

**MODELAMIENTO NUMÉRICO DE YACIMIENTOS
NATURALMENTE FRACTURADOS CON FLUJO DE FLUIDOS COMPOSICIONAL
ACOPLADO A DEFORMACIÓN GEOMECÁNICA**

MARÍA ADELAIDA ARANGO ACEVEDO

**Trabajo de grado para optar al título de
Magíster en Ingeniería en el Área de Materiales y Procesos**

**DIRECTOR
MOISÉS OSWALDO BUSTAMANTE RÚA**

**CODIRECTOR
ABEL NARANJO AGUDELO**



**UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE MINAS
ESCUELA DE MATERIALES
MEDELLÍN
2009**

AGRADECIMIENTOS

La autora expresa sus sinceros agradecimientos a:

ABEL NARANJO AGUDELO. Ing. por su colaboración para la elaboración de este trabajo y por todo el apoyo que me ha brindado a través de los años.

ALEJANDRA ARBELÁEZ. Msc. por su colaboración con la información y con la metodología de trabajo para llevar a un buen término esta investigación

Grupo de Investigación en Geomecánica Aplicada – GIGA por su contribución con los trabajos previos que fueron una luz para este.

HECTOR ARANGO, GLORIA ACEVEDO Y DANIEL DÍAZ por el apoyo, la fortaleza y el ánimo que me brindaron siempre.

Y a todas aquellas personas que de una u otra manera contribuyeron en la realización de este trabajo.

DEDICATORIA

*A mis papás y a mis hermanas
que siempre me acompañan en el camino*

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE CONTENIDO	3
LISTA DE TABLAS	6
LISTA DE FIGURAS	7
ANEXOS	9
NOMENCLATURA	11
RESUMEN.....	13
1. INTRODUCCIÓN.....	14
2. ESTADO DEL ARTE.....	15
2.1. Geomecánica Acoplada a la Ingeniería de Yacimientos	15
2.2. Yacimientos Naturalmente Fracturados.....	18
2.3. Simulación de Flujo de Fluidos Composicionales	20
3. MODELO MATEMÁTICO PARA EL FLUJO DE FLUIDOS COMPOSICIONALES ACOPLADO A DEFORMACIÓN GEOMECÁNICA EN YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS.....	23
3.1. Modelo Composicional de Flujo de Fluidos.....	23
3.1.1. Conservación de Masa de Fluidos:	23
3.1.2. Conservación de Masa de Sólidos.....	25
3.1.3. Ley de Darcy.....	25
3.1.4. Ecuación de Compresibilidad de Zimmerman et al [33].....	27
3.1.5. Ecuación de Estado	29
3.1.6. Ecuación de Presión	30
3.1.7. Equilibrio líquido – vapor y Ecuación de Composición	31
3.2. Modelo de Deformación Geomecánica	32
3.2.1. Relaciones de Equilibrio de Esfuerzos	32
3.2.2. Relaciones Deformación – Desplazamiento.....	33
3.2.3. Relaciones Esfuerzo – Deformación – Presión	33
3.3. Modelo para el Cálculo de la Presión Capilar	34
3.4. Modelo para el Cálculo de las Permeabilidades Relativas.....	35
3.4.1. Modelo de Peñuela & Civan.....	35
3.4.2. Modelo de Permeabilidades Relativas a partir de las correlaciones de Brooks – Corey	36
3.5. Modelo para el Cálculo de las Porosidades de Matriz y Fractura.....	36
3.5.1. Modelo para el Cálculo de las Porosidades de Matriz.	36
3.5.2. Modelo para el Cálculo de las Porosidades de Fractura.	37
3.6. Modelo de Flujo Interporoso	37

3.7.	Modelo para el cálculo de la permeabilidad.....	38
4.	MODELO NUMÉRICO PARA EL FLUJO DE FLUIDOS COMPOSICIONALES ACOPLADO A DEFORMACIÓN GEOMECÁNICA EN YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS.....	39
4.1.	Discretización de la Ecuación de Presión.....	39
4.2.	Discretización del Modelo Deformación.....	42
5.	FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS COMPOSICIONAL, EQUILIBRIO LÍQUIDO – VAPOR Y CÁLCULO DE FASES	43
5.1.	Ecuación de Estado	43
5.2.	Constantes de Equilibrio	44
5.3.	Criterio del Plano Tangente.....	46
6.	SIMULADOR DE FLUJO DE FLUIDOS COMPOSICIONALES ACOPLADO A DEFORMACIÓN GEOMECÁNICA EN YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS	47
6.1.	Pre - procesamiento de Datos.....	47
6.2.	Procesamiento	47
6.3.	Post – Procesamiento.....	48
7.	RESULTADOS	50
7.1.	Datos Iniciales.....	50
7.2.	Diseño de corridas.....	52
7.2.1.	CASO 1.	53
7.2.2.	CASO 2.	54
7.2.3.	CASO 3.	54
7.2.4.	CASO 4.	55
7.2.5.	CASO 5.	56
7.3.	Resultados y Análisis	57
7.3.1.	CASO 1.	57
7.3.1.1.	Comportamiento del esfuerzo efectivo promedio.....	57
7.3.1.2.	Comportamiento de la presión del fluido en matriz	60
7.3.1.3.	Comportamiento de la presión del fluido de fractura	62
7.3.1.4.	Comportamiento de la permeabilidad de matriz	64
7.3.1.5.	Comportamiento de la permeabilidad de fractura	66
7.3.2.	CASO 2.	68
7.3.2.1.	Comportamiento del esfuerzo efectivo promedio.....	68
7.3.2.2.	Comportamiento de la presión del fluido en matriz.....	70

7.3.2.3.	Comportamiento de la presión del fluido en la fractura.....	72
7.3.2.4.	Comportamiento de la permeabilidad de matriz	74
7.3.2.5.	Comportamiento de la permeabilidad de fractura	76
7.3.3.	CASO 3.	78
7.3.3.1.	Comportamiento del esfuerzo efectivo promedio.....	78
7.3.3.2.	Comportamiento de la presión del fluido en matriz.....	80
7.3.3.3.	Comportamiento de la presión del fluido en fractura	83
7.3.3.4.	Comportamiento la permeabilidad de matriz	85
7.3.3.5.	Comportamiento de la permeabilidad de fractura	87
7.3.4.	CASO 4.	89
7.3.4.1.	Comportamiento del esfuerzo efectivo promedio.....	89
7.3.4.2.	Comportamiento de la presión del fluido en matriz.....	92
7.3.4.3.	Comportamiento de la presión del fluido en fractura	94
7.3.4.4.	Comportamiento de la permeabilidad de matriz	96
7.3.4.5.	Comportamiento de la permeabilidad de fractura	98
7.3.5.	CASO 5.	100
7.3.5.1.	Comportamiento del esfuerzo efectivo promedio.....	100
7.3.5.2.	Comportamiento de la presión del fluido en matriz.....	103
7.3.5.3.	Comportamiento de la presión del fluido en fractura	105
7.3.5.4.	Comportamiento de la permeabilidad de matriz	107
7.3.5.5.	Comportamiento de la permeabilidad de fractura	109
8.	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	111
9.	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	113
	ANEXOS	116

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Parámetros para la caracterización de la malla de simulación	50
Tabla 2. Datos Iniciales y valores de referencia	51
Tabla 3. Datos de los pozos ubicados en el yacimiento	51
Tabla 4. Propiedades de los componentes del fluido	52
Tabla 5. Coeficientes de Interacción Binaria	52
Tabla 6. Casos corridos con el simulador	53
Tabla 7. Propiedades de la roca Caso 1.	53
Tabla 8. Propiedades de la roca Caso 2.	54
Tabla 9. Propiedades de la roca Caso 3.	55
Tabla 10. Propiedades de la roca Caso 4.	55
Tabla 11. Propiedades de la roca Caso 5.	56

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Esquematación de la relación de la apertura de las fracturas con el esfuerzo normal.	18
Figura 2. Forma Típica de Curvas de Permeabilidad Efectiva y Relativa (Tomado de la referencia 32)	35
Figura 3. Diagrama de Flujo para la Solución del Sistema Acoplado	49
Figura 4. Comportamiento del esfuerzo efectivo promedio $T = 100$ días. Caso 1	58
Figura 4a. Acercamiento del Comportamiento del esfuerzo efectivo promedio en el dominio interno $T = 100$ días.	58
Figura 5. Comportamiento del esfuerzo efectivo promedio $T = 1500$ días. Caso 1.....	59
Figura 6. Comportamiento del esfuerzo efectivo promedio $T = 3000$ días. Caso 1.....	59
Figura 7. Comportamiento de la presión del fluido en matriz $T = 100$ días. Caso 1.....	60
Figura 8. Comportamiento de la presión del fluido en matriz $T = 1500$ días. Caso 1.....	61
Figura 9. Comportamiento de la presión fluido en matriz $T = 3000$ días. Caso 1	61
Figura 10. Comportamiento de la presión del fluido en fractura $T = 100$ días. Caso 1	62
Figura 11. Comportamiento de la presión del fluido en fractura $T = 1500$ días. Caso 1....	62
Figura 12. Comportamiento de la presión del fluido en fractura $T = 3000$ días. Caso 1....	63
Figura 13. Comportamiento de la permeabilidad de matriz $T = 100$ días. Caso 1	64
Figura 14. Comportamiento de la permeabilidad de matriz $T = 1500$ días. Caso 1.	65
Figura 15. Comportamiento de la permeabilidad de matriz $T = 3000$ días. Caso 1	65
Figura 16. Comportamiento de la permeabilidad de fractura $T = 100$ días. Caso 1	66
Figura 17. Comportamiento de la permeabilidad de fractura $T = 1500$ días. Caso 1	67
Figura 18. Comportamiento de la permeabilidad de fractura $T = 3000$ días. Caso 1	67
Figura 19. Comportamiento del esfuerzo efectivo promedio $T = 100$ días. Caso 2.....	68
Figura 20. Comportamiento del esfuerzo efectivo promedio $T = 1500$ días. Caso 2.....	69
Figura 21. Comportamiento del esfuerzo efectivo promedio $T = 3000$ días. Caso 2.....	69
Figura 22. Comportamiento de la presión del fluido en matriz $T = 100$ días. Caso 2.....	70
Figura 23. Comportamiento de la presión del fluido en matriz $T = 1500$ días. Caso 2.....	70
Figura 24. Comportamiento de la presión del fluido en matriz $T = 3000$ días. Caso 2.....	71
Figura 25. Comportamiento de la presión del fluido en fractura $T = 100$ días. Caso 2.	72
Figura 26. Comportamiento de la presión del fluido en fractura $T = 1500$ días. Caso 2....	73
Figura 27. Comportamiento de la presión del fluido en fractura $T = 3000$ días. Caso 2....	73
Figura 28. Comportamiento de la permeabilidad de matriz $T = 100$ días. Caso 2.	74
Figura 29. Comportamiento de la permeabilidad de matriz $T = 1500$ días. Caso 2.	75
Figura 30. Comportamiento de la permeabilidad de matriz $T = 3000$ días. Caso 2.	75
Figura 31. Comportamiento de la permeabilidad de fractura $T = 100$ días. Caso 2.	76
Figura 32. Comportamiento de la permeabilidad de fractura $T = 1500$ días. Caso 2.	76
Figura 33. Comportamiento de la permeabilidad de fractura $T = 3000$ días. Caso 2.	77
Figura 34. Comportamiento del Esfuerzo Efectivo medio $T = 100$ días. Caso 3.....	78
Figura 35. Comportamiento del Esfuerzo Efectivo medio $T = 1500$ días. Caso 3.....	79
Figura 36. Comportamiento del Esfuerzo Efectivo medio $T = 3000$ días. Caso 3.....	80
Figura 37. Comportamiento de la presión del fluido en matriz $T = 100$ días. Caso 3.....	80
Figura 38. Comportamiento de la presión del fluido en matriz $T = 1500$ días. Caso 3.....	82
Figura 39. Comportamiento de la presión del fluido en matriz $T = 3000$ días. Caso 3.....	82
Figura 40. Comportamiento de la presión del fluido en fractura $T = 100$ días. Caso 3.	83
Figura 41. Comportamiento de la presión del fluido en fractura $T = 1500$ días. Caso 3....	83
Figura 42. Comportamiento de la presión del fluido en fractura $T = 3000$ días. Caso 3....	84

Figura 43. Comportamiento de la permeabilidad de matriz T = 100 días. Caso 3.	86
Figura 44. Comportamiento de la permeabilidad de matriz T = 1500 días. Caso 3.	86
Figura 45. Comportamiento de la permeabilidad de matriz T = 3000 días. Caso 3.	87
Figura 46. Comportamiento de la permeabilidad de fractura T = 100 días. Caso 3.	87
Figura 47. Comportamiento de la permeabilidad de fractura T = 1500 días. Caso 3.	88
Figura 48. Comportamiento de la permeabilidad de fractura T = 3000 días. Caso 3.	89
Figura 49. Comportamiento del esfuerzo efectivo promedio T = 100 días. Caso 4.	90
Figura 50. Comportamiento del esfuerzo efectivo promedio T = 1500 días. Caso 4.	91
Figura 51. Comportamiento del esfuerzo efectivo promedio T = 3000 días. Caso 4.	91
Figura 52. Comportamiento de la presión del fluido en la matriz T = 100 días. Caso 4.	92
Figura 53. Comportamiento de la presión del fluido en la matriz T = 1500 días. Caso 4.	93
Figura 54. Comportamiento de la presión del fluido en la matriz T = 3000 días. Caso 4.	94
Figura 55. Comportamiento de la presión del fluido en la fractura T = 100 días. Caso 4.	94
Figura 56. Comportamiento de la presión del fluido en la fractura T = 1500 días. Caso 4.	95
Figura 57. Comportamiento de la presión del fluido en la fractura T = 3000 días. Caso 4.	96
Figura 58. Comportamiento de la permeabilidad de matriz T = 100 días. Caso 4.	97
Figura 59. Comportamiento de la permeabilidad de matriz T = 1500 días. Caso 4.	97
Figura 60. Comportamiento de la permeabilidad de matriz T = 3000 días. Caso 4.	98
Figura 61. Comportamiento de la permeabilidad de fractura T = 100 días. Caso 4.	98
Figura 62. Comportamiento de la permeabilidad de fractura T = 1500 días. Caso 4.	99
Figura 63. Comportamiento de la permeabilidad de fractura T = 3000 días. Caso 4.	99
Figura 64. Comportamiento del esfuerzo efectivo medio T = 100 días. Caso 5.	101
Figura 65. Comportamiento del esfuerzo efectivo medio T = 1500 días. Caso 5.	102
Figura 66. Comportamiento del esfuerzo efectivo medio T = 3000 días. Caso 5.	102
Figura 67. Comportamiento de la presión del fluido en matriz T = 100 días. Caso 5.	103
Figura 68. Comportamiento de la presión del fluido en matriz T = 1500 días. Caso 5.	104
Figura 69. Comportamiento de la presión del fluido en matriz T = 3000 días. Caso 5.	104
Figura 70. Comportamiento de la presión del fluido en fractura T = 100 días. Caso 5.	105
Figura 71. Comportamiento de la presión del fluido en fractura T = 1500 días. Caso 5.	105
Figura 72. Comportamiento de la presión del fluido en matriz T = 3000 días. Caso 5.	106
Figura 73. Comportamiento de la permeabilidad de matriz T = 100 días. Caso 5.	107
Figura 74. Comportamiento de la permeabilidad de matriz T = 1500 días. Caso 5.	108
Figura 75. Comportamiento de la permeabilidad de matriz T = 3000 días. Caso 5.	108
Figura 76. Comportamiento de la permeabilidad de fractura T = 100 días. Caso 5.	109
Figura 77. Comportamiento de la permeabilidad de matriz T = 1500 días. Caso 5.	109
Figura 78. Comportamiento de la permeabilidad de matriz T = 3000 días. Caso 5.	110

