UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLIN

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

PROBLEMA DE CAUCHY PERIÓDICO PARA LA ECUACIÓN DE KADOMTSEV-PETVIASHVILI (KP-II) EN ESPACIOS DE BAJA REGULARIDAD

Trabajo presentado como requisito parcial

para la promoción a profesor titular.

Autor: Pedro Isaza Jaramillo

Medellín, Marzo de 2001

Tabla de Contenido

Introducción

Las ecuaciones de Kadomtsev-Petviashvili, que en adelante denominaremos KP, son una generalización bidimensional de la ecuación de Korteweg de Vries (KdV). El problema de Cauchy asociado a dichas ecuaciones consiste en encontrar una función $u = u(x,y,t)$ de las variables espaciales x y y y de la variable temporal t tal que

$$\left.\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x^3 u \mp \partial_x^{-1}\partial_y^2 u + u\partial_x u = 0\,, \\ u(x,y,0) = u_0(x,y)\,, \end{aligned}\right\} \tag{0.1}$$

donde u_0 es una función dada de las variables espaciales, y el operador ∂_x^{-1} representa una antiderivada con respecto a la variable x.

La ecuación KP es un modelo matemático para describir ondas de pequeña amplitud que se propagan esencialmente en la dirección x en un fluido bidimensional con profundidad pequeña y constante y que exhiben ligeras variaciones en la dirección transversal y. En el problema (0.1), $u(x,y,t)$ representa la altura de la superficie del fluido con respecto a un nivel medio de referencia.

Con el signo "$-$" la ecuación (0.1) es conocida como KP-I, y con el signo "$+$" la ecuación es llamada KP-II. Estos signos tienen un sentido físico relacionado con la dispersión.

En este trabajo consideraremos sólo la ecuación KP-II y el denominado problema periódico, que llamaremos (0.1-P), en el cual, dada una función u_0 periódica en las dos variables espaciales, se buscan soluciones $u(x,y,t)$ que sean periódicas en estas variables para cada instante t.

El estudio del problema (0.1) para datos iniciales en espacios de Sobolev fue en un principio llevado a cabo mediante el uso de la teoría de ecuaciones de evolución cuasilineales desarrollada por Kato [Ka]. La aplicación de esta teoría se apoya principalmente en estimaciones de la parte no lineal de la ecuación que requieren el uso de teoremas de inmersión de Sobolev e imponen la necesidad de considerar sólo espacios con regularidad suficiente como para que se den dichas inmersiones. Por medio de este método se demostró que el problema (0.1) para las ecuaciones KP-I y KP-II está bien planteado, en el caso periódico para datos iniciales en espacios de Sobolev H^s con $s \geq 3$ ([IMS-1]), y para el caso no periódico (caso de mar abierto) para datos iniciales en $H^s(\mathbb{R}^2)$ con $s > 2$ (ver [IoN] para $s > 2$ y [U] e [IMS-2] para $s \geq 3$). En todos los casos fue necesario imponer una condición adicional en el dato inicial relacionada con el operador ∂_x^{-1}.

El problema (0.1) forma parte de una amplia clase de problemas no lineales, los cuales pueden ser expresados en la forma:

$$\left.\begin{aligned} \partial_t u - il(D)u = F(u)\,, \\ u(0) = u_0\,. \end{aligned}\right\} \tag{0.2}$$

Aquí, $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^k$, $t \in \mathbb{R}$, F es un operador no lineal y $l(D)$ es un operador lineal que se define a partir de una función racional l de k variables mediante:

$$[l(D)]^{\wedge}(\zeta) := l(\zeta)\widehat{u}(\zeta)\,,$$

donde, para el caso no periódico, $\widehat{}$ es la transformada de Fourier en las variables espaciales y $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_k) \in \mathbb{R}^k$; y, para el caso periódico, $\widehat{}$ es el operador que asigna a una función periódica sus coeficientes de Fourier y $\zeta \in \mathbb{Z}^k$. La función l se llama símbolo de la ecuación en (0.2).

