat{\varphi}\right\|_0 + \left\| E\cdot \mathcal{D}^b_\xi\partial_\xi\widehat{\varphi}\right\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_{s_1,s_2} + \left\| \mathcal{D}^b_\xi \left(\frac{it\,|\eta|}{(1+|\xi|)^2}E\right)\cdot\widehat{\varphi}\right\|_0 + \left\| \frac{it\,|\eta|}{(1+|\xi|)^2}E\cdot \mathcal{D}^b_\xi\widehat{\varphi}\right\|_0 \\
&+ \left\| K(b)t^b\,|\eta|^b\cdot\partial_\xi\widehat{\varphi}\right\|_0 + \left\| \mathcal{D}\xi^b\partial_\xi\widehat{\varphi}\right\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_{s_1,s_2} + t\left\| \mathcal{D}^b_\xi \left(\frac{|\eta|}{(1+|\xi|)^2}\right)E\cdot\widehat{\varphi}\right\|_0 + t\left\| \left(\frac{|\eta|}{(1+|\xi|)^2}\mathcal{D}^b_\xi E\right)\cdot\widehat{\varphi}\right\|_0 \\
&+ t\left\| |\eta|\,\mathcal{D}^b_\xi\widehat{\varphi}\right\|_0 + K(b)t^b\left\| |\eta|^b\cdot\partial_\xi\widehat{\varphi}\right\|_0 + \left\| \mathcal{D}^b_\xi\partial_\xi\widehat{\varphi}\right\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_{s_1,s_2} + ct\left\| |\eta|\cdot\widehat{\varphi}\right\|_0 + K(b)t^{1+b}\left\| |\eta|^{1+b}\cdot\widehat{\varphi}\right\|_0 + t\left\| |\eta|\,\mathcal{D}^b_\xi\widehat{\varphi}\right\|_0 \\
&+ K(b)t^b\left\| |\eta|^b\cdot\partial_\xi\widehat{\varphi}\right\|_0 + \left\| \mathcal{D}^b_\xi\partial_\xi\widehat{\varphi}\right\|_0 \qquad (s_2\geq r_1) \\
&\leq \|\varphi\|_{s_1,s_2} + c_{s_2}t\,\|\varphi\|_{s_1,s_2} + K(b,s_2)t^{1+b}\,\|\varphi\|_{s_1,s_2} + t\left\| |\eta|\,D^b_\xi\widehat{\varphi}\right\|_0 \\
&+ K(b)t^b\left\| |\eta|^b\cdot\partial_\xi\widehat{\varphi}\right\|_0 + \|\varphi\|_{L^2_{r_1,0}},
\end{aligned}$$

para estimar el cuarto término utilizamos el lema 2.3.1 con $(1-\theta)b' = b$, $\theta a = 1$ donde $b' = 1 + b$ y $a = 1 + b$,

$$\left\| |\eta|\, D^b_\xi\widehat{\varphi}\right\|_0 \leq \left\| \langle x\rangle^b\, J_y(\varphi)\right\|_0 \leq \left\| \langle x\rangle^{1+b}\,\varphi\right\|_0 + \left\| J^{1+b}_y(\varphi)\right\|_0, \tag{4-5}$$

por un lado tenemos

$$\left\| \langle x\rangle^{1+b}\,\varphi\right\|_0 \leq C_{r_1}\left(\|\varphi\|_0 + \left\| |x|^{1+b}\,\varphi\right\|_0\right) = C_{r_1}\,\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,0}},$$

por otro

$$\left\| J^{1+b}_y(\varphi)\right\|_0 \leq C(2,s_2)\,\|\varphi\|_{s_1,s_2} \leq C(2,s_2)\,\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,0}}.$$

Para el quinto término $(1-\theta)b' = 1$, $\theta a = b$ donde $b' = 1+b$ y $a = 1+b$, para la cual resulta la misma estimación

$$\left\| |\eta|^b \, \partial_\xi \widehat{\varphi} \right\|_0 \leq \left\| \langle x \rangle \, J_y^b(\varphi) \right\|_0 \leq \left\| \langle x \rangle^{1+b} \, \varphi \right\|_0 + \left\| J_y^{1+b}(\varphi) \right\|_0 .$$

Por lo tanto

$$\| \mathbf{U}(t)\varphi \|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,0}} \leq C(t) \, \|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,0}} .$$

En el último caso vamos a tomar $r_1 = 2+b$ donde $0 < b < \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
\| \mathbf{U}(t)\varphi \|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,0}} &= \| \mathbf{U}(t)\varphi \|_{s_1,s_2} + \| \mathbf{U}(t)\varphi \|_{L^2_{r_1,0}} \\
&\leq \|\varphi\|_{s_1,s_2} + \left\| x^2 \, |x|^b \, \mathbf{U}(t)\varphi \right\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_{s_1,s_2} + \left\| D^b_\xi \partial^2_\xi \left(E \cdot \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 \\
&= \|\varphi\|_{s_1,s_2} + \left\| \mathcal{D}^b_\xi \left(\partial^2_\xi E \cdot \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 + 2 \left\| \mathcal{D}^b_\xi \left(\partial_\xi E \cdot \partial_\xi \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 + \left\| \mathcal{D}^b_\xi \left(E \cdot \partial^2_\xi \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 \\
&= \|\varphi\|_{s_1,s_2} + \left\| \mathcal{D}^b_\xi \left(\partial^2_\xi E \cdot \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 + 2 \left\| \mathcal{D}^b_\xi \left(\partial_\xi E \cdot \partial_\xi \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 + \left\| \mathcal{D}^b_\xi E \cdot \partial^2_\xi \widehat{\varphi} \right\|_0 \\
&\quad + \left\| E \cdot \mathcal{D}^b_\xi \partial^2_\xi \widehat{\varphi} \right\|_0 \\
&= \|\varphi\|_{s_1,s_2} + \left\| D^b_\xi \left(\frac{2itsgn(\xi) \, |\eta|}{(1+|\xi|)^3} E \cdot \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 + \left\| D^b_\xi \left(\frac{t^2 \, |\eta|^2}{(1+|\xi|)^4} E \cdot \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 \\
&\quad + 2 \left\| D^b_\xi \left(\frac{it \, |\eta|}{(1+|\xi|)^2} E \cdot \partial_\xi \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 + K(b) t^b \left\| |\eta|^b \cdot \partial^2_\xi \widehat{\varphi} \right\|_0 + \left\| D^b_\xi \partial^2_\xi \widehat{\varphi} \right\|_0 \\
&= \|\varphi\|_{s_1,s_2} + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + \|\varphi\|_{L^2_{r_1,0}} .
\end{aligned}$$

En la estimación del primer término C_1, tenemos en cuenta el resultado anterior junto con las proposiciones 2.4.5, 2.3.2, y el lema 2.4.2

$$\begin{aligned}
\left\| D^b_\xi \left(\frac{2itsgn(\xi) \, |\eta|}{(1+|\xi|)^3} E \cdot \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 &\leq 2ct \left(\| sgn(\xi) \, |\eta| \, E \cdot \widehat{\varphi} \|_0 + \left\| D^b_\xi \left(sgn(\xi) \, |\eta| \, E \cdot \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 \right) \\
&\leq 2ct \left(\| |\eta| \, E \cdot \widehat{\varphi} \|_0 + \left\| |x|^b \, \mathcal{H}^x \left(|\eta| \, E \cdot \widehat{\varphi} \right)^\vee \right\|_0 \right) \\
&\leq 2ct \left(\| |\eta| \cdot \widehat{\varphi} \|_0 + \left\| |x|^b \left(|\eta| \, E \cdot \widehat{\varphi} \right)^\vee \right\|_0 \right) \\
&\leq 2ct \left(c_{s_2} \|\varphi\|_{s_1,s_2} + \left\| D^b_\xi \left(|\eta| \, E \cdot \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 \right) \\
&\leq 2ct \left(c_{s_2} \|\varphi\|_{s_1,s_2} + \left\| \mathcal{D}^b_\xi \left(|\eta| \, E \right) \cdot \widehat{\varphi} \right\|_0 + \left\| |\eta| \, E \cdot \mathcal{D}^b_\xi \widehat{\varphi} \right\|_0 \right) \\
&\leq 2ct \left(c_{s_2} \|\varphi\|_{s_1,s_2} + K(b) t^b \left\| |\eta|^{1+b} \, \widehat{\varphi} \right\|_0 + \left\| |\eta| \, \mathcal{D}^b_\xi \widehat{\varphi} \right\|_0 \right) \\
&\leq 2ct \left(c_{s_2} \|\varphi\|_{s_1,s_2} + K(b,s_2) t^b \|\varphi\|_{s_1,s_2} + \left\| |\eta| \, D^b_\xi \widehat{\varphi} \right\|_0 \right)
\end{aligned}$$

en este último término tomamos la ecuación (4-5)

$$\left\||\eta|\, D_\xi^b \widehat{\varphi}\right\|_0 \leq \left\|\langle x\rangle^{1+b} \varphi\right\|_0 + \left\|J_y^{1+b}(\varphi)\right\|_0 \leq \left\|\langle x\rangle^{2+b} \varphi\right\|_0 + \left\|J_y^{2+b}(\varphi)\right\|_0 .$$