ANEXOS

ANEXO 1. MODELO COMPOSICIONAL DE FLUJO DE FLUIDOS EN COORDENADAS CARTESIANAS PARA MATRIZ Y FRACTURA.....	116
A1.1 Conservación de masa de fluidos:.....	116
A1.2 Conservación de Masa de Sólidos.....	120
A1.3 Ley de Darcy	122
A1.4 Ecuación de Compresibilidad de Zimmerman et al.	125
A1.5 Ecuación de Estado.....	128
A1.6 Ecuación de Presión.....	130
A1.7 Equilibrio de Fases y Ecuación de Composición.....	131
A1.8 Modelo de Flujo de Fluidos en Forma Incremental	132
ANEXO 2. MODELO DE DEFORMACIÓN GEOMECÁNICA	134
A2.1 Relaciones de Equilibrio de Esfuerzos.....	134
A2.2 Relaciones Deformación – Desplazamiento	134
A2.3 Relaciones Esfuerzo – Deformación – Presión.....	135
ANEXO 3. ESQUEMA DE DISCRETIZACIÓN EN DIFERENCIAS FINITAS PARA UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL.....	137
A3.1 Discretización del término: $\frac{\partial}{\partial l} \left(T \frac{\partial U}{\partial l} \right)$	137
A3.2 Discretización del término: $\frac{\partial U}{\partial l}$	138
A3.3 Discretización del término: $\frac{\partial}{\partial l} \left(T \frac{\partial U}{\partial r} \right)$	139
A3.4 Discretización del término: $\frac{\partial(TU)}{\partial l}$	141
A3.5 Discretización del término: $\left(\frac{\partial U_l}{\partial l} \right)_{m,n=1}$	141
ANEXO 4. DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL MODELO COMPOSICIONAL DE FLUJO DE FLUIDOS EN LA MATRIZ.....	143
A4.1 Discretización de la ecuación de flujo de fluidos para matriz.....	143
A4.2 Discretización de la ecuación de transferencia de fluidos de matriz a fractura	150

A4.3 Discretización de la ecuación diferencial incluyendo la transferencia matriz.....	150
– fractura	150
ANEXO 5. DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL MODELO COMPOSICIONAL DE FLUJO DE FLUIDOS EN LA FRACTURA	156
A5.1 Discretización de la ecuación de flujo de fluidos para fractura	156
A5.2 Discretización de la ecuación de transferencia de fluidos de matriz a.....	163
fractura	163
A5.3 Discretización de la ecuación diferencial incluyendo la transferencia matriz.....	163
– fractura	163
ANEXO 6. DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL MODELO DE DEFORMACIÓN GEOMECÁNICA.....	165
A6.1 Discretización de la ecuación geomecánica en dirección X	165
A6.2 Discretización de la ecuación geomecánica en dirección Y	166
A6.3 Discretización de la ecuación geomecánica en dirección Z	167

NOMENCLATURA

A_t :	Área total, pie^2
b_m :	Módulo de permeabilidad.
C_{pcm} :	Compresibilidad de poros primarios.
C_{pcf} :	Compresibilidad de poros secundarios.
F:	Fugacidad
G:	Modulo de Rigidez
l :	Longitud
K :	Permeabilidad.
k_r :	Permeabilidad Relativa
MWi:	Peso Molecular del componente i
P :	Presión
P_e :	Presión de referencia
P_c :	Presión Capilar
q_{eq} :	Caudal equivalente de gas.
\tilde{q} :	Masa de fuentes o sumideros por unidad de volumen total por unidad de tiempo
S:	Saturación
S_{wr} :	Saturación residual de la fase humectante
S_{nwi} :	Saturación inicial de la fase no humectante
T :	Transmisibilidad
t :	Tiempo
u :	Velocidad aparente en el modelo de flujo
\vec{u} :	Vector velocidad
u :	Desplazamientos en el modelo geomecánico.
V :	Volumen
V_c :	Volumen corregido
X:	Fracción molar de la fase líquida
Y:	Fracción molar de la fase de vapor

Griegas

α :	Coeficiente de Biot
β :	Coeficiente de esfuerzo efectivo
ρ :	Densidad
δ_{ij} :	Delta de dirac
ε :	Deformación
λ :	Parámetro de Lamé
λ :	Distribución del tamaño de poro en la ecuación de presión capilar
σ' :	Esfuerzo efectivo promedio.
σ :	Esfuerzo inicial.
τ :	Esfuerzo de cizalla
ϕ :	Porosidad
φ :	Coeficiente de fugacidad

μ : Viscosidad

ω : Factor acéntrico

Simbolos

∂ : Derivada parcial

∇ : Gradiente

$\nabla \cdot$: Divergencia

Δ : Incremento

Subíndices

b : Total (Bulk)

f : Fluido, fractura

i, j, k : Posición en los ejes x, y y z respectivamente

m : Medio, matriz

i : Componente i ésimo de la fase

s : Sólido

T : Transferencia

v : Fuentes y/o sumideros

L: Fase líquida

V: Fase de vapor

Hiperíndices

d : Referente a doble porosidad

' : Efectivo

0: Referente a estados iniciales

RESUMEN

En este trabajo se desarrolla un modelo matemático que permite evaluar el comportamiento geomecánico en macizos rocosos que contienen fracturas naturales, y valorar el cambio de la permeabilidad debido a la variación en el estado de esfuerzos, causado por la diferencia en la presión de los fluidos presentes en el yacimiento, que por su complejidad deben ser analizados como fluidos composicionales.

El modelo matemático se plantea en tres dimensiones y se desarrolla en coordenadas cartesianas partiendo de las ecuaciones de flujo de fluidos y las ecuaciones que relacionan el esfuerzo tectónico, la deformación y la presión del fluido. La solución del modelo matemático se encuentra mediante la discretización de las ecuaciones por el método de diferencias finitas, utilizando un esquema de nodo centrado o distribuido. Con los modelos matemático y numérico, se desarrolla un simulador de flujo de fluidos composicional para yacimientos naturalmente fracturados que puedan presentar sensibilidad de la permeabilidad al cambio en el estado de esfuerzos, bajo la plataforma de Fortran 90.

El simulador constituye un avance en el análisis del comportamiento geomecánico de los yacimientos de petróleo y gas. Los reportes de literatura consultados, muestran acoples realizados, considerando fluidos monofásicos, e incluso multifásicos, con geomecánica para yacimientos homogéneos. Sin embargo, no se conoce reporte alguno de un simulador similar que se haya desarrollado bajo el escenario propuesto y que por lo tanto pueda ser usado para considerar el comportamiento geomecánico de la roca y composicional de los fluidos en un yacimiento naturalmente fracturado.

Los resultados de la simulación permiten obtener el valor del esfuerzo efectivo, la presión de los fluidos en cada uno de los medios continuos, la permeabilidad y la deformación que está teniendo lugar en cada nodo dentro de la malla de simulación.

1. INTRODUCCIÓN

La industria del petróleo, y en especial la ingeniería de yacimientos, cuenta con simuladores comerciales que permiten estudiar el comportamiento de los fluidos y de las rocas del yacimiento [1]. Estas herramientas han sido utilizadas para encontrar las características principales de los yacimientos y para predecir su comportamiento a través de la vida productiva de los mismos.

En la actualidad se han encontrado yacimientos cuyas propiedades petrofísicas varían significativamente debido al cambio en el estado de esfuerzos, consideraciones que no se tenían en cuenta hace unas décadas. Para levantar estas suposiciones es necesario hacer un análisis riguroso de las propiedades petrofísicas del yacimiento al variar la presión de poro, lo cual requiere de un estudio del comportamiento geomecánico.

En Colombia, se encuentra una de las zonas geológicas más complejas del mundo, el Piedemonte Llanero, en donde los hidrocarburos presentes se cree están asociados a macizos rocosos fracturados y sensibles a esfuerzos y deformaciones. Además de presentar complejidades a nivel de la roca, presentan fluidos cercanos al punto crítico de naturaleza retrógrada que deben ser analizados con modelos composicionales [2]. La producción en este yacimiento aporta el 25 % del total del país, por lo cual es pertinente predecir los efectos de la producción y/o inyección de fluidos en el macizo rocoso para que los ingenieros diseñen esquemas de producción apropiados que optimicen la cantidad de reservas recuperables y aumenten la productividad del yacimiento.

Aunque actualmente existen simuladores comerciales que consideran los efectos geomecánicos en el flujo de fluidos, no se está al tanto de un simulador comercial que considere los cambios en las propiedades geomecánicas con el cambio en los esfuerzos, que pueda ser usado en yacimientos naturalmente fracturados y que además tenga en cuenta un flujo de fluidos composicional. El desarrollo de un simulador con las características citadas es el objetivo principal de este trabajo, el cual se lleva a cabo a partir de unas ecuaciones constitutivas que permiten construir un modelo matemático para el problema que se plantea. Estas ecuaciones se discretizan por medio de la técnica de diferencias finitas y se resuelven por medio de un modelo numérico tipo Picard [3]. La solución de los sistemas de ecuaciones se encuentra mediante el método iterativo de los gradientes conjugados [4].

Este trabajo expone además del desarrollo del simulador, la respuesta de éste a diferentes escenarios como: yacimientos homogéneos o yacimientos naturalmente fracturados, yacimientos cuyas propiedades mecánicas para el dominio interno y para el dominio externo sean diferentes o iguales, y yacimiento sensibles a las variaciones en los esfuerzo o no sensibles; con el fin de establecer la importancia de hacer un análisis composicional del fluido, para determinar el cambio de la permeabilidad si se considera un yacimiento sensible a esfuerzos o no y para estudiar el efecto de considerar un yacimiento fracturado comparado con un yacimiento homogéneo. Los resultados que se muestran corroboran el funcionamiento de la herramienta y permiten encontrar las propiedades de los fluidos y las propiedades petrofísicas de la roca en el dominio interno y en el dominio externo, para diferentes tiempos de simulación de acuerdo a los intereses.

2. ESTADO DEL ARTE

Los fundamentos teóricos en los que se basa esta investigación se pueden dividir y diferenciar en tres grandes ramas: La geomecánica acoplada con el flujo de fluidos, la simulación de fluidos composicionales y los yacimientos naturalmente fracturados. Se muestra a continuación una breve revisión de los fundamentos que sirven de base para el trabajo que se desarrolla.

2.1. Geomecánica Acoplada a la Ingeniería de Yacimientos

Desde unas cuantas décadas atrás [5], los ingenieros de yacimiento se han dado cuenta que las primeras aproximaciones establecidas para el flujo de fluidos no consideran de forma adecuada los cambios que pueden darse en las propiedades petrofísicas de las rocas por la producción e inyección de fluidos dentro del yacimiento. Esto es aún más evidente en los yacimientos recientes en donde se exhiben fenómenos diferentes a los establecidos en la ingeniería convencional.

Campos como el Ekofisk, en el mar de norte, en donde se presenta subsidencia de la roca de casi 40 cm al año son prueba de la deformación a la que está sometido el macizo rocoso por los procesos de producción de fluidos [6]. En Colombia, el campo Cupiagua, localizado en el Piedemonte llanero colombiano, es quizá el ejemplo más claro de la variación de las propiedades petrofísicas como respuesta a los cambios en el estado de esfuerzo. Muchos estudios se han realizado para establecer la veracidad de la sensibilidad del campo Cupiagua a los esfuerzos y se ha demostrado, mediante técnicas diferentes como pruebas de laboratorio y análisis de pruebas de presión, entre otras, que el yacimiento está sometido a deformaciones. Razones como las anteriores ratifican la importancia del estudio de la mecánica de rocas aplicada a la ingeniería de yacimientos.

Entre los primeros estudios se cuenta con el estudio de Terzaghi, quien introduce por primera vez el concepto de esfuerzo efectivo como el esfuerzo que realmente soporta la roca. Desde ese momento, se trata de formular nuevamente la teoría de Biot para tener en cuenta el flujo de fluidos dentro del espacio poroso [6].

Estos primeros estudios fueron asimilados por otros investigadores, que más adelante elaboraron los modelos matemáticos utilizados para la aplicación de la geomecánica en la ingeniería de yacimientos. Trabajos como los presentados por Fjaer et al [7] muestran de manera detallada las variables a ser consideradas para este tipo de análisis. En su libro, Fjaer et al, presentan el concepto del tensor de esfuerzos, la relación de estos con los desplazamientos y la deformación. Además, se presentan las relaciones de las variables mecánicas de la roca como la relación de Poisson y el módulo de Young, entre otras, con las deformaciones que tienen lugar en el macizo rocoso.

Chen et al [8] plantean las bases para la simulación del flujo de fluidos acoplado a deformación geomecánica, partiendo de las consideraciones establecidas por Biot, en donde se relaciona el esfuerzo total con la presión que ejerce el fluido dentro del poro. Los autores Chen et al [8], plantean de una manera metódica el acople del flujo de fluidos con la geomecánica.

La variable en la que centran Chen et al [8] el estudio es la velocidad de deformación del sólido. Para un medio poroso no deformable, este valor se puede asumir igual a cero. Sin embargo, para medios porosos sensibles a esfuerzos o en yacimientos naturalmente fracturados, éste no es del todo cierto. La divergencia de la velocidad del sólido puede ser escrita en términos de la tasa a la que cambia el volumen total del sistema. Haciendo las consideraciones necesarias, se relaciona el volumen poroso con el volumen total para tener la ecuación en términos de variables medibles en laboratorio como la compresibilidad del sólido y la compresibilidad total del sistema. Las relaciones mostradas por Chen et al [8] fueron establecidas para un macizo rocoso homogéneo.

Ahora bien, el acople del comportamiento del flujo de fluido – sólido parte de la teoría de poroelasticidad [3], cuyas relaciones básicas son las ecuaciones de equilibrio de esfuerzos, la relación deformación – desplazamiento, y la ecuación esfuerzo – deformación – presión. Para el desarrollo de estas ecuaciones se consideran variables como el módulo de Young, la relación de Poisson, el módulo de cizalla y la compresibilidad total. El principio de estas relaciones son consideradas por Fjaer et al [7] en su libro.

El vector de desplazamiento del sólido está relacionado con la deformación y la velocidad de desplazamiento del sólido; así se podría establecer la ecuación del flujo de fluidos en términos de la deformación en lugar del esfuerzo medio y las variables principales serían la deformación y la presión del fluido. En la ecuación esfuerzo - deformación - presión se hace implícito el estudio de Terzaghi del esfuerzo efectivo [8], el cual representa la porción en exceso del esfuerzo total causado por la presión que ejerce el fluido. Considerando el esfuerzo efectivo, se plantean las relaciones de esfuerzo - deformación - presión en términos de esta variable. Lo anterior implica la disminución del número de variables a trabajar, es decir, pasar de dos variables, el esfuerzo y la presión, a sólo una variable: el esfuerzo efectivo, lo cual es relativamente más fácil.

Una vez se establecen las ecuaciones constitutivas del modelo de flujo de fluidos acoplado a deformación geomecánica, el paso a seguir es implementar modelos numéricos que ayuden a encontrar la solución de las ecuaciones diferenciales altamente no lineales. Con esta finalidad, Osorio *et al* [3] realizan un estudio para tratar de manejar de la mejor manera posible el yacimiento. Los autores presentan los pasos adecuados para llevar a cabo la simulación del fenómeno y proponen ideas como la consideración del dominio externo para el modelo relacionado con la geomecánica, ya que en las regiones que rodean el yacimiento puede haber deformación de la roca por el cambio en el estado del esfuerzos debido a las variaciones de presión causadas por la inyección y/o producción de fluidos. El flujo de fluidos se puede simular simplemente con un dominio interno. Por otra parte, Osorio *et al* [3] presentan un modelo iterativo adecuado para dar solución al problema como el modelo tipo Picard, cuyo principio se basa en obtener los valores de desplazamientos en dirección X y así calcular los desplazamientos en dirección Y, los cuales, a su vez, son usados para el cálculo de los desplazamientos en dirección Z. Este procedimiento se hace para cada iteración hasta alcanzar una convergencia dada y para cada intervalo de tiempo que se quiere simular. Además de las propuestas anteriores, Osorio *et al* [3] en su estudio plantean el algoritmo de Gauss – Seidel como el algoritmo a utilizar para dar solución al sistema de ecuaciones.

Luego del trabajo de Osorio *et al* [3], se presentan cada vez más evidencias del acople del flujo de fluidos a deformación geomecánica. Los estudios empiezan a dirigirse a dos áreas bien definidas: el tipo de acople que puede hacerse debido a la dificultad computacional y la extensión del estudio de la geomecánica en yacimientos naturalmente fracturados, que por su naturaleza pueden ser más sensibles a las variaciones en el estado de esfuerzos que los yacimientos homogéneos. Este último aspecto se discutirá más adelante.