Nuestro caso, el problema periódico para la ecuación KP-II, corresponde al problema (0.2) con $l(D) = \partial_x^3 + \partial_x^{-1}\partial_y^2$ y $l(\zeta) = m^3 - \frac{n^2}{m}$, $\zeta = (m,n)$, $m \neq 0$. Esta última restricción para m llevará a considerar espacios de funciones en los cuales los coeficientes de Fourier sean cero para $m = 0$.

En los últimos años estos problemas de evolución han sido estudiados para datos iniciales de baja regularidad y para ello se han aplicado esencialmente tres métodos que tienen en común el uso de las propiedades dispersivas de la parte lineal de la ecuación. Dicho estudio parte de la fórmula de Duhamel para el problema (0.2), la cual asocia a éste el problema integral

$$u(t) = W(t)u_0 + \int_0^t W(t-t')[F(u)](t')\,dt'\,, \tag{0.3}$$

donde $W(t)$ es el grupo asociado a la parte lineal de la ecuación y se define mediante la transformada o serie de Fourier por:

$$[W(t)u_0]^{\wedge}(\zeta) := e^{itl(\zeta)}\widehat{u_0}(\zeta)\,.$$

Si Φ es el operador integral definido por el lado derecho de (0.3), entonces una solución de (0.3) será un punto fijo de Φ.

De estos métodos, el primero utiliza los efectos de suavización del grupo $W(t)$, los cuales se expresan mediante normas mixtas espacio-temporales de la forma $L_x^p L_t^q$ y $L_t^p L_x^q$, para establecer la existencia de un $T > 0$ y de un punto fijo de Φ en un espacio contenido en $C([-T,T];H^s)$ (el espacio de funciones continuas del intervalo temporal $[-T,T]$ con valores en H^s). Este método fue aplicado en [KPV1] para probar que el problema (0.2) para la ecuación KdV (el problema (0.2) con $k = 1$, $l(\zeta) = \zeta^3$, $\zeta \in \mathbb{R}$ y $F(u) = u\partial_x u$) está localmente bien planteado en H^s para $s > 3/4$.

Los otros dos métodos siguen un procedimiento introducido por Bourgain en [B1] y [B2], por medio del cual el problema (0.2) se plantea en un espacio de funciones cuyas normas están definidas a través de las transformaciones de Fourier en las variables espacio-temporales e involucran al símbolo $l(\zeta)$. La idea de Bourgain consiste en buscar un punto fijo del operador $\varphi\Phi$ donde φ es una función suave de soporte compacto de la variable t que es igual a 1 en un intervalo $[-T,T]$, $T>0$.

El segundo método utiliza las normas introducidas por Bourgain y los efectos de suavización del grupo $W(t)$ y fue aplicado en [B2] para el problema periódico asociado a la ecuación KdV con dato inicial en L^2 y en [KPV2] para el caso no periódico de esta misma ecuación para datos iniciales en H^s con $s>-5/8$.

Con el tercer método, la estimación de $\varphi\Phi$ se lleva a cabo mediante el uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz y de desigualdades elementales de cálculo. Este método ha sido utilizado para mostrar que la ecuación KdV está localmente bien planteada en H^s para $s>-3/4$ en el caso no periódico, y para $s>-1/2$ en el caso periódico [KPV3]. Para la ecuación KP-II se ha demostrado por este método, y con el uso adicional de las propiedades de suavización del grupo $W(t)$, que el problema de Cauchy en el caso no periódico está bien planteado en espacios de Sobolev anisotrópicos $H^{s_1 s_2}(\mathbb{R}^2)$ con $s_1>-1/3$ y $s_2\geq 0$. ([IM], [TaTz]).

