Problema de Cauchy periódico para la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) en espacios de baja regularidad.

por

Emer de Jesús Lopera Arias

Trabajo presentado como requisito parcial
para optar al Título de

Magister en Matemáticas

Director: Jorge Enrique Mejía Laverde

Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Mayo 2009

Este trabajo ha sido apoyado parcialmente por la Universidad Nacional de Colombia
dentro del proyecto "Problemas en Ecuaciones Diferenciales Parciales no Lineales"
Código DIME 20101007172.

Resumen

En el presente trabajo demostramos el teorema de existencia y unicidad de solución local en el tiempo para el problema de Cauchy periódico

$$
\begin{array}{rrcll}
(i) & \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}+u\dfrac{\partial u}{\partial x} & = & 0, & x\in\mathbb{R},\, t>0 \\
(ii) & u\left(x,0\right) & = & u_0\left(x\right), &
\end{array}
$$

cuando el dato inicial u_0 se toma en el espacio de Sobolev $\widetilde{H}_{\pi}^{-\frac{1}{2}}$.

Contenido

Agradecimientos

Quiero agradecer al profesor Jorge Mejía Laverde, director de esta tesis y quien además fue la persona que sugirió el estudio de este interesante problema, por sus contribuciones en la realización de este trabajo y por todas sus enseñanzas.

Agradezco también a los profesores Pedro Isaza y Jorge Cossio, quienes con sus rigurosas revisiones ayudaron al mejoramiento de este trabajo.

Agradezco a mis padres, Emer y Lucrecia, a mis hermanos, Alexandra y Frank, por su gran apoyo durante este proceso.

Agradezco a Diana Milena por su ayuda incondicional y por último quiero agradecer a todos mis compañeros y amigos que de una u otra manera hicieron posible el éxito de esta tesis de maestría.

Introducción

Las ecuaciones diferenciales parciales de evolución tienen una gran importancia dentro de la matemática actual debido al papel que juegan dentro de la formulación de modelos para describir fenómenos dinámicos de las ciencias físicas y naturales.

Uno de los aspectos de mayor interés en el estudio de las ecuaciones de evolución es el relacionado con la existencia y unicidad de solución del problema de Cauchy o problema de valores iniciales (PVI) asociado a la ecuación de evolución.

La ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) es una ecuación de evolución dispersiva y no lineal. Físicamente es un modelo que describe, en una dimensión espacial, la propagación de ondas de longitud de onda larga en medios dispersivos. La propagación de ondas solitarias en la superficie del agua, en canales poco profundos, es un ejemplo de medio dispersivo en el que se puede hallar este tipo de ondas.

En el presente trabajo de tesis estudiaremos el problema de Cauchy periódico para la ecuación KdV. Este problema consiste en hallar una función de valor real $u = u(x,t)$, de la variable espacial x y de la variable temporal t, 2π periódica en la variable espacial x, tal que

$$\begin{array}{llcll} (i) & \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} & = & 0, & x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ (ii) & u\,(x,0) & = & u_0\,(x)\,, & \end{array}$$

donde u_0 es una función 2π-periódica dada, de la variable espacial x.

La función desconocida u puede interpretarse como la elevación de la superficie de agua con relación a su posición de equilibrio. El primer término de la ecuación denota la evolución temporal de u, el segundo término es el término dispersivo debido a la tercera derivada espacial de u y el tercer término es el término no lineal.

En los últimos años el PVI periódico (i)-(ii) para la ecuación KdV ha sido estudiado en espacios de baja regularidad, donde la regularidad está relacionada con el índice s del espacio de Sobolev periódico H^s_π en el cual se toma el dato inicial u_0.

En [B] Bourgain desarrolló un método nuevo para el estudio de problemas como el PVI (i)-(ii), cuya parte esencial consiste en elegir de manera adecuada el tipo de espacios en los que se busca la solución. Las normas en estos espacios, definidas a través de la transformada de Fourier espacio-temporal, tienen en cuenta la estructura específica de la parte lineal de la ecuación. Cuando se utilizan estas normas los estimativos lineales son relativamente simples y similares para todas las ecuaciones, y por lo tanto los mayores esfuerzos se concentran en los estimativos no lineales.

En [KPV], Kenig, Ponce y Vega, introdujeron una simplificación significativa del método de Bourgain al realizar los estimativos no lineales para el PVI (i)-(ii) mediante el uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz y de desigualdades elementales de cálculo. Posteriormente en [CKSTT], Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka y Tao, presentaron detalles aclaratorios de ciertas afirmaciones hechas en [KPV] y en [B] sobre el buen planteamiento local del PVI periódico (i)-(ii) en espacios de Sobolev periódicos $\widetilde{H}^s_\pi$, con $s \geq -\frac{1}{2}$, cuyos elementos tienen valor medio cero.

El objetivo del presente trabajo consiste en probar en detalle el teorema de existencia y unicidad de soluciones locales en el tiempo para el PVI periódico (i)-(ii) con datos iniciales u_0 en espacios de baja regularidad, basados en los trabajos antes mencionados y usando el esquema propuesto por Isaza en [I] para el problema de Cauchy periódico asociado a la ecuación de Kadomtsev-Petviashvili KP-II. Más concretamente, probaremos que el anterior problema está localmente bien planteado cuando se toman datos iniciales en el espacio de Sobolev periódico $\widetilde{H}^{-\frac{1}{2}}_\pi$, cuya definición presentaremos más adelante. Para esto es necesario establecer ciertos estimativos, los cuales serán probados usando técnicas introducidas por Kenig, Ponce y Vega en [KPV] y Colliander, Keel, Stafillani, Takaoka y Tao en [CKSTT]. El resultado presentado en este trabajo es óptimo en el contexto de espacios de Sobolev de tipo L^2, para el tipo de metodología utilizada. En realidad, Kenig, Ponce y Vega demostraron (véase teorema 1.4 en [KPV]) que el estimativo de la forma bilineal en la cual se basa la prueba del teorema de existencia no se cumple cuando $s < -\frac{1}{2}$.

Hemos hecho un esfuerzo por darle a esta tesis una estructura que facilite su lectura a personas que tengan un conocimiento básico de Teoría de la Medida, Análisis Funcional y Ecuaciones Diferenciales. Además evitamos, en la medida de lo posible, la repetición de ciertos argumentos que hubieran extendido el trabajo de manera innecesaria.

El trabajo está dividido en tres capítulos, cuya estructura describimos a continuación.

El primer capítulo consta de tres secciones. En la primera sección definimos los espacios funcionales en los que se enmarca nuestro problema, que denominamos espacios de Bourgain, y estudiamos algunas de sus propiedades. En la segunda sección precisamos el concepto de solución que utilizaremos. Con este fin partimos de la fórmula de Duhamel para el PVI (i)-(ii), la cual asocia al PVI dado el problema integral

$$u(t) = W(t) u_0 + \int_0^t W(t-t') \left[-\frac{1}{2}\partial_x u(t')^2\right] dt', \tag{1}$$

donde $W(t)$ es el grupo asociado a la parte lineal de la ecuación KdV, definido por su serie de Fourier mediante la expresión

$$[W(t) u_0]^\wedge(n) := e^{itn^3}\widehat{u}_0(n), \qquad n \in \mathbb{Z}\diagdown\{0\}.$$

Formalmente, si Φ es el operador definido por el lado derecho de (1), entonces una solución del PVI (i)-(ii) será un punto fijo de Φ. Para darle sentido al lado derecho de (1) en el contexto funcional considerado en la sección 1, definimos para $T \in (0,1]$ una localización Φ_T de Φ, dada por

$$\Phi_T(u) := \psi(\cdot_t)[W(\cdot_t) u_0](\cdot_x) + G_T(u,u), \tag{2}$$

que coincide con Φ para valores de $t \in [0,T]$. El término $G_T(u,u)$ en (2) es una localización del término integral en (1). La definición del concepto de solución utilizado reposa de manera esencial en una propiedad de acotamiento de la forma bilineal $G_T(u,u)$, expresada en el Lema 1.2.1, y en un estimativo de la norma, en el espacio de Bourgain utilizado, del primer término del lado derecho de (2). En la tercera sección del capítulo 1 enunciamos los teoremas de existencia y unicidad de solución del PVI periódico (i)-(ii) para datos iniciales en $\widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}}$, que constituyen el objetivo de este trabajo.

El segundo capítulo tiene como fin específico la prueba de la propiedad de acotamiento de la forma bilineal $G_T(u,u)$ y es la parte principal del trabajo. Este capítulo consta de cuatro secciones. En la primera sección establecemos un estimativo lineal relacionado con el primer término del lado derecho de (2) y tres estimativos relacionados con una modificación del operador integral $\int_0^t W(t-t') f(t') dt'$. En la segunda sección probamos dos estimativos no lineales : el primero de ellos (Proposición 2.2.1) utiliza, además de desigualdades elementales de cálculo, una técnica de descomposiciones diádicas desarrollada en [CKSTT], y el segundo (Proposición 2.2.2) usa las ideas de Kenig, Ponce y Vega en el artículo [KPV]. En la tercera sección realizamos unas estimaciones que relacionan las normas en los espacios de Bourgain de un elemento u y de su localización $\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)u$. Finalmente, en la cuarta sección del capítulo 2 llevamos a cabo la prueba del Lema 1.2.1, utilizando los estimativos de las secciones previas.

En el tercer capítulo demostramos los teoremas de existencia y unicidad de solución local en el tiempo para el PVI periódico (i)-(ii) con datos iniciales en $\widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}}$. El capítulo 3 tiene dos secciones. En la primera sección demostramos el teorema de existencia, probando que para T suficientemente pequeño el operador Φ_T es una contracción en una bola cerrada de un espacio de Bourgain adecuado, y finalmente, en la segunda sección, demostramos el teorema de unicidad.

A lo largo del trabajo la letra C denotará diversas constantes que pueden variar de una línea a otra y que dependen de parámetros que están claramente establecidos en cada caso.

Capítulo 1

Nociones Preliminares y Resultados Principales

Este capítulo consta de tres secciones. En la primera sección definimos los espacios funcionales necesarios para empezar el estudio del problema de Cauchy periódico asociado a la ecuación KdV. Recordemos que este problema consiste en hallar una función de valor real $u = u(x,t)$, de la variable espacial x y de la variable temporal t, 2π-periódica en la variable espacial, tal que

$$
\begin{array}{lrcll}
(i) & \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} & = & 0, & x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\
(ii) & u\,(x,0) & = & u_0\,(x)\,, &
\end{array}
$$

donde u_0 es una función 2π-periódica dada, de la variable espacial x. En la segunda sección precisamos nuestro concepto de solución en el contexto de los espacios de Bourgain, y en la tercera sección enunciamos los teoremas de existencia y unicidad de solución local en el tiempo para el PVI periódico (i)-(ii) con datos iniciales en $\widetilde{H}_{\pi}^{-\frac{1}{2}}$.

1.1 Contexto Funcional para el Problema de Cauchy Periódico Asociado a la ecuación KdV

El objetivo de esta sección es definir los espacios funcionales que darán soporte al estudio de nuestro problema y describir algunas propiedades de ellos.

Sea

$$S\,([0,2\pi]) := \{\varphi \in C^{\infty}\,(\mathbb{R},\mathbb{C})\,/\varphi \text{ es } 2\pi - \text{ periódica}\}\,.$$

Para $N \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ y $\varphi \in S\,([0,2\pi])$ definimos

$$\|\varphi\|_N := \sup_{\substack{0\leq n\leq N \\ x\in\mathbb{R}}} \left|\varphi^{(n)}\,(x)\right| < \infty.$$

La colección de seminormas $\{\|\cdot\|_N : N \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}$ hace de $S([0,2\pi])$ un espacio vectorial topológico. La noción de convergencia de sucesiones que consideraremos en $S([0,2\pi])$ es la siguiente:

$$\{\varphi_n\} \to \varphi \text{ en } S([0,2\pi]) \text{ si y sólo si para todo } N \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \ \ \|\varphi_k - \varphi\|_N \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

El espacio dual $S'([0,2\pi])$ de $S([0,2\pi])$ está conformado por todos los funcionales lineales continuos; es decir, un funcional lineal $u : S([0,2\pi]) \to \mathbb{C}$ pertenece a $S'([0,2\pi])$ si y sólo si para toda sucesión $\{\varphi_n\}$ en $S([0,2\pi])$ tal que $\{\varphi_n\} \to \varphi$ en $S([0,2\pi])$ se cumple que $u(\varphi_n) \to u(\varphi)$ en $\mathbb{C}$. Puede demostrarse que si $u \in S'([0,2\pi])$ entonces existen una constante positiva C y un $N \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ tal que $|u(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_N$ para todo $\varphi \in S([0,2\pi])$. Los elementos de $S'([0,2\pi])$ se denominan distribuciones periódicas.

Si $f \in L^1([0,2\pi])$, identificamos a f con

$$\begin{array}{rccl} u_f: & S([0,2\pi]) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \varphi & \longmapsto & u_f(\varphi) := \int_0^{2\pi} f(x)\varphi(x)\,dx. \end{array}$$

Como $|u_f(\varphi)| \leq \|f\|_{L^1}\|\varphi\|_0$, para toda $\varphi \in S([0,2\pi])$, concluimos que $u_f \in S'([0,2\pi])$.

Para $u \in S'([0,2\pi])$ y $n \in \mathbb{Z}$, definimos el coeficiente de Fourier $\widehat{u}(n)$ de u por

$$\widehat{u}(n) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u\left(e^{-in(\cdot_x)}\right).$$

Proposición 1.1.1 *Sean $u \in S'([0,2\pi])$ y $\varphi \in S([0,2\pi])$. Entonces*

(i)

$$u(\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(n)\,\widehat{u}(-n),$$

donde la serie anterior converge absolutamente. Por tanto la distribución u queda caracterizada unívocamente por sus coeficientes de Fourier.

(ii) *Si además $\{\widehat{u}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l_n^1$, entonces*

$$u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(n)\, e^{in(\cdot_x)}.$$

Prueba. (i) Como $u \in S'([0,2\pi])$, de nuestra noción de convergencia en este espacio se sigue que existen un $C > 0$ y un $N \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ tales que para toda $\varphi \in S([0,2\pi])$,

$|u(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_N$. En consecuencia

$$|\widehat{u}(n)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left|u\left(e^{-in(\cdot x)}\right)\right| \leq \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \left\|e^{-in(\cdot x)}\right\|_N \leq C|n|^N \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Sea $\varphi \in S([0,2\pi])$, entonces de lo anterior se tiene que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(n)\,\widehat{u}(-n)| \leq C \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(n)|\,|n|^N \frac{(1+n^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+n^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\leq C \left\|\widehat{\varphi}(n)\,|n|^N \left(1+n^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{l_n^2} \left\|\frac{1}{(1+n^2)^{\frac{1}{2}}}\right\|_{l_n^2} \leq C \left\|\widehat{\varphi}(n)\,|n|^N \left(1+n^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{l_n^2}$$

$$\leq C \left\|\widehat{\varphi}(n)\left(1+n^2\right)^{N+1}\right\|_{l_n^2} \leq C \left\|\left(I-\partial_x^2\right)^{N+1}\varphi\right\|_{L^2([0,2\pi])} \leq C\|\varphi\|_{2(N+1)}.$$

Esto muestra que la serie en (i) es absolutamente convergente. Veamos ahora que se da la igualdad en (i). Sea $\varphi \in S([0,2\pi])$, entonces si

$$S_N := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|n|\leq N} \widehat{\varphi}(n)\, e^{in(\cdot x)}$$

es la suma parcial simétrica de la serie de Fourier de φ, entonces S_N converge a φ en $S([0,2\pi])$ cuando $N \to \infty$ y por tanto

$$u(\varphi) = \lim_{N\to\infty} u\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|n|\leq N} \widehat{\varphi}(n)\, e^{in(\cdot x)}\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{|n|\leq N} \widehat{\varphi}(n) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u\left(e^{in(\cdot x)}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(n)\,\widehat{u}(-n).$$

Así tenemos (i).

(ii) Como $\{\widehat{u}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l_n^1$, entonces la serie $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(n)\, e^{inx}$ es uniformemente convergente y define una función 2π-periódica $f \in C(\mathbb{R})$. Sea $m \in \mathbb{Z}$ y calculemos $\widehat{f}(m)$.

$$\widehat{f}(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f\left(e^{im(\cdot x)}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(n)\, e^{i(n-m)x} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(n) \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x} dx = \widehat{u}(m).$$

Como por la parte (i) los coeficientes de Fourier caracterizan a u, entonces $u = f$. ■

Definición 1.1.1 *Para $s \in \mathbb{R}$ definamos el espacio de Sobolev H_π^s de distribuciones periódicas por*

$$H_\pi^s := \left\{ u \in S'([0,2\pi]) \,/\, \|u\|_s^2 := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n \rangle^{2s} |\widehat{u}(n)|^2 < \infty \right\},$$

donde $\langle \cdot \rangle := (1 + |\cdot|)$. Definimos también

$$\widetilde{H}_\pi^s := \{ u \in H_\pi^s / \widehat{u}(0) = 0 \}.$$

Notemos que si $u \in S([0,2\pi]) \cap \widetilde{H}_\pi^s$, como $\widehat{u}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} u(x) e^{-i0x} dx$ entonces $\int_0^{2\pi} u(x)\, dx = 0$, es decir u tiene valor promedio cero.

Proposición 1.1.2 *Para $s \in \mathbb{R}$, la aplicación* $\begin{array}{rcl} \wedge : H_\pi^s & \longrightarrow & l^2\left(\langle n \rangle^{2s}\right) \\ u & \mapsto & \{\widehat{u}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$ *es una biyección, donde* $l^2\left(\langle n \rangle^{2s}\right) := \left\{ \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \,/ \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n \rangle^{2s} |a_n|^2 < \infty \right\}$.

Prueba. La parte (i) de la Proposición 1.1.1 nos da la inyectividad de $^\wedge$. Sea $\{a_n\} \in l^2\left(\langle n \rangle^{2s}\right)$, entonces existe un $N \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ tal que $f_n := (1+n^2)^{-N} a_n \in l_n^2$. Sean $F \in L^2([0,2\pi]) \hookrightarrow S'([0,2\pi])$ tal que $\widehat{F}(n) = f_n$ y $u := (I - \partial_x^2)^N F$, entonces

$$\widehat{u}(n) = \left(1+n^2\right)^N \widehat{F}(n) = a_n \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}$$

y $u \in H_\pi^s$ ■

Sea $S([0,2\pi]\times\mathbb{R})$ el espacio de las funciones $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ tales que

(i) Para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\psi(t) := \psi(\cdot_x, t) \in S([0,2\pi]);$$

(ii) Para todo $M, N \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

$$\|\psi\|_{M,N} := \sup_{\substack{|(\alpha_1,\alpha_2)|\le N \\ (x,t)\in\mathbb{R}^2}} \langle t \rangle^M |\partial_t^{\alpha_1} \partial_x^{\alpha_2} \psi(x,t)| < \infty.$$

Con estas seminormas, $S([0,2\pi]\times\mathbb{R})$ adquiere estructura de espacio vectorial topológico.