Settari y Walters [9] son los pioneros en la discusión del tipo de acople que puede hacerse para resolver el problema de la geomecánica en la ingeniería de yacimientos y plantean los grados de acople como desacoplado, explícitamente acoplado, iterativamente acoplado y totalmente acoplado. El desacople corresponde al manejo convencional del yacimiento, en donde el volumen de la roca cambia sólo con la presión del fluido y no se considera la deformación del medio poroso. El término explícitamente acoplado se refiere a encontrar la solución para la presión en el yacimiento conociendo el estado de esfuerzos en un instante de tiempo anterior. Este tipo de acople es un caso especial del sistema acoplado de manera iterativa, en donde sólo se realiza una iteración para cada nivel de tiempo. El acoplamiento iterativo consiste en solucionar las ecuaciones de flujo de fluidos y de esfuerzos de manera repetida hasta alcanzar un cierto valor de convergencia dado para cada nivel de tiempo. Settari y Walters [9] consideran que este tipo de acople es quizá el más flexible para el problema de la geomecánica aplicada a la ingeniería de yacimientos. La aproximación totalmente acoplada probablemente sea la más ventajosa de todas las técnicas, sin embargo, requiere un estudio más detallado y mayores destrezas computacionales para dar soluciones correctas.

Thomas *et al* [10] desarrollan un simulador que considera el flujo de fluidos acoplado a la deformación geomecánica, la idea de los autores consistió en desarrollar dos módulos separados, uno que considere el flujo de fluidos y otro que tenga en cuenta la deformación de la roca. La forma de unir los dos módulos es mediante parámetros como la porosidad, la saturación y la presión. El acople es de tipo iterativo y consiste en encontrar la convergencia de cada uno de los módulos por separado y unir de cierta manera los resultados por los parámetros discutidos anteriormente. Cabe anotar que los módulos presentan diferentes formas de discretización de la malla y tipos de solución numérica diferente, por ejemplo, para el módulo geomecánico, se recomienda el uso de elementos finitos, mientras que para el flujo de fluidos, la solución sea mediante el uso de diferencias finitas.

Otro de los detalles que se deben tener en cuenta en el trabajo de Thomas *et al* [10] es la refinación de la malla en la zona cercana al pozo. Esto es importante ya que el pozo es el encargado de la producción y/o inyección de fluidos y por tal razón las áreas de drenaje de ellos se verán más afectadas al cambio en el estado de esfuerzos. Un refinamiento en esta zona puede considerar fenómenos que de otra manera podrían estar enmascarados. Por la misma época, Chin *et al* [11] realizan un nuevo estudio en donde se plantea nuevamente el proceso iterativo como algoritmo para dar solución al sistema, y muestran el método de gradientes conjugados como el método numérico ideal para resolver el sistema de ecuaciones.

Más adelante, Tran *et al* [12] proponen un simulador de flujo de fluidos acoplado con la deformación de la roca de manera iterativa y expresan que esta forma de resolver el problema es menos dispendiosa computacionalmente. Sin embargo, Tran *et al* [12] están

seguros que un acople total del sistema puede representar, de una manera más certera, el comportamiento del yacimiento sensible al cambio de esfuerzos. Dentro de los avances que plantean Tran *et al* en el modelamiento de la geomecánica acoplada al flujo de fluidos, se encuentra la adición de la temperatura, una variable que en la mayoría de los casos se toma como constante pero que en fenómenos como inyección de vapor no debe ser considerada de esta manera.

2.2. Yacimientos Naturalmente Fracturados

Una cantidad considerable de los yacimientos de hidrocarburos, a nivel mundial, se encuentran en rocas que presentan fracturas naturales [13]. Que un yacimiento presente fracturas naturales puede influir de una manera negativa o positiva en el flujo de fluidos dentro de la formación. En general, se considera que un yacimiento es naturalmente fracturado si las fracturas intervienen en el flujo de fluidos dentro de la formación de interés. Las fracturas naturales se generan dentro del macizo rocoso por los cambios en el estado de esfuerzos, esto hace pensar que cualquier cambio en el estado de esfuerzos, causado por las operaciones de rutina, una vez el yacimiento está produciendo, puede afectar las fracturas existentes, abriéndolas o cerrándolas, y así, el desempeño del yacimiento.

Considerando lo anterior, diversos autores han realizado estudios para entender el comportamiento de los yacimientos naturalmente fracturados. Bakhtar *et al* [14] muestran evidencias de los cambios en la apertura de los sistemas fracturados durante diferentes tiempos en la etapa de producción de un pozo dentro del yacimiento, en donde, los esfuerzos efectivos comienzan a incrementarse gradualmente, haciendo que las fracturas comiencen a cerrarse. Para tratar de modelar este fenómeno, Bakhtar *et al* [14] plantean una relación entre la apertura de la fractura y el esfuerzo efectivo normal (Ver Figura 1). Luego, calculan la permeabilidad de la formación que resulta de los cambios en la presión de poro. Este trabajo de Bakhtar *et al* [14], aunque no establece de una manera sistemática el cambio en los valores de la permeabilidad en función del cambio de esfuerzos, si presenta la evidencia del comportamiento de las fracturas a través de la vida productiva de un pozo dentro de un yacimiento. Lo anterior empieza a dilucidar la importancia de trabajos más profundos, encaminados a simular los efectos geomecánicos en estos yacimientos de naturaleza compleja.

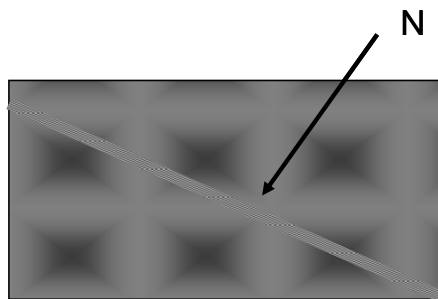


Figura 1. Esquemización de la relación de la apertura de las fracturas con el esfuerzo normal.

Continuando con esta misma idea, Holt [15] presenta un análisis de laboratorio en el que trata de comprender el comportamiento de un sistema fracturado. El estudio lo realiza

considerando las variables mecánicas y de flujo similares a las que encuentra en un yacimiento en el Mar del Norte, en donde, como se estableció anteriormente, hay evidencia del impacto de la geomecánica en la productividad. El autor establece una metodología experimental para realizar pruebas que consideren el flujo de fluidos y la mecánica de rocas. Los dos estudios anteriores [14] y [15] manifiestan la dependencia de la permeabilidad en los sistemas fracturados del estado de esfuerzos.

Lorenz [16], en su estudio, muestra como los yacimientos naturalmente fracturados pueden presentar mayor sensibilidad al cambio en el estado de esfuerzos debido quizá a la elasticidad de la roca sometida a cambios bruscos de presión, que a su vez causan cambios en la abertura de los sistemas de fracturas dentro de los macizos rocosos.

Contando con la evidencia de las variaciones de la permeabilidad con el estado de esfuerzos en yacimientos naturalmente fracturados, Chen y Teufel [17] formulan un modelo de flujo de fluidos acoplado a deformación geomecánica para yacimientos de porosidad dual o naturalmente fracturados. Para modelar el fenómeno, Chen y Teufel [17] proponen partir de dos medios continuos, matriz y fractura, cada uno de los cuales tiene propiedades de la roca tales como compresibilidad total, compresibilidad de poro, porosidades y permeabilidades diferentes; concepto de superposición de continuos que fue desarrollado Barenblatt et al. y Warren y Root en sus estudios. Chen y Teufel [17] son los pioneros en el acople de las ecuaciones geomecánicas al flujo de fluidos en estos yacimientos. El concepto de doble porosidad con el que se trabaja, indica que cada medio poroso tiene una presión dada, mientras que los dos medios soportan el campo de esfuerzos al que está sometida la roca. Chen y Teufel [17] plantean la ecuación de flujo de fluidos de forma detallada, partiendo de los tres principios básicos que se establecen siempre que se realiza este tipo de análisis: la conservación de masa para los dos medios y el sólido, la ley de Darcy y la ecuación de estado. Además, plantean de una manera detallada el balance de masa de sólido, que quizá es uno de los parámetros claves en el acople de las ecuaciones de flujo de fluidos con la geomecánica.

Las ecuaciones del modelo geomecánico parten de la teoría poroelástica de Biot, cuyos principios básicos se obtienen mediante las ecuaciones de equilibrio de esfuerzo, las relaciones desplazamiento - deformación y las ecuaciones de esfuerzo - deformación - presión, que se mencionaron anteriormente. En las relaciones anteriores, se debe tener en cuenta las presiones que ejerce el fluido en cada uno de los medios porosos que intervienen en el proceso, es decir en la matriz y en la fractura. Para encontrar la deformación volumétrica, es además necesario considerar el parámetro de Biot para cada uno de los medios que representa la cantidad de presión que aporta cada medio poroso.

Más adelante, los autores Chen y Teufel [18] realizan una comparación de los modelos existentes hasta ese momento que consideran un acople del flujo de fluidos y la deformación mecánica de la roca en yacimientos de porosidad dual. Chen y Teufel [18] se fundamentan en tres principios para hacer el análisis comparativo los cuales son: (i) consideraciones del cambio en volumen dentro del concepto de porosidad dual (ii) interpretación física de los parámetros del modelo y, (iii) obtención, a partir de las aproximaciones de porosidad dual, de un modelo para porosidad simple.

Los modelos a comparar son cinco. El modelo presentado por Duguid y Lee y, Huyakorn y Pinder, según Chen y Teufel [18] este modelo considera el esfuerzo de confinamiento

constante, ya que no adopta de forma explícita la compresibilidad de la roca. Probablemente, este modelo es el más simple de los que acoplan el flujo de fluidos y la deformación de la roca, sin embargo, físicamente no es totalmente riguroso.

El segundo modelo que analizan Chen y Teufel [18] es el de Wilson y Aifantis, en el cual la descripción del modelo presenta algunas inconsistencias, principalmente, en los cambios que tienen lugar en la porosidad del sistema.

El tercer modelo es el propuesto por Valliappan and Khalili – Naghadeh, modelo que Chen y Teufel [18] consideran contradice la intención de los autores de estudiar los cambios en el volumen total del sistema ya que adoptan la fase sólida como incompresible.

El cuarto modelo es el presentado por Bai et al, el cual según Chen y Teufel [18], no puede conseguir un modelo para porosidad simple; además, para Chen y Teufel [18], el modelo de Bai *et al* presenta supuestos que no se deben considerar como que la compresibilidad de un yacimiento naturalmente fracturado es igual a la compresibilidad de un yacimiento homogéneo.

El quinto modelo es el presentado por Chen y Teufel [17] y mencionado anteriormente. Chen y Teufel [18] consideran, luego del estudio comparativo, que el modelo que ellos presentan es el más consistente y tiene menos debilidades.

Luego del trabajo anterior, Bagheri y Settari [19] presentan una visión de la definición del problema físico y matemático, planteando algo similar a una superposición de continuos en donde, el primer medio es la red de fracturas y el segundo es la roca intacta o la roca matriz, y un tercer continuo sería los dos unidos. La deformación total de la roca es el resultado de la deformación de la matriz intacta y la deformación de la fractura. Además de lo anterior, Bagheri y Settari [19] estudian y establecen un método de solución. Se sugiere un método de iteración acoplado como se ha planteado anteriormente. La ventaja del método es meramente computacional, ya que los cálculos totalmente acoplados son muy “tiempo - consumientes”, mientras se podría obviar algunos pasos haciendo un acople de tipo iterativo. El método consiste en actualizar los valores de la porosidad y la permeabilidad cuando se encuentra la convergencia en el paso que considera el módulo geomecánico, mientras el acople total actualiza estos valores para cada iteración que se hace.

2.3. Simulación de Flujo de Fluidos Composicionales

Se ha encontrado que los fluidos presentes en los yacimientos no siempre tienen el comportamiento ideal de Black Oil o de Gas Seco. En muchas ocasiones, se tienen fluidos cerca al punto crítico donde cualquier cambio en la presión o la temperatura producen transformaciones de fase [20]. Los yacimientos de gas condensado son un ejemplo claro de este comportamiento no – ideal, siendo más complejos en el manejo, planeación y análisis. Un gas condensado es un gas compuesto principalmente de metano y de una cantidad considerable de hidrocarburos pesados. En términos coloquiales, se podría decir que es un gas con un líquido disuelto que se encuentra a condiciones iniciales en una fase simple, y a medida que la presión del yacimiento disminuye por la producción de fluidos, ocurre la condensación de líquidos. Por las

razones anteriores, es necesario considerar el análisis composicional de los fluidos, en donde se tiene en cuenta el cambio porcentual en cada una de las fases de cada elemento presente en el hidrocarburo con el cambio en las condiciones del yacimiento.

Para un análisis composicional es necesario hacer un estudio del comportamiento de fases por medio de ecuaciones cúbicas de estado, que permitan relacionar la presión, el volumen y la temperatura, si se conocen las propiedades críticas y los factores acéntricos de cada uno de los componentes del sistema. En este análisis composicional es preciso establecer el equilibrio de fases a cada periodo de tiempo, en el que ocurre un cambio de presión debido a la inyección y/o producción de fluidos dentro del yacimiento.

Entre los primeros trabajos realizados para describir el flujo de fluidos de esta clase de yacimientos se cuenta con el trabajo de O'Dell y Miller [21], quienes presentan una función pseudo presión para trabajar con los fluidos condensados. Más adelante, Fussel [22] utilizó la simulación composicional para tratar de predecir correctamente las saturaciones del fluido, ya que la propuesta de O'Dell y Miller [21] sólo podía ser usada para la región monofásica de gas.

Más adelante, Sonier, Besset y Ombret [23] proponen un método implícito para dar solución al problema, en donde se cuenta con tres fases fluyendo. Sonier, Besset y Ombret [23] tratan de modelar problemas de conificación y los efectos capilares, que ocurren cuando se tiene un yacimiento de estas condiciones.

Nghiem *et al* [24], en su estudio, proponen un método de solución en el cual la presión es una variable implícita y la saturación es una variable explícita; este método es conocido como IMPES y se desarrolla a partir del balance de materiales de cada uno de los componentes del sistema con la ecuación de estado propuesta por Peng Robinson. Se ha demostrado que este método es aplicable solamente en las áreas cercanas al pozo en flujos de velocidades altas.

Otros métodos se han propuesto para dar solución al problema de flujo de fluidos composicional como el método de sustituciones sucesivas (SSI) y el método de segundo orden de Newton – Raphson, destacando el de mínima variable (MVNR). Estos algoritmos presentan ventajas y desventajas. Entre sus desventajas, se ha encontrado que a una cierta cantidad de iteraciones no se encuentra fácilmente la convergencia, y este problema es aún más evidente en la región cercana al punto crítico.

Abhvani y Beaumont [25] plantean un método combinado SSI – MVNR, en donde se inicia con el método SSI hasta que la solución sea relativamente buena, y luego, se continúa con MVNR hasta que se alcanza la convergencia del sistema.

Whitson and Brulè [26] realizan un estudio detallado de cómo se debe hacer el análisis del comportamiento de fases, y plantean los algoritmos que deben ser usados para esta finalidad. Además, describen en forma detallada el criterio del plano tangente utilizado para el cálculo de equilibrio de fases, en donde se debe asegurar que las fugacidades de cada uno de los componentes del sistema en cada una de las fases debe ser igual, ya que al existir una igualdad de estos valores en cada una de las fases se podría demostrar que el sistema presenta la mínima energía de Gibbs, y por tanto el sistema está en equilibrio.

El acople de los modelos que predicen los cambios de la composición del fluido y los modelos utilizados para establecer el cambio en el estado de esfuerzos ha sido muy poco desarrollado. Se han encontrado trabajos para fluidos multifásicos acoplados a deformación geomecánica como los de Gutiérrez, Lewis and Master [27], quienes consideran que el problema debe ser tratado de forma totalmente acoplada, debido a que en otras circunstancias, los resultados no representarían lo que sucede realmente en el yacimiento, esto es especialmente importante en yacimientos que se dice son sensibles a esfuerzos. La manera de hacer el acople total del sistema es mediante la ecuación de flujo de fluidos, a la cual se llega con un balance de masa para cada uno de los componentes en función de la saturación de cada uno de los fluidos, la presión capilar y la viscosidad. La ecuación de difusividad queda escrita en función de las variables del fluido y los parámetros geomecánicos. Estos últimos, a su vez, están relacionados con el módulo de cizalla, el módulo total, la relación de Poisson y el módulo de Young.