En [B3] Bourgain ha demostrado que el problema (0.1-P) está bien planteado en espacios H^s con $s\geq 0$. La demostración se basa en una descomposición diádica adecuada del espacio de frecuencias y en el conteo de las cardinalidades de los conjuntos definidos en esta descomposición. Sin embargo, este artículo es de lectura bastante difícil.

En este trabajo utilizaremos las técnicas introducidas en [KPV3], basadas en desigualdades elementales de cálculo, para probar que el problema (0.1-P) está localmente bien planteado en espacios de Sobolev anisotrópicos $H^{s_1 s_2}$ con $s_1>0$ y $s_2\geq 0$. Esta aproximación al problema simplifica notablemente el procedimiento de Bourgain.

Debemos señalar que el signo "+" del penúltimo término de la ecuación es crucial en los procedimientos que se emplean, pues dota al símbolo $l(\zeta)$ de propiedades aritméticas de las que carece el símbolo de la ecuación KP-I.

Siguiendo una aproximación diferente, Faminskii [F], ha obtenido resultados para la ecuación KP-II en espacios L^2 con peso.

El trabajo está organizado como sigue:

En el capítulo 1 presentamos los espacios funcionales de tipo Sobolev en los cuales estudiaremos nuestro problema y desarrollamos adecuadamente la fórmula de Duhamel para dar una definición precisa de solución al problema (0.1-P). Para dicha definición, es necesario utilizar una propiedad de acotamiento del operador integral Φ. Esta propiedad es también fundamental en la obtención de la solución al problema, y se presenta en el lema 1.5. Finalizamos el capítulo enunciando los teoremas de existencia y unicidad de solución para (0.1-P) (Teoremas I y II), los cuales son el objetivo del trabajo.

El capítulo 2 contiene la demostración del lema 1.5 y conforma la parte principal del trabajo.

En el capítulo 3 se desarrollan dos lemas que nos permiten obtener la solución para datos iniciales de cualquier tamaño y se aplican estos lemas junto con el lema 1.5 para dar las demostraciones de los teoremas I y II.

Por simplicidad, omitiremos comunmente la escritura de los subíndices de sumatorias y supremos y de los límites o conjuntos de integración. Siempre que esto se haga, dichos subíndices, límites y conjuntos serán, en cada expresión, los mismos que aquellos en las expresiones correspondientes de las líneas precedentes.

La letra C denotará diversas constantes positivas que pueden variar de una línea a otra y que dependen de parámetros que están claramente establecidos en cada caso.

La notación $a \sim b$ significa la existencia de constantes positivas C_1 y C_2 tales que $C_1|a| \leq |b| \leq C_2|a|$.

En ocasiones usamos el símbolo $f(\cdot_\xi)$ para denotar una función f de una variable cualquiera ξ.

Quiero agradecer a mi amigo y colega el Profesor Jorge Mejía Laverde, sin cuya colaboración la escritura de este trabajo habría sido imposible, y al Profesor Volker Stallbohm quien ha acompañado y enriquecido nuestro quehacer matemático durante los últimos 20 años.

Capítulo 1

Nociones Preliminares y Resultados Principales

Espacios funcionales

En esta sección definiremos los espacios funcionales que enmarcarán el estudio de nuestro problema y daremos de ellos algunas propiedades esenciales.

Sean $\Pi := [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ y

$$\mathcal{S}(\Pi) := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}) \mid \varphi \text{ es } 2\pi\text{-periódica en cada variable}\}.$$

Para $N \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\varphi \in \mathcal{S}(\Pi)$ definimos

$$\|\varphi\|_N := \sup_{\substack{|\alpha| \leq N \\ (x,y) \in \mathbb{R}^2}} |\partial^\alpha \varphi(x, y)|,$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in (\mathbb{N}_0)^2$ denota un multiíndice de longitud $|\alpha| := (\alpha_1 + \alpha_2)$. La colección de seminormas $\{\| \cdot \|_N |\ N \in \mathbb{N}_0\}$ dota a $\mathcal{S}(\Pi)$ con la estructura de un espacio vectorial topológico.