Sean $S(\mathbb{R}_t)$ el espacio de Schwartz de funciones de la variable temporal t y $S'(\mathbb{R}_t)$ su espacio dual. Si $S'([0,2\pi]\times\mathbb{R})$ es el espacio dual de $S([0,2\pi]\times\mathbb{R})$, definimos para $u\in S'([0,2\pi]\times\mathbb{R})$, $n\in\mathbb{Z}$ y $\varphi\in S(\mathbb{R}_t)$.

$$u_n(\varphi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u\left(e^{-in(\cdot_x)}\varphi(\cdot_t)\right).$$

Así $u_n \in S'(\mathbb{R}_t)$. Ahora, si para cada $n\in\mathbb{Z}$, la transformada de Fourier $\widehat{u}_n \in S'(\mathbb{R}_\tau)$ de u_n tiene un representante funcional, es decir, si existe $g_n : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ tal que

$$\widehat{u}_n(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} g_n(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \qquad \text{para todo } \varphi\in S(\mathbb{R}_\tau),$$

entonces escribimos $\widehat{u}(n,\tau) := g_n(\tau)$. Definimos $S'_{\mathcal{F}}([0,2\pi]\times\mathbb{R})$, como la colección de distribuciones en $S'([0,2\pi]\times\mathbb{R})$ con la propiedad anterior.

Sea $l(n) = n^3$ el símbolo de la parte lineal espacial $\frac{\partial^3}{\partial x^3}$ de la ecuación KdV periódica. Para $\tau\in\mathbb{R}$ y $n\in\mathbb{N}$, sean $\sigma := \tau - l(n)$ y $\lambda := (n,\tau)$.

Definición 1.1.2 *Para $s,\gamma\in\mathbb{R}$ definimos el espacio de Bourgain $X_{s,\gamma}$ por*

$$X_{s,\gamma} := \left\{ u\in S'_{\mathcal{F}}([0,2\pi]\times\mathbb{R}) / \widehat{u}(0,\cdot_\tau) = 0 \ y \ \|u\|^2_{s,\gamma} := \sum_{n\neq 0}\int_{-\infty}^{\infty} \langle n\rangle^{2s}\langle\sigma\rangle^{2\gamma}|\widehat{u}(\lambda)|^2\,d\lambda < \infty \right\}.$$

Puede demostrarse (véase Lema 1.1.1 en [M], página 6) que $S([0,2\pi]\times\mathbb{R})\cap X_{s,\gamma}$ es denso en $X_{s,\gamma}$.

En el espacio $\widetilde{H}^s_\pi$ definimos el grupo $W(t)$ asociado a la parte lineal de la ecuación KdV periódica de la siguiente manera: Dados $u_0\in\widetilde{H}^s_\pi$ y $t\in\mathbb{R}$ entonces $W(t)u_0\in\widetilde{H}^s_\pi$ se define de manera que

$$[W(t)u_0]^\wedge(n) := \begin{cases} e^{itl(n)}\widehat{u}_0(n) & \text{si } n\neq 0, \\ 0 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Por la Proposición 1.1.2 podemos afirmar que existe $W(t)u_0 \in \widetilde{H}^s_\pi$ con la anterior propiedad.

1.2 El Concepto de Solución del Problema de Cauchy

Formalmente, una función u de la variable temporal t y con valores en el conjunto

$\{f/f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$ de funciones de la variable espacial x, es decir, $u:[-T,T]\to\{f/f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$, es solución del PVI periódico (i)-(ii) si para $t\in[-T,T]$

$$u(t)=W(t)\,u_0+\int_0^t W(t-t')\left[-\frac{1}{2}\partial_x u(t')^2\right]dt'.$$

Para definir de manera precisa nuestro concepto de solución debemos darle sentido a la ecuación integral anterior en el contexto funcional determinado por los espacios descritos en la sección 1.1. Esto será hecho con ayuda de ciertos estimativos lineales y no lineales, que estableceremos en el capítulo 2. Primero que todo démosle una forma adecuada a la parte integral de la anterior ecuación que nos permita realizar dichos estimativos. Sea $\widetilde{S}([0,2\pi]\times\mathbb{R})$ el espacio constituido por los elementos f de $S([0,2\pi]\times\mathbb{R})$ con la propiedad de que $\widehat{f}(0,\tau)=0$ para todo $\tau\in\mathbb{R}$. Así, si $f(t')=f(\cdot_x,t')$, entonces $\widehat{f(t')}(0)=0$ para todo $t'\in\mathbb{R}$ y $W(t-t')\,f(t')$ está bien definido para $t,t'\in\mathbb{R}$; además para t fijo, la función $t'\mapsto W(t-t')\,f(t')$ es continua de $\mathbb{R}$ en $S([0,2\pi])$. Tenemos así que la integral

$$\int_0^t W(t-t')\,f(t')\,dt'$$

está en $S([0,2\pi])$, con lo cual podemos calcular, para $t\in\mathbb{R}$ y $n\neq 0$, el coeficiente de Fourier $n-$ésimo de esta integral con ayuda de las propiedades de la integral de Bochner (véase Corolario 2 en [Y], página 134), como sigue:

$$\left[\int_0^t W(t-t')\,f(t')\,dt'\right]^{\wedge}(n)=\int_0^t e^{i(t-t')n^3}\,\widehat{f(t')}(n)\,dt'.$$

Veamos ahora que para t fijo estos coeficientes de Fourier son absolutamente sumables; y así, usando la parte (ii) de la Proposición 1.1.1, obtendremos una expresión para $\int_0^t W(t-t')\,f(t')\,dt'$ en términos de sus coeficientes de Fourier. En realidad, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y teniendo presente que $\sum_{n\neq 0}\frac{1}{\langle n\rangle^2}<\infty$, de la identidad de Parseval se sigue que

$$\sum_{n\neq 0}\left|\int_0^t e^{i(t-t')n^3}\widehat{f(t')}(n)\,dt'\right|\leq\int_0^t\sum_{n\neq 0}\left|\widehat{f(t')}(n)\right|dt'$$

$$=\int_0^t\sum_{n\neq 0}\left|\widehat{f(t')}(n)\right|\frac{\langle n\rangle}{\langle n\rangle}dt'\leq C\int_0^t\left(\sum_{n\neq 0}\left|\widehat{f(t')}(n)\right|^2\langle n\rangle^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n\neq 0}\frac{1}{\langle n\rangle^2}\right)^{\frac{1}{2}}dt'$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C\int_0^t \left(\sum_{n\neq 0}\left|\widehat{f\left(t'\right)}\left(n\right)\right|^2+\sum_{n\neq 0}\left|in\widehat{f\left(t'\right)}\left(n\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} dt' \\
&\leq C\int_0^t \left(\int_0^{2\pi}\left|f\left(x,t'\right)\right|^2 dx+\int_0^{2\pi}\left|\partial_x f\left(x,t'\right)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} dt' \\
&\leq C\int_0^t \left(\int_0^{2\pi}\left|f\left(x,t'\right)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_0^{2\pi}\left|\partial_x f\left(x,t'\right)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} dt' \\
&\leq C\left|t\right|^{\frac{1}{2}}\left\{\left(\int_0^t\int_0^{2\pi}\left|f\left(x,t'\right)\right|^2 dxdt'\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_0^t\int_0^{2\pi}\left|\partial_x f\left(x,t'\right)\right|^2 dxdt'\right)^{\frac{1}{2}}\right\}<\infty.
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$
\left[\int_0^t W\left(t-t'\right)f\left(t'\right)dt'\right]\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n\neq 0}e^{inx}\int_0^t e^{i\left(t-t'\right)n^3}\widehat{f\left(t'\right)}\left(n\right)dt'. \tag{1.1}
$$

Notemos que para $j,k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

$$
\sup_{t'}\left\langle t'\right\rangle^j\left|\partial_{t'}^k\widehat{f\left(t'\right)}\left(n\right)\right|\leq C\sup_{t'}\int_0^{2\pi}\left\langle t'\right\rangle^j\left|\partial_{t'}^k f\left(x,t'\right)e^{-inx}\right|dx\leq C\left\|f\right\|_{j,k}.
$$

En consecuencia la función $t'\mapsto\widehat{f\left(t'\right)}\left(n\right)$ pertenece a $S\left(\mathbb{R}_\tau\right)$ y por tanto la función $\tau\mapsto\widehat{f}\left(n,\tau\right)=\left[\widehat{f\left(t'\right)}\left(n\right)\right]^{\wedge t'}\left(\tau\right)$ está en $S\left(\mathbb{R}_\tau\right)\hookrightarrow L^1\left(\mathbb{R}_\tau\right)$. De aquí se sigue que

$$
\left[e^{-it'l(n)}\widehat{f\left(t'\right)}\left(n\right)\right]^{\wedge t'}\left(\tau\right)=\widehat{f}\left(n,\tau+l\left(n\right)\right)\in L^1\left(\mathbb{R}_\tau\right). \tag{1.2}
$$

Ahora, del hecho de que para $g\in L^1\left(\mathbb{R}_t\right)$ tal que $\widehat{g}\in L^1\left(\mathbb{R}_\tau\right)$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
\int_0^t g\left(t'\right)dt'&=\int_0^t\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{it'\tau}\widehat{g}\left(\tau\right)d\tau dt' \\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{g}\left(\tau\right)\int_0^t e^{it'\tau}dt'd\tau=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it\tau}-1}{i\tau}\widehat{g}\left(\tau\right)d\tau,
\end{aligned}
$$

y de las igualdades (1.1) y (1.2) concluimos que

$$
\left[\int_0^t W\left(t-t'\right)f\left(t'\right)dt'\right]\left(x\right)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n\neq 0}e^{inx}e^{itn^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it\tau}-1}{i\tau}\left[e^{-in^3(\cdot_t)}\widehat{f\left(\cdot_t\right)}\left(n\right)\right]^{\wedge}\left(\tau\right)d\tau
$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \neq 0} e^{inx} e^{itn^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\tau} - 1}{i\tau} \widehat{f}\left(n, \tau + n^3\right) d\tau = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \neq 0} e^{inx} e^{itn^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\sigma} - 1}{i\sigma} \widehat{f}(n, \tau)\, d\tau.$$

Sea $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ una función tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi \equiv 1$ en $[-1, 1]$ y $\varphi \equiv 0$ por fuera de $[-2, 2]$. Entonces de la anterior igualdad, obtenemos que

$$\left[\int_0^t W(t - t') f(t')\, dt'\right](x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \neq 0} e^{inx} e^{itn^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\sigma} - 1}{i\sigma} \varphi(\sigma) \widehat{f}(n, \tau)\, d\tau$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{n \neq 0} e^{inx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\tau}}{i\sigma} (1 - \varphi(\sigma)) \widehat{f}(n, \tau)\, d\tau + \frac{1}{2\pi} \sum_{n \neq 0} e^{inx} e^{itn^3} \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1 - \varphi(\sigma)}{i\sigma} \widehat{f}(n, \tau)\, d\tau.$$

Sean f_0, f_1 y h definidas como sigue:

$$\widehat{f_1(t)}(n) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\sigma} - 1}{i\sigma} \varphi(\sigma) \widehat{f}(n, \tau)\, d\tau, \tag{1.3}$$

$$\widehat{h}(n, \tau) := \frac{1 - \varphi(\sigma)}{i\sigma} \widehat{f}(n, \tau), \tag{1.4}$$

$$\widehat{f_0}(n) := -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \varphi(\sigma)}{i\sigma} \widehat{f}(n, \tau)\, d\tau. \tag{1.5}$$

Entonces

$$\left[\int_0^t W(t - t') f(t')\, dt'\right](\cdot_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [W(t) f_1(t)](\cdot_x) + h(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [W(t) f_0](\cdot_x)$$

$$=: I(f)(t) + II(f)(t) + III(f)(t), \tag{1.6}$$

donde $h(t) := h(\cdot_x, t)$.

Sea $\psi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}_t)$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi \equiv 1$ en $[-1, 1]$ y $\psi \equiv 0$ por fuera de $[-2, 2]$. Sean $T \in (0, 1]$ y $\widetilde{S} := \widetilde{S}([0, 2\pi] \times \mathbb{R}) \cap X_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$. Definamos en $\widetilde{S} \times \widetilde{S}$ el operador B_T por

$$B_T(u, v) = -\frac{1}{2} \partial_x \left(\left[\psi\left(T^{-1} \cdot_t\right) u\right] \left[\psi\left(T^{-1} \cdot_t\right) v\right]\right), \tag{1.7}$$

y el operador G_T por

$$G_T(u, v) := \psi(\cdot_t)\, I(B_T(u, v)) + II(B_T(u, v)) + \psi(\cdot_t)\, III(B_T(u, v)). \tag{1.8}$$

Queremos ahora dar una definición precisa de solución del PVI periódico (i)-(ii). Para ello será fundamental el lema que presentamos a continuación y que será probado en el capítulo 2. Dicho lema establece que la forma bilineal G_T tiene ciertas propiedades de acotamiento que, junto con un argumento de punto fijo, nos permitirán demostrar la existencia de una solución del problema.

Lema 1.2.1

(i) *Existen* $\theta > 0$ *y* $C > 0$ *tales que para* $T \in (0,1]$ *y* $u, v \in \widetilde{S}$

$$\|G_T(u,v)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_t;\widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}})\cap X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} \leq CT^\theta \|u\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \|v\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}.$$

(ii) Sean $u, v \in \widetilde{S}$. Entonces

$$G_T(u,v) \in C_b(\mathbb{R}_t;\widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}}) \cap X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}.$$

Del Lema 1.2.1 y del hecho de que $\widetilde{S}$ es denso en $X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ se sigue que G_T tiene una única extensión continua a un operador, que seguiremos denotando G_T, de $X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \times X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ en $C_b(\mathbb{R}_t;\widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}}) \cap X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$. Dicha extensión se construye de la siguiente manera: Sean $u, v \in X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ y sean $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ sucesiones en $\widetilde{S}$ tales que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ y $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v$ en $X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$, entonces:

$$\begin{aligned}
&\|G_T(u_n,v_n) - G_T(u_m,v_m)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_t;\widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}})\cap X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} \\
= \;& \|G_T(u_n-u_m,v_n) - G_T(u_m,v_m-v_n)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_t;\widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}})\cap X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} \\
\leq \;& \|G_T(u_n-u_m,v_n)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_t;\widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}})\cap X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} + \|G_T(u_m,v_m-v_n)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_t;\widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}})\cap X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} \\
\leq \;& CT^\theta \left(\|u_n-u_m\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \|v_m\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} + \|u_m\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \|v_m-v_n\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \right) \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

En consecuencia la sucesión $\{G_T(u_n,v_n)\}$ es de Cauchy en $L^\infty(\mathbb{R}_t;\widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}}) \cap X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$. Como $C_b(\mathbb{R}_t;\widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}})$ es un subespacio cerrado de $L^\infty(\mathbb{R}_t;\widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}})$ entonces para (u,v) en $X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \times X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ definimos $G_T(u,v)$ como

$$G_T(u,v) := \lim_{n\to\infty} G_T(u_n,v_n) \in C_b(\mathbb{R}_t;\widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}}) \cap X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}.$$

Definición 1.2.1 *Para $T > 0$, definimos el espacio*

$$X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}[-T,T] := \left\{ v|_{[-T,T]} \,/ v \in C_b(\mathbb{R}_t; \widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}}) \cap X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \right\}.$$

Para $u \in X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}[-T,T]$ definimos la norma de u de la siguiente manera:

$$\|u\|_{X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}[-T,T]} := \inf \left\{ \|v\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \,/ v \in C_b(\mathbb{R}_t; \widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}}) \cap X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \ \ y \ \ v|_{[-T,T]} = u \right\}.$$

Definición 1.2.2 *Sean $T > 0$ y $u_0 \in \widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}}$. Decimos que una función $u \in X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}[-T,T]$ es solución en $[-T,T]$ del PVI periódico (i)-(ii) con dato inicial u_0 si existe una $v \in C_b(\mathbb{R}_t; \widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}}) \cap X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ extensión de u tal que*

$$u(t) = W(t)\, u_0 + [G_T(v,v)](t) \qquad \forall t \in [-T,T]. \tag{1.9}$$

Nota 1.2.1 *La demostración de la parte (ii) del Lema 1.2.1 se lleva a cabo estableciendo esta desigualdad para cada uno de los sumandos en 1.8 de la forma bilineal G_T, de aquí se sigue que cada sumando puede extenderse a una forma bilineal continua de $X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \times X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ en $C_b(\mathbb{R}_t; \widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}}) \cap X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$. A partir de esto se puede demostrar, por un argumento de densidad, que si φ_1, T_1, ψ_1 y φ_2, T_2, ψ_2 son dos ternas que satisfacen las propiedades requeridas para φ, T y ψ; si G_{T_1,φ_1,ψ_1} y G_{T_2,φ_2,ψ_2} corresponden al operador G_T definido con φ_1, T_1, ψ_1 y φ_2, T_2, ψ_2 respectivamente; si suponemos además que $T_1 \leq T_2$ y que v_1 y v_2 son dos extensiones diferentes en $X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ de la función $u \in X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}[-T_1,T_1]$, entonces*

$$\left[G_{T_1,\varphi_1,\psi_1}(v_1,v_2)\right](t) = \left[G_{T_2,\varphi_2,\psi_2}(v_1,v_2)\right](t) \qquad \forall t \in [-T_1,T_1].$$

Es decir, la definición 1.2.2 es independiente de la escogencia de φ, ψ y v.

1.3 Resultados Principales

Finalizamos este capítulo presentando los teoremas de existencia y unicidad de soluciones locales en el tiempo para el PVI periódico (i)-(ii), que constituyen el objetivo central de este trabajo. Estos teoremas serán demostrados en el capítulo 3.

Teorema 1.3.1 *Sea $u_0 \in \widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}}$. Entonces existe $T = T\left(\|u_0\|_{-\frac{1}{2}}\right) > 0$, tal que el PVI periódico (i)-(ii) tiene una solución $u \in X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}[-T,T]$ en $[-T,T]$ con dato inicial u_0.*

Teorema 1.3.2 *Sean $u_0 \in \widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}}$ y $T > 0$. Entonces existe a lo sumo una solución $u \in X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}[-T,T]$ del problema (i)-(ii) en $[-T,T]$ con dato inicial u_0.*

Capítulo 2

Estimación de la Forma Bilineal G_T.

(Demostración del Lema 1.2.1)

En este capítulo demostraremos el Lema 1.2.1. En la sección 2.1 comenzamos estableciendo un estimativo lineal relacionado con una localización del primer término del lado derecho de (1.9) que, junto con el Lema 1.2.1, nos permite probar que un cierto operador, el cual es una localización del lado derecho de (1.9), es una contracción en una bola cerrada de un espacio de Banach adecuado y su punto fijo conduce a la solución local del PVI periódico (i)-(ii) con dato inicial $u_0 \in \widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}}$. En las estimaciones que llevaremos a cabo haremos uso de los lemas que formulamos a continuación. El primero de ellos expresa algunas desigualdades elementales de cálculo y el segundo se refiere a una propiedad sencilla que permite estimar una sumatoria con ayuda de una integral análoga.