Ahora bien, en el término C_2 utilizamos la proposición 2.4.5, así

$$\begin{aligned}
\left\|D_\xi^b\left(\frac{t^2\,|\eta|^2}{(1+|\xi|)^4} E\cdot\widehat{\varphi}\right)\right\|_0 &\leq ct^2\left(\left\||\eta|^2\, E\cdot\widehat{\varphi}\right\|_0 + \left\|D_\xi^b\left(|\eta|^2\, E\cdot\widehat{\varphi}\right)\right\|_0\right)\\
&\leq ct^2\left(\left\||\eta|^2\,\widehat{\varphi}\right\|_0 + \left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(|\eta|^2\, E\right)\cdot\widehat{\varphi}\right\|_0 + \left\||\eta|^2\, E\cdot\mathcal{D}_\xi^b\widehat{\varphi}\right\|_0\right)\\
&\leq ct^2\left(c_{s_2}\,\|\varphi\|_{s_1,s_2} + K(b)t^b\left\||\eta|^{2+b}\,\widehat{\varphi}\right\|_0 + \left\||\eta|^2\,\mathcal{D}_\xi^b\widehat{\varphi}\right\|_0\right)\\
&\leq ct^2\left(c_{s_2}\,\|\varphi\|_{s_1,s_2} + K(b,s_2)t^b\,\|\varphi\|_{s_1,s_2} + \left\||\eta|^2\, D_\xi^b\widehat{\varphi}\right\|_0\right)
\end{aligned}$$

para el último término utilizamos el lema 2.3.1 con $(1-\theta)b' = b$, $\theta a = 2$ donde $b' = 2+b$ y $a = 2+b$,

$$\left\||\eta|^2\, D_\xi^b\widehat{\varphi}\right\|_0 \leq \left\|\langle x\rangle^b\, J_y^2(\varphi)\right\|_0 \leq \left\|\langle x\rangle^{2+b}\,\varphi\right\|_0 + \left\|J_y^{2+b}(\varphi)\right\|_0 ,$$

de los cuales tenemos

$$\left\|\langle x\rangle^{2+b}\,\varphi\right\|_0 \leq C_{r_1}\left(\|\varphi\|_0 + \left\||x|^{2+b}\,\varphi\right\|_0\right) = C_{r_1}\,\|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r_1,0}^{s_1,s_2}} \tag{4-6}$$

y

$$\left\|J_y^{2+b}(\varphi)\right\|_0 \leq c_{s_2}\,\|\varphi\|_{s_1,s_2} \leq c_{s_2}\,\|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r_1,0}^{s_1,s_2}} . \tag{4-7}$$

Para C_3 utilizamos la proposición 2.4.5 y las propiedades de la derivada de Stein

$$\begin{aligned}
\left\|D_\xi^b\left(\frac{it\,|\eta|}{(1+|\xi|)^2} E\cdot\partial_\xi\widehat{\varphi}\right)\right\|_0 &\leq ct\left(\left\||\eta|\, E\cdot\partial_\xi\widehat{\varphi}\right\|_0 + \left\|D_\xi^b\left(|\eta|\, E\cdot\partial_\xi\widehat{\varphi}\right)\right\|_0\right)\\
&\leq ct\left(\left\||\eta|\,\partial_\xi\widehat{\varphi}\right\|_0 + \left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(|\eta|\, E\right)\cdot\partial_\xi\widehat{\varphi}\right\|_0 + \left\||\eta|\, E\cdot\mathcal{D}_\xi^b\partial_\xi\widehat{\varphi}\right\|_0\right)\\
&\leq ct\left(\left\||\eta|\,\partial_\xi\widehat{\varphi}\right\|_0 + K(b)t^b\left\||\eta|^{1+b}\,\partial_\xi\widehat{\varphi}\right\|_0 + \left\||\eta|\, D_\xi^b\partial_\xi\widehat{\varphi}\right\|_0\right)
\end{aligned}$$

en el primer término empleamos la estimación hecha en (4-4)

$$\left\||\eta|\,\partial_\xi\widehat{\varphi}\right\|_0 \leq \left\|\langle x\rangle^2\,\varphi\right\|_0 + \left\|J_y^2(\varphi)\right\|_0 \leq \left\|\langle x\rangle^{2+b}\,\varphi\right\|_0 + \left\|J_y^{2+b}(\varphi)\right\|_0 ,$$

para los cuales tenemos los resultados de las ecuaciones (4-6) y (4-7). En el segundo término tomamos el lema 2.3.1 con $(1-\theta)b' = 1$, $\theta a = b+1$ donde $b' = 2+b$ y $a = 2+b$, así

$$\left\| |\eta|^{1+b} \partial_\xi \widehat{\varphi} \right\|_0 \leq \left\| \langle x \rangle J_y^{1+b} \right\|_0 \leq \left\| \langle x \rangle^{2+b} \varphi \right\|_0 + \left\| J_y^{2+b}(\varphi) \right\|_0 .$$

Siguiendo el mismo procedimiento para C_4 tomamos $(1-\theta)b' = 2$, $\theta a = b$ donde $b' = 2+b$ y $a = 2+b$

$$\left\| |\eta|^b \cdot \partial_\xi^2 \widehat{\varphi} \right\|_0 \leq \left\| \langle x \rangle^2 J_y^b(\varphi) \right\|_0 \leq \left\| \langle x \rangle^{2+b} \varphi \right\|_0 + \left\| J_y^{2+b}(\varphi) \right\|_0 .$$

Con lo cual se concluye

$$\| \mathbf{U}(t)\varphi \|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,0}} \leq c(t) \| \varphi \|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,0}} .$$

□

Proposición 4.2.5. *Sea* $\mathbf{U}(t) = e^{-At}$*,* s_1*,* $s_2 \in \mathbb{R}$ *y* $0 \leq r_2 < \frac{3}{2}$ *entonces para* $\varphi \in \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r_2}$ *se tiene*

$$\| \mathbf{U}(t)\varphi \|_{F^{s_1,s_2}_{0,r_2}} \leq C(t) \| \varphi \|_{F^{s_1,s_2}_{0,r_2}}$$

para $C(t)$ *una función continua y creciente en* t*.*

Demostración. Como ya tenemos el resultado para el caso entero, nos vamos a centrar en los valores reales. Sea $r_2 = b$ donde $0 < b < 1$, entonces por las propiedades de la derivada de Stein y por el lema 2.4.3 tomando $\alpha = -\frac{t\xi}{1+|\xi|}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\| \mathbf{U}(t)\varphi \|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r_2}} &\leq \| \mathbf{U}(t)\varphi \|_{s_1,s_2} + \| \mathbf{U}(t)\varphi \|_{L^2_{0,r_2}} \\
&\leq \| \varphi \|_{s_1,s_2} + \left\| |y|^b \, \mathbf{U}(t)\varphi \right\|_0 \\
&= \| \varphi \|_{s_1,s_2} + \left\| D_\eta^b \left(E \cdot \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 \\
&\leq \| \varphi \|_{s_1,s_2} + \left\| \mathcal{D}_\eta^b E \cdot \widehat{\varphi} \right\|_0 + \left\| E \cdot \mathcal{D}_\eta^b \widehat{\varphi} \right\|_0 \\
&\leq \| \varphi \|_{s_1,s_2} + K(b) t^b \| \widehat{\varphi} \|_0 + \left\| D_\eta^b \widehat{\varphi} \right\|_0 \\
&\leq \| \varphi \|_{s_1,s_2} + K(b) t^b \| \varphi \|_{s_1,s_2} + \| \varphi \|_{L^2_{0,r_2}} \\
&\leq (1 + K(b) t^b) \| \varphi \|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r_2}} .
\end{aligned}$$

Ahora para $r_2 = 1 + b$ con $0 < b < \frac{1}{2}$ utilizando las propiedades de la derivada de Stein tenemos

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r_2}} &\leq \|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{s_1,s_2} + \|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{L^2_{0,r_2}} \\
&\leq \|\varphi\|_{s_1,s_2} + \left\| |y|^b \, |y| \, \mathbf{U}(t)\varphi \right\|_0 \\
&= \|\varphi\|_{s_1,s_2} + \left\| D^b_\eta \partial_\eta \left(E \cdot \widehat{\varphi}\right) \right\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_{s_1,s_2} + \left\| \mathcal{D}^b_\eta \left(\partial_\eta E \cdot \widehat{\varphi}\right) \right\|_0 + \left\| \mathcal{D}^b_\eta \left(E \cdot \partial_\eta \widehat{\varphi}\right) \right\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_{s_1,s_2} + \left\| \mathcal{D}^b_\eta \left(\frac{it\xi sgn(\eta)}{1+|\xi|} E \cdot \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 + \left\| \mathcal{D}^b_\eta E \cdot \partial_\eta \widehat{\varphi} \right\|_0 + \left\| E \cdot \mathcal{D}^b_\eta \partial_\eta \widehat{\varphi} \right\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_{s_1,s_2} + B_1 + K(b) t^b \left\| \partial_\eta \widehat{\varphi} \right\| + \left\| D^b_\eta \partial_\eta \widehat{\varphi} \right\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_{s_1,s_2} + B_1 + K(b) t^b c_{r_2} \|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r_2}} + \|\varphi\|_{L^2_{0,r_2}}
\end{aligned}$$