Sea $\mathcal{S}'(\Pi)$ el espacio dual de $\mathcal{S}(\Pi)$. Si $f \in L^1(\Pi)$, identificaremos a f con el elemento de $\mathcal{S}'(\Pi)$ (que denotaremos también por f) cuya acción sobre una función $\varphi \in \mathcal{S}(\Pi)$ está dada por $f(\varphi) := \iint_\Pi f\varphi$.

Para $f \in \mathcal{S}'(\Pi)$ y $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ definimos el coeficiente de Fourier $\widehat{f}(m, n)$ de f por:

$$\widehat{f}(m, n) := \frac{1}{2\pi} f(e^{-im(\cdot_x)} e^{-in(\cdot_y)}).$$

Proposición 1.1. *Sean $f \in \mathcal{S}'(\Pi)$ y $\varphi \in \mathcal{S}(\Pi)$. Entonces*

(i)

$$f(\varphi) = \sum_{(m,n)} \widehat{\varphi}(m, n) \widehat{f}(-m, -n),$$

donde la serie anterior converge absolutamente. En particular, los coeficientes $\widehat{f}(m, n)$ caracterizan unívocamente a f.

(ii) Si además $\widehat{f} \in l^1_{m,n}$ entonces $f = \frac{1}{2\pi} \sum_{(m,n)} \widehat{f}(m, n) e^{im(\cdot_x)} e^{in(\cdot_y)}$.

Demostración:

(i) Como $f \in \mathcal{S}'(\Pi)$, existen $C > 0$ y $N \in \mathbb{N}_0$ tales que $|f(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_N$ para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\Pi)$. Por tanto

$$|\widehat{f}(m, n)| = C|f(e^{-im(\cdot_x)} e^{-in(\cdot_y)})| \leq C\|e^{-im(\cdot_x)} e^{-in(\cdot_y)}\|_N \leq C(|m| + |n|)^N.$$

Así, para $\varphi \in \mathcal{S}(\Pi)$

$$\begin{aligned}\sum |\widehat{\varphi}(m,n)\widehat{f}(-m,-n)| &\leq \sum |\widehat{\varphi}(m,n)|(|m|+|n|)^N \frac{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}(1+n^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}(1+n^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq C\||\widehat{\varphi}(m,n)|(|m|+|n|)^N(1+m^2)^{\frac{1}{2}}(1+n^2)^{\frac{1}{2}}\|_{l^2_{m,n}} \\ &\leq C\|\widehat{\varphi}(m,n)(1+|m|^2+|n|^2)^M\|_{l^2_{m,n}} \\ &\leq C\|(I-\Delta)^M\varphi\|_{L^2(\Pi)} \leq C\|\varphi\|_{2M}\end{aligned}$$

para cierto $M \in \mathbb{N}_0$, donde Δ denota el operador de Laplace. Así la serie en (i) es absolutamente sumable.

Ahora, si $\varphi \in \mathcal{S}(\Pi)$, entonces la suma parcial simétrica

$$S_N := \frac{1}{2\pi} \sum_{|m|,|n|\leq N} \widehat{\varphi}(m,n)e^{im(\cdot_x)}e^{in(\cdot_y)}$$

de la serie de Fourier de φ, converge en $\mathcal{S}(\Pi)$ a φ, cuando $N \to \infty$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}f(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{N\to\infty} f\Big(\sum_{|m|,|n|\leq N} \widehat{\varphi}(m,n)e^{im(\cdot_x)}e^{in(\cdot_y)}\Big) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{|m|,|n|\leq N} \widehat{\varphi}(m,n)f(e^{im(\cdot_x)}e^{in(\cdot_y)}) \\ &= \sum \varphi(m,n)\widehat{f}(-m,-n)\,,\end{aligned}$$

lo cual prueba (i).