Lema 2.0.3

(i) Para $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\langle x\rangle^\alpha \langle x-\mu\rangle^\alpha} \leq \frac{C}{\langle \mu\rangle^{2\alpha-1}}. \tag{2.1}$$

(ii) Para $\alpha > \frac{1}{2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{|x-a|}\,\langle x\rangle^\alpha} \leq \frac{C}{\langle a\rangle^{\alpha-\frac{1}{2}}}. \tag{2.2}$$

Lema 2.0.4 *Sea $f \geq 0$ una función real. Supongamos que cierto intervalo I es la unión de N intervalos contiguos en cada uno de los cuales f es monótona. Entonces*

$$\sum_{n\in I} f(n) \leq \int_I f(x) + N \sup_{x\in I} f(x).$$

2.1 Estimativos Lineales

Proposición 2.1.1 *Sea $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_t)$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi \equiv 1$ en $[-1,1]$ y $\psi \equiv 0$ por* *fuera de* $[-2,2]$. *Existe una constante positiva* C *tal que para* $u_0 \in \widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}}$

$$\left\| \psi\left(\cdot_t\right)\left[W\left(\cdot_t\right)u_0\right]\left(\cdot_x\right)\right\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \leq C \left\|u_0\right\|_{-\frac{1}{2}}. \tag{2.3}$$

Prueba. Sea $u := \psi\left(\cdot_t\right)\left[W\left(\cdot_t\right)u_0\right]\left(\cdot_x\right)$. Entonces para todo $\varphi \in S\left(\mathbb{R}_t\right)$ se tiene

$$u_n\left(\varphi\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u\left(e^{-in\left(\cdot_x\right)}\varphi\left(\cdot_t\right)\right).$$

Por tanto, para $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}
& \widehat{u}_n\left(\varphi\right) = u_n\left(\widehat{\varphi}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u\left(e^{-in\left(\cdot_x\right)}\widehat{\varphi}\left(\cdot_t\right)\right) \\
= & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(t\right)\left[W\left(t\right)u_0\right]\left(x\right) e^{-inx}\widehat{\varphi}\left(t\right) dt dx \\
= & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(t\right)\widehat{\varphi}\left(t\right)\left[\int_0^{2\pi}\left(W\left(t\right)u_0\right)\left(x\right)e^{-inx}dx\right]dt \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(t\right)\widehat{\varphi}\left(t\right)\left[W\left(t\right)u_0\right]^{\wedge}\left(n\right)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(t\right)\widehat{\varphi}\left(t\right)e^{itn^3}\widehat{u}_0\left(n\right)dt \\
= & \widehat{u}_0\left(n\right)\int_{-\infty}^{\infty}\left[\psi\left(\cdot_t\right)e^{i\left(\cdot_t\right)n^3}\right]^{\wedge}\left(\tau\right)\varphi\left(\tau\right)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\psi\left(\cdot\right)e^{i\left(\cdot_t\right)n^3}\right]^{\wedge}\left(\tau\right)\widehat{u}_0\left(n\right)\varphi\left(\tau\right)d\tau \\
= & \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{\psi}\left(\tau-n^3\right)\widehat{u}_0\left(n\right)\varphi\left(\tau\right)d\tau,
\end{aligned}$$

es decir

$$\widehat{u}\left(n,\tau\right) = \widehat{\psi}\left(\tau-n^3\right)\widehat{u}_0\left(n\right).$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}
& \left\|\psi\left(\cdot_t\right)\left[W\left(\cdot_t\right)u_0\right]\left(\cdot_x\right)\right\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^2 = \sum_{n\neq 0}\int_{-\infty}^{\infty}\left\langle n\right\rangle^{-1}\left\langle\sigma\right\rangle\left|\widehat{u}_0\left(n\right)\widehat{\psi}\left(\tau-n^3\right)\right|^2 d\tau \\
= & \sum_{n\neq 0}\left\langle n\right\rangle^{-1}\left|\widehat{u}_0\left(n\right)\right|^2\int_{-\infty}^{\infty}\left\langle\sigma\right\rangle\left|\widehat{\psi}\left(\sigma\right)\right|^2 d\tau = \left\|u_0\right\|_{-\frac{1}{2}}^2\int_{-\infty}^{\infty}\left\langle\tau\right\rangle\left|\widehat{\psi}\left(\tau\right)\right|^2 d\tau \\
= & \left\|u_0\right\|_{-\frac{1}{2}}^2\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\psi}\left(\tau\right)\right|^2 d\tau + \int_{-\infty}^{\infty}\left|\tau\right|\left|\widehat{\psi}\left(\tau\right)\right|^2 d\tau\right\} \leq C\left\|u_0\right\|_{-\frac{1}{2}}^2,
\end{aligned}$$

donde $C \in \mathbb{R}$ está dada por $C \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\psi}\left(\tau\right)\right|^2 d\tau + \int_{-\infty}^{\infty}\left|\tau\right|\left|\widehat{\psi}\left(\tau\right)\right|^2 d\tau < \infty$.

(Las integrales en la anterior expresión son finitas porque $\widehat{\psi} \in S\left(\mathbb{R}_\tau\right)$).

Tenemos así probada la Proposición 2.1.1. $\blacksquare$

Proposición 2.1.2 *Sea* $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_t)$ *tal que* $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi \equiv 1$ *en* $[-1,1]$ *y* $\psi \equiv 0$ *por fuera de* $[-2,2]$. *Existe una constante positiva* C *tal que si* $f \in \widetilde{S}$ *entonces*

(i)

$$\left\|\psi(\cdot_t)\, I(f)(\cdot_x, \cdot_t)\right\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \leq C\left\|g_0(f)\right\|_{-\frac{1}{2}}, \tag{2.4}$$

(ii)

$$\left\|\psi(\cdot_t)\, III(f)(\cdot_x, \cdot_t)\right\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \leq C\left\|g_0(f)\right\|_{-\frac{1}{2}}, \tag{2.5}$$

(iii)

$$\left\|II(f)(\cdot_x, \cdot_t)\right\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \leq C\left\|f\right\|_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}, \tag{2.6}$$

donde $I(f)(\cdot_x,\cdot_t)$, $II(f)(\cdot_x,\cdot_t)$ y $III(f)(\cdot_x,\cdot_t)$ están definidos como en (1.6) y $g_0(f)$ está definido mediante sus coeficientes de Fourier así:

$$\widehat{g_0(f)}(n) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\widehat{f}(n,\tau)\right|}{\langle\sigma\rangle} d\tau. \tag{2.7}$$

Prueba. (i) De (1.6) y (1.3) se tiene que

$$\begin{aligned}
\psi(t)\, I(f)(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\psi(t)\left[W(t)\, f_1(t)\right](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n\neq 0} e^{inx}\psi(t)\left[W(t)\, f_1(t)\right]^{\wedge}(n) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n\neq 0} e^{inx}\psi(t)\, e^{itn^3}\widehat{f_1(t)}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n\neq 0} e^{inx}\psi(t)\, e^{itn^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it\sigma}-1}{i\sigma}\varphi(\sigma)\,\widehat{f}(n,\tau)\, d\tau \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n\neq 0} e^{inx}\psi(t)\, e^{itn^3}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} i^k\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\sigma^k\varphi(\sigma)\,\widehat{f}(n,\tau)\, d\tau \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n\neq 0} e^{inx}\sum_{k=0}^{\infty}\psi(t)\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}e^{itn^3}\int_{-\infty}^{\infty} i^k\sigma^k\varphi(\sigma)\,\widehat{f}(n,\tau)\, d\tau \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n\neq 0} e^{inx}\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k(t)\, e^{itn^3} g_k(n),
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\psi_k(t) &:= \psi(t)\frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \qquad \text{y} \\
g_k(n) &:= \int_{-\infty}^{\infty} i^k\sigma^k\varphi(\sigma)\,\widehat{f}(n,\tau)\, d\tau.
\end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta la fórmula de inversión en $S(\mathbb{R}_t)$, de la anterior cadena de igualdades se sigue

$$\begin{aligned}\psi(t)\, I(f)(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n\neq 0} e^{inx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\tau}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k(t)\, e^{itn^3} g_k(n)\right]^{\wedge_t}(\tau)\, d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\neq 0} e^{inx}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{\psi_k}(\sigma)\, g_k(n)\, d\tau,\end{aligned}$$

pues

$$\left[e^{itn^3}\psi_k(t)\right]^{\wedge}(\tau) = \widehat{\psi_k}\left(\tau - n^3\right) = \widehat{\psi_k}(\sigma).$$

Luego

$$[\psi(\cdot_t)\, I(f)(\cdot_x,\cdot_t)]^{\wedge}(n,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{\psi_k}(\sigma)\, g_k(n).$$

Estimemos ahora $\|\psi(\cdot_t)\, I(f)(\cdot_x,\cdot_t)\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$. Usando la desigualdad de Minkowski se tiene

$$\|\psi(\cdot_t)\, I(f)(\cdot_x,\cdot_t)\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \left\{\sum_{n\neq 0}\int_{-\infty}^{\infty}\langle n\rangle^{-1}\langle\sigma\rangle\left|[\psi(\cdot_t)\, I(f)(\cdot_x,\cdot_t)]^{\wedge}(n,\tau)\right|^2 d\tau\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}&= \left\{\sum_{n\neq 0}\int_{-\infty}^{\infty}\langle n\rangle^{-1}\langle\sigma\rangle\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{\psi_k}(\sigma)\, g_k(n)\right|^2 d\tau\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\sum_{n\neq 0}\int_{-\infty}^{\infty}\langle n\rangle^{-1}\langle\sigma\rangle\left|\widehat{\psi_k}(\sigma)\, g_k(n)\right|^2 d\tau\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= C\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left(\int_{-\infty}^{\infty}\langle\sigma\rangle\left|\widehat{\psi_k}(\sigma)\right|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n\neq 0}\langle n\rangle^{-1}\left|\int_{-\infty}^{\infty} i^k\sigma^k\varphi(\sigma)\,\widehat{f}(n,\tau)\, d\tau\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}.\end{aligned}$$

Pero

$$\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\langle\sigma\rangle\left|\widehat{\psi_k}(\sigma)\right|^2 d\tau\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\tau|)\left|\widehat{\psi_k}(\tau)\right|^2 d\tau\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}&\leq 2\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|\tau|^2\right)\left|\widehat{\psi_k}(\tau)\right|^2 d\tau\right\}^{\frac{1}{2}} = 2\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\psi_k}(\tau)\right|^2 d\tau + \int_{-\infty}^{\infty}\left|i\tau\widehat{\psi_k}(\tau)\right|^2 d\tau\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_k(t)|^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty}|\psi_k'(t)|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} \leq C\left\{\int_{-2}^{2}|\psi_k(t)|^2 + |\psi_k'(t)|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \; C\left\{\int_{-2}^{2}\frac{t^{2k+2}}{(k+1)!^{2}}+\frac{t^{2k}}{(k!)^{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}\leq\frac{C}{(k+1)!}\left\{\int_{-2}^{2}t^{2k+2}+(k+1)^{2}\,t^{2k}\;dt\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \; \frac{C}{(k+1)!}\left\{\frac{2^{2k+3}}{2k+3}+(k+1)^{2}\,\frac{2^{2k+1}}{2k+1}\right\}^{\frac{1}{2}}\leq C\frac{(k+1)}{(k+1)!}2^{k+2}=C\frac{2^{k+2}}{k!}
\end{aligned}
$$

y $\left\{\sum_{n\neq 0}\langle n\rangle^{-1}\left|\int_{-\infty}^{\infty}i^{k}\sigma^{k}\varphi\left(\sigma\right)\widehat{f}\left(n,\tau\right)d\tau\right|^{2}\right\}^{\frac{1}{2}}\leq\left\{\sum_{n\neq 0}\langle n\rangle^{-1}\left(\int_{\{\tau/|\sigma|\leq 2\}}2^{k}\left|\widehat{f}\left(n,\tau\right)\right|d\tau\right)^{2}\right\}^{\frac{1}{2}}$

$$
\begin{aligned}
&\leq \; 2^{k}\left\{\sum_{n\neq 0}\langle n\rangle^{-1}\left(\int_{\{\tau/|\sigma|\leq 2\}}\frac{3\left|\widehat{f}\left(n,\tau\right)\right|}{\langle\sigma\rangle}d\tau\right)^{2}\right\}^{\frac{1}{2}}\leq 3\cdot 2^{k}\left\{\sum_{n\neq 0}\langle n\rangle^{-1}\left|\widehat{g_{0}\left(f\right)}\left(n\right)\right|^{2}\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \; 3\cdot 2^{k}\left\|g_{0}\left(f\right)\right\|_{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

De donde se sigue que

$$
\left\|\psi\left(\cdot_{t}\right)I\left(f\right)\left(\cdot_{x},\cdot_{t}\right)\right\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\leq C\left\|g_{0}\left(f\right)\right\|_{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k+2}}{k!}2^{k}\leq C\left\|g_{0}\left(f\right)\right\|_{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^{k}}{k!}=Ce^{4}\left\|g_{0}\left(f\right)\right\|_{-\frac{1}{2}},
$$

y tenemos así demostrado el estimativo (2.4).

(ii) Teniendo en cuenta que $\int_{-\infty}^{\infty}\langle\tau\rangle\left|\widehat{\psi}\left(\tau\right)\right|^{2}d\tau<\infty$ porque $\widehat{\psi}\in S\left(\mathbb{R}_{\tau}\right)$ y que de (1.5)

$$
\begin{aligned}
\left|\widehat{f_{0}}\left(n\right)\right|\leq\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|1-\varphi\left(\sigma\right)\right|}{\left|\sigma\right|}\left|\widehat{f}\left(n,\tau\right)\right|d\tau &= \int_{\{\tau/|\sigma|\geq 1\}}\frac{\left|1-\varphi\left(\sigma\right)\right|}{\left|\sigma\right|}\left|\widehat{f}\left(n,\tau\right)\right|d\tau\\
\leq \; 2\int_{\{\tau/|\sigma|\geq 1\}}\frac{\left|1-\varphi\left(\sigma\right)\right|}{\langle\sigma\rangle}\left|\widehat{f}\left(n,\tau\right)\right|d\tau &\leq 2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\widehat{f}\left(n,\tau\right)\right|}{\langle\sigma\rangle}d\tau=2\widehat{g_{0}\left(f\right)}\left(n\right),
\end{aligned}
$$

se sigue, de (1.6) y del procedimiento hecho en la demostración de la Proposición 2.1.1, que

$$
\begin{aligned}
\left\|\psi\left(\cdot_{t}\right)III\left(f\right)\left(\cdot_{x},\cdot_{t}\right)\right\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\|\psi\left(\cdot_{t}\right)\left[W(\cdot_{t})f_{0}\right]\left(\cdot_{x}\right)\right\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\\
&\leq C\left\|f_{0}\right\|_{-\frac{1}{2}}\leq C\left\|g_{0}\left(f\right)\right\|_{-\frac{1}{2}}. \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

De esta manera hemos probado el estimativo (2.5).

(iii) De (1.6) y (1.4)

$$
\begin{aligned}
\|II(f)(\cdot_x,\cdot_t)\|^2_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} &= \sum_{n\neq 0}\langle n\rangle^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\langle\sigma\rangle\left|\widehat{h}(n,\tau)\right|^2 d\tau\\
= \sum_{n\neq 0}\langle n\rangle^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\langle\sigma\rangle\left|\frac{1-\varphi(\sigma)}{i\sigma}\widehat{f}(n,\tau)\right|^2 d\tau\\
\leq \sum_{n\neq 0}\langle n\rangle^{-1}\int_{\{\tau/|\sigma|\geq 1\}}\frac{\langle\sigma\rangle}{|\sigma|^2}\left|\widehat{f}(n,\tau)\right|^2 d\tau \leq \sum_{n\neq 0}\langle n\rangle^{-1}\int_{\{\tau/|\sigma|\geq 1\}}\frac{4}{\langle\sigma\rangle}\left|\widehat{f}(n,\tau)\right|^2 d\tau\\
\leq 4\sum_{n\neq 0}\int_{-\infty}^{\infty}\langle n\rangle^{-1}\langle\sigma\rangle^{-1}\left|\widehat{f}(n,\tau)\right|^2 d\tau = 4\|f\|^2_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Así queda probado el estimativo (2.6). ■

2.2 Estimativos no Lineales

El estimativo de la siguiente proposición, que será necesario en la demostración del teorema de existencia, no fue probado en [KPV]. Es importante señalar que la prueba de este estimativo requiere, en una de sus partes, descomposiciones diádicas como se hizo en [CKSTT].

Proposición 2.2.1 *Existe una constante positiva C tal que si $u,v\in\widetilde{S}$ y $\gamma\in\left(\frac{3}{8},\frac{1}{2}\right)$ entonces*

$$
\left\|g_0\left(-\frac{1}{2}\partial_x(uv)\right)\right\|_{-\frac{1}{2}} \leq C\left(\|u\|_{-\frac{1}{2},\gamma}\|v\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}+\|u\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\|v\|_{-\frac{1}{2},\gamma}\right), \tag{2.9}
$$

donde g_0 se define como en el enunciado de la Proposición 2.1.2.