En virtud de la definición de transformada de Hilbert en la variable y, la proposición 2.3.2 y el lema 2.4.3, tenemos para B_1 lo siguiente

$$\begin{aligned}
\left\| D^b_\eta \left(\frac{it\xi sgn(\eta)}{1+|\xi|} E \cdot \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 &\leq \left\| |y|^b \, \mathcal{H}^y \left(\frac{t\xi}{1+|\xi|} E \cdot \widehat{\varphi} \right)^\vee \right\|_0 \\
&\leq \left\| |y|^b \left(\frac{t\xi}{1+|\xi|} E \cdot \widehat{\varphi} \right)^\vee \right\|_0 \\
&\leq \left\| D^b_\eta \left(\frac{t\xi}{1+|\xi|} E \cdot \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 \\
&\leq t \left(\left\| \mathcal{D}^b_\eta E \cdot \widehat{\varphi} \right\|_0 + \left\| E \cdot \mathcal{D}^b_\eta \widehat{\varphi} \right\|_0 \right) \\
&\leq t \left(K(b) t^b \|\widehat{\varphi}\|_0 + \left\| D^b_\eta \widehat{\varphi} \right\|_0 \right) \\
&\leq t \left(K(b) t^{1+b} + 1 \right) \|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r_2}} .
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r_2}} \leq c(t) \|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r_2}}$$

□

Corolario 3. *Sea* $\mathbf{U}(t) = e^{-At}$*,* s_1*,* $s_2 \in \mathbb{R}$*,* $0 \leq r_2 < \frac{3}{2}$ *y* $0 \leq r_2 < \frac{3}{2}$ *entonces para* $\varphi \in \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}$*,*

$$\|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{F^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}} \leq C(t) \|\varphi\|_{F^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}}$$

para $C(t)$ *una función continua y creciente en* t*.*

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}$, con $0 \leq r_1 < \frac{5}{2}$ y $0 \leq r_2 < \frac{3}{2}$, por las anteriores proposiciones tenemos

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}} &= \|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{s_1,s_2} + \|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{L^{s_1,s_2}_{r_1,0}} + \|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{L^{s_1,s_2}_{0,r_2}} \\
&\leq \|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,0}} + \|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r_2}} \\
&\leq c_1(t)\,\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,0}} + c_2(t)\,\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r_2}} \\
&\leq (c_1(t) + c_2(t))\left(\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,0}} + \|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r_2}}\right) \\
&\leq c(t)\,\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}}\,.
\end{aligned}$$

□

Las anteriores proposiciones son suficientes para garantizar el buen planteamiento local de el problema (0-1) en los espacios $\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}$, puesto que deducen los siguientes resultados, cuyas demostraciones son análogas a las hechas en Capítulo 2 para $H^s(\mathbb{R}^2)$.

El espacio definido por

$$\mathfrak{X}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}(T,M,\varphi) = \left\{u \in C([0,T],\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2));\, \left\|u(t) - e^{-At}\varphi\right\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}} < M, \text{ para todo } t \in [0,T]\right\} \tag{4-8}$$

es un espacio métrico completo con la métrica

$$d_{s_1,s_2}(f,g) = \sup_{t\in[0,T_s]} \|f(t) - g(t)\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}} = \|f - g\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2},\infty}\,.$$

Para la función

$$\Psi(u(t)) = e^{-At}\varphi + \int_0^t e^{-A(t-t')}F(u^2(t'))dt'. \tag{4-9}$$

se tiene que:

Proposición 4.2.6. *Para s_1, s_2 reales positivos tales que $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} < 2$, y r_1, r_2 reales no negativos tales que $0 \leq r_1 < \frac{5}{2}$, $0 \leq r_2 < \frac{3}{2}$ con $s_2 \geq r_1$ y $\varphi \in \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2)$ se tienen los siguientes resultados para Ψ.*

1. *Existe $T_1(M, \|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}}) \geq 0$, tal que para todo $\varphi \in \mathfrak{X}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}(T_1,M,\varphi)$, $\Psi(\varphi) \in \mathfrak{X}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}(T_2,M,\varphi)$.*

2. *Existe $T_2(M, \|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}}) \geq 0$, tal que Ψ es un contracción.*

Teorema 4.2.7. *Para s_1, s_2 reales positivos tales que $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} < 2$, y r_1, r_2 reales no negativos tales que $0 \leq r_1 < \frac{5}{2}$, $0 \leq r_2 < \frac{3}{2}$ con $s_2 \geq r_1$ y $\varphi \in \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2)$, existe $T = T(\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}}, M)$ y una única función $u \in C([0,T];\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2))$ que satisfacen la ecuación (3-1).*

Teorema 4.2.8. *Sean s_1, s_2 reales positivos tales que $\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}<2$, y r_1, r_2 reales no negativos tales que $0\leq r_1<\frac{5}{2}$, $0\leq r_2<\frac{3}{2}$ con $s_2\geq r_1$ y $\varphi_n\in H^s(\mathbb{R}^2)$, para $n=1,2,\ldots\infty$ tal que $\varphi_n\to\varphi_\infty$. Sea $u_n\in C([0,T_n];\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2))$ las soluciones respectivas, donde $T_n=T_n(\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}},M)$. Si $T\in(0,T_\infty)$, entonces las soluciones estan definidas en $[0,T]$ para n suficientemente grande y*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{[0,T]}\|u_n(t)-u_\infty(t)\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}}=0.$$

4.3. Continuación única de las soluciones

Teorema 4.3.1. *Sean s_1, s_2 reales positivos con $s_2\geq\frac{5}{2}$ tales que $\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}<2$, y r_1 un número real no negativo con $0\leq r_1<\frac{5}{2}$. Sea $u\in C\left([0,T];\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,0}\right)$ solución del problema (3-2) tal que $\int_{\mathbb{R}}D_yu(0,x,y)dx\leq 0$, para casi todo $y\in\mathbb{R}$. Si para dos tiempos $t_1=0<t_2<T$ se tiene que $u(t_i)\in\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{\frac{5}{2},0}$ para $i=1,\,2$, entonces u es identicamente cero.*

Demostración. Sea $u\in C\left([0,T];\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,0}\right)$ tal que $u(0,x,y)=\varphi(x,y)$. Analizando los dos términos a la derecha de la ecuación integral en $\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{\frac{5}{2},0}(\mathbb{R}^2)$,

$$u(t)=\mathbf{U}(t)\varphi+\int_0^t\mathbf{U}(t-t')F(u^2(t'))dt'. \tag{4-10}$$

Empezando por la parte lineal, tenemos para $t\geq 0$,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{\frac{5}{2},0}}&=\left\|x^{\frac{5}{2}}\mathbf{U}(t)\varphi\right\|_0\\&\leq\left\|x^{\frac{1}{2}}x^2\mathbf{U}(t)\varphi\right\|_0\\&\leq\left\|D_\xi^{\frac{1}{2}}\partial_\xi^2\left(E\cdot\widehat{\varphi}\right)\right\|_0,\end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned}\partial_\xi^2\left(E\cdot\widehat{\varphi}\right)&=\partial_\xi^2E\cdot\widehat{\varphi}+2\partial_\xi E\cdot\partial_\xi\widehat{\varphi}+E\cdot\partial_\xi^2\widehat{\varphi}\\&=\frac{2itsgn(\xi)\,|\eta|}{(1+|\xi|)^3}E\cdot\widehat{\varphi}-\frac{t^2\,|\eta|^2}{(1+|\xi|)^4}E\cdot\widehat{\varphi}-2\frac{it\,|\eta|}{(1+|\xi|)^2}E\cdot\partial_\xi\widehat{\varphi}+E\cdot\partial_\xi^2\widehat{\varphi}\\&=E_1+E_2+E_3+E_4\end{aligned}$$

por las estimaciones de C_2, C_3, C_4 en la proposición 4.2.4, tenemos que para $i=2,\,3,\,4$ y $0<b\leq\frac{1}{2}$

$$\left\|D_\xi^bE_i\right\|_0<c(t)\,\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,0}},$$

resta ver $D_\xi^b E_1$. Sumando términos adecuados en E_1 obtenemos

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{2itsgn(\xi)\,|\eta|}{(1+|\xi|)^3}(E-1)\cdot\widehat{\varphi} - \frac{2itsgn(\xi)\,|\eta|}{(1+|\xi|)^3}\widehat{\varphi} \\
&= \frac{2itsgn(\xi)\,|\eta|}{(1+|\xi|)^3}(E-1)\cdot\widehat{\varphi} - 2itsgn(\xi)\,|\eta|\left(\frac{1}{(1+|\xi|)^3}-1\right)\widehat{\varphi} - 2i\,|\eta|\,tsgn(\xi)\widehat{\varphi}
\end{aligned}$$

ahora bien, si tomamos

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{2itsgn(\xi)\,|\eta|}{(1+|\xi|)^3}(E-1)\cdot\widehat{\varphi}, \\
C_2 &= 2itsgn(\xi)\,|\eta|\left(\frac{1}{(1+|\xi|)^3}-1\right)\widehat{\varphi}.
\end{aligned}$$