Maya y Benavides [28] muestran como acoplar las ecuaciones de flujo composicional y las de deformación geomecánica en coordenadas cilíndricas, lo cual implica tener en cuenta solo el área de flujo alrededor del pozo y no considera todos los efectos geomecánicos en el yacimiento. El simulador propuesto por Benavides *et al* [29] es para un yacimiento homogéneo en donde no se consideran las fracturas naturales, donde se cree hay una mayor sensibilidad a esfuerzos y por tanto mayor deformación de la roca.

Pan *et al* [30] desarrollaron un simulador en coordenadas cartesianas para flujo composicional y acoplan el flujo de fluidos con un módulo geomecánico. El trabajo Pan *et al* [30] cumple con objetivos similares a los que apunta el desarrollo de este trabajo. De acuerdo a los planteamientos de los autores, las variables desconocidas son:

Principales: $2 \cdot \text{número de componentes} + 5$

Secundarias:

- Saturaciones
- Fracciones molares del componente i
- Presión
- Presión capilar
- Esfuerzo efectivo promedio
- Deformación

3. MODELO MATEMÁTICO PARA EL FLUJO DE FLUIDOS COMPOSICIONALES ACOPLADO A DEFORMACIÓN GEOMECÁNICA EN YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS

Las ecuaciones utilizadas para describir el comportamiento de un yacimiento naturalmente fracturado que presenta deformación del macizo poroso se desarrollan en coordenadas cartesianas, debido a que éstas representan la geometría que más se ajusta a la simulación de sistemas de gran escala [31].

Con la finalidad de estudiar los efectos acoplados del flujo de fluidos composicional y de la geomecánica en yacimientos que presentan sensibilidad a los esfuerzos, se debe tener en cuenta las presiones de cada una de las fases (aceite y gas) cuando la presión del yacimiento se encuentra por debajo de la presión de saturación. Además, se deben seguir los conceptos de doble porosidad y superposición de continuos.

Los modelos diferenciales que se deben desarrollar son los siguientes:

- Modelo Composicional de Flujo de Fluidos.
- Modelo de Deformación Geomecánica
- Modelo para el Cálculo de la Presión Capilar
- Modelo para el Cálculo de las Permeabilidades Relativas
- Modelo para el Cálculo de las Porosidades de Matriz y Fractura
- Modelo para el Cálculo del Coeficiente de Flujo Interporoso.

3.1. Modelo Composicional de Flujo de Fluidos

Los fluidos de yacimiento son una mezcla de una cantidad considerable de compuestos de carbono e hidrógeno (hidrocarburos) y otras sustancias conocidas como contaminantes como el CO₂ y el N₂. El comportamiento de las mezclas de hidrocarburos a condiciones de yacimiento y a condiciones de superficie está determinado por la composición química, y la temperatura y la presión a la que se encuentren los fluidos [32]. Por esta razón, es necesario construir un modelo de fluidos robusto que pueda ser empleado para la simulación del yacimiento.

Este modelo está constituido por siete relaciones básicas:

- Conservación de masa de fluidos
- Conservación de masa de sólido
- Ley de Darcy
- Ecuaciones de Compresibilidad de Zimmerman
- Ecuación de Estado
- Ecuación de Presión
- Equilibrio de Fases y Ecuación de Composición

3.1.1. Conservación de Masa de Fluidos:

La ecuación de balance de masa para un elemento diferencial de volumen en coordenadas cartesianas, en un fluido al que se le realiza un análisis composicional tiene la forma de la ecuación (3.1)

$$\begin{aligned} & \left(N^\circ \text{ moles que entran de } i \right)_{\Delta t} - \left(N^\circ \text{ moles que salen de } i \right)_{\Delta t} \pm \left(\begin{array}{l} N^\circ \text{ moles que entran / salen} \\ \text{fuentes / sumideros de } i \end{array} \right)_{\Delta t} \quad (3.1) \\ & = \left(N^\circ \text{ moles por acumulacion y / o agotamiento de } i \right)_{\Delta t} \end{aligned}$$

Considerando las definiciones de fracción molar, densidad, peso molecular y velocidad volumétrica (Ver Anexo 1), se escribe la ecuación de continuidad en la matriz para cada uno de los componentes i del sistema:

$$\begin{aligned} & -\Delta \left(x_{mi} \frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} u_{mox} \phi_m \right) \Delta y \Delta z \Delta t - \Delta \left(x_{mi} \frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} u_{moy} \phi_m \right) \Delta x \Delta z \Delta t - \\ & \Delta \left(x_{mi} \frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} u_{moz} \phi_m \right) \Delta x \Delta y \Delta t - \Delta \left(y_{mi} \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} u_{mgx} \phi_m \right) \Delta y \Delta z \Delta t - \Delta \left(y_{mi} \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} u_{mgy} \phi_m \right) \Delta x \Delta z \Delta t \\ & - \Delta \left(y_{mi} \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} u_{mgz} \phi_m \right) \Delta x \Delta y \Delta t = \pm \tilde{q}_{mi} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t + \left[\left(x_{mi} \frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} \phi_m + y_{mi} \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \phi_m \right) V_T \right]_{t+\Delta t} - \\ & \left[\left(x_{mi} \frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} \phi_m + y_{mi} \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \phi_m \right) V_T \right]_{\Delta t} \quad (3.2) \end{aligned}$$

Dividiendo por $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$ y despreciando los términos infinitesimales, y teniendo presente que $q_{mi} > 0$ cuando se están produciendo fluidos y $q_{mi} < 0$ cuando se inyectan fluidos al yacimiento, la expresión que se obtiene para la matriz es:

$$-\nabla \cdot \left(x_{mi} \frac{\rho_{mo} \phi_m}{M_{mo}} \vec{u}_{mo} \right) - \nabla \cdot \left(y_{mi} \frac{\rho_{mg} \phi_m}{M_{mg}} \vec{u}_{mg} \right) = \tilde{q}_{mi} + \frac{1}{V_T} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(x_{mi} \frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} \phi_m + y_{mi} \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \phi_m \right) V_T \right] + T \quad (3.3)$$

Si siguiendo el mismo procedimiento, se llega a la ecuación de Balance de Masa para la Fractura:

$$-\nabla \cdot \left(x_{fi} \frac{\rho_{fo} \phi_f}{M_{fo}} \vec{u}_{fo} \right) - \nabla \cdot \left(y_{fi} \frac{\rho_{fg} \phi_f}{M_{fg}} \vec{u}_{fg} \right) = \tilde{q}_{fi} + \frac{1}{V_T} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(x_{fi} \frac{\rho_{fo}}{M_{fo}} S_{fo} \phi_f + y_{fi} \frac{\rho_{fg}}{M_{fg}} S_{fg} \phi_f \right) V_T \right] - T \quad (3.4)$$

En las ecuaciones (3.3) y (3.4) ρ es la densidad, ϕ es la porosidad efectiva, \vec{u} es el vector velocidad, t es tiempo, T es la tasa de transferencia de masa del fluido de los bloques de la matriz a la fractura por unidad de volumen total, q es el término de fuentes / sumideros expresado como tasa másica por unidad de volumen total (la convención es que el signo menos representa una fuente y el signo más representa un sumidero). Los subíndices mo , fo , mg , fg se refieren a las fases de petróleo en la matriz, petróleo en la fractura, gas en la matriz, gas en la fractura, respectivamente. Los símbolos ∇ y $\nabla \cdot$ denotan el operador gradiente y divergencia, respectivamente.

3.1.2. Conservación de Masa de Sólidos

Continuando con el procedimiento para encontrar la ecuación de balance de materiales para el fluido en la matriz y en la fractura, para el sólido se llega a:

$$-\nabla \cdot \left(\frac{\rho_s (1 - \phi_t)}{M_s} \vec{u}_s \right) = \tilde{q}_s + \frac{1}{V_T} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\rho_s (1 - \phi_s)}{M_s} \right) V_T \right] \quad (3.5)$$

Resolviendo el término de la izquierda en la ecuación (3.5) se llega a:

$$-\vec{u}_s \nabla \cdot \left(\frac{\rho_s (1 - \phi_t)}{M_s} \right) - \frac{\rho_s (1 - \phi_t)}{M_s} \nabla \cdot \vec{u}_s = \tilde{q}_s + \frac{1}{V_T} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\rho_s (1 - \phi_s)}{M_s} \right) V_T \right] \quad (3.6)$$

Considerando la definición de la derivada del material como puede observarse en Anexo 1 se presenta la ecuación (3.7)

$$\frac{1}{V_T} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{(1 - \phi_t) \rho_s}{M_s} V_T \right) \right] + \frac{\rho_s (1 - \phi_t)}{M_s} \nabla \cdot \vec{u}_s + \tilde{q}_s = 0 \quad (3.7)$$

Despejando el término $\nabla \cdot \vec{u}_s$, tomando el peso molecular del sólido constante y haciendo las simplificaciones necesarias se obtiene la ecuación (3.8)

$$\nabla \cdot \vec{u}_s = - \frac{\tilde{q}_s M_s}{\rho_s (1 - \phi_t)} \quad (3.8)$$

Si no hay flujo de sólidos entonces $q_s = 0$, por lo tanto $\nabla \cdot \vec{u}_s = 0$

3.1.3. Ley de Darcy

Dado que el sólido puede estar en movimiento y teniendo presente la ley de Darcy, la velocidad relativa del petróleo de la matriz con respecto a la del sólido puede escribirse como:

$$\vec{u}_{mo} \phi_m = \vec{u}_s \phi_m - \frac{\vec{k}_m k_{rmo}}{\mu_{mo}} \nabla P_{mo} \quad (3.9)$$

Para el gas en la matriz:

$$\vec{u}_{mg} \phi_m = \vec{u}_s \phi_m - \frac{\vec{k}_m k_{rmg}}{\mu_{mg}} \nabla P_{mg} \quad (3.10)$$

En las ecuaciones (3.9) y (3.10) \vec{u}_s es el vector velocidad del sólido, \vec{u}_{mo} , \vec{u}_{mg} , son los vectores velocidad del aceite y del gas en la matriz. \vec{k}_m , es el tensor de permeabilidad absoluta de matriz. k_{rmo} y k_{rmg} , son las permeabilidades relativas de cada fase dentro de la matriz. P_{mo} y P_{mg} son las presiones en cada fase en la matriz. En forma similar, se puede obtener para la fractura (Ver Anexo 1). Las definiciones dadas por las ecuaciones (3.9) y (3.10) permiten obtener la ecuación (3.3) en términos de permeabilidades y de presión como puede observarse en la ecuación (3.11)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(x_{mi} \frac{\rho_{mo} \vec{k}_m k_{rmo}}{M_{mo} \mu_{mo}} \nabla P_{mo} \right) + \nabla \cdot \left(y_{mi} \frac{\rho_{mg} \vec{k}_m k_{rmg}}{M_{mg} \mu_{mg}} \nabla P_{mg} \right) = \nabla \cdot \left(x_{mi} \frac{\rho_{mo} \phi_m}{M_{mo}} \vec{u}_s \right) + \nabla \cdot \left(y_{mi} \frac{\rho_{mg} \phi_m}{M_{mg}} \vec{u}_s \right) + \tilde{q}_{mi} \\ + \frac{1}{V_T} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(x_{mi} \frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} \phi_m + y_{mi} \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \phi_m \right) V_T \right] + T \end{aligned} \quad (3.11)$$

Teniendo en cuenta los efectos capilares por considerar dos fases dentro del medio poroso, se introduce la relación entre la presión de petróleo y la presión del gas en la ecuación (3.12)

Para la matriz:

$$P_{cmog} = P_{mg} - P_{mo} \quad (3.12)$$

Llevando la definición de presión capilar a la ecuación (3.11) y resolviendo en esta misma ecuación (3.11) para el primer y el segundo término del lado derecho y considerando que el divergente de la velocidad de los sólidos es igual a cero la ecuación queda expresada como:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[\left(x_{mi} \frac{\rho_{mo} \vec{k}_m k_{rmo}}{M_{mo} \mu_{mo}} + y_{mi} \frac{\rho_{mg} \vec{k}_m k_{rmg}}{M_{mg} \mu_{mg}} \right) \nabla P_{mg} \right] = \vec{u}_s \cdot \nabla \cdot \left(x_{mi} \frac{\rho_{mo} \phi_m}{M_{mo}} + y_{mi} \frac{\rho_{mg} \phi_m}{M_{mg}} \right) + \tilde{q}_{mi} \\ + \nabla \cdot \left(x_{mi} \frac{\rho_{mo} \vec{k}_m k_{rmo}}{M_{mo} \mu_{mo}} \nabla P_{cmog} \right) + \frac{1}{V_T} \frac{\partial}{\partial t} \left[V_T \phi_m \left(x_{mi} \frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + y_{mi} \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right) \right] + T \end{aligned} \quad (3.13)$$

De igual manera se obtiene la ecuación de la fractura como se puede observar en el Anexo 1.

Recordando la definición de volumen poroso la ecuación (3.13) puede escribirse como

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot \left[\left(x_{mi} \frac{\rho_{mo} \bar{k}_m k_{rmo}}{M_{mo} \mu_{mo}} + y_{mi} \frac{\rho_{mg} \bar{k}_m k_{rmg}}{M_{mg} \mu_{mg}} \right) \nabla P_{mg} \right] = \tilde{q}_{mi} - \nabla \cdot \left(x_{mi} \frac{\rho_{mo} \phi_m}{M_{mo}} + y_{mi} \frac{\rho_{mg} \phi_m}{M_{mg}} \right) \frac{\partial u}{\partial t} \\
& + \nabla \cdot \left(x_{mi} \frac{\rho_{mo} \bar{k}_m k_{rmo}}{M_{mo} \mu_{mo}} \nabla P_{cno} \right) + \frac{\phi_m}{V_{pm}} \left(x_{mi} \frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + y_{mi} \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right) \frac{\partial}{\partial t} (V_{pm}) \\
& + \phi_m \frac{\partial}{\partial t} \left(x_{mi} \frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + y_{mi} \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right) + T
\end{aligned} \tag{3.14}$$

3.1.4. Ecuación de Compresibilidad de Zimmerman et al [33].

Para describir los cambios tanto en poros de matriz como en poros de fracturas, se tiene para la matriz:

$$-\frac{dV_{pm}}{V_{pm}} = c_{pcm} d\bar{\sigma}_p^d = c_{pcm} (d\sigma_m - \beta_{pm} dP_m - \beta_{pf} dP_f) \tag{3.15}$$

Debido a que el flujo que se está considerando no es monofásico, se debe contar con una relación más general como la que se puede apreciar en la ecuación (3.16)

$$-\frac{dV_{pm}}{V_{pm}} = c_{pcm} d\bar{\sigma}_p^d = c_{pcm} (d\sigma_m - \beta_{pm} d\Omega_m - \beta_{pf} d\Omega_f) \tag{3.16}$$

Donde Ω_m y Ω_f dependen de la presión del gas y de la presión capilar.

$$\Omega_m = P_{mg} - \psi_m (P_{mcog}, S_{mo})$$

Dependiendo de cómo se desee hacer el cálculo de la presión en el medio poroso, se obtiene diferentes formas para ψ_m y ψ_f . Se presentan los siguientes casos:

Caso 1:

$$\Omega_m = P_{mg}, \text{ es decir } \psi_m = 0$$

Caso 2:

$$\Omega_m = P_{mo}, \text{ es decir } \psi_m = P_{mcog}$$

Caso 3:

$$\Omega_m = S_{mo} P_{mo} + S_{mg} P_{mg}$$

$$\Omega_m = (S_{mo} + S_{mg}) P_{mg} - S_{mo} P_{mcog}$$

Caso 4:

$$\Omega_m = \frac{1}{2}(P_{mo} + P_{mg})$$

$$\Omega_m = \frac{1}{2}(P_{mg} - P_{mcog} + P_{mg})$$

$$\Omega_m = P_{mg} - \frac{1}{2}P_{mcog}, \text{ es decir } \psi_m = \frac{1}{2}P_{mcog}$$