Prueba.

$$
\left\|g_0\left(-\frac{1}{2}\partial_x(uv)\right)\right\|_{-\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n\neq 0}\langle n\rangle^{-1}\left|\widehat{g_0(f)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}},
$$

donde

$$
f := -\frac{1}{2}\partial_x(uv).
$$

Como

$$
\widehat{f}(n,\tau) = Cin\left(\sum_{\substack{n_1\neq 0\\ n_1\neq n}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{u}(\lambda_1)\widehat{v}(\lambda_2)\,d\tau_1\right),
$$

donde $\lambda_1 = (n_1, \tau_1)$ y $\lambda_2 = (n_2, \tau_2) = (n - n_1, \tau - \tau_1)$, entonces

$$\left|\widehat{f}(n,\tau)\right| \leq C|n| \left(\sum_{\substack{n_1 \neq 0 \\ n_1 \neq n}} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(\lambda_1)| |\widehat{v}(\lambda_2)| \, d\tau_1 \right).$$

Así

$$\left\| g_0\left(-\frac{1}{2}\partial_x(uv)\right)\right\|_{-\frac{1}{2}} \leq C \left(\sum_{n\neq 0} \langle n\rangle^{-1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{\langle\sigma\rangle} \sum_{\substack{n_1 \neq 0 \\ n_1 \neq n}} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(\lambda_1)| |\widehat{v}(\lambda_2)| \, d\tau_1 d\tau \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sea

$$a := (a_n)_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}}$$

definida por

$$a_n = \langle n\rangle^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{\langle\sigma\rangle} \sum_{\substack{n_1 \neq 0 \\ n_1 \neq n}} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(\lambda_1)| |\widehat{v}(\lambda_2)| \, d\tau_1 d\tau.$$

Entonces

$$\left\| g_0\left(-\frac{1}{2}\partial_x(uv)\right)\right\|_{-\frac{1}{2}} \leq C \|a\|_{l_n^2}.$$

Estimemos $\|a\|_{l_n^2}$ usando dualidad. Probemos que

$$\left|\sum_{n\neq 0} a_n b_n\right| \leq C \left(\|u\|_{-\frac{1}{2},\gamma} \|v\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} + \|u\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \|v\|_{-\frac{1}{2},\gamma} \right) \|b\|_{l_n^2} \tag{2.10}$$

para todo $b \in l_n^2$, con $b_n \geq 0$ y $b_0 = 0$. Sea

$$J := \sum_{n\neq 0} a_n b_n = \sum_{n\neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{n_1 \neq 0 \\ n_1 \neq n}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|n| |\widehat{u}(\lambda_1)| |\widehat{v}(\lambda_2)|}{\langle n\rangle^{\frac{1}{2}} \langle\sigma\rangle} b_n \, d\tau_1 d\tau. \tag{2.11}$$

Sea

$$\Omega := \{(\lambda, \lambda_1) = (n, \tau, n_1, \tau_1) / n, n_1 \in \mathbb{Z} - \{0\},\ n \neq n_1,\ \tau, \tau_1 \in \mathbb{R},\ |\sigma_1| \geq |\sigma_2|\},$$

donde $\sigma_i = \tau_i - n_i^3$, $i = 1, 2$, y sea J_Ω la expresión en (2.11) con las sumas e integrales realizadas en el conjunto Ω. Por un argumento de simetría, para probar (2.10) es suficiente establecer el estimativo

$$J_{\Omega} \leq C \|u\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \|v\|_{-\frac{1}{2},\gamma} \|b\|_{l_n^2} . \tag{2.12}$$

En realidad si se prueba (2.12), haciendo el cambio de variable $(\lambda, \lambda_1') := (\lambda, \lambda_2)$ se tiene que

$$\begin{aligned} (\lambda, \lambda_1') \in \Omega \quad &\Longleftrightarrow \quad |\sigma(\lambda_2)| \geq |\sigma(\lambda - \lambda_2)| \Longleftrightarrow |\sigma(\lambda_2)| \geq |\sigma(\lambda_1)| \\ &\Longleftrightarrow \quad |\sigma_2| \geq |\sigma_1| \Longleftrightarrow (\lambda, \lambda_1) \in \Omega^c \cup N, \end{aligned}$$

donde N es un conjunto de medida cero en $[\mathbb{Z} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}]^2$. Por tanto

$$\begin{aligned} J_{\Omega^c} &:= \sum \int_{\Omega^c} \sum \int \frac{|n| \, |\widehat{u}(\lambda_1)| \, |\widehat{v}(\lambda_2)|}{\langle n \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \sigma \rangle} b_n d\tau_1 \, d\tau \\ &= \sum \int_{\Omega} \sum \int \frac{|n| \, |\widehat{u}(\lambda - \lambda_1')| \, |\widehat{v}(\lambda_1')|}{\langle n \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \sigma \rangle} d\tau_1' \, b_n d\tau \\ &= \sum \int_{\Omega} \sum \int \frac{|n| \, |\widehat{u}(\lambda_2)| \, |\widehat{v}(\lambda_1)|}{\langle n \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \sigma \rangle} d\tau_1 \, b_n d\tau \leq C \|v\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \|u\|_{-\frac{1}{2},\gamma} \|b\|_{l_n^2} . \end{aligned}$$

Probemos ahora (2.12). Para esto dividiremos a Ω en tres conjuntos Ω_1, Ω_2 y Ω_3 como sigue

$$\begin{aligned} \Omega_1 \quad &: \quad = \{(\lambda, \lambda_1) \in \Omega / \, |\sigma_1| \geq |\sigma|\} \\ \Omega_2 \quad &: \quad = \left\{(\lambda, \lambda_1) \in \Omega / \, |\sigma| \geq |\sigma_1| \ \text{ y } \ |n n_1 n_2|^{\frac{1}{100}} \leq |\sigma_1|\right\} \\ \Omega_3 \quad &: \quad = \left\{(\lambda, \lambda_1) \in \Omega / \, |\sigma| \geq |\sigma_1| \ \text{ y } \ |n n_1 n_2|^{\frac{1}{100}} > |\sigma_1|\right\}. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma = 3 n n_1 n_2$$

y por tanto

$$|n n_1 n_2| \leq \max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\}.$$

Para $i = 1, 2, 3$, estimemos J_{Ω_i}, donde J_{Ω_i} es la expresión en (2.11) con las sumas e integrales realizadas en el conjunto Ω_i.

Estimación de J_{Ω_1} :

$$J_{\Omega_1} := \sum \int_{\Omega_1} \sum \int \frac{|n|}{\langle n \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \sigma \rangle} \frac{\langle n_1 \rangle^{\frac{1}{2}} p(\lambda_1)}{\langle \sigma_1 \rangle^{\frac{1}{2}}} \frac{\langle n_2 \rangle^{\frac{1}{2}} q(\lambda_2)}{\langle \sigma_2 \rangle^{\gamma}} b_n d\tau_1 d\tau, \tag{2.13}$$

donde

$$\begin{aligned} p(\lambda_1) &: = \langle n_1 \rangle^{-\frac{1}{2}} \langle \sigma_1 \rangle^{\frac{1}{2}} |\widehat{u}(\lambda_1)| \qquad \text{y} \\ q(\lambda_2) &: = \langle n_2 \rangle^{-\frac{1}{2}} \langle \sigma_2 \rangle^{\gamma} |\widehat{v}(\lambda_2)|. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\|p\| := \|p\|_{L^2_\tau l^2_n} = \left(\sum_{n \neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} \langle n \rangle^{-1} \langle \sigma \rangle |\widehat{u}(\lambda)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$$

$$\|q\| := \|q\|_{L^2_\tau l^2_n} = \left(\sum_{n \neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} \langle n \rangle^{-1} \langle \sigma \rangle^{2\gamma} |\widehat{v}(\lambda)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} = \|v\|_{-\frac{1}{2}, \gamma}.$$

Entonces probemos que

$$J_{\Omega_1} \leq C \|p\| \|q\| \|b\|_{l^2_n}.$$

Sea $\delta \in (0,1)$. Una aplicación de la desigualdad de Cauchy-Schwarz en la variable λ en la expresión (2.13) nos permite concluir que

$$\begin{aligned} J_{\Omega_1} &\leq \sum \int_{A_1^*} \frac{\langle n_1 \rangle^{\frac{1}{2}} p(\lambda_1)}{\langle \sigma_1 \rangle^{\frac{1}{2}}} \left(\sum_{\{\lambda/(\lambda,\lambda_1) \in \Omega_1\}} \int \frac{b_n^2 q(\lambda_2)^2}{\langle \sigma \rangle^{1+\delta}} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\qquad \left(\sum_{\{\lambda/(\lambda,\lambda_1) \in \Omega_1\}} \int \frac{|n|^2 \langle n_2 \rangle}{\langle n \rangle \langle \sigma \rangle^{1-\delta} \langle \sigma_2 \rangle^{2\gamma}} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} d\tau_1 \\ &\leq \left[\sup_{\lambda_1 \in A_1^*} I^*_{\Omega_1}(\lambda_1) \right] \sum \int_{A_1^*} p(\lambda_1) \left(\sum_{\{\lambda/(\lambda,\lambda_1) \in \Omega_1\}} \int \frac{b_n^2 q(\lambda_2)^2}{\langle \sigma \rangle^{1+\delta}} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} d\tau_1, \end{aligned} \tag{2.14}$$

donde

$$A_1^* := \{\lambda_1 / (\exists \lambda)(\lambda, \lambda_1) \in \Omega_1\}$$

e

$$I^*_{\Omega_1} := \frac{\langle n_1\rangle^{\frac{1}{2}}}{\langle \sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}}}\left(\sum_{\{\lambda/(\lambda,\lambda_1)\in\Omega_1\}}\int \frac{|n|^2\langle n_2\rangle}{\langle n\rangle\langle\sigma\rangle^{1-\delta}\langle\sigma_2\rangle^{2\gamma}}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.15}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en la expresión (2.14) obtenemos

$$J_{\Omega_1} \leq \left[\sup_{\lambda_1\in A_1^*} I^*_{\Omega_1}(\lambda_1)\right]\|p\|\left(\sum\int_{\Omega_1}\sum\int\frac{b_n^2 q(\lambda_2)^2}{\langle\sigma\rangle^{1+\delta}}d\tau d\tau_1\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sean $N_1 := n - n_1, \quad T_1 := \tau - \tau_1, \quad N := n, \quad T := \tau$. Entonces

$$J_{\Omega_1} \leq \left[\sup_{\lambda_1\in A_1^*} I^*_{\Omega_1}(\lambda_1)\right]\|p\|\left(\sum_{N_1,T_1}\int q(N_1,T_1)^2\left(\sum_n b_n^2\int_\tau\frac{d\tau}{\langle\sigma\rangle^{1+\delta}}\right)dT_1\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Luego

$$J_{\Omega_1} \leq C\left[\sup_{\lambda_1\in A_1^*} I^*_{\Omega_1}(\lambda_1)\right]\|p\|\,\|q\|\,\|b\|_{l_n^2}, \tag{2.16}$$

donde

$$C = \left(\int_\tau\frac{d\tau}{\langle\sigma\rangle^{1+\delta}}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Probemos que

$$\sup_{\lambda_1\in A_1^*} I^*_{\Omega_1}(\lambda_1) \leq C.$$

Si $\gamma\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ y $\delta\in(0,1)$ se toman de manera que $1-\delta > 2\gamma$, entonces de (2.15)

$$I^*_{\Omega_1}(\lambda_1) \leq \frac{C}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}}}\left(\sum_{\{\lambda/(\lambda,\lambda_1)\in\Omega_1\}}\int\frac{|nn_1n_2|}{\langle\sigma\rangle^{2\gamma}\langle\sigma_2\rangle^{2\gamma}}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.17}$$

Pero para $(\lambda,\lambda_1)\in\Omega_1,\ |nn_1n_2| \leq |\sigma_1|$. Entonces

$$I^*_{\Omega_1}(\lambda_1) \leq C\frac{|\sigma_1|^{\frac{1}{2}}}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}}}\left(\sum_{\{\lambda/(\lambda,\lambda_1)\in\Omega_1\}}\int\frac{d\tau}{\langle\sigma\rangle^{2\gamma}\langle\sigma+(z-\sigma_1)\rangle^{2\gamma}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

donde $z := 3nn_1n_2$. Teniendo en cuenta la desigualdad de cálculo (2.1) y el Lema 2.0.4, concluimos que

$$I^*_{\Omega_1}(\lambda_1) \leq C \left(\sum_{n\neq 0} \frac{1}{\langle z-\sigma_1 \rangle^{4\gamma-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn}{\langle z-\sigma_1 \rangle^{4\gamma-1}} + 2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.18}$$

Estimemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn}{\langle z-\sigma_1 \rangle^{4\gamma-1}}.$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $n_1 > 0$. Con el cambio de variable

$$z := u(n) = 3nn_1n_2 = 3nn_1(n-n_1) = 3n_1\left(n^2 - n_1 n\right),$$
$$dz = 3n_1(2n-n_1)\,dn \quad \text{y} \quad dn = \frac{dz}{3n_1(2n-n_1)}.$$

Además

$$3n_1n^2 - 3n_1^2 n - z = 0, \text{ es decir } n = \frac{n_1}{2} \pm \sqrt{\frac{n_1^2}{4} + \frac{z}{3n_1}}.$$

Trabajando con $n > \frac{n_1}{2}$, tenemos:

$$3n_1(2n-n_1) = 3n_1\left(n_1 + \sqrt{n_1^2 + \frac{4z}{3n_1}} - n_1\right) = \frac{\sqrt{3n_1}}{2}\sqrt{\frac{3n_1^3}{4} + z}.$$

Luego

$$\int_{\frac{n_1}{2}}^{\infty} \frac{dn}{\langle z-\sigma_1 \rangle^{4\gamma-1}} \leq \frac{C}{\sqrt{n_1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{\left|\frac{3n_1^3}{4} + z\right|}\,\langle z-\sigma_1 \rangle^{4\gamma-1}}.$$

Si $4\gamma - 1 > \frac{1}{2}$, de la desigualdad de cálculo (2.2) se sigue que

$$\int_{\frac{n_1}{2}}^{\infty} \frac{dn}{\langle z-\sigma_1 \rangle^{4\gamma-1}} \leq \frac{C}{\sqrt{n_1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{\left|\frac{3n_1^3}{4} + \sigma_1 + z\right|}\,\langle z \rangle^{4\gamma-1}} \leq \frac{C}{\sqrt{n_1}\left\langle \frac{3}{4}n_1^3 + \sigma_1 \right\rangle^{4\gamma-\frac{3}{2}}} \leq C.$$

Similarmente se ve que $\int_{-\infty}^{\frac{n_1}{2}} \frac{dn}{\langle z-\sigma_1 \rangle^{4\gamma-1}} < C$.

De estas estimaciones y de (2.18) se sigue que existe C tal que

$$I^*_{\Omega_1}(\lambda_1) \leq C \qquad \text{para todo } \lambda_1 \in A_1^*.$$

Tenemos entonces de (2.16) que

$$J_{\Omega_1} \leq C \left\| b \right\|_{l_n^2} \left\| p \right\| \left\| q \right\| .$$

Estimación de J_{Ω_2} :

De manera similar a como se hizo en la estimación de J_{Ω_1} puede probarse aplicando primero la desigualdad de Cauchy-Schwarz en la variable λ_1 y luego en la variable λ que

$$J_{\Omega_2} \leq C \left[\sup_{\lambda \in A_2} I_{\Omega_2}(\lambda) \right] \left\| b \right\|_{l_n^2} \left\| p \right\| \left\| q \right\| , \tag{2.19}$$

donde

$$I_{\Omega_2}(\lambda) := \frac{|n|^{\frac{1}{2}}}{\langle \sigma \rangle^{\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}}} \left(\sum_{\{\lambda_1/(\lambda,\lambda_1)\in\Omega_2\}} \int \frac{|n_1|\,|n_2|}{\langle \sigma_1 \rangle \langle \sigma_2 \rangle^{2\gamma}} d\tau_1 \right)^{\frac{1}{2}} , \qquad A_2 := \{ \lambda / \exists \lambda_1 \ (\lambda, \lambda_1) \in \Omega_2 \} ,$$

y $\delta \in (0,1)$.

En realidad:

$$J_{\Omega_2} = \sum \int_{\Omega_2} \sum \int \frac{|n|\,|\widehat{u}(\lambda_1)|\,|\widehat{v}(\lambda_2)|}{\langle n \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \sigma \rangle} b_n d\tau_1 d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= \sum \int_{\Omega_2} \sum \int \frac{|n|}{\langle n \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \sigma \rangle} \frac{\langle n_1 \rangle^{\frac{1}{2}} p(\lambda_1)}{\langle \sigma_1 \rangle^{\frac{1}{2}}} \frac{\langle n_2 \rangle^{\frac{1}{2}} q(\lambda_2)}{\langle \sigma_2 \rangle^{\gamma}} b_n d\tau_1 d\tau \\
&= \sum_{A_2} \int \frac{|n|\, b_n}{\langle n \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \sigma \rangle} \left(\sum_{\{\lambda_1/(\lambda,\lambda_1)\in\Omega_2\}} \int \frac{\langle n_1 \rangle^{\frac{1}{2}} p(\lambda_1)}{\langle \sigma_1 \rangle^{\frac{1}{2}}} \frac{\langle n_2 \rangle^{\frac{1}{2}} q(\lambda_2)}{\langle \sigma_2 \rangle^{\gamma}} d\tau_1 \right) d\tau \\
&\leq \sum_{A_2} \int \frac{|n|\, b_n}{\langle n \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \sigma \rangle^{\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}} \langle \sigma \rangle^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}} \left(\sum_{\{\lambda_1/(\lambda,\lambda_1)\in\Omega_2\}} \int \frac{\langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle}{\langle \sigma_1 \rangle \langle \sigma_2 \rangle^{2\gamma}} d\tau_1 \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
&\qquad \left(\sum_{\{\lambda_1/(\lambda,\lambda_1)\in\Omega_2\}} \int |p(\lambda_1)|^2 \, |q(\lambda_2)|^2 \, d\tau_1 \right)^{\frac{1}{2}} d\tau
\end{aligned}$$

$$\leq \; C\left[\sup_{\lambda\in A_2} I_{\Omega_2}(\lambda)\right]\sum\int_{A_2}\frac{b_n}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}}\left(\sum\int_{\{\lambda_1/(\lambda,\lambda_1)\in\Omega_2\}}|p(\lambda_1)|^2|q(\lambda_2)|^2\,d\tau_1\right)^{\frac{1}{2}}d\tau$$

$$\leq \; C\left[\sup_{\lambda\in A_2} I_{\Omega_2}(\lambda)\right]\left(\sum\int_{A_2}\frac{b_n^2}{\langle\sigma\rangle^{1+\delta}}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum\int_{A_2}\sum\int_{\{\lambda_1/(\lambda,\lambda_1)\in\Omega_2\}}|p(\lambda_1)|^2|q(\lambda_2)|^2\,d\tau_1 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \; C\left[\sup_{\lambda\in A_2} I_{\Omega_2}(\lambda)\right]\|b\|_{l_n^2}\left(\sum\int_{A_2}\sum\int_{\{\lambda_1/(\lambda,\lambda_1)\in\Omega_2\}}|p(\lambda_1)|^2|q(\lambda_2)|^2\,d\tau_1 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \; C\left[\sup_{\lambda\in A_2} I_{\Omega_2}(\lambda)\right]\|b\|_{l_n^2}\|p\|\,\|q\|\,.$$

Tenemos así (2.19). Veamos ahora que para $\delta\in(0,1)$ apropiado

$$\sup_{\lambda\in\Omega_2} I_{\Omega_2}(\lambda)\leq C. \tag{2.20}$$

Escojamos $\alpha\in(0,1)$ de tal manera que $1-2\gamma>100\alpha$ y a continuación, sea $\delta\in(0,1)$ tal que $\delta\leq\alpha$. Teniendo en cuenta que para $(\lambda,\lambda_1)\in\Omega_2, |nn_1n_2|\leq|\sigma|$ y $|nn_1n_2|^{\frac{1}{100}}\leq|\sigma_1|$, concluimos que para $\lambda\in A_2$

$$I_{\Omega_2}(\lambda)=\frac{1}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}}}\left(\sum\int_{\{\lambda_1/(\lambda,\lambda_1)\in\Omega_2\}}\frac{|nn_1n_2|^{\alpha}|nn_1n_2|^{1-\alpha}}{\langle\sigma_1\rangle\langle\sigma_2\rangle^{2\gamma}}d\tau_1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \; \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}}}\left(\sum\int_{\{\lambda_1/(\lambda,\lambda_1)\in\Omega_2\}}\frac{|\sigma_1|^{100\alpha}|\sigma|^{1-\alpha}}{\langle\sigma_1\rangle\langle\sigma_2\rangle^{2\gamma}}d\tau_1\right)^{\frac{1}{2}}\leq\frac{|\sigma|^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}}}\left(\sum\int_{\{\lambda_1/(\lambda,\lambda_1)\in\Omega_2\}}\frac{|\sigma_1|^{100\alpha}}{\langle\sigma_1\rangle\langle\sigma_2\rangle^{2\gamma}}d\tau_1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \; \left(\sum\int_{\{\lambda_1/(\lambda,\lambda_1)\in\Omega_2\}}\frac{d\tau_1}{\langle\sigma_1\rangle^{1-100\alpha}\langle\sigma_2\rangle^{2\gamma}}\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(\sum\int_{\{\lambda_1/(\lambda,\lambda_1)\in\Omega_2\}}\frac{d\tau_1}{\langle\sigma_1\rangle^{2\gamma}\langle\sigma_2\rangle^{2\gamma}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sea $z_1:=\sigma_1+\sigma_2-\sigma=3nn_1n_2$. Entonces

$$I_{\Omega_2}(\lambda)\leq\left(\sum\int_{\{\lambda_1/(\lambda,\lambda_1)\in\Omega_2\}}\frac{d\tau_1}{\langle\sigma_1\rangle^{2\gamma}\langle-\sigma_1+\sigma+z_1\rangle^{2\gamma}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_{n_1 \neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau_1}{\langle \sigma_1 \rangle^{2\gamma} \langle \sigma_1 - (\sigma + z_1) \rangle^{2\gamma}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n_1 \neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau_1}{\langle \tau_1 \rangle^{2\gamma} \langle \tau_1 - (\sigma + z_1) \rangle^{2\gamma}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aplicamos nuevamente la desigualdad de cálculo (2.1) y el lema 2.0.4, para obtener

$$I_{\Omega_2}(\lambda) \leq C \left(\sum_{n_1 \neq 0} \frac{1}{\langle \sigma + z_1 \rangle^{4\gamma - 1}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn_1}{\langle z_1 + \sigma \rangle^{4\gamma - 1}} + 2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.21}$$