Utilizando la proposición 2.4.4 y las propiedades de la derivada de Stein,

$$\begin{aligned}
\left\|D_\xi^{\frac{1}{2}}C_1\right\|_0 &\leq \left\|\frac{2it\,|\eta|}{(1+|\xi|)^3}(E-1)\cdot\widehat{\varphi}\right\|_0 + \left\|D_\xi\left(\frac{2it\,|\eta|}{(1+|\xi|)^3}(E-1)\cdot\widehat{\varphi}\right)\right\|_0 \\
&\leq 2t\left(\||\eta|\,(E-1)\,\widehat{\varphi}\|_0 + \left\||\eta|\,\partial_\xi\left(\frac{1}{(1+|\xi|)^3}(E-1)\cdot\widehat{\varphi}\right)\right\|_0\right) \\
&\leq 2t\left(\||\eta|\,E\widehat{\varphi}\|_0 + \||\eta|\,\widehat{\varphi}\|_0 + \left\||\eta|\,\partial_\xi\left(\frac{1}{(1+|\xi|)^3}\right)(E-1)\cdot\widehat{\varphi}\right\|_0\right. \\
&\quad + \left.\left\|\frac{|\eta|}{(1+|\xi|)^3}\cdot\partial_\xi\left((E-1)\,\widehat{\varphi}\right)\right\|_0\right) \\
&\leq 2t\left(2\,\||\eta|\,\widehat{\varphi}\|_0 + \left\||\eta|\left(-\frac{3sgn(\xi)}{(1+|\xi|)^4}\right)(E-1)\,\widehat{\varphi}\right\|_0 + \||\eta|\,\partial_\xi\left((E-1)\,\widehat{\varphi}\right)\|_0\right) \\
&\leq 2t\left(2\,\||\eta|\,\widehat{\varphi}\|_0 + \||\eta|\,(E-1)\,\widehat{\varphi}\|_0 + \||\eta|\,\partial_\xi\,(E\widehat{\varphi})\|_0 + \||\eta|\,\partial_\xi\widehat{\varphi}\|_0\right) \\
&\leq 2t\left(4\,\||\eta|\,\widehat{\varphi}\|_0 + \||\eta|\,\partial_\xi E\cdot\widehat{\varphi}\|_0 + \||\eta|\,E\cdot\partial_\xi\widehat{\varphi}\|_0 + \||\eta|\,\partial_\xi\widehat{\varphi}\|_0\right) \\
&\leq 2t\left(4c_{s_2}\,\|\varphi\|_{s_1,s_2} + \left\||\eta|\left(\frac{it\,|\eta|}{(1+|\xi|)^2}E\right)\cdot\widehat{\varphi}\right\|_0 + 2\,\||\eta|\,\partial_\xi\widehat{\varphi}\|_0\right) \\
&\leq 2t\left((4c_{s_2}+c_{r_1}t)\,\|\varphi\|_{s_1,s_2} + 2\,\||\eta|\,\partial_\xi\widehat{\varphi}\|_0\right),
\end{aligned}$$

para el último término empleamos la ecuación (4-4). Ahora bien, en la estimación de C_2

utilizamos la proposición 2.4.4 y la ecuación (4-4) para el segundo término

$$\begin{aligned}
\left\| D_\xi^{\frac{1}{2}} C_2 \right\|_0 &\leq 2t \left(\left\| |\eta| \left(\frac{1}{(1+|\xi|)^3} - 1 \right) \widehat{\varphi} \right\|_0 + \left\| D_\xi \left(\frac{|\eta| \widehat{\varphi}}{(1+|\xi|)^3} - |\eta| \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 \right) \\
&\leq 2t \left(2 \left\| |\eta| \widehat{\varphi} \right\|_0 + \left\| \partial_\xi \left(\frac{|\eta| \widehat{\varphi}}{(1+|\xi|)^3} - |\eta| \widehat{\varphi} \right) \right\|_0 \right) \\
&\leq 2t \left(2c_{s_2} \|\varphi\|_{s_1,s_2} + \left\| \frac{|\eta|}{(1+|\xi|)^3} \partial_\xi \widehat{\varphi} \right\|_0 + \left\| \partial_\xi \left(\frac{1}{(1+|\xi|)^3} \right) |\eta| \widehat{\varphi} \right\|_0 + \left\| |\eta| \partial_\xi \widehat{\varphi} \right\|_0 \right) \\
&\leq 2t \left(2c_{s_2} \|\varphi\|_{s_1,s_2} + 2 \left\| |\eta| \partial_\xi \widehat{\varphi} \right\|_0 + \left\| \left(\frac{-3sgn(\xi)}{(1+|\xi|)^4} \right) |\eta| \widehat{\varphi} \right\|_0 \right) \\
&\leq 2t \left(2(c_{s_2}+1) \|\varphi\|_{s_1,s_2} + 2 \left\| |\eta| \partial_\xi \widehat{\varphi} \right\|_0 \right).
\end{aligned}$$

Como

$$\partial_\xi^2 (E \cdot \widehat{\varphi}) = C_1 + C_2 - 2i |\eta| \, t sgn(\xi) \widehat{\varphi} + E_2 + E_3 + E_4,$$

por el procedimiento anterior tenemos que

$$D_\xi^{\frac{1}{2}} \left(\partial_\xi^2 (E \cdot \widehat{\varphi}) + 2i |\eta| \, t sgn(\xi) \widehat{\varphi} \right) \quad \in L^2(\mathbb{R}^2). \tag{4-11}$$

Ahora vamos a analizar el integrando de la ecuación (4-10) tomando $v = u^2$, así

$$\begin{aligned}
\partial_\xi^2 \left(-\frac{1}{2} \frac{i\xi}{1+|\xi|} \widehat{v} \cdot E \right) &= \partial_\xi^2 \left(-\frac{1}{2} \frac{i\xi}{1+|\xi|} \widehat{v} \right) \cdot E + 2\partial_\xi \left(-\frac{1}{2} \frac{i\xi}{1+|\xi|} \widehat{v} \right) \cdot \partial_\xi E \\
&\quad + \left(-\frac{1}{2} \frac{i\xi}{1+|\xi|} \widehat{v} \right) \cdot \partial_\xi^2 E \\
&= -\frac{E}{2} \left[\partial_\xi^2 \left(\frac{i\xi}{1+|\xi|} \right) \widehat{v} + 2\partial_\xi \left(\frac{i\xi}{1+|\xi|} \right) \partial_\xi \widehat{v} + \frac{i\xi}{1+|\xi|} \partial_\xi^2 \widehat{v} \right] \\
&\quad - 2E \frac{t |\eta|}{(1+|\xi|)^2} \left[-\frac{1}{2} \frac{i}{(1+|\xi|)^2} \widehat{v} - \frac{1}{2} \frac{i\xi}{1+|\xi|} \partial_\xi \widehat{v} \right] - E \frac{t^2 |\eta|^2}{(1+|\xi|)^4} \left(-\frac{1}{2} \frac{i\xi}{1+|\xi|} \widehat{v} \right) \\
&\quad + 2E \, \frac{t |\eta| sgn(\xi)}{(1+|\xi|)^3} \left(-\frac{1}{2} \frac{i\xi}{1+|\xi|} \widehat{v} \right) \\
&= iE \frac{sgn(\xi)}{(1+|\xi|)^3} \widehat{v} - iE \frac{1}{(1+|\xi|)^2} \partial_\xi \widehat{v} - \frac{E}{2} \frac{i\xi}{1+|\xi|} \partial_\xi^2 \widehat{v} - E \frac{t |\eta|}{(1+|\xi|)^4} \widehat{v} \\
&\quad - E \frac{t |\eta| \xi}{(1+|\xi|)^3} \partial_\xi \widehat{v} + \frac{E}{2} \frac{t^2 |\eta|^2 \xi}{(1+|\xi|)^5} \widehat{v} + E \frac{t |\eta| |\xi|}{(1+|\xi|)^4} \widehat{v} \\
&= G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5 + G_6 + G_7.
\end{aligned}$$

Para estimar G_1, lo expresamos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\left\|D_\xi^{\frac{1}{2}}\left(iE\frac{sgn(\xi)}{(1+|\xi|)^3}\widehat{v}\right)\right\|_0 &= \left\|D_\xi^{\frac{1}{2}}\left(i\frac{sgn(\xi)}{(1+|\xi|)^3}(E-1)\widehat{v}+i\frac{sgn(\xi)}{(1+|\xi|)^3}\widehat{v}\right)\right\|_0 \\ &= \left\|D_\xi^{\frac{1}{2}}\left(i\frac{sgn(\xi)}{(1+|\xi|)^3}(E-1)\widehat{v}+i\ sgn(\xi)\left(\frac{1}{(1+|\xi|)^3}-1\right)\widehat{v}+i\ sgn(\xi)\widehat{v}\right)\right\|_0\end{aligned}$$

tomemos

$$\begin{aligned}K_1 &= i\frac{sgn(\xi)}{(1+|\xi|)^3}(E-1)\widehat{v}, \\ K_2 &= i\ sgn(\xi)\left(\frac{1}{(1+|\xi|)^3}-1\right)\widehat{v}, \\ K_3 &= i\ sgn(\xi)\widehat{v},\end{aligned}$$

se utilizarán las proposiciones 2.4.5, 2.4.4 y el lema 2.4.2 para su estimación. En los primeros dos términos el procedimiento es análogo, así que estimaremos K_1

$$\begin{aligned}\left\|D_\xi^{\frac{1}{2}}\left(i\frac{sgn(\xi)}{(1+|\xi|)^3}(E-1)\widehat{v}\right)\right\|_0 &\le \left\|\frac{1}{(1+|\xi|)^3}(E-1)\widehat{v}\right\|_0+\left\|D_\xi\left(\frac{1}{(1+|\xi|)^3}(E-1)\widehat{v}\right)\right\|_0 \\ &\le \|(E-1)\widehat{v}\|_0+c\,\|(E-1)\widehat{v}\|_0+c\,\|D_\xi\left((E-1)\widehat{v}\right)\|_0 \\ &\le c_1\left(4\,\|v\|_{s_1,s_2}+\|\partial_\xi\left(E\cdot\widehat{v}\right)\|_0+\|D_\xi\widehat{v}\|_0\right) \\ &\le c_1\left(4\,\|v\|_{\mathcal{F}_{2,0}^{s_1,s_2}}+\|\partial_\xi E\cdot\widehat{v}\|_0+\|E\cdot\partial_\xi\widehat{v}\|_0+k\,\|v\|_{\mathcal{F}_{2,0}^{s_1,s_2}}\right) \\ &\le k(b,r_1)\left(\|v\|_{\mathcal{F}_{2,0}^{s_1,s_2}}+\left\|\frac{it\,|\eta|}{(1+|\xi|)^2}E\cdot\widehat{v}\right\|_0\right) \\ &\le k(b,r_1)\left(\|v\|_{\mathcal{F}_{2,0}^{s_1,s_2}}+t\,\||\eta|\,\widehat{v}\|_0\right) \\ &\le k(b,r_1,s_2)\,(1+t)\,\|v\|_{\mathcal{F}_{2,0}^{s_1,s_2}}\,.\end{aligned}$$