Las compresibilidades c_{pcm} y c_{pcf} se pueden obtener como se indica en las ecuaciones (3.17) y (3.18) respectivamente:

$$c_{pcm} = \frac{c_{bc}^s - c_s^s}{\phi_m} = \frac{\phi_t}{\phi_m} c_{pc}^s = \frac{\phi_t}{\phi_m} c_{pc}^d = \frac{\phi_t}{\phi_m} \frac{c_{bc}^s - c_s^s}{c_{bc}^d - c_s^d} \quad (3.17)$$

$$c_{pcf} = \frac{\phi_t c_{pc}^d - \phi_m c_{pcm}}{\phi_f} = \frac{\phi_t}{\phi_f} (c_{pc}^d - c_{pc}^s) \quad (3.18)$$

Reemplazando la ecuación (3.15) en (3.14) y teniendo en cuenta la ecuación (3.17) se llega a:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[\left(x_{mi} \frac{\rho_{mo} \bar{k}_m k_{rmo}}{M_{mo} \mu_{mo}} + y_{mi} \frac{\rho_{mg} \bar{k}_m k_{rmg}}{M_{mg} \mu_{mg}} \right) \nabla P_{mg} \right] &= \tilde{q}_{mi} - \nabla \cdot \left(x_{mi} \frac{\rho_{mo} \phi_m}{M_{mo}} + y_{mi} \frac{\rho_{mg} \phi_m}{M_{mg}} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \\ \nabla \cdot \left(x_{mi} \frac{\rho_{mo} \bar{k}_m k_{rmo}}{M_{mo} \mu_{mo}} \nabla P_{cmog} \right) &- \phi_m \left(x_{mi} \frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + y_{mi} \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right) c_{pcm} \frac{\partial \sigma_m}{\partial t} \\ + \phi_m \left(x_{mi} \frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + y_{mi} \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right) &c_{pcm} \beta_{pm} \frac{\partial P_{mg}}{\partial t} - \phi_m \left(x_{mi} \frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + y_{mi} \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right) c_{pcm} \beta_{pm} \frac{\partial \psi_m}{\partial t} \\ + \phi_m \left(x_{mi} \frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + y_{mi} \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right) &c_{pcm} \beta_{pf} \frac{\partial P_{fg}}{\partial t} - \phi_m \left(x_{mi} \frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + y_{mi} \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right) c_{pcm} \beta_{pf} \frac{\partial \psi_f}{\partial t} \\ + \phi_m \frac{\partial}{\partial t} \left(x_{mi} \frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + y_{mi} \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right) &+ T \end{aligned} \quad (3.19)$$

Para la fractura se puede obtener una ecuación similar como se puede ver en el Anexo 1.

3.1.5. Ecuación de Estado

Una ecuación de estado es una relación entre presión, temperatura y volumen, que permite estudiar el comportamiento de una sustancia cuando se somete a un cambio en cualquiera de las variables anteriores. Los fluidos de yacimiento, además de estar sometidos a cambios de presión principalmente, son mezclas de varios componentes. Razones como las anteriores justifican la necesidad de hacer un cálculo de fases, partiendo de una ecuación cúbica de estado, en este caso, la ecuación de estado es la propuesta por Peng - Robinson de tres parámetros:

$$P = \frac{RT}{\tilde{v} - b} - \frac{a}{\tilde{v}(\tilde{v} + b) + b(\tilde{v} - b)}$$

Partiendo de los resultados que se obtienen al realizar un adecuado equilibrio de fases, se puede obtener las siguientes expresiones para la compresibilidad de fluido en matriz y fractura respectivamente:

Matriz:

$$C_{mo} \frac{\partial P_{mo}}{\partial t} = \frac{1}{\rho_{mo}} \frac{\partial \rho_{mo}}{\partial t} \quad C_{mg} \frac{\partial P_{mg}}{\partial t} = \frac{1}{\rho_{mg}} \frac{\partial \rho_{mg}}{\partial t}$$

Fractura:

$$C_{fo} \frac{\partial P_{fo}}{\partial t} = \frac{1}{\rho_{fo}} \frac{\partial \rho_{fo}}{\partial t} \quad C_{fg} \frac{\partial P_{fg}}{\partial t} = \frac{1}{\rho_{fg}} \frac{\partial \rho_{fg}}{\partial t}$$

Considerando las relaciones anteriores y haciendo los artificios necesarios se consigue la ecuación (3.20):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[\left(x_{mi} \frac{\rho_{mo} \bar{k}_m k_{rmo}}{M_{mo} \mu_{mo}} + y_{mi} \frac{\rho_{mg} \bar{k}_m k_{rmg}}{M_{mg} \mu_{mg}} \right) \nabla P_{mg} \right] &= \tilde{q}_{mi} - \nabla \cdot \left(x_{mi} \frac{\rho_{mo} \phi_m}{M_{mo}} + y_{mi} \frac{\rho_{mg} \phi_m}{M_{mg}} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \\ \nabla \cdot \left(x_{mi} \frac{\rho_{mo} \bar{k}_m k_{rmo}}{M_{mo} \mu_{mo}} \nabla P_{cmog} \right) &- \phi_m \left(x_{mi} \frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + y_{mi} \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right) c_{pcm} \frac{\partial \sigma_m}{\partial t} \\ - \phi_m \left(x_{mi} \frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + y_{mi} \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right) c_{pcm} \beta_{pm} \frac{\partial \psi_m}{\partial t} &+ \phi_m \left(x_{mi} \frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + y_{mi} \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right) c_{pcm} \beta_{pf} \frac{\partial P_{fg}}{\partial t} \\ - \phi_m \left(x_{mi} \frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + y_{mi} \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right) c_{pcm} \beta_{pf} \frac{\partial \psi_f}{\partial t} &+ \phi_m \left[\rho_{mo} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x_{mi} S_{mo}}{M_{mo}} \right) + \rho_{mg} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{y_{mi} S_{mg}}{M_{mg}} \right) \right] \\ - \frac{x_{mi} S_{mo} \rho_{mo} \phi_m}{M_{mo}} C_{mo} \frac{\partial P_{comg}}{\partial t} &+ \frac{\phi_m x_{mi} S_{mo} \rho_{mo}}{M_{mo}} [C_{mo} + c_{pcm} \beta_{pm}] \frac{\partial P_{mg}}{\partial t} + \frac{\phi_m y_{mi} \rho_{mg} S_{mg}}{M_{mg}} [C_{mg} + c_{pcm} \beta_{pm}] \frac{\partial P_{mg}}{\partial t} \\ + T & \end{aligned} \quad (3.20a)$$

Seguendo el mismo procedimiento para la fractura, se llega a la siguiente ecuación de flujo de fluidos para fractura:

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot \left[\left(x_{f_i} \frac{\rho_{fo} \bar{k}_f k_{rfo}}{M_{fo} \mu_{fo}} + y_{f_i} \frac{\rho_{fg} \bar{k}_f k_{rfg}}{M_{fg} \mu_{fg}} \right) \nabla P_{fg} \right] = \tilde{q}_{f_i} - \nabla \cdot \left(x_{f_i} \frac{\rho_{fo} \phi_f}{M_{fo}} + y_{f_i} \frac{\rho_{fg} \phi_f}{M_{fg}} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \\
& \nabla \cdot \left(x_{f_i} \frac{\rho_{fo} \bar{k}_f k_{rfo}}{M_{fo} \mu_{fo}} \nabla P_{cfog} \right) - \phi_f \left(x_{f_i} \frac{\rho_{fo}}{M_{fo}} S_{fo} + y_{f_i} \frac{\rho_{fg}}{M_{fg}} S_{fg} \right) c_{pcf} \frac{\partial \sigma_f}{\partial t} \\
& - \phi_f \left(x_{f_i} \frac{\rho_{fo}}{M_{fo}} S_{fo} + y_{f_i} \frac{\rho_{fg}}{M_{fg}} S_{fg} \right) c_{pcf} \beta_{pm} \frac{\partial \psi_m}{\partial t} + \phi_f \left(x_{f_i} \frac{\rho_{fo}}{M_{fo}} S_{fo} + y_{f_i} \frac{\rho_{fg}}{M_{fg}} S_{fg} \right) c_{pcf} \beta_{pm} \frac{\partial P_{mg}}{\partial t} \\
& - \phi_f \left(x_{f_i} \frac{\rho_{fo}}{M_{fo}} S_{fo} + y_{f_i} \frac{\rho_{fg}}{M_{fg}} S_{fg} \right) c_{pcf} \beta_{pf} \frac{\partial \psi_f}{\partial t} + \phi_f \left[\rho_{fo} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x_{f_i} S_{fo}}{M_{fo}} \right) + \rho_{fg} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{y_{f_i} S_{fg}}{M_{fg}} \right) \right] \\
& - \frac{x_{f_i} S_{fo} \rho_{fo} \phi_f}{M_{fo}} C_{fo} \frac{\partial P_{cfog}}{\partial t} + \frac{\phi_f x_{f_i} S_{fo} \rho_{fo}}{M_{fo}} [C_{fo} + c_{pcf} \beta_{pf}] \frac{\partial P_{fg}}{\partial t} + \frac{\phi_f y_{f_i} \rho_{fg} S_{fg}}{M_{fg}} [C_{fg} + c_{pcf} \beta_{pf}] \frac{\partial P_{fg}}{\partial t} \\
& - T
\end{aligned} \tag{3.20b}$$

3.1.6. Ecuación de Presión

La ecuación de presión se obtiene sumando la ecuación (3.20a) y (3.20b) sobre la totalidad de los componentes de la mezcla, y teniendo en cuenta que:

$$\sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N y_i = 1$$

Para la matriz:

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot \left[\left(\frac{\rho_{mo} \bar{k}_m k_{rmo}}{M_{mo} \mu_{mo}} + \frac{\rho_{mg} \bar{k}_m k_{rmg}}{M_{mg} \mu_{mg}} \right) \nabla P_{mg} \right] = \tilde{q}_T - \nabla \cdot \left(\frac{\rho_{mo} \phi_m}{M_{mo}} + \frac{\rho_{mg} \phi_m}{M_{mg}} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{\rho_{mo} \bar{k}_m k_{rmo}}{M_{mo} \mu_{mo}} \nabla P_{cmog} \right) \\
& - \phi_m \left(\frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right) c_{pcm} \frac{\partial \sigma_m}{\partial t} - \phi_m \left(\frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right) c_{pcm} \beta_{pm} \frac{\partial \psi_m}{\partial t} \\
& + \phi_m \left(\frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right) c_{pcm} \beta_{pf} \frac{\partial P_{fg}}{\partial t} - \phi_m \left(\frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right) c_{pcm} \beta_{pf} \frac{\partial \psi_f}{\partial t} \\
& + \phi_m \left[\rho_{mo} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_{mo}}{M_{mo}} \right) + \rho_{mg} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_{mg}}{M_{mg}} \right) \right] - \frac{S_{mo} \rho_{mo} \phi_m}{M_{mo}} C_{mo} \frac{\partial P_{cmog}}{\partial t} + \frac{\phi_m S_{mo} \rho_{mo}}{M_{mo}} [C_{mo} + c_{pcm} \beta_{pm}] \frac{\partial P_{mg}}{\partial t} \\
& + \frac{\phi_m \rho_{mg} S_{mg}}{M_{mg}} [C_{mg} + c_{pcm} \beta_{pm}] \frac{\partial P_{mg}}{\partial t} + T
\end{aligned} \tag{3.21a}$$

$$\text{Donde } \tilde{q}_T = \sum_{i=1}^N \tilde{q}_i$$

Para la Fractura:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[\left(\frac{\rho_{fo} \bar{k}_f k_{rfo}}{M_{fo} \mu_{fo}} + \frac{\rho_{fg} \bar{k}_f k_{rfg}}{M_{fg} \mu_{fg}} \right) \nabla P_{fg} \right] &= \tilde{q}_T - \nabla \cdot \left(\frac{\rho_{fo} \phi_f}{M_{fo}} + \frac{\rho_{fg} \phi_f}{M_{fg}} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{\rho_{fo} \bar{k}_f k_{rfo}}{M_{fo} \mu_{fo}} \nabla P_{cfog} \right) \\ - \phi_f \left(\frac{\rho_{fo}}{M_{fo}} S_{fo} + \frac{\rho_{fg}}{M_{fg}} S_{fg} \right) c_{pcf} \frac{\partial \sigma_m}{\partial t} + \phi_f \left(\frac{\rho_{fo}}{M_{fo}} S_{fo} + \frac{\rho_{fg}}{M_{fg}} S_{fg} \right) c_{pcf} \beta_{pm} \frac{\partial P_{mg}}{\partial t} \\ - \phi_f \left(\frac{\rho_{fo}}{M_{fo}} S_{fo} + \frac{\rho_{fg}}{M_{fg}} S_{fg} \right) c_{pcf} \beta_{pm} \frac{\partial \psi_m}{\partial t} - \phi_f \left(\frac{\rho_{fo}}{M_{fo}} S_{fo} + \frac{\rho_{fg}}{M_{fg}} S_{fg} \right) c_{pcf} \beta_{pf} \frac{\partial \psi_f}{\partial t} \\ + \phi_f \left[\rho_{fo} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_{fo}}{M_{fo}} \right) + \rho_{fg} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_{fg}}{M_{fg}} \right) \right] - \frac{S_{fo} \rho_{fo} \phi_f}{M_{fo}} C_{fo} \frac{\partial P_{cfog}}{\partial t} + \frac{\phi_f S_{fo} \rho_{fo}}{M_{fo}} [C_{fo} + c_{pcf} \beta_{pf}] \frac{\partial P_{fg}}{\partial t} \\ + \frac{\phi_f \rho_{fg} S_{fg}}{M_{fg}} [C_{fg} + c_{pcf} \beta_{pf}] \frac{\partial P_{fg}}{\partial t} - T \end{aligned} \quad (3.21b)$$

3.1.7. Equilibrio líquido – vapor y Ecuación de Composición

Para calcular la composición del fluido, en cualquier lugar del yacimiento y en cualquier tiempo deseado, se utiliza la ecuación de composición. Esta ecuación se encuentra haciendo un cambio de variables, teniendo presente los fundamentos de las relaciones de equilibrio líquido – vapor. Desde estas bases puede demostrarse que:

$$z_{mi} = L_m x_{mi} + V_m y_{mi} \quad (3.22)$$

Donde z_{mi} es la fracción molar del componente i en la mezcla. Las fracciones de líquido y vapor se definen de la siguiente manera:

$$L_m = \frac{\frac{\rho_{mo} S_{mo}}{M_{mo}}}{\frac{\rho_{mo} S_{mo}}{M_{mo}} + \frac{\rho_{mg} S_{mg}}{M_{mg}}} \quad \text{y} \quad V_m = \frac{\frac{\rho_{mg} S_{mg}}{M_{mg}}}{\frac{\rho_{mo} S_{mo}}{M_{mo}} + \frac{\rho_{mg} S_{mg}}{M_{mg}}}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación (3.22) se llega a:

$$z_{mi} \left(\frac{\rho_{mo} S_{mo}}{M_{mo}} + \frac{\rho_{mg} S_{mg}}{M_{mg}} \right) = x_{mi} \frac{\rho_{mo} S_{mo}}{M_{mo}} + y_{mi} \frac{\rho_{mg} S_{mg}}{M_{mg}} \quad (3.23)$$

Con la relación (3.23) se obtiene la ecuación de flujo de fluidos para la matriz que se presenta:

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot \left[\left(x_{mi} \frac{\rho_{mo} \bar{k}_m k_{rmo}}{M_{mo} \mu_{mo}} + y_{mi} \frac{\rho_{mg} \bar{k}_m k_{rmg}}{M_{mg} \mu_{mg}} \right) \nabla P_{mg} \right] = \tilde{q}_{mi} - \nabla \cdot \left(x_{mi} \frac{\rho_{mo} \phi_m}{M_{mo}} + y_{mi} \frac{\rho_{mg} \phi_m}{M_{mg}} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \\
& \nabla \cdot \left(x_{mi} \frac{\rho_{mo} \bar{k}_m k_{rmo}}{M_{mo} \mu_{mo}} \nabla P_{cmog} \right) - \phi_m \left(\frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right) z_{mi} c_{pcm} \frac{\partial \sigma_m}{\partial t} \\
& - \phi_m \left(\frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right) z_{mi} c_{pcm} \beta_{pm} \frac{\partial \psi_m}{\partial t} + \phi_m \left(\frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right) z_{mi} c_{pcm} \beta_{pf} \frac{\partial P_{fg}}{\partial t} \\
& - \phi_m \left(\frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right) z_{mi} c_{pcm} \beta_{pf} \frac{\partial \psi_f}{\partial t} + \phi_m \left[\rho_{mo} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x_{mi} S_{mo}}{M_{mo}} \right) + \rho_{mg} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{y_{mi} S_{mg}}{M_{mg}} \right) \right] \\
& - \frac{x_{mi} S_{mo} \rho_{mo} \phi_m}{M_{mo}} C_{mo} \frac{\partial P_{comg}}{\partial t} + \frac{\phi_m x_{mi} S_{mo} \rho_{mo}}{M_{mo}} [C_{mo} + c_{pcm} \beta_{pm}] \frac{\partial P_{mg}}{\partial t} + \frac{\phi_m y_{mi} \rho_{mg} S_{mg}}{M_{mg}} [C_{mg} + c_{pcm} \beta_{pm}] \frac{\partial P_{mg}}{\partial t} \\
& + T
\end{aligned} \tag{3.24}$$

En el Anexo 1 se puede observar el mismo procedimiento para la ecuación de flujo de fluidos en la fractura.