De manera similar a como se hizo en la estimación de J_{Ω_1} se prueba que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn_1}{\langle z_1 + \sigma \rangle^{4\gamma - 1}} \leq \frac{C}{n^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\left\langle \sigma + \frac{3}{4} n^3 \right\rangle^{4\gamma - \frac{3}{2}}} \leq C. \tag{2.22}$$

Por tanto de (2.19), (2.21) y (2.22) se concluye que:

$$J_{\Omega_2} \leq C \left\| b \right\|_{l_n^2} \left\| p \right\| \left\| q \right\|.$$

Estimación de J_{Ω_3} :

En la estimación de J_{Ω_3} usaremos las ideas desarrolladas en [CKSTT], basadas en descomposiciones diádicas. Descompongamos Ω_3 en dos subconjuntos Ω_{31} y Ω_{32} como sigue.

$$\begin{aligned} \Omega_{31} \quad &: \quad = \{ (\lambda, \lambda_1) \in \Omega_3 / \left| n_1 \right| \leq \left| n \right| \}, \\ \Omega_{32} \quad &: \quad = \{ (\lambda, \lambda_1) \in \Omega_3 / \left| n_1 \right| > \left| n \right| \}. \end{aligned}$$

Estimación de $J_{\Omega_{31}}$: Expresemos a Ω_{31} como una unión numerable de conjuntos mutuamente disjuntos $\Omega_{31,m}$, de manera que en cada $\Omega_{31,m}$, $|\sigma|$ tenga un tamaño prescrito. Observemos que para $(\lambda, \lambda_1) \in \Omega_3$, $|n n_1 n_2| \leq |\sigma|$ y como

$$|n_1| \geq \frac{|n|}{2} \qquad \text{o} \qquad |n_2| \geq \frac{|n|}{2},$$

y además

$$|n_1| \geq 1 \qquad \text{y} \qquad |n_2| \geq 1,$$

entonces

$$|\sigma| \geq \frac{n^2}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

Para $m = 0, 1, 2, 3 \ldots$, sea

$$\Omega_{31,m} := \left\{ (\lambda, \lambda_1) \in \Omega_{31} / 2^{m-1} \leq |\sigma| < 2^m \right\}.$$

Veamos que

$$J_{\Omega_{31,m}} \leq C \left[\sup_{\lambda \in A_{31,m}} I_{\Omega_{31,m}}(\lambda) \right] \left(\sum_{\{\lambda/(\exists \lambda_1)(\lambda,\lambda_1) \in \Omega_{31,m}\}} \int \frac{b_n^2}{\langle \sigma \rangle} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \|p\| \|q\|, \tag{2.23}$$

donde

$$I_{\Omega_{31,m}}(\lambda) := \frac{|n|^{\frac{1}{2}}}{\langle \sigma \rangle^{\frac{1}{2}}} \left(\sum_{\{\lambda_1/(\lambda,\lambda_1) \in \Omega_{31,m}\}} \int \frac{|n_1| |n_2|}{\langle \sigma_1 \rangle \langle \sigma_2 \rangle^{2\gamma}} d\tau_1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

y

$$A_{31,m} := \{ \lambda / (\exists \lambda_1) (\lambda, \lambda_1) \in \Omega_{31,m} \}.$$

En efecto, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz primero en la variable λ_1 y luego en la variable λ se obtiene:

$$J_{\Omega_{31,m}} \leq C \sum_{A_{31,m}} \int \frac{|n|^{\frac{1}{2}} b_n}{\langle \sigma \rangle} \sum_{\{\lambda_1/(\lambda,\lambda_1) \in \Omega_{31,m}\}} \int \frac{|n_1|^{\frac{1}{2}} |n_2|^{\frac{1}{2}}}{\langle \sigma_1 \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \sigma_2 \rangle^{\gamma}} p(\lambda_1) q(\lambda_2) d\tau_1 d\tau$$

$$\begin{aligned} &\leq C \sum_{A_{31,m}} \int \frac{|n|^{\frac{1}{2}}}{\langle \sigma \rangle^{\frac{1}{2}}} \left(\sum_{\{\lambda_1/(\lambda,\lambda_1) \in \Omega_{31,m}\}} \int \frac{|n_1| |n_2|}{\langle \sigma_1 \rangle \langle \sigma_2 \rangle^{2\gamma}} d\tau_1 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{b_n}{\langle \sigma \rangle^{\frac{1}{2}}} \left(\sum_{\{\lambda_1/(\lambda,\lambda_1) \in \Omega_{31,m}\}} \int p(\lambda_1)^2 q(\lambda_2)^2 \; d\tau_1 \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \\ &\leq C \left[\sup_{\lambda \in A_{31,m}} I_{\Omega_{31,m}}(\lambda) \right] \left(\sum_{A_{31,m}} \int \frac{b_n^2}{\langle \sigma \rangle} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \|p\| \|q\|. \end{aligned}$$

Afirmamos además que existe una constante C independiente de m tal que

$$\sup_{\lambda \in A_{31,m}} I_{\Omega_{31,m}}(\lambda) \leq C. \tag{2.24}$$

Para probar esta última afirmación, observemos que

$$
\begin{aligned}
I_{\Omega_{31,m}}(\lambda) &= \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}}}\left(\sum_{\{\lambda_1/(\lambda,\lambda_1)\in\Omega_{31,m}\}}\int \frac{|nn_1n_2|}{\langle\sigma_1\rangle\langle\sigma_2\rangle^{2\gamma}}d\tau_1\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}}}\left(\sum_{\{\lambda_1/(\lambda,\lambda_1)\in\Omega_{31,m}\}}\int \frac{|\sigma|}{\langle\sigma_1\rangle\langle\sigma_2\rangle^{2\gamma}}d\tau_1\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{\{\lambda_1/(\lambda,\lambda_1)\in\Omega_{31,m}\}}\int \frac{d\tau_1}{\langle\sigma_1\rangle^{2\gamma}\langle\sigma_2\rangle^{2\gamma}}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Haciendo $z_1 := \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma$, y procediendo como se hizo en la estimación de $I_{\Omega_2}(\lambda)$, obtenemos la desigualdad (2.24). Así de (2.23) y (2.24) se tiene que

$$
J_{\Omega_{31,m}} \leq CC_m \|p\| \|q\|, \tag{2.25}
$$

donde

$$
C_m := \left(\sum_{\{\lambda/(\exists\lambda_1)(\lambda,\lambda_1)\in\Omega_{31,m}\}}\int \frac{b_n^2}{\langle\sigma\rangle}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.
$$

Estimemos C_m.

$$
C_m^2 \leq \sum_{n\neq 0} b_n^2 \int_{\left\{\tau/(\exists\lambda_1)(\lambda,\lambda_1)\in\Omega_{31,m}\right\}} \frac{d\tau}{\langle\sigma\rangle} \leq C\sum_{n\neq 0}\frac{b_n^2}{2^m}|A(n,m)|, \tag{2.26}
$$

donde

$$
A(n,m) := \{\tau/(\exists\lambda_1)(n,\tau,\lambda_1)\in\Omega_{31,m}\}
$$

y $|A(n,m)|$ denota la medida del conjunto $A(n,m)$. Probemos que

$$
A(n,m) \subseteq \bigcup_{k\in B_m}\left\{\tau/|\sigma+3nk| < 2\cdot 2^{\frac{m}{100}}\right\}, \tag{2.27}
$$

donde

$$
B_m := \left\{k\in\mathbb{Z}/|k|\leq 10^{\frac{1}{3}}2^{\frac{2m}{3}}\right\}.
$$

Sea $\tau \in A(n,m)$. Entonces existe λ_1 tal que $(n,\tau,\lambda_1)\in\Omega_{31,m}$. Luego

$$|\sigma + 3nn_1n_2| = |\sigma_1 + \sigma_2| \leq 2\,|nn_1n_2|^{\frac{1}{100}} \leq 2\,|\sigma|^{\frac{1}{100}} \leq 2 \cdot 2^{\frac{m}{100}}.$$

Sea $k := n_1n_2$. Probemos que $|k| \leq 10^{\frac{1}{3}}2^{\frac{2m}{3}}$. Como $|nn_1n_2| \leq |\sigma|$, entonces

$$|k| = |n_1n_2| \leq \frac{|\sigma|}{|n|}. \tag{2.28}$$

Además

$$\begin{aligned} |\sigma| &= |\sigma_1 + \sigma_2 - 3nn_1n_2| \leq 3\,|nn_1n_2| + 2\,|\sigma_1| \\ \leq\ & 3\,|nn_1n_2| + 2\,|nn_1n_2|^{\frac{1}{100}} \leq 5\,|nn_1n_2| \leq 5n^2\,|n_2| \leq 10\,|n|^3. \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$|n| \geq \frac{|\sigma|^{\frac{1}{3}}}{10^{\frac{1}{3}}}. \tag{2.29}$$

Luego de (2.28) y del hecho de que $(\lambda, \lambda_1) \in \Omega_{31,m}$, se sigue que

$$|k| \leq |\sigma|\,\frac{10^{\frac{1}{3}}}{|\sigma|^{\frac{1}{3}}} \leq 10^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2m}{3}}.$$

En consecuencia

$$\tau \in \bigcup_{k\in B_m} \left\{\tau / \,|\sigma + 3nk| < 2 \cdot 2^{\frac{m}{100}}\right\},$$

con lo cual queda probado (2.27), y como consecuencia de esta inclusión tenemos que

$$\begin{aligned} |A\,(n,m)| &\leq 2 \cdot 10^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2m}{3}} \left|\left\{\tau / \,|\sigma + 3nk| < 2 \cdot 2^{\frac{m}{100}}\right\}\right| \\ \leq\ & C2^{\frac{2m}{3}} \cdot 4 \cdot 2^{\frac{m}{100}} \leq C2^{\frac{2m}{3}+\frac{m}{100}}. \end{aligned}$$

Ahora, de (2.26)

$$C_m^2 \leq C\sum_{n\neq 0} \frac{b_n^2}{2^{m-\frac{2m}{3}-\frac{m}{100}}} = C\sum_{n\neq 0} \frac{b_n^2}{2^{m\alpha}} = C\frac{1}{2^{m\alpha}}\,\|b\|_{l_n^2}^2 \qquad \text{con } \alpha := \frac{1}{3} - \frac{1}{100} > 0.$$

Así

$$C_m \leq C\frac{\|b\|_{l_n^2}}{2^{m\frac{\alpha}{2}}}.$$

Esta desigualdad junto con (2.25) nos permiten concluir que

$$J_{\Omega_{31}} = \sum_{m=0}^{\infty} J_{\Omega_{31,m}} \leq C \left\| b \right\|_{l_n^2} \left\| p \right\| \left\| q \right\| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m\frac{\alpha}{2}}} \leq C \left\| b \right\|_{l_n^2} \left\| p \right\| \left\| q \right\| . \tag{2.30}$$

Estimación de $J_{\Omega_{32}}$: Estimaremos $J_{\Omega_{32}}$ de manera similar a como se hizo con $J_{\Omega_{31}}$. Para $m = 0, 1, 2, 3, \ldots,$ sean

$$\Omega_{32,m} := \left\{ (\lambda, \lambda_1) \in \Omega_{32} / 2^{m-1} \leq |\sigma| < 2^m \right\}.$$

De manera análoga a como se hizo en la estimación de $J_{\Omega_{31}}$ se prueba que

$$J_{\Omega_{32,m}} \leq C \left[\sup_{\lambda \in A_{32,m}} I_{\Omega_{32,m}} (\lambda) \right] \left(\sum_{\{\lambda/(\exists \lambda_1)(\lambda,\lambda_1) \in \Omega_{32,m}\}} \int \frac{b_n^2}{\langle \sigma \rangle} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left\| p \right\| \left\| q \right\| ,$$

donde

$$I_{\Omega_{32,m}} (\lambda) := \frac{|n|^{\frac{1}{2}}}{\langle \sigma \rangle^{\frac{1}{2}}} \left(\sum_{\{\lambda_1/(\lambda,\lambda_1) \in \Omega_{32,m}\}} \int \frac{|n_1| \, |n_2|}{\langle \sigma_1 \rangle \langle \sigma_2 \rangle^{2\gamma}} d\tau_1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

y

$$A_{32,m} := \{ \lambda / (\exists \lambda_1) (\lambda, \lambda_1) \in \Omega_{32,m} \} .$$

También se prueba, de manera similar a como se probó el acotamiento de

$$\left\{ I_{\Omega_{31,m}} (\lambda) / \lambda \in A_{31,m} \right\},$$

que

$$\sup_{\lambda \in A_{32,m}} I_{\Omega_{32,m}} (\lambda) \leq C,$$

y por tanto

$$J_{\Omega_{32,m}} \leq C \left(\sum_{\{\lambda/(\exists \lambda_1)(\lambda,\lambda_1) \in \Omega_{32,m}\}} \int \frac{b_n^2}{\langle \sigma \rangle} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left\| p \right\| \left\| q \right\| . \tag{2.31}$$

Ahora

$$\sum_{\{\lambda/(\exists \lambda_1)(\lambda,\lambda_1) \in \Omega_{32,m}\}} \int \frac{b_n^2}{\langle \sigma \rangle} d\tau \quad \leq C \sum_{n \neq 0} \frac{b_n^2}{2^m} \left| B(n, m) \right| , \tag{2.32}$$

donde

$$B\left(n,m\right):=\left\{\tau/\left(\exists\lambda_1\right)\left(n,\tau,\lambda_1\right)\in\Omega_{32,m}\right\}.$$

Veamos que

$$B\left(n,m\right)\subseteq\bigcup_{\left\{n_2/\left|nn_2\right|\leq 10^{\frac{1}{3}}2^{\frac{2m}{3}}\right\}}\left\{\tau/\left|\sigma+3n\left(n-n_2\right)n_2\right|\leq 2\cdot 2^{\frac{m}{100}}\right\}. \tag{2.33}$$

Sea $\tau\in B\left(n,m\right)$, entonces existe un $\lambda_1=\left(n_1,\tau_1\right)$ tal que $\left(n,\tau,n_1,\tau_1\right)\in\Omega_{32,m}$. Luego

$$\begin{aligned} & \left|\tau-n^3+3nn_1n_2\right|=\left|\sigma+3nn_1n_2\right|=\left|\sigma_1+\sigma_2\right| \\ \leq\ & 2\left|\sigma_1\right|\leq 2\left|nn_1n_2\right|^{\frac{1}{100}}\leq 2\left|\sigma\right|^{\frac{1}{100}}\leq 2\cdot 2^{\frac{m}{100}}. \end{aligned}$$

Sabemos que $\left|\sigma\right|\leq 5\left|nn_1n_2\right|$, y como $\left|n\right|<\left|n_1\right|$ entonces $\left|\sigma\right|<10\left|n_1\right|^3$ y así $\frac{\left|\sigma\right|^{\frac{1}{3}}}{10^{\frac{1}{3}}}\leq\left|n_1\right|$. Por tanto

$$\left|nn_2\right|\leq\frac{\left|\sigma\right|}{\left|n_1\right|}\leq\left|\sigma\right|\frac{10^{\frac{1}{3}}}{\left|\sigma\right|^{\frac{1}{3}}}=10^{\frac{1}{3}}\left|\sigma\right|^{\frac{2}{3}}\leq 10^{\frac{1}{3}}2^{\frac{2m}{3}},$$

con lo cual se tiene la inclusión (2.33). Ahora, de (2.33) y (2.32) se sigue que

$$\sum_{\left\{\lambda/\left(\exists\lambda_1\right)\left(\lambda,\lambda_1\right)\in\Omega_{32,m}\right\}}\int\frac{b_n^2}{\left\langle\sigma\right\rangle}d\tau\quad\leq C\sum_{n\neq 0}\frac{b_n^2}{2^m}2^{\frac{2m}{3}}2^{\frac{m}{100}}\leq C\left\|b\right\|_{l_n^2}^2\frac{1}{2^{m\alpha}},\qquad\text{con }\alpha=\frac{1}{3}-\frac{1}{100}.$$

Teniendo en cuenta esto último y la desigualdad (2.31) se obtiene

$$J_{\Omega_{32,m}}\leq C\left\|p\right\|\left\|q\right\|\left\|b\right\|_{l_n^2}\frac{1}{2^{\frac{m\alpha}{2}}},\qquad m=0,1,2,3\ldots.$$

Por consiguiente

$$J_{\Omega_{32}}=\sum_{m=0}^{\infty}J_{\Omega_{32,m}}\leq C\left\|p\right\|\left\|q\right\|\left\|b\right\|_{l_n^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^{\frac{m\alpha}{2}}}\leq C\left\|b\right\|_{l_n^2}\left\|p\right\|\left\|q\right\|. \tag{2.34}$$

De las desigualdades (2.30) y (2.34) se sigue

$$J_{\Omega_3}\leq C\left\|b\right\|_{l_n^2}\left\|p\right\|\left\|q\right\|.$$

Finalmente, juntando los estimativos de J_{Ω_1}, J_{Ω_2} y J_{Ω_3}, obtenemos el estimativo (2.12) y por ende (2.10), con lo cual queda establecido el estimativo (2.9) y demostrada la proposición 2.2.1. ■

El estimativo que será demostrado en la próxima proposición es del mismo tipo al establecido en [KPV] (véase Teorema 1.2 en [KPV]), con la diferencia de que allí $\gamma = \frac{1}{2}$).