Ahora bien, para G_2 utilizamos la proposición 2.4.5 y el lema 2.4.2

$$\begin{aligned}\left\|D_\xi^{\frac{1}{2}}\left(-iE\frac{1}{(1+|\xi|)^2}\partial_\xi\widehat{v}\right)\right\|_0 &\le c\left(\|E\cdot\partial_\xi\widehat{v}\|_0+\left\|\mathcal{D}_\xi^{\frac{1}{2}}\left(E\cdot\partial_\xi\widehat{v}\right)\right\|_0\right) \\ &\le c\left(\|\partial_\xi\widehat{v}\|_0+\left\|\mathcal{D}_\xi^{\frac{1}{2}}E\cdot\partial_\xi\widehat{v}\right\|_0+\left\|E\cdot\mathcal{D}_\xi^{\frac{1}{2}}\partial_\xi\widehat{v}\right\|_0\right) \\ &\le c_1\left(\|v\|_{\mathcal{F}_{2,0}^{s_1,s_2}}+\ t^{\frac{1}{2}}\left\||\eta|^{\frac{1}{2}}\,\partial_\xi\widehat{v}\right\|_0+\left\|D_\xi^{\frac{1}{2}}\partial_\xi\widehat{v}\right\|_0\right) \\ &\le c_2\left(\|v\|_{\mathcal{F}_{2,0}^{s_1,s_2}}+t^{\frac{1}{2}}\left\|\left(1+\eta^2\right)^{\frac{1}{4}}\partial_\xi\widehat{v}\right\|_0\right),\end{aligned}$$

en el segundo término por el el lema 2.3.1 con $(1-\theta)b=1$, $\theta a=\frac{1}{2}$ donde $b=2$ y $a=1$, se tiene

$$\left\|\left(1+\eta^2\right)^{\frac{1}{4}}\partial_\xi\widehat{v}\right\|_0\leq\left\|\langle x\rangle J_y^{\frac{1}{2}}v\right\|_0\leq\left\|\langle x\rangle^2 v\right\|_0+\left\|J_y v\right\|_0$$

de donde

$$\left\|\langle x\rangle^2 v\right\|_0=\left\|(1+x^2)v\right\|_0\leq\|v\|_{\mathcal{F}_{2,0}^{s_1,s_2}} \tag{4-12}$$

y

$$\left\|J_y v\right\|_0\leq\left\|\left(1+\eta^2\right)^{\frac{1}{2}}\widehat{v}\right\|_0\leq c_{s_2}\|v\|_{s_1,s_2}. \tag{4-13}$$

En la estimación de G_3 se utiliza el lema 2.4.2, la ecuación (4-3) y la definición de v

$$\begin{aligned}\left\|D_\xi^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{E}{2}\frac{i\xi}{1+|\xi|}\partial_\xi^2\widehat{v}\right)\right\|_0&\leq\left\|D_\xi^{\frac{1}{2}}E\cdot\frac{i\xi}{1+|\xi|}\partial_\xi^2\widehat{v}\right\|_0+\left\|E\cdot D_\xi^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\frac{i\xi}{1+|\xi|}\partial_\xi^2\widehat{v}\right)\right\|\\&\leq kt^{\frac{1}{2}}\left\||\eta|^{\frac{1}{2}}\partial_\xi^2\widehat{v}\right\|_0+\left\|D_\xi^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\frac{i\xi}{1+|\xi|}\partial_\xi^2\widehat{v}\right)\right\|_0\\&\leq kt^{\frac{1}{2}}\left\||\eta|^{\frac{1}{2}}\frac{i\xi}{1+|\xi|}\partial_\xi^2\widehat{v}\right\|_0+\left\|x^{\frac{1}{2}}F(x^2v)\right\|_0\\&\leq kt^{\frac{1}{2}}\left\||\eta|^{\frac{1}{2}}\partial_\xi^2\widehat{v}\right\|_0+\left\|x^{\frac{1}{2}}(x^2v)\right\|_0\\&\leq kt^{\frac{1}{2}}\left\|\left(1+|\eta|^2\right)^{\frac{1}{4}}\partial_\xi^2\widehat{v}\right\|_0+\left\|x^{\frac{5}{2}}u\cdot u\right\|_0,\end{aligned} \tag{4-14}$$

por el lema 2.3.1 con $(1-\theta)b=2$, $\theta a=\frac{1}{2}$ donde $b=\frac{5}{2}$ y $a=\frac{5}{2}$, se tiene

$$\left\|\left(1+|\eta|^2\right)^{\frac{1}{4}}\partial_\xi^2\widehat{v}\right\|_0\leq\left\|J_y^{\frac{1}{2}}\left(\langle x\rangle^2 v\right)\right\|_0\leq\left\|J_y^{\frac{5}{2}}v\right\|_0+\left\|\langle x\rangle^{\frac{5}{2}}v\right\|_0, \tag{4-15}$$

como $\left\|J_y^{\frac{5}{2}}v\right\|_0<\|v\|_{s_1,s_2}$, resta estimar el último término de (4-14) .

Sean θ_1, θ_2 reales positivos tales que $\theta_1<s_1$, $\theta_2<s_2$ y $\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_2}<2$. Entonces tomando $\epsilon=\text{mín}\left\{\frac{s_1-\theta_1}{s_1},\frac{s_2-\theta_2}{s_2}\right\}$, por el lema de Sobolev existe $c>0$ tal que

$$\begin{aligned}\|x^\epsilon u\|_\infty&\leq c\|x^\epsilon u\|_{\theta_1,\theta_2}\\&\leq c\left(\left\|\left(1+|\xi|^{\theta_1}\right)D_\xi^\epsilon u\right\|_0+\left\|\left(1+|\eta|^{\theta_2}\right)D_\xi^\epsilon u\right\|_0\right)\\&\leq c\left(\left\|J_x^{\theta_1}\left(\langle x\rangle^\epsilon u\right)\right\|_0+\left\|J_y^{\theta_2}\left(\langle x\rangle^\epsilon u\right)\right\|_0\right)\end{aligned}$$

utilizando el lema 2.3.1 para ambos términos del lado derecho de la ecuación anterior, tenemos para el primero que $(1-\theta)b=\epsilon$, $\theta a=\theta_1$ donde $b=\frac{\epsilon s_1}{s_1-\theta_1}$ y $a=s_1$, por la definición de ϵ obtenemos que $b\leq 1$, así

$$\begin{aligned}\left\|J_x^{\theta_1}\left(\langle x\rangle^{\epsilon}u\right)\right\|_0 &\leq \left\|J_x^{s_1}u\right\|_0+\left\|\langle x\rangle^{b}u\right\|_0\\ &\leq k\left(\|u\|_{s_1,s_2}+\|u\|_{L_{1,0}}\right)\end{aligned}$$

Procediendo de la misma manera para el segundo término con $(1-\theta)b'=\epsilon$, $\theta a'=\theta_2$ donde $b'=\frac{\epsilon s_1}{s_1-\theta_2}$ y $a'=s_2$ tenemos

$$\left\|J_y^{\theta_2}\left(\langle x\rangle^{\epsilon}u\right)\right\|_0\leq k_1\left(\|u\|_{s_1,s_2}+\|u\|_{L_{1,0}}\right).$$

Por lo tanto,

$$\left\|x^{\frac{5}{2}}u^2\right\|_0=\left\|x^{\epsilon}u\cdot x^{\frac{5}{2}-\epsilon}u\right\|_0\leq\|x^{\epsilon}u\|_{\infty}\left\|x^{\frac{5}{2}-\epsilon}u\right\|_0\leq\|x^{\epsilon}u\|_{\infty}\|u\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,0}}.$$