3.2. Modelo de Deformación Geomecánica

El modelo Esfuerzo – Deformación, que se plantea en este trabajo, considera que la fase sólida se comporta como un medio elástico no lineal que sufre pequeñas deformaciones. En los trabajos de Alcalde y Wills [34] y Buitrago [35] se puede verificar el desarrollo mostrado a continuación.

Las relaciones principales en las que se basa este modelo son:

- Relaciones de Equilibrio de Esfuerzos
- Relaciones Deformación – Desplazamiento
- Relaciones Esfuerzo – Deformación - Presión

3.2.1. Relaciones de Equilibrio de Esfuerzos

Para conservar el equilibrio de fuerzas después del cambio en la presión, se deben cumplir las siguientes ecuaciones de equilibrio de esfuerzos:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{3.25}$$

σ_{ij} es la componente ij del tensor de esfuerzos y F_i es la componente del vector de fuerzas de cuerpo que resultan de la fuerza de gravedad.

3.2.2. Relaciones Deformación – Desplazamiento

Las ecuaciones de Deformación – Desplazamiento en forma incremental son:

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} \right) \quad \Delta \varepsilon_{ij} = \Delta \varepsilon_{ji} \quad (3.26)$$

$\Delta \varepsilon_{ij}$ representa la componente ij del tensor de deformaciones, Δu_i es la componente i del vector de desplazamiento.

$$\Delta \varepsilon_v = \Delta \varepsilon_{xx} + \Delta \varepsilon_{yy} + \Delta \varepsilon_{zz} = \frac{\partial \Delta u_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta u_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \quad (3.27)$$

3.2.3. Relaciones Esfuerzo – Deformación – Presión

Para un sistema de doble porosidad, con fluido composicional, como el que se tiene en cuenta en este trabajo, se plantean las siguientes ecuaciones de esfuerzo - deformación - presión, que relacionan los esfuerzos efectivos con las deformaciones:

$$\Delta \sigma'_{ij} = 2G\Delta \varepsilon_{ij} + \lambda \Delta \varepsilon_v \delta_{ij} \quad (3.28)$$

Para un sistema de doble porosidad, con flujo composicional, el esfuerzo efectivo se escribe como:

$$\Delta \sigma'_{ij} = \Delta \sigma_{ij} - \beta_m \Delta \Omega_m \delta_{ij} - \beta_f \Delta \Omega_f \delta_{ij} \quad (3.29)$$

Donde Ω_m y Ω_f dependen de la presión del gas y de la presión capilar como se mencionó anteriormente. Los valores de $\beta_m = \beta_{bm}$, $\beta_f = \beta_{bf}$ se utilizan cuando se pretende calcular un cambio en el volumen total de la matriz y la fractura respectivamente y $\beta_m = \beta_{pm}$, $\beta_f = \beta_{pf}$ cuando el cambio en el volumen se toma en el volumen poroso.

Combinando la ecuación (3.28), y (3.29) se llega a:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + 2G\Delta \varepsilon_{ij} + \lambda \Delta \varepsilon_v \delta_{ij} + \beta_m \Delta \Omega_m \delta_{ij} + \beta_f \Delta \Omega_f \delta_{ij} \quad (3.30)$$

Realizando los remplazos necesarios y agrupando de una manera adecuada, considerando las definiciones de divergente y gradiente, la ecuación en dirección x puede expresarse por:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^0}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^0}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^0}{\partial z} + \nabla \cdot [G \nabla (\Delta u_x)] + \nabla \cdot \left[G \frac{\partial (\Delta u)}{\partial x} \right] + \frac{\partial (\lambda \nabla (\Delta u))}{\partial x} + \frac{\partial (\beta_m \Delta \Omega_m)}{\partial x} + \frac{\partial (\beta_f \Delta \Omega_f)}{\partial x} = 0 \quad (3.31a)$$

En dirección Y:

$$\frac{\partial \sigma_{xy}^0}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^0}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}^0}{\partial z} + \nabla \cdot [G \nabla (\Delta u_y)] + \nabla \cdot \left[G \frac{\partial (\Delta u)}{\partial y} \right] + \frac{\partial (\lambda \nabla (\Delta u))}{\partial y} + \frac{\partial (\beta_m \Delta \Omega_m)}{\partial y} + \frac{\partial (\beta_f \Delta \Omega_f)}{\partial y} = 0 \quad (3.31b)$$

En dirección Z:

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^0}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^0}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}^0}{\partial z} + \nabla \cdot [G \nabla (\Delta u_z)] + \nabla \cdot \left[G \frac{\partial (\Delta u)}{\partial z} \right] + \frac{\partial (\lambda \nabla (\Delta u))}{\partial z} + \frac{\partial (\beta_m \Delta \Omega_m)}{\partial z} + \frac{\partial (\beta_f \Delta \Omega_f)}{\partial z} = 0 \quad (3.31c)$$

3.3. Modelo para el Cálculo de la Presión Capilar

Las curvas de permeabilidad relativa y de presión capilar deben ser representadas matemáticamente, debido a que ambos parámetros son utilizados comúnmente en ingeniería de yacimientos.

La expresión empleada para el cálculo de la presión capilar parte de las consideraciones establecidas por Brooks y Corey [36], quienes en sus primeros estudios plantean una expresión que tiene la siguiente forma:

$$P_c = P_e \left(\frac{S_w - S_{wr}}{1 - S_{nwi} - S_{wr}} \right)^{-1/\lambda}$$

Donde S_w es la saturación de la fase humectante, S_{wr} es la saturación residual de la fase humectante, S_{nwi} es la saturación inicial de la fase no humectante, más adelante los autores le dan un valor de cero a este parámetro, λ representa la distribución del tamaño de poro y P_e es un valor de presión capilar de referencia.

Tomando la fase humectante como el petróleo, para el sistema que se está trabajando, se hace un tratamiento similar al establecido y se encuentra que las expresiones para presión capilar se pueden escribir como [36]:

Para Matriz:

$$P_{mcog} = P_{mce} \left(\frac{S_{mo} - S_{mor}}{1 - S_{mor}} \right)^{-1/\lambda} \quad (3.32)$$

Para Fractura:

$$P_{fcog} = P_{fce} \left(\frac{S_{fo} - S_{for}}{1 - S_{for}} \right)^{-1/\lambda_f} \quad (3.33)$$

Donde S_{mor} y S_{for} es la saturación residual de la fase humectante (petróleo) en la matriz y en la fractura respectivamente, λ_m y λ_f representa la distribución del tamaño de poro, en el simulador desarrollado se toma un valor arbitrario para ambos medios igual a 2, y P_{mce} y P_{fce} son valores de presión capilar, de matriz y fractura respectivamente, de referencia.

3.4. Modelo para el Cálculo de las Permeabilidades Relativas

La permeabilidad relativa es función principalmente de las saturaciones de fluidos en el medio poroso y de la interacción roca - fluido [32].

La Figura 2 ilustra la forma típica que adquieren las curvas de permeabilidad efectiva y relativa, y algunos modelos que permiten establecer relaciones para la permeabilidad relativa son los siguientes:

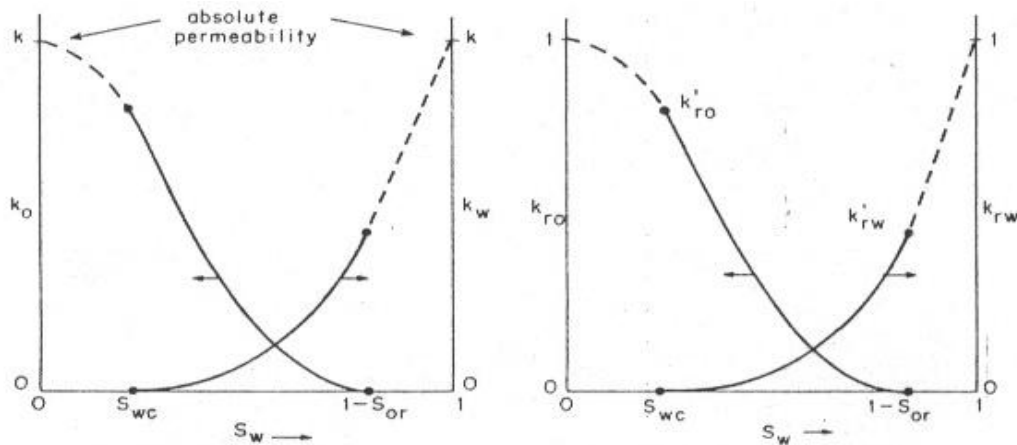


Figura 2. Forma Típica de Curvas de Permeabilidad Efectiva y Relativa (Tomado de la referencia 32)

3.4.1. Modelo de Peñuela & Civan

Jones y Raghavan [37] muestran que un sistema se encuentra en estado estable cuando “todas las variables de interés – presión, saturación y fracción molar de los componentes en las fases líquida y vapor son independientes del tiempo en todos los puntos del yacimiento”. Teniendo esto presente, se establece que la relación de las permeabilidades puede ser estimada mediante una expansión a composición constante (CCE).

Considerando el trabajo previo de Jones y Raghavan [37], Peñuela y Civan [38] encuentran la siguiente expresión, que puede ser usada para el cálculo de las permeabilidades relativas a partir de los valores conocidos de saturaciones y viscosidades de las dos fases fluyendo, estas correlaciones son las que se utilizan en el simulador para encontrar las permeabilidades relativas:

$$k_{ro} = \frac{\mu_o S_o}{\mu_o S_o + \mu_g S_g} \text{ y } k_{rg} = \frac{\mu_g S_g}{\mu_o S_o + \mu_g S_g} \quad (3.34)$$

3.4.2. Modelo de Permeabilidades Relativas a partir de las correlaciones de Brooks – Corey

Tomando como referencia las correlaciones de Brooks – Corey [39] se llega a las siguientes expresiones para las curvas de permeabilidades relativas:

Para la matriz:

$$k_{rmo} = \left(\frac{S_{mo} - S_{mor}}{1 - S_{mor}} \right)^{2+\lambda_m/\lambda_m} \quad \text{y} \quad k_{rmg} = \left(1 - \frac{S_{mo} - S_{mor}}{1 - S_{mor}} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{S_{mo} - S_{mor}}{1 - S_{mor}} \right)^{2+\lambda_m/\lambda_m} \right] \quad (3.35)$$

Para la fractura:

$$k_{rfo} = \left(\frac{S_{fo} - S_{for}}{1 - S_{for}} \right)^{2+\lambda_f/\lambda_f} \quad \text{y} \quad k_{rfg} = \left(1 - \frac{S_{fo} - S_{for}}{1 - S_{for}} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{S_{fo} - S_{for}}{1 - S_{for}} \right)^{2+\lambda_f/\lambda_f} \right] \quad (3.36)$$

3.5. Modelo para el Cálculo de las Porosidades de Matriz y Fractura.

Es necesario definir dos porosidades diferentes: una para los bloques de matriz y otra para los bloques de fractura [35]. Estas porosidades se relacionan de la siguiente manera:

$$1 = \phi_m + \phi_f + \frac{V_s}{V_b}$$

La porosidad total efectiva se puede definir como:

$$\phi_t = \phi_m + \phi_f = \frac{V_{pm} + V_{pf}}{V_b}$$

Para cada uno de los medios se tienen ecuaciones específicas para el cálculo de las propiedades.

3.5.1. Modelo para el Cálculo de las Porosidades de Matriz.

De acuerdo a la definición de porosidad de matriz y a la definición de compresibilidades, se puede deducir la siguiente expresión para relacionar los cambios de porosidad con los cambios en los esfuerzos e igualmente con los cambios de presión:

$$\frac{d\phi_m}{\phi_m} = -C_{pcm} d\bar{\sigma}_p^d + C_{bc} d\bar{\sigma}_b^d \quad (3.37)$$

Donde el esfuerzo para un medio de porosidad dual se obtiene de:

$$d\bar{\sigma}_p^d = (d\sigma_m - \beta_{pm} d\Omega_m - \beta_{pf} d\Omega_f)$$

$$d\bar{\sigma}_b^d = (d\sigma_m - \beta_{bm} d\Omega_m - \beta_{bf} d\Omega_f)$$

Y las definiciones de las compresibilidades:

$$c_{pcm} = \frac{c_{bc}^s - c_s^s}{\phi_m} = \frac{\phi_t}{\phi_m} c_{pc}^s = \frac{\phi_t}{\phi_m} c_{pc}^d = \frac{\phi_t}{\phi_m} \frac{c_{bc}^s - c_s^s}{c_{bc}^d - c_s^d}$$

$$c_{bc}^d = \frac{-1}{V_b} \left(\frac{\partial V_b}{\partial \sigma_m} \right)_p$$

3.5.2. Modelo para el Cálculo de las Porosidades de Fractura.

Siguiendo un procedimiento similar para fractura se tiene:

$$\frac{d\phi_f}{\phi_f} = -C_{pcf} d\bar{\sigma}_p^d + C_{bc} d\bar{\sigma}_b^d \quad (3.38)$$

La definición de la compresibilidad c_{pcf} :

$$c_{pcf} = c_{pc}^d \frac{\phi_t}{\phi_m} \left(1 - \frac{c_{bc}^s - c_s^s}{c_{bc}^d - c_s^d} \right)$$

3.6. Modelo de Flujo Interporoso

El término T, que se encuentra en las ecuaciones de flujo, tiene en cuenta la transferencia de fluidos entre la matriz y la fractura. Este término depende de la geometría matriz – fractura, y de la distribución y conectividad de fracturas [40]. Tiene la forma que muestra la ecuación (3.39):

$$q_T = 8 \frac{\rho_m}{\mu} \left(\frac{k_{xm}}{l_x^2} + \frac{k_{ym}}{l_y^2} + \frac{k_{zm}}{l_z^2} \right) (\Omega_m - \Omega_f) \quad (3.39)$$

La ecuación (3.39) podría representar la geometría de matriz – fractura. En esta ecuación, se asume que el flujo interporoso es proporcional a la diferencia de presión en los sistemas matriz y fractura.

Dado el carácter composicional del problema que se está trabajando, el modelo debe considerar el aporte tanto de la fase gaseosa como de la fase líquida; de lo anterior es evidente que la tasa total es igual a la suma de los caudales de la fase líquida y de la fase gaseosa. Con las ecuaciones anteriores se puede escribir el término de transferencia como:

$$q_{T_o} = 8 \frac{\rho_{om}}{\mu_o M_{om}} \left(\frac{k_{xm} k_{ro\ xm}}{l_x^2} + \frac{k_{ym} k_{ro\ ym}}{l_y^2} + \frac{k_{zm} k_{ro\ zm}}{l_z^2} \right) (\Omega_m - \Omega_f) \quad (3.39a)$$

$$q_{T_g} = 8 \frac{\rho_{gm}}{\mu_g M_{gm}} \left(\frac{k_{xm} k_{rg\ xm}}{l_x^2} + \frac{k_{ym} k_{rg\ ym}}{l_y^2} + \frac{k_{zm} k_{rg\ zm}}{l_z^2} \right) (\Omega_m - \Omega_f) \quad (3.39b)$$

La tasa de transferencia total es pues:

$$q_T = q_{T_o} + q_{T_g} \quad (3.40)$$

3.7. Modelo para el cálculo de la permeabilidad

La permeabilidad tiene un comportamiento exponencial con los esfuerzos y se modela a través de la relación siguiente [31]:

$$k = k_0 e^{-b_m (\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_0)} \quad (3.41)$$

Donde b_m se conoce como módulo de permeabilidad, k_0 es la permeabilidad de referencia a un esfuerzo efectivo de referencia $\bar{\sigma}_0$.