Proposición 2.2.2 *Existe una constante positiva* C *tal que si* $u, v \in \widetilde{S}$ *y* $\gamma \in \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right)$ *entonces*

$$\left\| -\frac{1}{2}\partial_x (uv) \right\|_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \leq C \left(\|u\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \|v\|_{-\frac{1}{2},\gamma} + \|u\|_{-\frac{1}{2},\gamma} \|v\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \right). \tag{2.35}$$

Prueba.

$$\begin{aligned} \left\| -\frac{1}{2}\partial_x (uv) \right\|_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} &= C \left\| \langle \sigma \rangle^{-\frac{1}{2}} \langle n \rangle^{-\frac{1}{2}} n \left(\widehat{u} * \widehat{v} \right) \right\|_{l_n^2 L_\tau^2} \\ = \quad C &\left\| \langle \sigma \rangle^{-\frac{1}{2}} \langle n \rangle^{-\frac{1}{2}} n \sum_{\lambda_1 \in (\mathbb{Z}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}} \int \widehat{u}(\lambda_1) \widehat{v}(\lambda_2)\, d\tau_1 \right\|_{l_n^2 L_\tau^2}. \end{aligned}$$

Estimaremos la anterior norma por dualidad. Sea $h \in l_n^2 L_\tau^2$ con $h(0,\tau) = 0$, y sea

$$\widetilde{J} := \left| \sum_{\lambda \in (\mathbb{Z}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}} \int \left(\sum_{\lambda_1 \in (\mathbb{Z}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}} \int \langle \sigma \rangle^{-\frac{1}{2}} \langle n \rangle^{-\frac{1}{2}} n \widehat{u}(\lambda_1) \widehat{v}(\lambda_2)\, d\tau_1 \right) h(\lambda)\, d\tau \right|.$$

Debemos probar que

$$\widetilde{J} \leq C \left(\|u\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \|v\|_{-\frac{1}{2},\gamma} + \|u\|_{-\frac{1}{2},\gamma} \|v\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \right) \|h\|_{l_n^2 L_\tau^2}. \tag{2.36}$$

Por un argumento de simetría análogo al hecho con J en la Proposición 2.2.1, el estimativo (2.36) tendrá lugar si demostramos que para

$$\widetilde{\Omega} := \{(\lambda, \lambda_1) \,/\, |\sigma_1| \geq |\sigma_2|\}$$

tiene lugar el estimativo

$$\widetilde{J}_{\widetilde{\Omega}} \leq C \|u\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \|v\|_{-\frac{1}{2},\gamma} \|h\|_{l_n^2 L_\tau^2}. \tag{2.37}$$

Para esto dividiremos el conjunto $\widetilde{\Omega}$ en dos subconjuntos $\widetilde{\Omega}_1$ y $\widetilde{\Omega}_2$ como sigue.

$$\widetilde{\Omega}_1 := \left\{(\lambda,\lambda_1)\in\widetilde{\Omega}/\,|\sigma_1|<|\sigma|\right\} \qquad , \qquad \widetilde{\Omega}_2 := \left\{(\lambda,\lambda_1)\in\widetilde{\Omega}/\,|\sigma_1|\geq|\sigma|\right\}.$$

Estimación de $\widetilde{J}_{\widetilde{\Omega}_1}$:

Si en la expresión que define a $\widetilde{J}_{\widetilde{\Omega}_1}$ aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz primero en la variable λ_1 y luego en la variable λ_2, entonces:

$$\widetilde{J}_{\widetilde{\Omega}_1} \leq \left[\sup_{\lambda\in\widetilde{A}_1} \tilde{I}_{\widetilde{\Omega}_1}(\lambda)\right] \|h\|_{l_n^2 L_\tau^2} \|u\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \|v\|_{-\frac{1}{2},\gamma}\,, \tag{2.38}$$

donde

$$\tilde{I}_{\widetilde{\Omega}_1}(\lambda) := \frac{|n|}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}}\langle n\rangle^{\frac{1}{2}}}\left(\sum_{\left\{\lambda_1/(\lambda,\lambda_1)\in\widetilde{\Omega}_1\right\}}\int \frac{\langle n_1\rangle\langle n_2\rangle}{\langle\sigma_1\rangle\langle\sigma_2\rangle^{2\gamma}}d\tau_1\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{y} \qquad \widetilde{A}_1 := \left\{\lambda/\,(\exists\lambda_1)\,(\lambda,\lambda_1)\in\widetilde{\Omega}_1\right\}.$$

Demostremos ahora que existe una constante C tal que

$$\sup_{\lambda\in\widetilde{A}_1} \tilde{I}_{\widetilde{\Omega}_1}(\lambda) \leq C. \tag{2.39}$$

Sea $\lambda\in\widetilde{A}_1$, entonces

$$I_{\widetilde{\Omega}_1}(\lambda) \leq \frac{C}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}}}\left(\sum_{\left\{\lambda_1/(\lambda,\lambda_1)\in\widetilde{\Omega}_1\right\}}\int \frac{|nn_1n_2|}{\langle\sigma_1\rangle\langle\sigma_2\rangle^{2\gamma}}d\tau_1\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}}}\left(\sum_{\left\{\lambda_1/(\lambda,\lambda_1)\in\widetilde{\Omega}_1\right\}}\int \frac{|\sigma|}{\langle\sigma_1\rangle\langle\sigma_2\rangle^{2\gamma}}d\tau_1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \; C\left(\sum_{\left\{\lambda_1/(\lambda,\lambda_1)\in\widetilde{\Omega}_1\right\}}\int \frac{d\tau_1}{\langle\sigma_1\rangle^{2\gamma}\langle\sigma_2\rangle^{2\gamma}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En la estimación de $I_{\Omega_2}(\lambda)$ en la prueba de la Proposición 2.2.1 vimos que esta última expresión está acotada por una constante C independiente de n y τ. Por tanto se tiene (2.39), lo cual junto con (2.38), implica que

$$\widetilde{J}_{\widetilde{\Omega}_1} \leq C\,\|h\|_{l_n^2 L_\tau^2} \|u\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \|v\|_{-\frac{1}{2},\gamma}\,.$$

Estimación de $\widetilde{J}_{\widetilde{\Omega}_2}$:

Una aplicación de la desigualdad de Cauchy-Schwarz primero en la variable λ y luego en la variable λ_1 conduce al estimativo

$$\widetilde{J}_{\widetilde{\Omega}_2} \leq C \left[\sup_{\lambda_1 \in \widetilde{A}_2} I_{\widetilde{\Omega}_2}(\lambda_1) \right] \|h\|_{L^2_\tau, l^2_n} \|u\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \|v\|_{-\frac{1}{2},\gamma}, \tag{2.40}$$

donde

$$I_{\widetilde{\Omega}_2}(\lambda_1) := \frac{|n_1|^{\frac{1}{2}}}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}}} \left(\sum_{\left\{\lambda/(\lambda,\lambda_1)\in\widetilde{\Omega}_2\right\}} \int \frac{|n|\,|n_2|}{\langle\sigma\rangle \langle\sigma_2\rangle^{2\gamma}} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad \widetilde{A}_2 := \left\{ \lambda_1 / \, (\exists\lambda)\, (\lambda,\lambda_1) \in \widetilde{\Omega}_2 \right\}.$$

Probemos ahora que existe una constante C tal que

$$\left[\sup_{\lambda_1 \in \widetilde{A}_2} I_{\widetilde{\Omega}_2}(\lambda_1) \right] \leq C. \tag{2.41}$$

Sea $\lambda_1 \in \widetilde{A}_2$, entonces si $(\lambda,\lambda_1) \in \widetilde{\Omega}_2$, $|nn_1n_2| \leq |\sigma_1|$ y por tanto

$$\begin{aligned} I_{\widetilde{\Omega}_2}(\lambda_1) &\leq \frac{C}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}}} \left(\sum_{\left\{\lambda/(\lambda,\lambda_1)\in\widetilde{\Omega}_2\right\}} \int \frac{|nn_1n_2|}{\langle\sigma\rangle \langle\sigma_2\rangle^{2\gamma}} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq \ C &\left(\sum_{\left\{\lambda/(\lambda,\lambda_1)\in\widetilde{\Omega}_2\right\}} \int \frac{d\tau}{\langle\sigma\rangle \langle\sigma_2\rangle^{2\gamma}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\sum_{\left\{\lambda/(\lambda,\lambda_1)\in\widetilde{\Omega}_2\right\}} \int \frac{d\tau}{\langle\sigma\rangle^{2\gamma} \langle\sigma_2\rangle^{2\gamma}} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Haciendo $z := \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma$ y procediendo como se hizo con $I^*_{\Omega_1}(\lambda_1)$ en la prueba de la Proposición 2.2.1 se ve que esta última expresión está acotada por una constante C independiente de n_1 y τ_1. Por lo tanto se tiene (2.41) lo cual junto con (2.40) implica que

$$\widetilde{J}_{\widetilde{\Omega}_2} \leq C \|h\|_{l^2_n L^2_\tau} \|u\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \|v\|_{-\frac{1}{2},\gamma}.$$

Finalmente, de las estimaciones de $\widetilde{J}_{\widetilde{\Omega}_1}$ y $\widetilde{J}_{\widetilde{\Omega}_2}$ se tiene (2.37), quedando probada de esta manera la Proposición 2.2.2. ■

2.3 Otros Estimativos

Proposición 2.3.1 *Sean $T \in (0,1]$ y $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_t)$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi \equiv 1$ en $[-1,1]$ y $\psi \equiv 0$ por fuera de $[-2,2]$. Entonces*

(i) Para $p > 2$, existe una constante positiva C_p tal que si $u \in \widetilde{S}$

$$\left\|\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)u\right\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \leq C_p T^{-\frac{1}{2p}} \|u\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}. \tag{2.42}$$

(ii) Para γ, γ' tales que $\frac{1}{8} < \gamma < \gamma' < \frac{1}{2}$, existe una constante positiva C tal que si $u \in \widetilde{S}$

$$\left\|\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)u\right\|_{-\frac{1}{2},\gamma} \leq C T^{\frac{\gamma'-\gamma}{8\gamma'}} \|u\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}. \tag{2.43}$$

(iii) Para todo $\gamma \in \left(\frac{1}{8},\frac{1}{2}\right)$, existen una constante positiva C y números positivos δ y β con $\delta > \beta$ tales que para $u \in \widetilde{S}$

$$\left\|\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)u\right\|_{-\frac{1}{2},\gamma} \leq C T^{\delta} \|u\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \qquad y \tag{2.44}$$

$$\left\|\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)u\right\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \leq C T^{-\beta} \|u\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}. \tag{2.45}$$

Prueba. (i) Sean $p' \in (1,2)$ y p el exponente conjugado de p'.

$$\left\|\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)u\right\|^2_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \sum_{n\neq 0} \langle n\rangle^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \langle\sigma\rangle \left|\left(\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)u\right)^\wedge(n,\tau)\right|^2 d\tau. \tag{2.46}$$

Si $I(n)$ denota la integral en la expresión anterior entonces, teniendo en cuenta que

$$\left(\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)u\right)^\wedge(n,\tau) = \left[\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)\widehat{u(\cdot_t)}(n)\right]^\wedge(\tau) = C\left(T\widehat{\psi}(T\cdot_\tau) *_\tau \widehat{u}(n,\cdot_\tau)\right)(\tau),$$

concluimos que

$$\begin{aligned} I(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left|\left(\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)u\right)^\wedge(n,\tau)\right|^2 d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} |\sigma| \left|\left(\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)u\right)^\wedge(n,\tau)\right|^2 d\tau \\ &= C\left\|\left[T\widehat{\psi}(T\cdot_\tau) *_\tau \widehat{u}(n,\cdot_\tau)\right]\right\|^2_{L^2_\tau} + C\int_{-\infty}^{\infty} |\tau| \left|\left[T\widehat{\psi}(T\cdot_\tau) *_\tau \widehat{u}(n,\cdot_\tau)\right]\left(\tau+n^3\right)\right|^2 d\tau \\ &=: II(n) + III(n). \end{aligned}$$

Ahora, de la desigualdad de Young, se sigue que

$$II(n) \leq C \left\| T\widehat{\psi}(T\cdot_\tau) \right\|^2_{L^1_\tau} \|\widehat{u}(n,\cdot_\tau)\|^2_{L^2_\tau} \leq C \|\widehat{u}(n,\cdot_\tau)\|^2_{L^2_\tau},$$

donde C es independiente de T pues

$$\left\| T\widehat{\psi}(T\cdot_\tau) \right\|_{L^1_\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} |T| \left| \widehat{\psi}(T\tau) \right| d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \widehat{\psi}(\tau) \right| d\tau \equiv C_\psi.$$

Por tanto

$$\sum_{n\neq 0} \langle n\rangle^{-1} II(n) \leq C \sum_{n\neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} \langle n\rangle^{-1} |\widehat{u}(n,\tau)|^2 d\tau = C\|u\|^2_{-\frac{1}{2},0} \leq C\|u\|^2_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}. \qquad (2.47)$$

Por otro lado, del hecho de que

$$\begin{aligned} & [T\widehat{\psi}(T\cdot_\tau) *_\tau \widehat{u}(n,\cdot_\tau)]\left(\tau+n^3\right) = \left[\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)\widehat{u(\cdot_t)}(n)\right]^\wedge \left(\tau+n^3\right) \\ = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\left(\tau+n^3\right)t} \psi\left(T^{-1}t\right)\widehat{u(t)}(n)\,dt = \left[e^{-i(\cdot_t)n^3}\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)\widehat{u(\cdot_t)}(n)\right]^\wedge(\tau), \end{aligned}$$

y de la identidad de Plancherel se sigue que

$$\begin{aligned} III(n) &= C\int_{-\infty}^{\infty} |\tau| \left| [T\widehat{\psi}(T\cdot_\tau) *_\tau \widehat{u}(n,\cdot_\tau)]\left(\tau+n^3\right) \right|^2 d\tau \\ &= C\int_{-\infty}^{\infty} |\tau| \left| \left[e^{-i(\cdot_t)n^3}\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)\widehat{u(\cdot_t)}(n)\right]^\wedge(\tau) \right|^2 d\tau \\ &= C\left\| D_t^{\frac{1}{2}}\left(e^{-i(\cdot_t)n^3}\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)\widehat{u(\cdot_t)}(n)\right) \right\|^2_{L^2_t}, \end{aligned}$$

donde $D_t^{\frac{1}{2}}$ es la derivada fraccionaria de orden $\frac{1}{2}$ con respecto a t. Usamos ahora la siguiente fórmula de Leibniz para derivadas fraccionarias probada en [KaPo]:

Si $\gamma' \in (0,1)$ y $1 < p < \infty$, entonces

$$\left\| D^{\gamma'}(fg) - fD^{\gamma'}g \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left\| D^{\gamma'} f \right\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Aplicando, en la anterior expresión para $III(n)$, la fórmula de Leibniz con $p=2$, $f(t) := e^{-itn^3}\widehat{u(t)}(n)$ y $g(t) := \psi\left(T^{-1}t\right)$, tenemos

$$III(n) \leq C\left\| D_t^{\frac{1}{2}}\left(e^{-i(\cdot_t)n^3}\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)\widehat{u(\cdot_t)}(n)\right) - e^{-i(\cdot_t)n^3}\widehat{u(\cdot_t)}(n)\,D_t^{\frac{1}{2}}\left(\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)\right) \right\|^2_{L^2_t} +$$

$$C\left\|e^{-i(\cdot_t)n^3}\widehat{u(\cdot_t)}(n)\,D_t^{\frac{1}{2}}\left(\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)\right)\right\|_{L_t^2}^2\leq C\left\|\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)\right\|_{L_t^\infty}^2\left\|D_t^{\frac{1}{2}}\left(e^{-i(\cdot_t)n^3}\widehat{u(\cdot_t)}(n)\right)\right\|_{L_t^2}^2+$$

$$C\left\|e^{-i(\cdot_t)n^3}\widehat{u(\cdot_t)}(n)\right\|_{L_t^{2p}}^2\left\|D_t^{\frac{1}{2}}\left(\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)\right)\right\|_{L_t^{2p'}}^2. \tag{2.48}$$

Estimemos las normas en la última expresión. Claramente

$$\left\|\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)\right\|_{L_t^\infty}^2\leq 1. \tag{2.49}$$

Ahora, usando la identidad de Plancherel tenemos que

$$\left\|D_t^{\frac{1}{2}}\left(e^{-i(\cdot_t)n^3}\widehat{u(\cdot_t)}(n)\right)\right\|_{L_t^2}^2=\left\|\left[D_t^{\frac{1}{2}}\left(e^{-i(\cdot_t)n^3}\widehat{u(\cdot_t)}(n)\right)\right]^\wedge(\tau)\right\|_{L_\tau^2}^2$$

$$=\quad\left\||\tau|^{\frac{1}{2}}\left[e^{-i(\cdot_t)n^3}\widehat{u(\cdot_t)}(n)\right]^\wedge(\tau)\right\|_{L_\tau^2}^2$$

$$\leq\left\||\tau|^{\frac{1}{2}}\,\widehat{u}\left(n,\tau+n^3\right)\right\|_{L_\tau^2}^2\leq\left\|\left|\tau-n^3\right|^{\frac{1}{2}}\widehat{u}(\lambda)\right\|_{L_\tau^2}^2\leq\left\|\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}}\,\widehat{u}(\lambda)\right\|_{L_\tau^2}^2. \tag{2.50}$$

Por otro lado, como por el teorema de inmersión de espacios de Sobolev, $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_\tau)$ está inmerso de manera continua en $L^{2p}(\mathbb{R}_\tau)$ (Véase Teorema 3.13 del capítulo 3 de [LP]), entonces

$$\left\|e^{-i(\cdot_t)n^3}\widehat{u(\cdot_t)}(n)\right\|_{L_t^{2p}}^2\leq C\left\|e^{-i(\cdot_t)n^3}\widehat{u(\cdot_t)}(n)\right\|_{H_t^{\frac{1}{2}}}^2$$

$$=\quad C\int_{-\infty}^{\infty}\langle\tau\rangle\left|\left[e^{-i(\cdot_t)n^3}\widehat{u(\cdot_t)}(n)\right]^\wedge(\tau)\right|^2d\tau\leq C\int_{-\infty}^{\infty}\langle\tau\rangle\left|\widehat{u}\left(n,\tau+n^3\right)\right|^2d\tau$$

$$\leq C\int_{-\infty}^{\infty}\langle\sigma\rangle\left|\widehat{u}(n,\tau)\right|^2d\tau=C\left\|\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}}\,\widehat{u}(\lambda)\right\|_{L_\tau^2}^2. \tag{2.51}$$

Para estimar la última norma en (2.48), tenemos en cuenta que el operador transformada inversa de Fourier es acotado de $L^{(2p')'}(\mathbb{R}_\tau)$ en $L^{2p'}(\mathbb{R}_t)$ y por tanto

$$\begin{aligned}\left\|D_t^{\frac{1}{2}}\left(\psi\left(T^{-1}t\right)\right)\right\|_{L_t^{2p'}}^2 &\leq C\left\|\left[D_t^{\frac{1}{2}}\left(\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)\right)\right]^\wedge(\tau)\right\|_{L_\tau^{(2p')'}}^2\\ &= C_p\left\||\tau|^{\frac{1}{2}}\,T\widehat{\psi}\left(T\cdot_\tau\right)\right\|_{L_\tau^{\frac{2p'}{2p'-1}}}^2\end{aligned}$$

$$\leq C_p\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left(|\tau|^{\frac{1}{2}}\left|T\widehat{\psi}\left(T\tau\right)\right|\right)^{\frac{2p'}{2p'-1}}d\tau\right]^{\frac{2p'-1}{p'}}=C_p\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{|\tau|^{\frac{1}{2}}}{T^{\frac{1}{2}}}\left|T\widehat{\psi}(\tau)\right|\right)^{\frac{2p'}{2p'-1}}\frac{d\tau}{T}\right]^{\frac{2p'-1}{p'}}$$

$$=C_pT^{-\frac{1}{p}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|\tau|^{\frac{p'}{2p'-1}}\left|\widehat{\psi}(\tau)\right|^{\frac{2p'}{2p'-1}}d\tau\right]^{\frac{2p'-1}{p'}}\leq C_pT^{-\frac{1}{p}}. \tag{2.52}$$