Para estimar G_4, G_5 y G_7 utilizamos la proposición 2.4.5 y el lema 2.4.2, como el proceso es análogo sólo mostraremos para G_4

$$\begin{aligned}\left\|D_{\xi}^{\frac{1}{2}}\left(-E\frac{t\,|\eta|}{(1+|\xi|)^4}\widehat{v}\right)\right\|_0 &\leq c\,t\left(\left\||\eta|\,\widehat{v}\right\|_0+\left\||\eta|\,\mathcal{D}_{\xi}^{\frac{1}{2}}\left(E\cdot\widehat{v}\right)\right\|_0\right)\\ &\leq c\,t\left(c_{s_2}\|v\|_{s_1,s_2}+\left\||\eta|\,\mathcal{D}_{\xi}^{\frac{1}{2}}E\cdot\widehat{v}\right\|_0+\left\||\eta|\,E\cdot\mathcal{D}_{\xi}^{\frac{1}{2}}\widehat{v}\right\|_0\right)\\ &\leq c\,t\left(c_{s_2}\|v\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{2,0}}+c\,t^{\frac{1}{2}}\left\||\eta|^{\frac{3}{2}}\,\widehat{v}\right\|_0+\left\||\eta|\,D_{\xi}^{\frac{1}{2}}\widehat{v}\right\|_0\right)\\ &\leq c\,t\left(c_{s_2}\|v\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{2,0}}+k\,t^{\frac{1}{2}}\|v\|_{s_1,s_2}+\left\|\left(1+\eta^2\right)^{\frac{1}{2}}D_{\xi}^{\frac{1}{2}}\widehat{v}\right\|_0\right),\end{aligned}$$

en el último término utilizamos la ecuación (4-12) y el lema 2.3.1 con $(1-\theta)b=1$, $\theta a=\frac{1}{2}$ donde $b=1$ y $a=2$

$$\left\|\left(1+\eta^2\right)^{\frac{1}{2}}D_{\xi}^{\frac{1}{2}}\widehat{v}\right\|_0=\left\|\langle x\rangle^{\frac{1}{2}}J_y v\right\|_0\leq\left\|\langle x\rangle v\right\|_0+\left\|J_y^2 v\right\|_0,$$

donde

$$\left\|J_y^2 v\right\|_0=\left\|(1+\eta^2)\widehat{v}\right\|_0\leq c_{s_2}\|v\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{2,0}}. \tag{4-16}$$

De la misma manera para G_6 en la estimacíon del último término tenemos en cuenta la ecuación (4-15)

$$\begin{aligned}\left\| D_\xi^{\frac{1}{2}}\left(\frac{E}{2}\frac{t^2\,|\eta|^2\,\xi}{(1+|\xi|)^5}\widehat{v}\right)\right\|_0 &\leq c\,t^2\left(\left\||\eta|^2\,\widehat{v}\right\|_0+\left\||\eta|^2\,\mathcal{D}_\xi^{\frac{1}{2}}\,(E\cdot\widehat{v})\right\|_0\right)\\ &\leq c\,t^2\left(c_{s_2}\,\|v\|_{s_1,s_2}+\left\||\eta|^2\,\mathcal{D}_\xi^{\frac{1}{2}}E\cdot\widehat{v}\right\|_0+\left\||\eta|^2\,\mathcal{D}_\xi^{\frac{1}{2}}\widehat{v}\right\|_0\right)\\ &\leq c\,t^2\left(c_{s_2}\,\|v\|_{s_1,s_2}+c_1\,t^{\frac{1}{2}}\left\||\eta|^{\frac{5}{2}}\,\widehat{v}\right\|_0+\left\||\eta|^2\,D_\xi^{\frac{1}{2}}\widehat{v}\right\|_0\right)\\ &\leq c\,t^2\left(c_{s_2}\,\|v\|_{s_1,s_2}+k_{s_2}\,t^{\frac{1}{2}}\,\|v\|_{s_1,s_2}+\left\|(1+\eta^2)D_\xi^{\frac{1}{2}}\widehat{v}\right\|_0\right).\end{aligned}$$

Luego

$$\partial_\xi^2\,(E(t-t')F(v))=K_1+K_2+K_3+G_2+G_3+G_4+G_5+G_6+G_7,$$

como $D_\xi^{\frac{1}{2}}G_i\in L^2(\mathbb{R}^2)$ para $i=2,3,\cdots,7$ y $D_\xi^{\frac{1}{2}}K_i\in L^2(\mathbb{R}^2)$ para $i=1,2$, entonces

$$D_\xi^{\frac{1}{2}}\left(\partial_\xi^2\,(E(t-t')F(v))-K_3\right)\in L^2(\mathbb{R}^2),$$

que es lo mismo

$$D_\xi^{\frac{1}{2}}\left(\partial_\xi^2\,(E(t-t')F(v))-isgn(\xi)\widehat{v}\right)\in L^2(\mathbb{R}^2). \tag{4-17}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (4-11) y (4-17) se tiene que la siguiente expresión pertenece a $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$D_\xi^2\left(\partial_\xi^2\,(E(t_2)\cdot\widehat{\varphi})+\int_0^{t_2}\partial_\xi^2\left(E(t-t')\cdot\widehat{F(v(t'))}\right)dt'+2i\,|\eta|\,t_2sgn(\xi)\widehat{\varphi}-i\int_0^{t_2}sgn(\xi)\widehat{v}(t')dt'\right)$$

por la ecuación (4-10) obtenemos

$$D_\xi^{\frac{1}{2}}\left(\partial_\xi^2u(t_2)+2i\,|\eta|\,t_2sgn(\xi)\widehat{\varphi}-i\int_0^{t_2}sgn(\xi)\widehat{v}(t')dt'\right)\in L^2(\mathbb{R}^2),$$

como $u(t_2)\in\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{\frac{5}{2},0}$ entonces

$$D_\xi^{\frac{1}{2}}\left(2i\,|\eta|\,t_2sgn(\xi)\widehat{\varphi}-i\int_0^{t_2}sgn(\xi)\widehat{v}(t')dt'\right)\in L^2(\mathbb{R}^2)$$

es decir

$$D_\xi^{\frac{1}{2}}\left(sgn(\xi)\int_0^{t_2}\left(2\widehat{D_y\varphi}(\xi,\eta)-\widehat{v}(t',\xi,\eta)\right)dt'\right)\in L^2(\mathbb{R}^2),$$

tomando

$$g(x,y) = 2D_y\varphi(x,y) - v(t',x,y),$$

la anterior ecuación se convierte en

$$D_\xi^{\frac{1}{2}}\left[sgn(\xi)\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} g(x,y)e^{-ix\xi}dx\right)e^{-iy\eta}dy\right] \in L^2(\mathbb{R}^2),$$

que es lo mismo

$$D_\xi^{\frac{1}{2}}\left[sgn(\xi)\int_{\mathbb{R}} \widehat{g}^x(\xi,y)e^{-iy\eta}dy\right] \in L^2(\mathbb{R}^2),$$

así, para casi todo y tenemos que

$$D_\xi^{\frac{1}{2}}\left(sgn(\xi)\,\widehat{g}^x(\xi,y)\right) \in L^2(\mathbb{R}). \tag{4-18}$$

Por otro lado tenemos por el teorema de la convergencia dominada que para casi todo $y \in \mathbb{R}$ existen y son iguales $\widehat{g}^x(0^+,y)$ y $\widehat{g}^x(0^-,y)$.
Si $\widehat{g}^x(0,y) \neq 0$ para casi todo $y \in \mathbb{R}$ entonces $sgn(0^+)\widehat{g}^x(0^+,y) \neq sgn(0^-)\widehat{g}^x(0^-,y)$, aplicando el teorema 2.4.3 para $sgn(\xi)\widehat{g}^x(\xi,y) \in L^2(\mathbb{R})$ y $x_0 = 0$, obtenemos

$$D_\xi^{\frac{1}{2}}\left[sgn(\xi)\widehat{g}^x(\xi,y)\right] \notin \text{Ł}^2(\mathbb{R}) \quad \text{para casi todo } y \in \mathbb{R}$$

lo cual es una contradicción con la ecuación (4-18), así que $\widehat{g}^x(0,y) = 0$. Luego para casi todo $y \in \mathbb{R}$.

$$\int_0^{t_2}\left(2\widehat{D_y\varphi}^x(0,y) - \widehat{v}^x(t',0,y)\right)dt' = 0.$$

Por el teorema de Fubini y la definición de transformada,

$$\int_{\mathbb{R}}\int_0^{t_2}\left(2D_y\varphi(x,y) - v(t',x,y)\right)dt'\,dx = 0,$$

ya que $v = u^2$, si el término de la derecha del integrando siempre es positivo nos lleva a una contradicción con la hipotesis $\int_{\mathbb{R}} D_y\varphi(x,y)dx \geq 0$, así que $u(t,x,y) = 0$ para casi todo $y \in \mathbb{R}$. $\square$

Teorema 4.3.2. *Sean s_1, s_2 reales positivos tales que $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} < 2$, y r_2 un número real no negativo con $0 \leq r_2 < \frac{3}{2}$. Sea $u \in C\left([0,1];\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r_2}\right)$ solución del problema (3-2) tal que $\int_{\mathbb{R}} \frac{1+\mathcal{H}^x\partial_x}{\partial_x}u(0,x,y)\,dy \leq 0$, para casi todo $x \in \mathbb{R}$. Si para dos tiempos $t_1 = 0 < t_2 < T$ se tiene que $u(t_i) \in \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,\frac{3}{2}}$ para $i = 1$, 2, entonces u es identicamente cero.*