4. MODELO NUMÉRICO PARA EL FLUJO DE FLUIDOS COMPOSICIONALES ACOPLADO A DEFORMACIÓN GEOMECÁNICA EN YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS

Los modelos diferenciales que se plantean en el capítulo 3 se discretizan por medio de diferencias finitas de segundo orden para nodo distribuido. Ver Anexo 3, 4 y 5

4.1. Discretización de la Ecuación de Presión

La ecuación de flujo de fluidos composicionales en forma incremental para la matriz se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 & \nabla \cdot \left[\left(\frac{\rho_{mo} \vec{k}_m k_{rmo}}{M_{mo} \mu_{mo}} + \frac{\rho_{mg} \vec{k}_m k_{rmg}}{M_{mg} \mu_{mg}} \right) \nabla P_{mg}^0 \right] + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\rho_{mo} \vec{k}_m k_{rmo}}{M_{mo} \mu_{mo}} + \frac{\rho_{mg} \vec{k}_m k_{rmg}}{M_{mg} \mu_{mg}} \right) \nabla \Delta P_{mg} \right] = \tilde{q}_T \\
 & - \nabla \cdot \left(\frac{\rho_{mo} \phi_m}{M_{mo}} + \frac{\rho_{mg} \phi_m}{M_{mg}} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{\rho_{mo} \vec{k}_m k_{rmo}}{M_{mo} \mu_{mo}} \nabla P_{cmog}^0 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\rho_{mo} \vec{k}_m k_{rmo}}{M_{mo} \mu_{mo}} \nabla \Delta P_{cmog} \right) \\
 & - \phi_m \left(\frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right) c_{pcm} \frac{\partial \sigma_m}{\partial t} - \phi_m \left(\frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right) c_{pcm} \beta_{pm} \frac{\partial \psi_m}{\partial t} \\
 & + \phi_m \left(\frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right) c_{pcm} \beta_{pf} \frac{\partial P_{fg}}{\partial t} - \phi_m \left(\frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right) c_{pcm} \beta_{pf} \frac{\partial \psi_f}{\partial t} \\
 & + \phi_m \left[\rho_{mo} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_{mo}}{M_{mo}} \right) + \rho_{mg} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_{mg}}{M_{mg}} \right) \right] - \frac{S_{mo} \rho_{mo} \phi_m}{M_{mo}} C_{mo} \frac{\partial P_{cmog}}{\partial t} + \frac{\phi_m S_{mo} \rho_{mo}}{M_{mo}} [C_{mo} + c_{pcm} \beta_{pm}] \frac{\partial P_{mg}}{\partial t} \\
 & + \frac{\phi_m \rho_{mg} S_{mg}}{M_{mg}} [C_{mg} + c_{pcm} \beta_{pm}] \frac{\partial P_{mg}}{\partial t} + T
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Recordando la definición de gradiente ∇ , en coordenadas cartesianas:

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}$$

Y divergencia $\nabla \cdot$, en coordenadas cartesianas:

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial F_x}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \vec{k}$$

Haciendo un cambio de variables con el fin de manejar más fácilmente las ecuaciones se tiene:

$$\lambda = \left(\frac{\rho_{mo} \vec{k}_m k_{rmo}}{M_{mo} \mu_{mo}} + \frac{\rho_{mg} \vec{k}_m k_{rmg}}{M_{mg} \mu_{mg}} \right) \tag{4.2}$$

De la misma manera:

$$\tau = \frac{\rho_{mo} \vec{k}_m k_{rmo}}{M_{mo} \mu_{mo}} \quad (4.3)$$

Realizando los cambios necesarios y aplicando las definiciones de gradiente y divergente se llega a:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial P_{mg}^0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial P_{mg}^0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial P_{mg}^0}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \Delta P_{mg}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \Delta P_{mg}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \Delta P_{mg}}{\partial z} \right) = \tilde{q}_T \\ & - \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho_{mo} \phi_m}{M_{mo}} + \frac{\rho_{mg} \phi_m}{M_{mg}} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho_{mo} \phi_m}{M_{mo}} + \frac{\rho_{mg} \phi_m}{M_{mg}} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_{mo} \phi_m}{M_{mo}} + \frac{\rho_{mg} \phi_m}{M_{mg}} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial P_{cmog}^0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau \frac{\partial P_{cmog}^0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\tau \frac{\partial P_{cmog}^0}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial \Delta P_{cmog}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau \frac{\partial \Delta P_{cmog}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\tau \frac{\partial \Delta P_{cmog}}{\partial z} \right) \\ & - \phi_m \left(\frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right) c_{pcm} \frac{\partial \sigma_m}{\partial t} - \phi_m \left(\frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right) c_{pcm} \beta_{pm} \frac{\partial \psi_m}{\partial t} \\ & + \phi_m \left(\frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right) c_{pcm} \beta_{pf} \frac{\partial P_{fg}}{\partial t} - \phi_m \left(\frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right) c_{pcm} \beta_{pf} \frac{\partial \psi_f}{\partial t} \\ & + \phi_m \left[\rho_{mo} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_{mo}}{M_{mo}} \right) + \rho_{mg} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_{mg}}{M_{mg}} \right) \right] - \frac{S_{mo} \rho_{mo} \phi_m}{M_{mo}} C_{mo} \frac{\partial P_{comg}}{\partial t} \\ & + \frac{\phi_m S_{mo} \rho_{mo}}{M_{mo}} [C_{mo} + c_{pcm} \beta_{pm}] \frac{\partial P_{mg}}{\partial t} + \frac{\phi_m \rho_{mg} S_{mg}}{M_{mg}} [C_{mg} + c_{pcm} \beta_{pm}] \frac{\partial P_{mg}}{\partial t} + q_{Tm} \end{aligned} \quad (4.4)$$

La discretización de las ecuaciones se realiza minuciosamente en el Anexo 4.

La ecuación (4.4) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} & BCm_{i,j,k} \Delta p_{m \ i,j,k-1}^{n+1} + Sm_{i,j,k} \Delta p_{m \ i,j-1,k}^{n+1} + Wm_{i,j,k} \Delta p_{m \ i-1,j,k}^{n+1} + Cm_{i,j,k} \Delta p_{m \ i,j,k}^{n+1} + Em_{i,j,k} \Delta p_{m \ i+1,j,k}^{n+1} \\ & + Nm_{i,j,k} \Delta p_{m \ i,j+1,k}^{n+1} + Tcm_{i,j,k} \Delta p_{m \ i,j,k+1}^{n+1} = Fm_{i,j,k} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Donde:

$$BCm_{i,j,k} = T_{i,j,k-1/2} \quad (4.5a)$$

$$Sm_{i,j,k} = T_{i,j-1/2,k} \quad (4.5b)$$

$$Wm_{i,j,k} = T_{i-1/2,j,k} \quad (4.5c)$$

$$Em_{i,j,k} = T_{i+1/2,j,k} \quad (4.5d)$$

$$Nm_{i,j,k} = T_{i,j+1/2,k} \quad (4.5e)$$

$$Tcm_{i,j,k} = T_{i,j,k+1/2} \quad (4.5f)$$

$$Cm_{i,j,k} = -T_{i-1/2,j,k} - T_{i+1/2,j,k} - T_{i,j-1/2,k} - T_{i,j+1/2,k} - T_{i,j,k-1/2} - T_{i,j,k+1/2} \\ - \frac{\phi_{mi,j,k} S_{moi,j,k} \rho_{moi,j,k}}{M_{moi,j,k} * \Delta t} (c_{moi,j,k} + c_{pcm i,j,k} \beta_{pm i,j,k}) - \frac{\phi_{mgi,j,k} S_{mgi,j,k} \rho_{mgi,j,k}}{M_{mgi,j,k} * \Delta t} (c_{mgi,j,k} + c_{pcm i,j,k} \beta_{pm i,j,k}) \quad (4.5g)$$

$$Fm_{i,j,k} = - \left(T_{i-1/2,j,k} P_{mg i-1,j,k}^0 - (T_{i-1/2,j,k} + T_{i+1/2,j,k}) P_{mg i,j,k}^0 + T_{i+1/2,j,k} P_{mg i+1,j,k}^0 \right) \\ - \left(T_{i,j-1/2,k} P_{mg i,j,k-1}^0 - (T_{i,j-1/2,k} + T_{i,j+1/2,k}) P_{mg i,j,k}^0 + T_{i,j+1/2,k} P_{mg i,j+1,k}^0 \right) - \\ \left(T_{i,j,k-1/2} P_{mg i,j,k-1}^0 - (T_{i,j,k+1/2} + T_{i,j,k-1/2}) P_{mg i,j,k}^0 + T_{i,j,k+1/2} P_{mg i,j,k+1}^0 \right) + q_{Ti,j,k} \\ - \left[\begin{array}{l} Fi \left[\left(\frac{\rho_{mo} \phi_m}{M_{mo}} + \frac{\rho_{mg} \phi_m}{M_{mg}} \right)_{i+1,j,k} - \left(\frac{\rho_{mo} \phi_m}{M_{mo}} + \frac{\rho_{mg} \phi_m}{M_{mg}} \right)_{i-1,j,k} \right] * \left[\left(\frac{u_{x i,j,k}^{n+1} - u_{x i,j,k}^n}{\Delta t} \right) + \left(\frac{u_{y i,j,k}^{n+1} - u_{y i,j,k}^n}{\Delta t} \right) + \left(\frac{u_{z i,j,k}^{n+1} - u_{z i,j,k}^n}{\Delta t} \right) \right] + \\ Fj \left[\left(\frac{\rho_{mo} \phi_m}{M_{mo}} + \frac{\rho_{mg} \phi_m}{M_{mg}} \right)_{i,j+1,k} - \left(\frac{\rho_{mo} \phi_m}{M_{mo}} + \frac{\rho_{mg} \phi_m}{M_{mg}} \right)_{i,j-1,k} \right] * \left[\left(\frac{u_{x i,j,k}^{n+1} - u_{x i,j,k}^n}{\Delta t} \right) + \left(\frac{u_{y i,j,k}^{n+1} - u_{y i,j,k}^n}{\Delta t} \right) + \left(\frac{u_{z i,j,k}^{n+1} - u_{z i,j,k}^n}{\Delta t} \right) \right] + \\ Fk \left[\left(\frac{\rho_{mo} \phi_m}{M_{mo}} + \frac{\rho_{mg} \phi_m}{M_{mg}} \right)_{i,j,k+1} - \left(\frac{\rho_{mo} \phi_m}{M_{mo}} + \frac{\rho_{mg} \phi_m}{M_{mg}} \right)_{i,j,k-1} \right] * \left[\left(\frac{u_{x i,j,k}^{n+1} - u_{x i,j,k}^n}{\Delta t} \right) + \left(\frac{u_{y i,j,k}^{n+1} - u_{y i,j,k}^n}{\Delta t} \right) + \left(\frac{u_{z i,j,k}^{n+1} - u_{z i,j,k}^n}{\Delta t} \right) \right] \end{array} \right] + T - \\ \left(T_{Ci-1/2,j,k} P_{cmog i-1,j,k}^0 - (T_{Ci-1/2,j,k} + T_{Ci+1/2,j,k}) P_{cmog i,j,k}^0 + T_{Ci+1/2,j,k} P_{cmog i+1,j,k}^0 \right) \\ \left(T_{Ci,j-1/2,k} P_{cmog i,j,k-1}^0 - (T_{Ci,j-1/2,k} + T_{Ci,j+1/2,k}) P_{cmog i,j,k}^0 + T_{Ci,j+1/2,k} P_{cmog i,j+1,k}^0 \right) + \\ \left(T_{Ci,j,k-1/2} P_{cmog i,j,k-1}^0 - (T_{Ci,j,k-1/2} + T_{Ci,j,k+1/2}) P_{cmog i,j,k}^0 + T_{Ci,j,k+1/2} P_{cmog i,j,k+1}^0 \right) + \\ \left(T_{Ci-1/2,j,k} \Delta p_{cmog i-1,j,k} - (T_{Ci-1/2,j,k} + T_{Ci+1/2,j,k}) \Delta p_{cmog i,j,k} + T_{Ci+1/2,j,k} \Delta p_{cmog i+1,j,k} \right) + \\ \left(T_{Ci,j-1/2,k} \Delta p_{cmog i,j,k-1} - (T_{Ci,j-1/2,k} + T_{Ci,j+1/2,k}) \Delta p_{cmog i,j,k} + T_{Ci,j+1/2,k} \Delta p_{cmog i,j+1,k} \right) + \\ \left(T_{Ci,j,k-1/2} \Delta p_{cmog i,j,k-1} - (T_{Ci,j,k-1/2} + T_{Ci,j,k+1/2}) \Delta p_{cmog i,j,k} + T_{Ci,j,k+1/2} \Delta p_{cmog i,j,k+1} \right) - \\ \phi_{mi,j,k} \left(\frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right)_{i,j,k} c_{pcmi,j,k} \left(\frac{\sigma_{mi,j,k}^{n+1} - \sigma_{mi,j,k}^n}{\Delta t} \right) \\ - \phi_{mi,j,k} \left(\frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right)_{i,j,k} c_{pcmi,j,k} \beta_{pmi,j,k} \left(\frac{\psi_{mi,j,k}^{n+1} - \psi_{mi,j,k}^n}{\Delta t} \right) \\ + \phi_{mi,j,k} \left(\frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right)_{i,j,k} c_{pcmi,j,k} \beta_{pfi,j,k} \frac{\Delta P_{fgi,j,k}}{\Delta t} \\ - \phi_{mi,j,k} \left(\frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} S_{mo} + \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} S_{mg} \right)_{i,j,k} c_{pcmi,j,k} \beta_{pfi,j,k} \left(\frac{\psi_{fi,j,k}^{n+1} - \psi_{fi,j,k}^n}{\Delta t} \right) \\ + \phi_{mi,j,k} \left[\frac{\rho_{mo}}{M_{mo}} \left(\frac{S_{moi,j,k}^{n+1} - S_{moi,j,k}^n}{\Delta t} \right) + \frac{\rho_{mg}}{M_{mg}} \left(\frac{S_{mgi,j,k}^{n+1} - S_{mgi,j,k}^n}{\Delta t} \right) \right] - \frac{S_{moi,j,k} \rho_{moi,j,k} \phi_m}{M_{moi,j,k}} C_{moi,j,k} \frac{\Delta P_{comg}}{\Delta t} + q_{Tmi,j,k} + q_{i,j,k} \quad (4.5h)$$

Para la fractura se obtiene una ecuación similar. Estas pueden verse en el Anexo 5.

Sabiendo que el término de transferencia es igual a $q_T = q_{To} + q_{Tg}$ y escribiendo en forma incremental se llega a:

$$q_{Tm} = \left(8 \frac{\rho_{om}}{\mu_o M_{om}} \left(\frac{k_{xm} k_{ro\ xm}}{l_x^2} + \frac{k_{ym} k_{ro\ ym}}{l_y^2} + \frac{k_{zm} k_{ro\ zm}}{l_z^2} \right) + 8 \frac{\rho_{gm}}{\mu_g M_{gm}} \left(\frac{k_{xm} k_{rg\ xm}}{l_x^2} + \frac{k_{ym} k_{rg\ ym}}{l_y^2} + \frac{k_{zm} k_{rg\ zm}}{l_z^2} \right) \right)_{i,j,k} \left((\Omega_m^0 + \Delta\Omega_m) - (\Omega_f^0 + \Delta\Omega_f) \right) \quad (4.6)$$

4.2. Discretización del Modelo Deformación

Las siguientes son las expresiones para la discretización de las ecuaciones del modelo de deformación. La discretización de estas ecuaciones puede observarse en el Anexo 6.