Teniendo en cuenta las estimaciones (2.49), (2.50), (2.51) y (2.52), de (2.48) se sigue que

$$III\left(n\right)\leq C_p\left\|\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}}\,\widehat{u}\left(\lambda\right)\right\|_{L^2_\tau}^2\left(1+T^{-\frac{1}{p}}\right).$$

En consecuencia

$$\sum_{n\neq0}\langle n\rangle^{-1}III\left(n\right)\leq C_p\left(1+T^{-\frac{1}{p}}\right)\sum_{n\neq0}\langle n\rangle^{-1}\left\|\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}}\,\widehat{u}\left(\lambda\right)\right\|_{L^2_\tau}^2\leq 2C_pT^{-\frac{1}{p}}\left\|u\right\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^2. \tag{2.53}$$

De (2.47), (2.53) y (2.46), se sigue finalmente que

$$\left\|\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)u\right\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\leq C_pT^{-\frac{1}{2p}}\left\|u\right\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}.$$

(ii) Probemos primero que

$$\left\|\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)u\right\|_{-\frac{1}{2},0}\leq CT^{\frac{1}{8}}\left\|u\right\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{8}}. \tag{2.54}$$

Usando la identidad de Plancherel, luego la desigualdad de Hölder con exponentes $\frac{4}{3}$ y 4 y por último el hecho de que $H^{\frac{1}{8}}\left(\mathbb{R}_\tau\right)$ está inmerso de manera continua en $L^{\frac{8}{3}}\left(\mathbb{R}_t\right)$, tenemos:

$$\left\|\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)u\right\|_{-\frac{1}{2},0}^2=\sum_{n\neq0}\langle n\rangle^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\left[\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)u\right]^{\widehat{}}(n,\tau)\right|^2d\tau$$

$$=\sum_{n\neq0}\langle n\rangle^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\psi\left(T^{-1}t\right)\widehat{u\left(t\right)}\left(n\right)\right|^2dt\leq\sum_{n\neq0}\langle n\rangle^{-1}\int_{-2T}^{2T}\left|\widehat{u\left(t\right)}\left(n\right)\right|^2dt$$

$$\leq\sum_{n\neq0}\langle n\rangle^{-1}\left(\int_{-2T}^{2T}dt\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_{-2T}^{2T}\left|\widehat{u\left(t\right)}\left(n\right)\right|^{\frac{8}{3}}dt\right)^{\frac{3}{4}}\leq CT^{\frac{1}{4}}\sum_{n\neq0}\langle n\rangle^{-1}\left\|e^{-itn^3}\widehat{u\left(t\right)}\left(n\right)\right\|_{L_t^{\frac{8}{3}}}^2$$

$$\leq CT^{\frac{1}{4}}\sum_{n\neq0}\langle n\rangle^{-1}\left\|e^{-itn^3}\widehat{u\left(t\right)}\left(n\right)\right\|_{H_t^{\frac{1}{8}}}^2=CT^{\frac{1}{4}}\sum_{n\neq0}\langle n\rangle^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\langle\tau\rangle^{\frac{1}{4}}\left|\left[e^{-itn^3}\widehat{u\left(t\right)}\left(n\right)\right]^{\wedge}(\tau)\right|^2d\tau$$

$$\begin{aligned} &= CT^{\frac{1}{4}} \sum_{n\neq 0} \langle n\rangle^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \tau\rangle^{\frac{1}{4}} \left|\widehat{u}\left(n,\tau+n^3\right)\right|^2 d\tau = CT^{\frac{1}{4}} \sum_{n\neq 0} \langle n\rangle^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \sigma\rangle^{\frac{1}{4}} \left|\widehat{u}\left(\lambda\right)\right|^2 d\tau \\ &= CT^{\frac{1}{4}} \left\|u\right\|^2_{-\frac{1}{2},\frac{1}{8}}, \end{aligned}$$

lo cual prueba (2.54). Probemos ahora que

$$\left\|\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right) u\right\|_{-\frac{1}{2},\gamma'} \leq C \left\|u\right\|_{-\frac{1}{2},\gamma'}. \tag{2.55}$$

$$\left\|\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right) u\right\|^2_{-\frac{1}{2},\gamma'} = \sum_{n\neq 0} \langle n\rangle^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \langle\sigma\rangle^{2\gamma'} \left|\left[\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right) u\right]\widehat{}\,(n,\tau)\right|^2 d\tau.$$

Si $I(n)$ denota la integral en la anterior expresión, entonces

$$\begin{aligned} I(n) &\leq C \left\|T\widehat{\psi}\left(T\cdot_\tau\right) *_\tau \widehat{u}\left(n,\cdot_\tau\right)\right\|^2_{L^2_\tau} + \int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^{2\gamma'} \left|\left[T\widehat{\psi}\left(T\cdot_\tau\right) *_\tau \widehat{u}\left(n,\cdot_\tau\right)\right]\left(\tau+n^3\right)\right|^2 d\tau \\ &=: II(n) + III(n). \end{aligned}$$

De una parte

$$II(n) \leq C \left\|T\widehat{\psi}\left(T\cdot_\tau\right)\right\|^2_{L^1_\tau} \left\|\widehat{u}\left(n,\cdot_\tau\right)\right\|^2_{L^2_\tau} \leq C \left\|\widehat{u}\left(n,\cdot_\tau\right)\right\|^2_{L^2_\tau},$$

donde C es una constante independiente de T. Por tanto

$$\sum_{n\neq 0} \langle n\rangle^{-1} II(n) \leq C \sum_{n\neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} \langle n\rangle^{-1} \left|\widehat{u}\left(n,\tau\right)\right|^2 d\tau = C\left\|u\right\|^2_{-\frac{1}{2},0} \leq C \left\|u\right\|^2_{-\frac{1}{2},\gamma'}. \tag{2.56}$$

De otra parte

$$III(n) = C \left\|D_t^{\gamma'} \left(e^{-i(\cdot_t)n^3} \psi\left(T^{-1}\cdot_t\right) \widehat{u\left(\cdot_t\right)}(n)\right)\right\|^2_{L^2_t},$$

de lo cual se sigue, usando nuevamente la fórmula de Leibniz, que

$$\begin{aligned} III(n) \leq{}& C \left\|\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)\right\|^2_{L^\infty_t} \left\|D_t^{\gamma'} \left(e^{-i(\cdot_t)n^3} \widehat{u\left(\cdot_t\right)}(n)\right)\right\|^2_{L^2_t} \\ &+ C \left\|e^{-i(\cdot_t)n^3} \widehat{u\left(\cdot_t\right)}(n)\right\|^2_{L^{2p}_t} \left\|D_t^{\gamma'}\left(\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)\right)\right\|^2_{L^{2p'}_t}, \end{aligned} \tag{2.57}$$

donde p y p' son exponentes conjugados. Como $0 < \gamma' < \frac{1}{2}$, podemos escoger $p \in (1,\infty)$

de tal manera que $\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}=\gamma'$, y así, por el teorema de inmersión de espacios de Sobolev, el espacio de Sobolev $H^{\gamma'}(\mathbb{R}_t)$ está inmerso de manera continua en $L^{2p}(\mathbb{R}_t)$. Teniendo en cuenta este hecho, que el exponente conjugado $(2p')'$ de $2p'$ es $\frac{1}{1-\gamma'}$ y que el operador de transformada inversa de Fourier es acotado de $L^{(2p')'}(\mathbb{R}_\tau)$ en $L^{2p'}(\mathbb{R}_t)$, de (2.57) se sigue que:

$$\begin{aligned}
III(n) &\leq C\left\|\langle\sigma\rangle^{\gamma'}\widehat{u}(\lambda)\right\|_{L^2_\tau}^2+C\left\|e^{-i(\cdot_t)n^3}\widehat{u(\cdot_t)}(n)\right\|_{H_t^{\gamma'}}^2\left\||\tau|^{\gamma'}T\widehat{\psi}(T\tau)\right\|_{L_\tau^{\frac{1}{1-\gamma'}}}^2\\
&\leq C\left\|\langle\sigma\rangle^{\gamma'}\widehat{u}(\lambda)\right\|_{L^2_\tau}^2+C\left(\int_{-\infty}^{\infty}\langle\tau\rangle^{2\gamma'}\left|\widehat{u}\left(n,\tau+n^3\right)\right|^2d\tau\right)\times\\
&\quad\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\tau|^{\frac{\gamma'}{1-\gamma'}}T^{\frac{1}{1-\gamma'}}\left|\widehat{\psi}(T\tau)\right|^{\frac{1}{1-\gamma'}}d\tau\right)^{2(1-\gamma')}\\
&\leq C\left\|\langle\sigma\rangle^{\gamma'}\widehat{u}(\lambda)\right\|_{L^2_\tau}^2\left[1+\left(\int_{-\infty}^{\infty}|T\tau|^{\frac{\gamma'}{1-\gamma'}}\left|\widehat{\psi}(T\tau)\right|^{\frac{1}{1-\gamma'}}(Td\tau)\right)^{2(1-\gamma')}\right]\\
&= C\left\|\langle\sigma\rangle^{\gamma'}\widehat{u}(\lambda)\right\|_{L^2_\tau}^2\left[1+\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\tau|^{\frac{\gamma'}{1-\gamma'}}\left|\widehat{\psi}(\tau)\right|^{\frac{1}{1-\gamma'}}d\tau\right)^{2(1-\gamma')}\right]\\
&= C\left\|\langle\sigma\rangle^{\gamma'}\widehat{u}(\lambda)\right\|_{L^2_\tau}^2.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\sum_{n\neq 0}\langle n\rangle^{-1}III(n)\leq C\sum_{n\neq 0}\int_{-\infty}^{\infty}\langle n\rangle^{-1}\langle\sigma\rangle^{2\gamma'}\left|\widehat{u}(n,\tau)\right|^2d\tau=C\left\|u\right\|_{-\frac{1}{2},\gamma'}^2. \tag{2.58}$$

De (2.56) y (2.58) se tiene (2.55).

Ahora, sea $\upsilon\in(0,1)$. Usando la desigualdad de Hölder con exponentes $p=\frac{1}{\upsilon}$ y $p'=\frac{1}{1-\upsilon}$ y teniendo en cuenta (2.54) se sigue que

$$\begin{aligned}
&\left\|\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)u\right\|_{-\frac{1}{2},\upsilon\gamma'}^2=\sum_{n\neq 0}\int_{-\infty}^{\infty}\langle n\rangle^{-1}\langle\sigma\rangle^{2\upsilon\gamma'}\left|\left[\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)u\right]^\wedge(n,\tau)\right|^2d\tau\\
=&\sum_{n\neq 0}\int_{-\infty}^{\infty}\langle n\rangle^{-\upsilon}\langle\sigma\rangle^{2\upsilon\gamma'}\left|\left[\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)u\right]^\wedge(n,\tau)\right|^{2\upsilon}\langle n\rangle^{-(1-\upsilon)}\langle\sigma\rangle^0\left|\left[\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)u\right]^\wedge(n,\tau)\right|^{2(1-\upsilon)}d\tau\\
\leq&\left[\sum_{n\neq 0}\int_{-\infty}^{\infty}\langle n\rangle^{-1}\langle\sigma\rangle^{2\gamma'}\left|\left[\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)u\right]^\wedge(n,\tau)\right|^2d\tau\right]^{\upsilon}\times
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\left[\sum_{n\neq 0}\int_{-\infty}^{\infty}\langle n\rangle^{-1}\langle\sigma\rangle^{0}\left|\left[\psi\left(T^{-1}\cdot_{t}\right)u\right]^{\frown}(n,\tau)\right|^{2}d\tau\right]^{1-v}\\
= &\left\|\psi\left(T^{-1}\cdot_{t}\right)u\right\|_{-\frac{1}{2},\gamma'}^{2v}\left\|\psi\left(T^{-1}\cdot_{t}\right)u\right\|_{-\frac{1}{2},0}^{2(1-v)}\leq C\left\|u\right\|_{-\frac{1}{2},\gamma'}^{2v}T^{\frac{1}{4}(1-v)}\left\|u\right\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{8}}^{2(1-v)}\\
\leq &\ CT^{\frac{1}{4}(1-v)}\left\|u\right\|_{-\frac{1}{2},\gamma'}^{2v}\left\|u\right\|_{-\frac{1}{2},\gamma'}^{2(1-v)}=CT^{\frac{1}{4}(1-v)}\left\|u\right\|_{-\frac{1}{2},\gamma'}^{2}.
\end{aligned}
$$

Tomando $v=\frac{\gamma}{\gamma'}$, de lo anterior se sigue que

$$
\left\|\psi\left(T^{-1}\cdot_{t}\right)u\right\|_{-\frac{1}{2},\gamma}\leq CT^{\frac{\gamma'-\gamma}{8\gamma'}}\left\|u\right\|_{-\frac{1}{2},\gamma'}\leq CT^{\frac{\gamma'-\gamma}{8\gamma'}}\left\|u\right\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}.
$$

Lo cual prueba (2.43).

(iii) Escogemos $\gamma'\in\left(\gamma,\frac{1}{2}\right)$ y luego $p>2$ tal que $0<\frac{1}{2p}<\frac{\gamma'-\gamma}{8\gamma'}$. Por tanto $\delta:=\frac{\gamma'-\gamma}{8\gamma'}$y $\beta:=\frac{1}{2p}$ satisfacen $\delta-\beta>0$, y por las estimaciones (2.42) y (2.43) se satisfacen (2.44) y (2.45) para alguna constante C. ■

2.4 Demostración del Lema 1.2.1

Prueba. (i) Veamos que existen $C>0$ y $\theta>0$ tales que para $T\in(0,1]$ y $u,v\in\widetilde{S}$ cada uno de los sumandos que conforman la expresión $G_{T}(u,v)$ en (1.8) satisfacen la propiedad de acotamiento requerida. Sean $u,v\in\widetilde{S}$ y $f:=B_{T}(u,v)$, donde $B_{T}(u,v)$ es como en (1.7), entonces de (1.6) se tiene que para $t\in\mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
&\left\|\psi(t)\,I(f)(t)\right\|_{-\frac{1}{2}}=\left\|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\psi(t)\,W(t)\,f_{1}(t)\right\|_{-\frac{1}{2}}\\
\leq &\ C\psi(t)\left\|f_{1}(t)\right\|_{-\frac{1}{2}}\leq\begin{cases} C\left\|f_{1}(t)\right\|_{-\frac{1}{2}}, & \text{si } t\in[-2,2]\\ 0, & \text{si } t\notin[-2,2].\end{cases}
\end{aligned}
$$

Si $t\in[-2,2]$, entonces

$$
\begin{aligned}
&\left|\widehat{f_{1}(t)}(n)\right|\leq\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{e^{it\sigma}-1}{i\sigma}\right|\left|\varphi(\sigma)\,\widehat{f}(n,\tau)\right|d\tau\\
\leq &\ |t|\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{e^{it\sigma}-1}{it\sigma}\right|\left|\varphi(\sigma)\,\widehat{f}(n,\tau)\right|d\tau\leq|t|\int\limits_{|\sigma|<2}\left|\widehat{f}(n,\tau)\right|d\tau\\
\leq &\ C\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\widehat{f}(n,\tau)\right|}{\langle\sigma\rangle}d\tau\leq C\widehat{g_{0}(f)}(n).
\end{aligned}
$$

Por tanto para $t \in [-2,2]$, teniendo en cuenta la Proposición 2.2.1 y los estimativos (2.44) y (2.45) de la Proposición 2.3.1, se sigue que

$$\begin{aligned}
\|f_1(t)\|_{-\frac{1}{2}} &\leq C\|g_0(f)\|_{-\frac{1}{2}} = C\left\|g_0\left(-\frac{1}{2}\partial_x\left(\left[\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)u\right]\left[\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)v\right]\right)\right)\right\|_{-\frac{1}{2}} \\
&\leq C\left(\left\|\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)u\right\|_{-\frac{1}{2},\gamma}\left\|\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)v\right\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} + \left\|\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)u\right\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\left\|\psi\left(T^{-1}\cdot_t\right)v\right\|_{-\frac{1}{2},\gamma}\right) \\
&\leq C\left(T^{\delta}\|u\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}T^{-\beta}\|v\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} + T^{-\beta}\|u\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}T^{\delta}\|v\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\right),
\end{aligned}$$

donde $\delta > \beta > 0$. Luego si $\theta := \delta - \beta > 0$,

$$\|f_1(t)\|_{-\frac{1}{2}} \leq CT^{\theta}\|u\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\|v\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}},$$

y por consiguiente

$$\|\psi(\cdot_t)I(f)(\cdot_t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_t;\widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}})} \leq CT^{\theta}\|u\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\|v\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}. \tag{2.59}$$

Veamos ahora que existen un $\theta > 0$ y un $C > 0$ tales que

$$\|II(f)(\cdot_t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_t;\widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}})} \leq CT^{\theta}\|u\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\|v\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}. \tag{2.60}$$

Sea $t \in \mathbb{R}$, entonces la definición hecha en (1.6) y el acotamiento llevado a cabo para $\|g_0(f)\|_{-\frac{1}{2}}$ en la obtención del estimativo (2.59) nos permiten afirmar que:

$$\begin{aligned}
\|II(f)(t)\|_{-\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{n\neq 0}\langle n\rangle^{-1}\left|\widehat{h(t)}(n)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\left(\sum_{n\neq 0}\langle n\rangle^{-1}\left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\tau}\widehat{f}(n,\tau)\frac{1-\varphi(\sigma)}{i\sigma}d\tau\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\left(\sum_{n\neq 0}\langle n\rangle^{-1}\left(\int_{|\sigma|>1}\frac{\left|\widehat{f}(n,\tau)\right|}{|\sigma|}d\tau\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\left(\sum_{n\neq 0}\langle n\rangle^{-1}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\widehat{f}(n,\tau)\right|}{\langle\sigma\rangle}d\tau\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C\|g_0(f)\|_{-\frac{1}{2}} \leq CT^{\theta}\|u\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\|v\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

donde C y θ son independientes de t, y por tanto tenemos (2.60).