Demostración. De igual manera que en el teorema anterior analicemos la ecuación integral (4-10) en $\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,\frac{3}{2}}$. El operador $\mathbf{U}(t)$ preserva el espacio, en efecto, sean $u \in C\left([0,T];\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r_2}\right)$ tal que $u(0,x,y)=\varphi(x,y)$ y $t\geq 0$. Veamos primero la parte lineal

$$\begin{aligned}\|\mathbf{U}(t)\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,\frac{3}{2}}} &= \left\|y^{\frac{3}{2}}\mathbf{U}(t)\varphi\right\|_0\\ &\leq \left\|y^{\frac{1}{2}}y\mathbf{U}(t)\varphi\right\|_0\\ &\leq \left\|D_\eta^{\frac{3}{2}}\partial_\eta\left(E\cdot\widehat{\varphi}\right)\right\|_0\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\partial_\eta\left(E\cdot\widehat{\varphi}\right) &= -\frac{it\xi sgn(\eta)}{1+|\xi|}E\cdot\widehat{\varphi}+E\cdot\partial_\eta\widehat{\varphi}\\ &= C_1+C_2\end{aligned}$$

C_1 lo podemos ver de la siguiente forma

$$\begin{aligned}C_1 &= -\frac{it\xi sgn(\eta)}{1+|\xi|}(E-1)\widehat{\varphi}-\frac{it\xi sgn(\eta)}{1+|\xi|}\widehat{\varphi}\\ &= E_1+E_2\end{aligned}$$

en el término E_1 utilizamos la proposición 2.4.4, 2.4.5 y la proposición 2.4.3 para $\alpha=\frac{-t\xi}{1+|\xi|}$, así

$$\begin{aligned}\left\|D_\eta^{\frac{1}{2}}\left(\frac{it\xi sgn(\eta)}{1+|\xi|}(E-1)\cdot\widehat{\varphi}\right)\right\|_0 &\leq \left\|\frac{it\xi}{1+|\xi|}(E-1)\cdot\widehat{\varphi}\right\|_0+\left\|\mathcal{D}_\eta\left(\frac{t\xi}{1+|\xi|}(E-1)\cdot\widehat{\varphi}\right)\right\|_0\\ &\leq t\left(\|(E-1)\cdot\widehat{\varphi}\|_0+\|\mathcal{D}_\eta(E-1)\cdot\widehat{\varphi}\|_0+\|(E-1)\cdot\mathcal{D}_\eta\widehat{\varphi}\|_0\right)\\ &\leq c_1t\left(\|\widehat{\varphi}\|_0+\|\partial_\eta E\cdot\widehat{\varphi}\|_0+\|D_\eta\widehat{\varphi}\|_0\right)\\ &\leq c_1t\left(\|\widehat{\varphi}\|_0+\left\|\frac{it\xi sgn(\eta)}{1+|\xi|}E\cdot\widehat{\varphi}\right\|_0+\|y\varphi\|_0\right)\\ &\leq c_1t\left(\|\widehat{\varphi}\|_0+t\|\widehat{\varphi}\|_0+\|y\varphi\|_0\right)\\ &\leq c_1t\left(1+t\right)\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,1}}\end{aligned}$$

para C_2 tenemos

$$\begin{aligned}\left\|D_\eta^{\frac{1}{2}}\left(E\cdot\partial_\eta\widehat{\varphi}\right)\right\|_0 &\leq \left\|\mathcal{D}_\eta^{\frac{1}{2}}E\cdot\partial_\eta\widehat{\varphi}\right\|_0+\left\|E\cdot\mathcal{D}_\eta^{\frac{1}{2}}\partial_\eta\widehat{\varphi}\right\|_0\\ &\leq kt^{\frac{1}{2}}\|\partial_\eta\widehat{\varphi}\|_0+\left\|D_\eta^{\frac{1}{2}}\partial_\eta\widehat{\varphi}\right\|_0\\ &\leq k_2t^{\frac{1}{2}}\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

Como

$$\partial_\eta (E\cdot\varphi) = C_1 + C_2 = E_1 + E_2 + C_2$$

por el procedimiento anterior tenemos que

$$D_\eta^{\frac{1}{2}}\left(\partial_\eta (E\cdot\varphi) + i\frac{t\xi sgn(\eta)}{1+|\xi|}\widehat{\varphi}\right) \in L^2(\mathbb{R}^2). \tag{4-19}$$

Ahora bien, para el término de la integral

$$\begin{aligned}
\partial_\eta\left(E\left(-\frac{i\xi}{1+|\xi|}\right)\widehat{v}\right) &= \partial_\eta E\left(-\frac{i\xi}{1+|\xi|}\right)\widehat{v} + E\left(-\frac{i\xi}{1+|\xi|}\right)\partial_\eta\widehat{v}\\
&= -E\frac{t\xi^2 sgn(\eta)}{(1+|\xi|)^2}\widehat{v} + E\left(-\frac{i\xi}{1+|\xi|}\right)\partial_\eta\widehat{v}\\
&= -\frac{t\xi^2 sgn(\eta)}{(1+|\xi|)^2}(E-1)\widehat{v} - \frac{t\xi^2 sgn(\eta)}{(1+|\xi|)^2}\widehat{v} + E\left(-\frac{i\xi}{1+|\xi|}\right)\partial_\eta\widehat{v}\\
&= F_1 + F_2 + F_3.
\end{aligned}$$

Para F_1 utilizando la proposición 2.4.4 tenemos

$$\begin{aligned}
\left\|D_\eta^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{t\xi^2 sgn(\eta)}{(1+|\xi|)^2}(E-1)\widehat{v}\right)\right\|_0 &\le \left\|\frac{t\xi^2}{(1+|\xi|)^2}(E-1)\widehat{v}\right\|_0 + \left\|\mathcal{D}_\eta\left(\frac{t\xi^2}{(1+|\xi|)^2}(E-1)\widehat{v}\right)\right\|_0\\
&\le t\left(\|(E-1)\widehat{v}\|_0 + \|\mathcal{D}_\eta((E-1)\widehat{v})\|_0\right)\\
&\le t\left(2\|\widehat{v}\|_0 + \|\mathcal{D}_\eta(E\cdot\widehat{v})\|_0 + \|\mathcal{D}_\eta\widehat{v}\|_0\right)\\
&\le t\left(2\|\widehat{v}\|_0 + \|\partial_\eta E\cdot\widehat{v}\|_0 + 2\|D_\eta\widehat{v}\|_0\right)\\
&\le t\left(2\|\widehat{v}\|_{\mathcal{F}_{0,1}^{s_1,s_2}} + \left\|\frac{it\xi sgn(\eta)}{1+|\xi|}E\cdot\widehat{v}\right\|_0\right)\\
&\le ct(1+t)\|v\|_{\mathcal{F}_{0,1}^{s_1,s_2}}.
\end{aligned}$$

En la estimación de F_3

$$\begin{aligned}
\left\|D_\eta^{\frac{1}{2}}\left(E\left(-\frac{i\xi}{1+|\xi|}\right)\partial_\eta\widehat{v}\right)\right\|_0 &\le \left\|D_\eta^{\frac{1}{2}}(E\cdot\partial_\eta\widehat{v})\right\|_0\\
&\le \left\|\mathcal{D}_\eta^{\frac{1}{2}}E\cdot\partial_\eta\widehat{v}\right\|_0 + \left\|E\cdot\mathcal{D}_\eta^{\frac{1}{2}}\partial_\eta\widehat{v}\right\|_0\\
&\le kt^{\frac{1}{2}}\|\partial_\eta\widehat{v}\|_0 + \left\|D_\eta^{\frac{1}{2}}\partial_\eta\widehat{v}\right\|_0
\end{aligned}$$

Procediendo de la misma manera que en el teorema anterior tenemos que

$$\left\| D_\eta^{\frac{1}{2}} \partial_\eta v \right\|_0 = \left\| x^\epsilon u \cdot x^{\frac{3}{2}-\epsilon} u \right\|_0 \leq \|x^\epsilon u\|_\infty \left\| x^{\frac{3}{2}-\epsilon} u \right\|_0 \leq \|x^\epsilon u\|_\infty \|u\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r_1}} .$$

Por lo tanto,

$$D_\eta^{\frac{1}{2}} \left(\partial_\eta \left(-\frac{i\xi}{1+|\xi|} E \cdot \widehat{v} \right) + \frac{t\,\xi^2 sgn(\eta)}{(1+|\xi|)^2} \widehat{v} \right) \in L^2(\mathbb{R}^2),$$

así que

$$D_\eta^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{t_2} \partial_\eta \left(-\frac{i\xi}{1+|\xi|} E(t_2-t') \cdot \widehat{v} \right) dt' + \int_0^{t_2} \frac{(t_2-t')\,\xi^2 sgn(\eta)}{(1+|\xi|)^2} \widehat{v}\, dt' \right) \in L^2(\mathbb{R}^2). \quad (4\text{-}20)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (4-19) y (4-20) podemos deducir que la siguiente expresion pertenece a $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$D_\eta^{\frac{1}{2}} \left(\partial_\eta \left(E \cdot \varphi \right) + i \frac{t_2 \xi sgn(\eta)}{1+|\xi|} \widehat{\varphi} + \int_0^{t_2} \partial_\eta \left(-\frac{i\xi}{1+|\xi|} E(t_2-t') \cdot \widehat{v}(t') \right) dt' + \int_0^{t_2} \frac{\xi^2 sgn(\eta)}{(1+|\xi|)^2} (t_2-t')\widehat{v} dt' \right),$$

por la ecuación (4-10), lo anterior se convierte en

$$D_\eta^{\frac{1}{2}} \left(\partial_\eta \widehat{u}(t_2) + i \frac{t_2 \xi sgn(\eta)}{1+|\xi|} \widehat{\varphi} + \int_0^{t_2} \frac{(t_2-t')\,\xi^2 sgn(\eta)}{(1+|\xi|)^2} \widehat{v}(t')\, dt' \right) \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