Modelo de Deformación en Dirección X:

$$BC_{Uxi,j,k} \Delta u_x^{n+1}{}_{i,j,k-1} + S_{Uxi,j,k} \Delta u_x^{n+1}{}_{i,j-1,k} + W_{Uxi,j,k} \Delta u_x^{n+1}{}_{i-1,j,k} + C_{Uxi,j,k} \Delta u_x^{n+1}{}_{i,j,k} + E_{Uxi,j,k} \Delta u_x^{n+1}{}_{i+1,j,k} + N_{Uxi,j,k} \Delta u_x^{n+1}{}_{i,j+1,k} + TC_{Uxi,j,k} \Delta u_x^{n+1}{}_{i,j,k+1} = F_{Uxi,j,k} \quad (4.7)$$

Modelo de Deformación en Dirección Y:

$$BC_{Uyi,j,k} \Delta u_y^{n+1}{}_{i,j,k-1} + S_{Uyi,j,k} \Delta u_y^{n+1}{}_{i,j-1,k} + W_{Uyi,j,k} \Delta u_y^{n+1}{}_{i-1,j,k} + C_{Uyi,j,k} \Delta u_y^{n+1}{}_{i,j,k} + E_{Uyi,j,k} \Delta u_y^{n+1}{}_{i+1,j,k} + N_{Uyi,j,k} \Delta u_y^{n+1}{}_{i,j+1,k} + TC_{Uyi,j,k} \Delta u_y^{n+1}{}_{i,j,k+1} = F_{Uyi,j,k} \quad (4.8)$$

Modelo de Deformación en Dirección Z:

$$BC_{Uzi,j,k} \Delta u_z^{n+1}{}_{i,j,k-1} + S_{Uzi,j,k} \Delta u_z^{n+1}{}_{i,j-1,k} + W_{Uzi,j,k} \Delta u_z^{n+1}{}_{i-1,j,k} + C_{Uzi,j,k} \Delta u_z^{n+1}{}_{i,j,k} + E_{Uzi,j,k} \Delta u_z^{n+1}{}_{i+1,j,k} + N_{Uzi,j,k} \Delta u_z^{n+1}{}_{i,j+1,k} + TC_{Uzi,j,k} \Delta u_z^{n+1}{}_{i,j,k+1} = F_{Uzi,j,k} \quad (4.9)$$

5. FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS COMPOSICIONAL, EQUILIBRIO LÍQUIDO – VAPOR Y CÁLCULO DE FASES

Las diferentes etapas en la vida productiva de un yacimiento llevan consigo variaciones en presión y temperatura, lo cual trae como consecuencia, no solo cambios en las propiedades del fluido sino también formación de nuevas fases o eliminación de algunas de las fases existentes. Los cambios en el yacimiento, generalmente, son lentos por lo que es razonable pensar que todas las fases coexistentes están en equilibrio. Se dice que un sistema está en equilibrio cuando la tendencia a pasar al estado de vapor es igual a la tendencia a pasar al estado líquido.

Los fluidos presentes en el yacimientos son mezclas multicomponentes, y por esta razón, es necesario, para definir el sistema encontrar las fases existentes y además obtener la composición de cada una de ellas.

5.1. Ecuación de Estado

Una ecuación de estado es una relación entre presión, temperatura y volumen, con la cual se puede estudiar el comportamiento físico de una sustancia cuando se somete a variaciones de una o varias de las variables antes mencionadas [32], [41], [42].

Muchas ecuaciones de estado han sido propuestas desde el trabajo de Van der Waals. En 1976 *Peng & Robinson* propusieron una ecuación que generó gran expectativa por las mejoras en las predicciones. La ecuación de *Peng - Robinson* se desarrolla a partir de la ecuación de Soave Redlich and Kwong. La forma de la ecuación es:

$$P = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v(v+b)+b(v-b)} \quad (5.1)$$

La ecuación en términos del factor de compresibilidad está dada por:

$$Z^3 - (1-B)Z^2 + (A-2B-3B^2)Z - (AB-B^2-B^3) = 0 \quad (5.2)$$

Los parámetros a y b de la ecuación están dados por:

$$a = 0.45724 \frac{R^2 T_c^2}{P_c} \alpha \quad (5.3)$$

$$b = 0.0778 \frac{RT_c}{P_c} \quad (5.4)$$

Inicialmente se realizó una propuesta para el factor α que fue:

$$\alpha(T_r) = \left[1 + m \left(1 - \sqrt{T_r} \right) \right]^2 \quad (5.5)$$

$$m=0.37464+1.54226\omega -0.26992\omega^2 \quad (5.6a)$$

En 1979 los autores de la ecuación propusieron una modificación para m para componentes pesados, con factores acéntricos $\omega > 0.49$

$$m=0.3796+1.1485\omega -0.1644\omega^2 + 0.01667\omega^3 \quad (5.6b)$$

Para sistemas multicomponentes, es necesario, adaptar la ecuación de estado para poder aplicarla a mezclas. Para esto, se requiere considerar los tres aspectos siguientes:

- Manejo de la fracción pesada
- Leyes de mezclas
- Obtención de coeficientes de interacción.

Los resultados obtenidos con la ecuación de estado de Peng – Robinson, teniendo en cuenta los tres aspectos anteriores, son buenos en cuanto a presión, pero normalmente poco aceptables en cuanto a volúmenes; por ello Peneloux propone la siguiente corrección:

$$v_c = v - \Delta v \quad (5.7)$$

Donde v_c y v son volumen corregido y volumen obtenido de la ecuación de Peng - Robinson respectivamente, y ΔV es la corrección que le deben aplicar al volumen calculado; está dada por:

$$\Delta v = \sum_{i=1}^N x_i c_i \quad (5.7a)$$

$$c_i = S_i b_i \text{ (pies}^3\text{/lb.mol)} \quad (5.7b)$$

Donde b_i es el parámetro b del componente i y S_i se conoce como coeficiente de translación de volumen. Los valores de S_i se obtienen, para algunos componentes desde tablas que se encuentran en la literatura [32], y para los demás componentes de la siguiente relación:

$$S_i = 1 - \frac{A_0}{(MW_i)^{A_1}} \quad (5.7c)$$

Donde MW_i es el peso molecular del componente y los valores de A_0 y A_1 dependen de si los hidrocarburos son parafínicos, nafténicos o aromáticos

5.2. Constantes de Equilibrio

Cuando dos fases en contacto están en equilibrio, la energía libre de Gibbs de ambas es igual, o sea, la tendencia de que una fase pase a la otra es igual en ambas direcciones.

Existen diferentes maneras para el cálculo de las constantes de equilibrio pero quizá el método más adecuado para el cálculo de estas es a partir de las fugacidades [26].

Este método de obtener las constantes de equilibrio parte de los conceptos de termodinámica en donde $\frac{f_L}{f_v} = 1$. Sin embargo, es más común hablar de coeficiente de fugacidad, el cual se define como:

$$\phi = \frac{f}{P} \quad (5.8)$$

La ecuación (5.8) define el coeficiente de fugacidad tanto para fase líquida como para fase vapor de un compuesto puro, pero cuando se trata de una mezcla, el coeficiente de fugacidad para un componente i se define como:

$$\phi_i = \frac{f_i}{X_i P} \quad (5.9)$$

Pero como hay componente i en la fase líquida y en la fase vapor se tiene:

$$\phi_{iL} = \frac{f_{iL}}{X_i P} \quad (5.10)$$

$$\phi_{iv} = \frac{f_{iv}}{Y_i P} \quad (5.11)$$

Donde f_{iL} y f_{iv} son las fugacidades del componente i en la fase líquida y fase vapor, respectivamente.

Una vez se encuentra el equilibrio, las fugacidades en la fase vapor y en la fase líquida son iguales y por tanto se puede tener:

$$\phi_{iL} * X_i P = \phi_{iv} * Y_i P$$

$$\frac{Y_i}{X_i} = \frac{\phi_{iL}}{\phi_{iv}} = K_i \quad (5.12)$$

Con la expresión (5.12) se obtiene el valor de las constantes de equilibrio.

Los coeficientes de fugacidad se consiguen a partir de la definición de éste e introduciendo la ecuación de estado; su forma, por lo tanto, depende de la ecuación de estado que se utilice para ello. La relación adecuada para este cálculo es:

$$\ln \varphi_i = \int_0^P (Z_i - 1) * dP/P \quad (5.13)$$

Donde Z_i , el factor de compresibilidad para el componente i , es una propiedad parcial molar que depende de la composición. Para encontrar la expresión para el coeficiente de fugacidad de un compuesto, se introduce la ecuación de estado con la que está trabajando. La expresión para el coeficiente de fugacidad considerando la ecuación de Peng Robinson es:

$$\ln \varphi_i = \frac{b_i}{b} * (Z - 1) - \ln(Z - B) - \frac{A * (2\psi_i/\psi - b_i/b)}{2.82843 B} * \ln \left[\frac{(Z + 2.414B)}{(Z - 0.414B)} \right] \quad (5.14)$$

5.3. Criterio del Plano Tangente

Para determinar un verdadero equilibrio es necesario encontrar las fugacidades de cada una de las fases. Un criterio adecuado para conocer las verdaderas fugacidades es determinar la mínima energía de Gibbs de la mezcla y la forma de hacerlo es mediante el criterio del plano tangente de Gibbs, el cual permite establecer cual de las fases (fase simple o una mezcla de fases) dentro del sistema que posee una composición dada, alcanza una energía mínima. Whitson y Brulé [26] realizan un análisis detallado del procedimiento para el análisis de estabilidad, según el criterio del plano tangente; además, muestran el algoritmo que puede ser usado para establecer la estabilidad de un sistema.

6. SIMULADOR DE FLUJO DE FLUIDOS COMPOSICIONALES ACOPLADO A DEFORMACIÓN GEOMECÁNICA EN YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS

El simulador de flujo de fluidos acoplado a deformación geomecánica está desarrollado en Fortran 90 y está constituido por varias etapas según las actividades a realizar en el simulador. El proceso iterativo que se trabaja en el simulador es tipo Picard.

Las etapas están divididas en:

- Pre - procesamiento
- Procesamiento
- Post – procesamiento

A continuación, se hará una descripción de cada una de las etapas que tiene el programa para realizar los cálculos.

6.1. Pre - procesamiento de Datos

Los objetivos de esta primera etapa del programa consisten en leer los datos de entrada, discretizar la malla de simulación como se desee y asignar los valores iniciales a cada uno de los bloques de la malla de simulación.

Dentro de esta etapa, se cuenta con subrutinas que permiten la lectura de las propiedades del fluido, la discretización de la malla de simulación como el usuario desee, el dimensionamiento de las variables que se usan en el simulador, los datos iniciales de esfuerzo y presión, la lectura de las propiedades mecánicas de la roca, los cálculos iniciales de permeabilidad, la localización del pozo dentro de la malla de simulación y la tasa de producción del pozo.

6.2. Procesamiento

En esta etapa del simulador, se realizan todos los cálculos que permiten estimar los parámetros de interés. El procedimiento general se describe a continuación:

- i. Una vez se tienen los valores iniciales de esfuerzos y presión a un nivel cero en cada uno de los nodos de la malla de simulación, se suponen unos valores iniciales de caída de presión de matriz y de fractura.
- ii. Se establecen las condiciones de frontera para las ecuaciones de desplazamiento en dirección X.
- iii. Se calculan los estenciles de la ecuación de desplazamiento en dirección X como se establece en el Anexo 6.
- iv. Se resuelve el sistema de ecuaciones que se obtiene en el numeral ii., con las condiciones de frontera que se establecieron anteriormente, mediante el método de

gradientes conjugados, y de allí se obtienen los valores de desplazamiento en la dirección X, ΔU_x .

- v. Con los valores de ΔU_x encontrados en el numeral iii., se estiman los estenciles para la ecuación de desplazamiento en la dirección Y. Con estos valores y con las condiciones de frontera, se resuelve el sistema de ecuaciones y se encuentra los desplazamientos en dirección Y, ΔU_y .
- vi. Se procede en forma similar al numeral iv., conociendo los valores de ΔU_x y ΔU_y , se obtiene los valores de ΔU_z .
- vii. Una vez se consiguen los valores de los desplazamientos para todas las direcciones, se actualiza el estado de esfuerzos.
- viii. Se obtiene la porosidad considerando los cambios en el estado de esfuerzos.
- ix. Se actualizan los valores de permeabilidad debido al cambio en el estado de esfuerzos de la formación.
- x. Se establecen las condiciones de frontera para la ecuación de presión de matriz, luego se calculan los estenciles según se establece en el Anexo 4. Cabe anotar que para cada nodo de la malla de simulación, es necesario hacer un cálculo de fases debido a que cada nodo de la malla cuenta con una presión diferente.
- xi. Se resuelve el sistema de ecuaciones por medio de gradientes conjugados y se obtienen los valores de caída de presión de matriz, ΔP_m .
- xii. Con los valores de ΔP_m , se realizan cálculos similares a los establecidos en los numerales ix. y x., y así se encuentra los valores de ΔP_f .
- xiii. Cuando se encuentran los valores de ΔP_m y ΔP_f se comparan con los valores supuestos inicialmente. Si los valores no se encuentran dentro de una tolerancia establecida previamente, se repiten los pasos ii. a xii. hasta que se alcance la convergencia.
- xiv. Los resultados que se obtienen de presión de matriz y de fractura permiten actualizar los esfuerzos efectivos, las porosidades y las permeabilidades.
- xv. Se continúa el proceso para otro nivel de tiempo ($n + 1$) con los valores obtenidos que corresponden a los valores al tiempo (n).
- xvi. Se repite el procedimiento para cada tiempo que se desea analizar.

6.3. Post – Procesamiento

En esta última etapa del simulador, se seleccionan las variables que se van a imprimir en archivos de texto, para que el usuario las pueda manipular según su conveniencia.

En la Figura 3 se muestra el diagrama de bloques que describe el procedimiento referido.

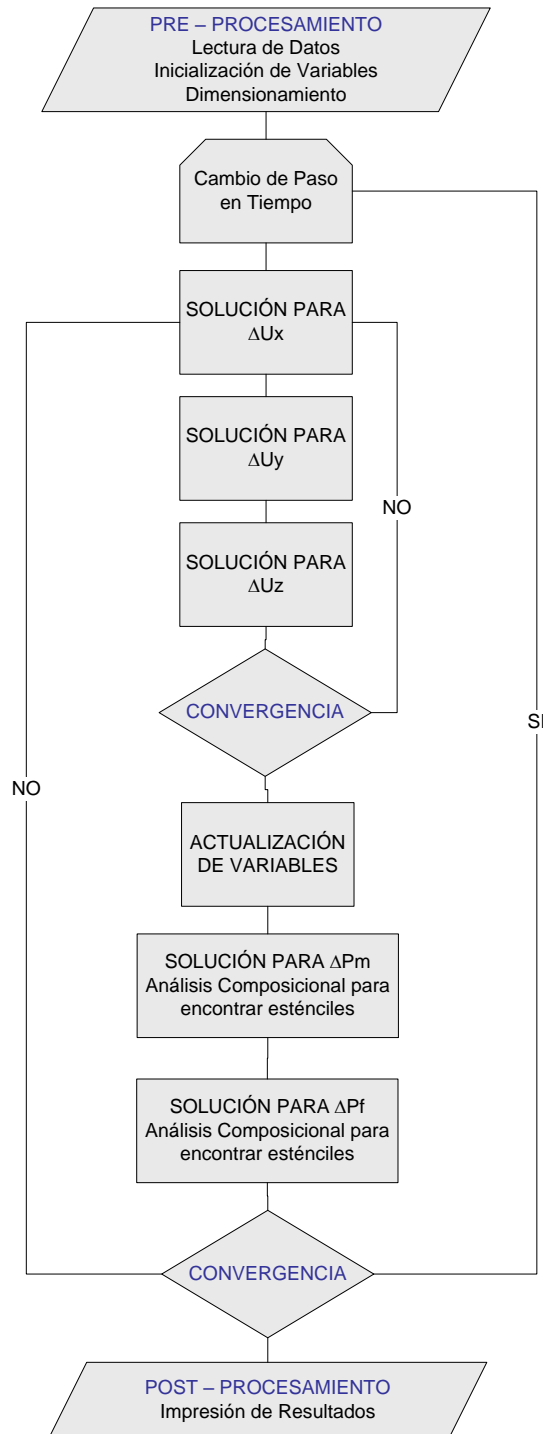


Figura 3. Diagrama de Flujo para la Solución del Sistema Acoplado