(ii) Supongamos que $f \in \mathcal{S}'(\Pi)$ y $\widehat{f} \in l^1_{m,n}$, entonces la serie $\frac{1}{2\pi}\sum \widehat{f}(m,n)e^{i(mx+ny)}$ es uniformemente convergente y define una función 2π-periódica $F \in C(\mathbb{R}^2)$ cuyo coeficiente de Fourier $\widehat{F}(m,n)$ para cada par (m,n) es precisamente $\widehat{f}(m,n)$. Por la parte (i) de la proposición, $F = f$. $\square$

Definición 1.2. Para $s = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$ definamos el espacio de Sobolev anisotrópico H^s_π de distribuciones periódicas por

$$H^s_\pi := \{f \in \mathcal{S}'(\Pi) \mid \|f\|_s^2 := \|\widehat{f}\|^2_{l^2(\langle m\rangle^{2s_1}\langle n\rangle^{2s_2})} := \sum_{m,n} \langle m\rangle^{2s_1}\langle n\rangle^{2s_2}|\widehat{f}(m,n)|^2 < \infty\}\,,$$

donde $\langle\,\cdot\,\rangle := (1+|\cdot|)$. Notemos que si $s_1 \geq 0$, $s_2 \geq 0$ y $f \in X^s_\pi$, entonces $f \in L^2(\Pi)$.

Definimos también

$$X^s_\pi := \{f \in H^s_\pi | \widehat{f}(0,n) = 0 \ \ \forall n\}\,.$$

Observemos que si $s_1 \geq 0$ y $s_2 \geq 0$, entonces la condición $\widehat{f}(0,n) = 0$ para todo n significa que $\int_0^{2\pi} f(x,y)\,dx = 0$ para casi toda $y \in [0, 2\pi]$.

Proposición 1.3. *La aplicación* $\widehat{\ }: H^s_\pi \longrightarrow l^2(\langle m\rangle^{2s_1}\langle n\rangle^{2s_2})$ *es una biyección.*

Demostración. $\widehat{\ }$ es inyectiva por la proposición 1.1. Si $\{a_{mn}\} \in l^2(\langle m\rangle^{2s_1}\langle n\rangle^{2s_2})$ entonces para cierto $N \in \mathbb{N}_0$ se tiene que $f_{mn} := (1+|m|^2+|n|^2)^{-N}a_{mn} \in l^2_{m,n}$. Luego existe una única $F \in L^2(\Pi) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\Pi)$ tal que $\widehat{F}(m,n) = f_{mn}$. Si $u := (I-\Delta)^N F$, entonces $\widehat{u}(m,n) = a_{mn}$ para todo (m,n). $\square$

Sea $\mathcal{S}(\Pi\times\mathbb{R})$ la clase de las funciones $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ para las cuales se cumple que:

(i) $\varphi(t) := \varphi(\cdot_x, \cdot_y, t) \in \mathcal{S}(\Pi)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y

(ii)
$$\|\varphi\|_{MN} := \sup_{\substack{|\alpha|=|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)|\le N \\ (x,y,t)\in\mathbb{R}^3}} \langle t\rangle^M |\partial^\alpha \varphi(x,y,t)| < \infty \qquad \forall N, M \in \mathbb{N}_0\,.$$

$\mathcal{S}(\Pi\times\mathbb{R})$ está dotado con la estructura topológica generada por las seminormas $\|\cdot\|_{MN}$. Sea $\mathcal{S}'(\Pi\times\mathbb{R})$ el espacio dual de $\mathcal{S}(\Pi\times\mathbb{R})$. Sean $\mathcal{S}(\mathbb{R}_t)$ el espacio de funciones de Schwarz de la variable temporal t y $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_t)$ su dual. Para $u \in \mathcal{S}'(\Pi\times\mathbb{R})$ y $m,n \in \mathbb{N}_0$ definamos $u_{mn} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t)$ por

$$u_{mn}(\varphi) := \frac{1}{2\pi} u(e^{-im(\cdot_x)}e^{-in(\cdot_y)}\varphi(\cdot_t))\,, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_t)\,.$$