Como $u(t_2) \in \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,\frac{3}{2}}$ entonces

$$D_\eta^{\frac{1}{2}} \left(sgn(\eta) \left(\frac{it_2\xi}{1+|\xi|} \widehat{\varphi} + \int_0^{t_2} \frac{(t_2-t')\,\xi^2}{(1+|\xi|)^2} \widehat{v}(t')\, dt' \right) \right) \in L^2(\mathbb{R}^2),$$

debido a que $\frac{\xi}{1+|\xi|}$ es acotada

$$D_\eta^{\frac{1}{2}} \left(sgn(\eta) \left(it_2 \widehat{\varphi} + \frac{\xi}{1+|\xi|} \int_0^{t_2} (t_2-t') \widehat{v}(t')\, dt' \right) \right) \in L^2(\mathbb{R}^2),$$

tomando

$$\widehat{f}(\xi,\eta) = \int_0^{t_2} \left(i\widehat{\varphi} + \frac{\xi}{1+|\xi|} (t_2-t') \widehat{v}(t') \right) dt',$$

la ecuación anterior se convierte en

$$D_\eta^{\frac{1}{2}} \left(sgn(\eta) \widehat{f}(\xi,\eta) \right) \in L^2(\mathbb{R}^2),$$

por definición y teorema de Fubini esto es

$$D_\eta^{\frac{1}{2}}\left(sgn(\eta)\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)e^{-iy\eta}\,dx\right)e^{-ix\xi}\,dy\right)\in L^2(\mathbb{R}^2),$$

de lo que podemos deducir, que para casi todo $x\in\mathbb{R}$

$$D_\eta^{\frac{1}{2}}\left(sgn(\eta)\widehat{f}^y(x,\eta)\right)\in L^2_\eta(\mathbb{R}). \tag{4-21}$$

para $\xi\neq 0$ y

$$\widehat{g}^y(x,\eta)=\left(\frac{1+|\xi|}{\xi}\right)\widehat{f}^y(x,\eta)=\int_0^{t_2}\left((t_2-t')v(t')-\frac{1+\mathcal{H}^x\partial_x}{\partial_x}\varphi\,dt'\right)^{\vee_y},$$

se tiene que para casi todo $x\in\mathbb{R}$

$$D_\eta^{\frac{1}{2}}\left(sgn(\eta)\widehat{g}^y(x,\eta)\right)\in L^2_\eta(\mathbb{R}).$$

Por otro lado, tenemos que el teorema de la convergencia dominada nos garantiza la existencia y la igualdad de $\widehat{g}^y(0^+,\eta)$ y $\widehat{g}^y(0^-,\eta)$ para casi todo $x\in\mathbb{R}$. Si $\widehat{g}^y(0,\eta)\neq 0$, aplicando el teorema 2.4.3 para $sgn(\eta)\widehat{g}^y(x,\eta)\in L^2_\eta(\mathbb{R})$ y $x_0=0$, obtenemos

$$D_\eta^{\frac{1}{2}}\left(sgn(\eta)\widehat{g}^y(x,\eta)\right)\notin L^2_\eta(\mathbb{R})\quad\text{para casi todo } x\in\mathbb{R},$$

lo cual es una contradicción con la ecuación (4-21), luego $\widehat{g}^y(0,\eta)=0$

$$\int_{\mathbb{R}}\int_0^{t_2}\left((t_2-t')v(t',x,y)-\frac{1+\mathcal{H}^x\partial_x}{\partial_x}\varphi(x,y)\,dt'\right)dy=0\quad\text{para casi todo } x\in\mathbb{R},$$

como t_2-t' es positivo y $v=u^2$, entonces el término de la izquierda del integrando es positivo, por tanto su integral es positiva o cero. Para la primera opción llegamos a una contradición con la hipótesis, puesto que

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{1+\mathcal{H}^x\partial_x}{\partial_x}\varphi(x,y)\,dy\leq 0,$$

por lo tanto, se debe tener que $u(t,x,y)=0$ para casi todo $x\in\mathbb{R}$.

□

Bibliografía

[Benjamin, 1989] Benjamin, T. (1989). Internal waves of permanent form in fluids of great depth. *Jr. Fluid Mech*, 26:559–592.

[Bergh and Löfström, 1976] Bergh, J. and Löfström, J. (1976). *Interpolation spaces: an introduction*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag.

[Bolaños, 2018] Bolaños, J. F. (2018). *El problema de Cauchy asociado a una generaliazación de la ecuación ZK-BBM*. Tesis de doctorado, Universidad Nacional de Colombia.

[C. E. Kenig and Vega, 2003] C. E. Kenig, G. P. and Vega, L. (2003). On the unique continuation of solutions to the generalized kdv equation. *Mathematical Research Letters*, 10(5/6):833–846.

[Elias M. Stein, 2003] Elias M. Stein, R. S. (2003). *Fourier analysis: an introduction*. Princeton Lectures in Analysis, Volume 1. Princeton University Press.

[Faminskii, 1995] Faminskii, A. V. (1995). The cauchy problem for the zakharov-kuznetsov equation. *Differentsial'nye Uravneniya*, 31(6):1070–1081.

[G. Fonseca and Ponce, 2012] G. Fonseca, F. L. and Ponce, G. (2012). The ivp for the benjamin-ono equation in weighted sobolev spaces ii. *Journal of Functional Analysis*, 262(5):2031–2049.

[G. Fonseca, 2011] G. Fonseca, G. P. (2011). The ivp for the benjamin-ono equation in weighted sobolev spaces. *J. Funct. Anal.*, 260:436–459.

[Hunt and Wheeden, 1973] Hunt, R. and Wheeden, R. (1973). Weighted norm inequalities for the conjugate function and the hilbert transform. *Transactions of the American Mathematical Society.*, pages 227–251.

[Johnson, 1986] Johnson, M. A. (1986). The transverse instability of periodic waves in zakharov- kuznetsov type equations. *Studies in Applied Mathematics*, 11(10):1031–1081.

[Kadomtsev and Petviashvili, 1970] Kadomtsev, B. and Petviashvili, V. (1970). On the stability of solitary waves in weakly dispersing media. *Soviet Physics Doklady 15*, page 539.

[Kato and Ponce, 1988] Kato, T. and Ponce, G. (7(1988)). Commutator estimates and the euler and navier-stokes equations. *Comm. Pure Appl. Math. 41*, page 891–907.

[Kenig and Vega, 1993] Kenig, C. E., P. G. and Vega, L. (4 (1993)). Well-posedness and scattering results for the generalized korteweg-de vries equation via the contraction principle. *Comm. Pure Appl. Math. 46*, page 527–620.

[Korteweg and de Vries, 1835] Korteweg, D. and de Vries, G. (1835). On the change of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary wave. *Philosophical Magazine*, 39:422–443.

[L. Escauriaza and Vega, 2007] L. Escauriaza, C. E. Kenig, G. P. and Vega, L. (2007). On uniqueness properties of solutions of the k-generalized kdv equations. *Journal of Functional Analysis*, 244(2):504–535.

[Linares, 2009] Linares, F. (2009). *Introduction to nonlinear dispersive equations*. Universitext. Springer New York, 1 edition.

[Milanés, 2003] Milanés, A. (2003). Some results about a bidimensional version of the generalized bo. *Communications On Pure And Applied Analysis*.

[Nahas and Ponce, 2009] Nahas, J. and Ponce, G. (2009). On the persistent properties of solutions to semilinear schrödinger equation. *Communications in Partial Dierential Equations*, pages 34(10):1208–1227.

[Rafael Jose Iorio Jr, 2001] Rafael Jose Iorio Jr, V. d. M. I. (2001). *Fourier Analysis and Partial Differential Equations: An Introduction*. 1 edition.

[Stein, 1970] Stein, E. M. (1970). *Singular integrals and differentiability properties of fun*. Princeton Mathematical Series, No. 30.

[Stein, 1961] Stein, E. M. (67(1961)). The characterization of functions arising as potentials. *Bull. Amer. Math. Soc.*, pages 102–104.

[Sánchez, 2015] Sánchez, F. (2015). *El problema de Cauchy asociado a una ecuación del tipo rBO-ZK*. Tesis de doctorado, Universidad Nacional de Colombia.

[T.B. Benjamin and Mahony, 1972] T.B. Benjamin, J. B. and Mahony, J. J. (1972). Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 272*, pages 47–78.

[Tello, 1979] Tello, J. M. S. (1979). *Lições de equações diferenciais ordinárias.* Projeto Euclides. IMPA.

[Wazwaz, 2005] Wazwaz, A. (2005). Compact and noncompact physical structures for the zk-bbm equation. *Applied Mathematics and Computation*, 169:713–725.

[Zuazo and Zuazo., 1995] Zuazo, J. D. and Zuazo., J. D. (1995). *Análisis de Fourier.* Universidad Autónoma de Madrid.