De otra parte, veamos que

$$\|\psi(\cdot_t)\, III(f)(\cdot_t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_t;\widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}})} \le CT^\theta \|u\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \|v\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}. \tag{2.61}$$

En realidad, para $t \in \mathbb{R}$, teniendo en cuenta las definiciones (1.5) y (1.6), la Proposición 2.1.1, los estimativos (2.8) y (2.9) y los estimativos (2.44) y (2.45) de la Proposición 2.3.1, se sigue como en la estimación de $\|\psi(t)\, I(f)(t)\|_{-\frac{1}{2}}$ que

$$\begin{aligned}\|\psi(t)\, III(f)(t)\|_{-\frac{1}{2}} &= C\|\psi(t)\, W(t)\, f_0\|_{-\frac{1}{2}} \le C\|f_0\|_{-\frac{1}{2}} \\ &\le C\|g_0(f)\|_{-\frac{1}{2}} \le CT^\theta \|u\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \|v\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Los estimativos (2.59), (2.60) y (2.61), junto con (1.8) nos permiten concluir que

$$\|G_T(u,v)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_t;\widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}})} \le CT^\theta \|u\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \|v\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}. \tag{2.62}$$

Con relación a la norma en el espacio $X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$, los estimativos (2.4), (2.5) y (2.6) de la Proposición 2.1.2, el estimativo (2.9) de la Proposición 2.2.1, el estimativo (2.35) de la Proposición 2.2.2 y los estimativos (2.44) y (2.45) implican que

$$\begin{aligned}\|\psi(\cdot_t)\, I(f)\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} &\le CT^\theta \|u\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \|v\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}, \\ \|II(f)\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} &\le CT^\theta \|u\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \|v\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

y

$$\|\psi(\cdot_t)\, III(f)\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \le CT^\theta \|u\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \|v\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}},$$

con lo cual

$$\|G_T(u,v)\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \le CT^\theta \|u\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \|v\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}. \tag{2.63}$$

De (2.62) y (2.63) se concluye entonces la afirmación de la parte (i) del Lema 1.2.1.

(ii) Sean $u, v \in \widetilde{S}$. En virtud de (i) basta probar que $G_T(u,v) \in C_b(\mathbb{R}_t;\widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}})$. Veamos que cada uno de los sumandos que conforman la expresión $G_T(u,v)$ en (1.8) pertenecen al espacio $C_b(\mathbb{R}_t;\widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}})$. Sea $f := B_T(u,v)$, donde $B_T(u,v)$ es como en (1.7), entonces de (1.6) se tiene que

$$\psi(\cdot_t)\, I(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\psi(\cdot_t)\left[W(\cdot_t)\, f_1(\cdot_t)\right](\cdot_x).$$

Sean $t, \eta \in \mathbb{R}$. Teniendo en cuenta (1.3):

$$|[f_1(t+\eta)-f_1(t)]^{\wedge}(n)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\sigma}\frac{e^{i\eta\sigma}-1}{i\sigma}\varphi(\sigma)\widehat{f}(n,\tau)\,d\tau\right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty}|\eta|\left|\frac{e^{i\eta\sigma}-1}{i\eta\sigma}\right|\left|\varphi(\sigma)\widehat{f}(n,\tau)\right|d\tau \leq |\eta|\int\limits_{|\sigma|<2}\left|\widehat{f}(n,\tau)\right|d\tau$$

$$\leq C|\eta|\int\limits_{|\sigma|<2}\frac{\left|\widehat{f}(n,\tau)\right|}{\langle\sigma\rangle}d\tau \leq C|\eta|\widehat{g_0(f)}(n).$$

De esta desigualdad y de las Proposiciones 2.2.1 y 2.2.2, se sigue que:

$$\|f_1(t+\eta)-f_1(t)\|_{-\frac{1}{2}} \leq C|\eta|\,\|g_0(f)\|_{-\frac{1}{2}} \leq C|\eta|\,T^{\theta}\,\|u\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\,\|v\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \underset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

lo cual prueba que $f_1(\cdot_t) \in C_b(\mathbb{R}_t;\widetilde{H}_{\pi}^{-\frac{1}{2}})$. Ahora

$$\begin{aligned}
&\|\psi(t+\eta)W(t+\eta)f_1(t+\eta)-\psi(t)W(t)f_1(t)\|_{-\frac{1}{2}}\\
\leq\ &\|\psi(t+\eta)W(t+\eta)(f_1(t+\eta)-f_1(t))\|_{-\frac{1}{2}}\\
&+\|(\psi(t+\eta)W(t+\eta)-\psi(t)W(t))f_1(t)\|_{-\frac{1}{2}}\\
\leq\ &Me^{\omega(t+\eta)}\|(f_1(t+\eta)-f_1(t))\|_{-\frac{1}{2}}\\
&+\|(\psi(t+\eta)W(t+\eta)-\psi(t)W(t))f_1(t)\|_{-\frac{1}{2}} \underset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\psi(\cdot_t)\,I(B_T(u,v)) \in C_b(\mathbb{R}_t;\widetilde{H}_{\pi}^{-\frac{1}{2}}). \tag{2.64}$$

Veamos ahora que $II(f)$ también pertenece a $C_b(\mathbb{R}_t;\widetilde{H}_{\pi}^{-\frac{1}{2}})$. De (1.6) tenemos que

$$II(f) = h(\cdot_x,\cdot_t),$$

con h definido en (1.4).

Sean $t,\eta\in\mathbb{R}$. Entonces de (1.4) se tiene que

$$|[h(t+\eta)-h(t)]^{\wedge}(n)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\tau}\left(e^{i\eta\tau}-1\right)\frac{\widehat{f}(n,\tau)}{i\sigma}(1-\varphi(\sigma))\,d\tau\right|$$

$$\leq C\int\limits_{|\sigma|>1}\left|e^{i\eta\tau}-1\right|\frac{\left|\widehat{f}(n,\tau)\right|}{|\sigma|}d\tau \leq C\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{i\eta\tau}-1\right|\frac{\left|\widehat{f}(n,\tau)\right|}{\langle\sigma\rangle}d\tau.$$

El integrando en la anterior expresión está acotado por $2\frac{\left|\widehat{f}(n,\tau)\right|}{\langle\sigma\rangle}$ y $2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\widehat{f}(n,\tau)\right|}{\langle\sigma\rangle}d\tau = 2\widehat{g_0(f)}(n) < \infty$, por tanto por el teorema de la convergencia dominada se tiene que

$$|[h(t+\eta) - h(t)]\widehat{\ }(n)| \longrightarrow 0, \qquad \text{cuando } \eta \to 0.$$

Además, como $|[h(t+\eta) - h(t)]\widehat{\ }(n)| \leq C\widehat{g_0(f)}(n)$, nuevamente por el teorema de la convergencia dominada se concluye que

$$\|h(t+\eta) - h(t)\|_{-\frac{1}{2}}^2 \leq \sum_{n\neq 0} \langle n\rangle^{-1} |[h(t+\eta) - h(t)]\widehat{\ }(n)|^2 \underset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Esto muestra que

$$II(B_T(u,v)) \in C_b(\mathbb{R}_t; \widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}}). \tag{2.65}$$

Veamos que $\psi(\cdot_t) III(B_T(u,v))$ también tiene un representante en el espacio $C_b(\mathbb{R}_t; \widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}})$. Nuevamente, de (1.6) se tiene que

$$\psi(\cdot_t) III(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\psi(\cdot_t)[W(\cdot_t) f_0](\cdot_x),$$

con f_0 definido en (1.5).

En el procedimiento hecho para establecer la desigualdad (2.61) obtuvimos que

$$\|f_0\|_{-\frac{1}{2}} \leq C\|f\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \leq CT^\theta \|u\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \|v\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} < \infty.$$

Luego $f_0 \in \widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}}$ y en consecuencia

$$\psi(\cdot_t) III(B_T(u,v)) \in C_b(\mathbb{R}_t; \widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}}). \tag{2.66}$$

De (2.64), (2.65) y (2.66) se sigue que para $u, v \in \widetilde{S}$,

$$G_T(u,v) \in C_b(\mathbb{R}_t; \widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}}),$$

con lo cual queda probada la afirmación (ii) del lema 1.2.1. ■

Capítulo 3

Teorema de Existencia y Unicidad del Problema de Cauchy Periódico en $\widetilde{H}_{\pi}^{-\frac{1}{2}}$. (Demostración de los Teoremas 1.3.1 y 1.3.2)

En este capítulo demostraremos los Teoremas 1.3.1 y 1.3.2, de existencia y unicidad respectivamente que, como dijimos anteriormente, constituyen el objetivo central de este trabajo. En la demostración de estos Teoremas haremos uso de la Proposición 2.1.1 y del Lema 1.2.1.

3.1 Demostración del Teorema 1.3.1. (Existencia)

Prueba. Para $u_0 \in \widetilde{H}_{\pi}^{-\frac{1}{2}}$ y $T \in (0,1]$, consideremos el operador $\Phi_T := \Phi(T, u_0)$ de $X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ en sí mismo definido para $u \in X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ por

$$\Phi_T(u) := \psi(\cdot_t)[W(\cdot_t)u_0](\cdot_x) + G_T(u,u).$$

Por la Proposición 2.1.1 y el Lema 1.2.1, el operador Φ_T está bien definido. Veamos que existen una constante positiva C y un $T \in (0,1]$, tales que el operador Φ_T envía a la bola cerrada $\overline{B}\left(0, 2C\|u_0\|_{-\frac{1}{2}}\right)$, del espacio $X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$, en sí misma. De la Proposición 2.1.1 y la parte (i) del Lema 1.2.1 se sigue que existen un $\theta > 0$ y un $C > 0$ tales que para $u \in \widetilde{S}$ y $T \in (0,1]$

$$\begin{aligned} \|\Phi_T(u)\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} &\leq \|\psi(\cdot_t)W(\cdot_t)u_0\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} + \|G_T(u,u)\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \\ &\leq C\left(\|u_0\|_{-\frac{1}{2}} + T^{\theta}\|u\|^2_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\right). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Si escogemos $T \in (0,1]$ tal que

$$T^{\theta} \leq \frac{1}{4C^2 \|u_0\|_{-\frac{1}{2}} + 1} \ , \tag{3.2}$$

de (3.1) es claro que si

$$\|u\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \leq 2C \|u_0\|_{-\frac{1}{2}} \ ,$$

entonces

$$\|\Phi_T(u)\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \leq 2C \|u_0\|_{-\frac{1}{2}} \ .$$

Como $\widetilde{S} \cap \overline{B}\left(0, 2C \|u_0\|_{-\frac{1}{2}}\right)$ es denso en $\overline{B}\left(0, 2C \|u_0\|_{-\frac{1}{2}}\right)$, el resultado se extiende de manera natural a $\overline{B}\left(0, 2C \|u_0\|_{-\frac{1}{2}}\right)$. Veamos ahora que para un $T \in (0,1]$ adecuado, que satisface (3.2), Φ_T es una contracción de la bola $\overline{B}\left(0, 2C \|u_0\|_{-\frac{1}{2}}\right)$ en sí misma. Sean $u^* := \psi\left(T^{-1}\cdot_t\right) u$ y $v^* := \psi\left(T^{-1}\cdot_t\right) v$, donde u y v están en $\widetilde{S} \cap \overline{B}\left(0, 2C \|u_0\|_{-\frac{1}{2}}\right)$. Aplicando el Lema 1.2.1 (i) tenemos que

$$\begin{aligned}
& \|\Phi_T(u) - \Phi_T(v)\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \|G_T(u,u) - G_T(v,v)\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \\
= \ & \Bigg\|\psi(\cdot_t)\, I\left(-\frac{1}{2}\partial_x (u^*)^2\right) + II\left(-\frac{1}{2}\partial_x (u^*)^2\right) + \psi(\cdot_t)\, III\left(-\frac{1}{2}\partial_x (u^*)^2\right) - \\
& \psi(\cdot_t)\, I\left(-\frac{1}{2}\partial_x (v^*)^2\right) - II\left(-\frac{1}{2}\partial_x (v^*)^2\right) - \psi(\cdot_t)\, III\left(-\frac{1}{2}\partial_x (v^*)^2\right)\Bigg\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \\
= \ & \Bigg\|\psi(\cdot_t)\, I\left(-\frac{1}{2}\partial_x (u^* - v^*)(u^* + v^*)\right) + II\left(-\frac{1}{2}\partial_x (u^* - v^*)(u^* + v^*)\right) + \\
& \psi(\cdot_t)\, III\left(-\frac{1}{2}\partial_x (u^* - v^*)(u^* + v^*)\right)\Bigg\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \|G_T(u - v, u + v)\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \\
\leq \ & CT^{\theta} \|u + v\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \|u - v\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \leq 4C^2 T^{\theta} \|u_0\|_{-\frac{1}{2}} \|u - v\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \ .
\end{aligned}$$

Si tomamos $T \in (0,1]$ tal que T satisface (3.2) y además tal que

$$T^{\theta} \leq \frac{1}{8C^2 \|u_0\|_{-\frac{1}{2}} + 1},$$

entonces de la anterior cadena de desigualdades se sigue que

$$\Phi_T : \overline{B}\left(0, 2C \|u_0\|_{-\frac{1}{2}}\right) \longrightarrow \overline{B}\left(0, 2C \|u_0\|_{-\frac{1}{2}}\right)$$

es tal que para $u, v \in \widetilde{S} \cap \overline{B}\left(0, 2C \|u_0\|_{-\frac{1}{2}}\right)$:

$$\|\Phi_T(u) - \Phi_T(v)\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} \|u - v\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} .$$

Como $\widetilde{S} \cap \overline{B}\left(0, 2C \|u_0\|_{-\frac{1}{2}}\right)$ es denso en $\overline{B}\left(0, 2C \|u_0\|_{-\frac{1}{2}}\right)$ concluimos que Φ_T es una contracción en la bola $\overline{B}\left(0, 2C \|u_0\|_{-\frac{1}{2}}\right)$. Por el teorema del punto fijo de Banach, existe un único $v \in \overline{B}\left(0, 2C \|u_0\|_{-\frac{1}{2}}\right)$ tal que $v = \Phi_T(v)$, es decir

$$v = \psi(\cdot_t)\,[W(\cdot_t)\,u_0](\cdot_x) + G_T(v, v) .$$

Como $\psi(\cdot_t)\,[W(\cdot_t)\,u_0](\cdot_x)$ y $G_T(v, v)$ pertenecen a $C_b(\mathbb{R}_t, \widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}}) \cap X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$, entonces $v \in C_b(\mathbb{R}_t, \widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}}) \cap X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$, y por lo tanto

$$u := v|_{[-T,T]} \in X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}[-T, T] .$$

Observemos que

$$u(t) = \psi(t)\,W(t)\,u_0 + [G_T(v, v)](t), \qquad \forall t \in [-T, T] .$$

Como $T \in (0, 1]$, para $t \in [-T, T]$, $\psi(t) = 1$ y por tanto

$$u(t) = W(t)\,u_0 + [G_T(v, v)](t), \qquad \forall t \in [-T, T] .$$

Es decir, u es solución en $[-T, T]$ del PVI periódico (i)-(ii) con dato inicial u_0. ■

3.2 Demostración del Teorema 1.3.2. (Unicidad)

Prueba. Sean $u_0 \in \widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}}$, $T > 0$ y $u_1, u_2 \in X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}[-T, T]$ soluciones en $[-T, T]$ del PVI periódico (i)-(ii) con dato inicial u_0. Sean v_1, v_2 extensiones en $C_b(\mathbb{R}_t; \widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}}) \cap X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ de u_1 y u_2 respectivamente, entonces para todo $t \in [-T, T]$ se tiene que

$$u_2(t) - u_1(t) = G_T(v_2, v_2)(t) - G_T(v_1, v_1)(t) . \tag{3.3}$$

Por un argumento de densidad puede verse que

$$G_T(v_2, v_2) - G_T(v_1, v_1) = G_T(v_2 + v_1, v_2 - v_1),$$

de lo cual, junto con (3.3), se sigue que

$$u_2(t) - u_1(t) = G_T(v_2 + v_1, v_2 - v_1)(t).$$

Para $T_1 \in (0,1)$ tal que $T_1 \leq T$, $(u_2 - u_1)|_{[-T_1,T_1]} \in X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}[-T_1, T_1]$. Sea $w \in C_b(\mathbb{R}_t, \widetilde{H}_\pi^{-\frac{1}{2}}) \cap X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ una extensión de $(u_2 - u_1)|_{[-T_1,T_1]}$ tal que

$$\|w\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \leq 2 \left\| (u_2 - u_1)|_{[-T_1,T_1]} \right\|_{X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}[-T_1,T_1]}.$$

Por tanto teniendo en cuenta la definición de la norma en $X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}[-T_1, T_1]$ se sigue que

$$\left\| (u_2 - u_1)|_{[-T_1,T_1]} \right\|_{X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}[-T_1,T_1]} \leq \|G_{T_1}(v_2 + v_1, w)\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$$

$$\leq CT_1^\theta \|v_2 + v_1\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \|w\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \leq 2CT_1^\theta \|v_2 + v_1\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \left\| (u_2 - u_1)|_{[-T_1,T_1]} \right\|_{X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}[-T_1,T_1]}$$

donde $\theta > 0$ está dado por el Lema 1.2.1. Sea

$$T_1 := \min\left\{T, \left(8C \|v_2 + v_1\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} + 2\right)^{-\frac{1}{\theta}}\right\},$$

entonces

$$\begin{aligned} & \left\| (u_2 - u_1)|_{[-T_1,T_1]} \right\|_{X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}[-T_1,T_1]} \leq 4C \left(8C \|v_2 + v_1\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} + 2\right)^{-1} \times \\ & \|v_2 + v_1\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \left\| (u_2 - u_1)_{[-T_1,T_1]} \right\|_{X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}[-T_1,T_1]} \\ \leq \; & \frac{1}{2} \left\| (u_2 - u_1)|_{[-T_1,T_1]} \right\|_{X_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}[-T_1,T_1]}. \end{aligned}$$

Por tanto $(u_2 - u_1)|_{[-T_1,T_1]} = 0$ y así $u_1(t) = u_2(t)$ para todo $t \in [-T_1, T_1]$. Como el tamaño de T_1 depende sólo de $\|v_2 + v_1\|_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$, iterando el anterior argumento un número finito de veces podemos concluir que $u_1(t) = u_2(t)$ para todo $t \in [-T, T]$. ■

Bibliografía

[B] Bourgain, J., Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations I, II. Geom. Funct. Anal, 3, 107-156, 209-262, 1993.

[CKSTT] Colliander, J., Keel, M., Staffilani, G., Takaoka, H., Tao, T., Sharp Global well-posedness results for periodic and non-periodic KdV and modified KdV on $\mathbb{R}$ and $\mathbb{T}$. J. Amer. Math. Soc. ,16, 705-749, 2003.

[I] Isaza, P., Problema de Cauchy periódico para la ecuación de Kadomtsev-Petviashvili (KP-II) en espacios de baja regularidad. Trabajo para la promoción a profesor titular. Universidad Nacional de Colombia-Sede Medellín, 2001, 43 pgs.

[KaPo] Kato, T., Ponce, G., Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations. Comm. on Pure and Appl. Math, 41 (1988), 891-907.

[KPV] Kenig, C., Ponce, G., Vega, L., A bilinear estimate with applications to the KdV equation. J. Amer. Math. Soc.,9, 573-603, 1996.

[LP] Linares, F., Ponce, G., Introduction to Nonlinear Dispersive Equations. Publicacoes Matemáticas. IMPA, Río de Janeiro, Brasil, 2004, 243 pgs.

[M] Mejía, J., Equivalencia de los problemas integral y de Cauchy para la ecuación de Kadomtsev y Petviashvili (KP-II) en espacios de baja regularidad. Trabajo de promoción a profesor titular, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, 2001, 58 pgs.

[Y] Yosida, K., Functional Analysis. Sixth Edition. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York, 1980, 500 pgs.