Si para cada (m,n) existe una función $g_{mn}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ que representa a la transformada de Fourier de $u_{m,n}$, es decir, tal que $\widehat{u}_{mn}(\varphi) = \int g_{mn}(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau$, para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_\tau)$, entonces escribiremos $\widehat{u}(m,n,\tau) := g_{mn}(\tau)$. Definimos $\mathcal{S}'_{\mathcal{F}} := \mathcal{S}'_{\mathcal{F}}(\Pi\times\mathbb{R})$ como la colección de distribuciones en $\mathcal{S}'(\Pi\times\mathbb{R})$ con la propiedad anterior.

Sea $l(m,n) := m^3 - \frac{n^2}{m}$, $m \neq 0$, el símbolo de la parte lineal de la ecuación KPII. En adelante denotaremos

$$\sigma := \tau - l(m,n), \quad \theta := \frac{\sigma}{1+|m|^3} \quad \text{y} \quad \lambda := (m,n,\tau)\,.$$

Definición 1.4. Para $s = (s_1,s_2) \in \mathbb{R}^2$, $\gamma \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ sea

$$Y_{s\gamma\varepsilon} := \{u \in \mathcal{S}'_{\mathcal{F}} | \widehat{u}(0,\cdot_n,\cdot_\tau) = 0 \ \wedge\ \|u\|^2_{s\gamma\varepsilon} := \sum_{\substack{m\neq 0\\ n}} \int_{\mathbb{R}} \langle m\rangle^{2s_1}\langle n\rangle^{2s_2}\langle\sigma\rangle^{2\gamma}\langle\theta\rangle^{2\varepsilon}|\widehat{u}(\lambda)|^2\,d\tau < \infty\}.$$

Puede demostrarse que $Y_{s\gamma\varepsilon} \cap \mathcal{S}(\Pi\times\mathbb{R})$ es denso en $Y_{s\gamma\varepsilon}$.

Describamos ahora el grupo $W(t)$ asociado a la parte lineal de la ecuación KPII:
Si $f \in X^s_\pi$, para $t \in \mathbb{R}$, sea

$$g(m,n) := \begin{cases} e^{itl(m,n)}\widehat{f}(m,n) & \text{si } m \neq 0 \\ 0 & \text{si } m = 0\,. \end{cases}$$

Entonces $g \in l^2(\langle m \rangle^{2s_1} \langle n \rangle^{2s_2})$ y $g(0,n) = 0$ para toda $n \in \mathbb{Z}$. Por la proposición 1.3 existe entonces un elemento en X^s_π que denotaremos $W(t)f$, tal que $[W(t)f]^\frown(m,n) = g(m,n)$.

Definición de solución

El concepto de solución para el problema (0.1-P) proviene de la fórmula de Duhamel. Formalmente una función u de la variable temporal t y con valores en el conjunto $\{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\}$ es solución de (0.1-P) en un intervalo $[-T,T]$ si satisface:

$$u(t) = W(t)u_0 + \int_0^t W(t-t')[-\frac{1}{2}\partial_x u(t')^2]\, dt' \quad \forall t \in [-T,T]\,. \tag{1.1}$$

El procedimiento y los teoremas que se presentan a continuación darán sentido riguroso a la expresión (1.1) en el contexto de los espacios introducidos previamente y permitirán definir de manera precisa el concepto de solución de (0.1-P).

Si $f \in \mathcal{S}(\Pi \times \mathbb{R}) \hookrightarrow C(\mathbb{R}_t; \mathcal{S}(\Pi))$ es tal que $\widehat{f}(0,n,\tau) = 0$ para toda $n \in \mathbb{Z}$ y para todo $\tau \in \mathbb{R}$, entonces $\widehat{f(t')}(0,n) = 0$ para todo $t' \in \mathbb{R}$ y para todo $n \in \mathbb{Z}$ y así, $W(t-t')f(t')$ está bien definido para $t, t' \in \mathbb{R}$; y, para t fijo, la función $t' \mapsto W(t-t')f(t')$ es continua de $\mathbb{R}$ en $\mathcal{S}(\Pi)$. Por tanto la integral

$$\int_0^t W(t-t')f(t')\, dt'$$

es un elemento de $\mathcal{S}(\Pi)$ y para $t \in \mathbb{R}$ el coeficiente de Fourier (m,n) con $m \neq 0$ de esta integral se puede calcular, usando las propiedades de la integral de Bochner, de la siguiente manera:

$$\Big[\int_0^t W(t-t')f(t')\, dt'\Big]^\frown(m,n) = \frac{1}{2\pi}\langle \int_0^t W(t-t')f(t')\, dt', e^{-im(\cdot_x)}e^{-in(\cdot_y)}\rangle$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^t \langle W(t-t')f(t'), e^{-i(\cdot_x)}e^{-i(\cdot_y)}\rangle\, dt' = \int_0^t e^{i(t-t')l(m,n)}\widehat{f(t')}(m,n)\, dt'\,.$$

Mostremos que para t fijo, estos coeficientes de Fourier son absolutamente sumables y podemos por tanto aplicar la proposición 1.1 (ii) para dar una expresión de $\int_0^t W(t-t')f(t')\, dt'$ en términos de sus coeficientes de Fourier. En efecto,

$$\sum_{m\neq 0,n} \Big|\int_0^t e^{i(t-t')l(m,n)}\widehat{f(t')}(m,n)\, dt'\Big| \leq \int_0^t \sum |\widehat{f(t')}(m,n)|\, dt'$$
$$= \int_0^t \sum |\widehat{f(t')}(m,n)| \frac{\langle m \rangle\langle n \rangle}{\langle m \rangle\langle n \rangle}\, dt' \leq C\int_0^t \Big(\sum |\widehat{f(t')}(m,n)|^2 \langle m \rangle^2 \langle n \rangle^2\Big)^{\frac{1}{2}}\, dt'$$
$$\leq C\int_0^t \Big(\iint_\Pi |(I-\Delta)^M f(x,y,t')|^2\, dy\, dx\Big)^{\frac{1}{2}}\, dt'$$
$$\leq C|t|^{\frac{1}{2}}\Big\{\int_0^t \iint_\Pi |(I-\Delta)^M f|^2\, dy\, dx\, dt'\Big\}^{\frac{1}{2}} < \infty\,,$$

para cierto natural M. Así, de la proposición 1.1 (ii):

$$\left[\int_0^t W(t-t')f(t')\,dt'\right](x,y) = \frac{1}{2\pi}\sum_{m\neq 0,n} e^{imx}e^{iny}\int_0^t e^{i(t-t')l(m,n)}\widehat{f(t')}(m,n)\,dt' \quad \forall(x,y,t)\,. \tag{1.2}$$

Observemos ahora que para (m,n) fijo, la función $t'\mapsto \widehat{f(t')}(m,n)$ pertence a $\mathcal{S}(\mathbb{R}_{t'})$. En realidad, para $j,k\in\mathbb{N}_0$

$$\sup_{t'}\langle t'\rangle^j|\partial_{t'}^k\widehat{f(t')}(m,n)| \leq C\sup_{t'}\iint_\Pi \langle t'\rangle^j|\partial_t^k f(x,y,t')e^{-imx}e^{-iny}|\,dx\,dy \leq C\|f\|_{jk}.$$

De aquí se sigue que $\widehat{f}(m,n,\tau)=[\widehat{f(t')}(m,n)]^{\wedge t'}(\tau)$ pertenece a $L^1(\mathbb{R}_\tau)$ y por tanto

$$[e^{-it'l(m,n)}\widehat{f(t')}(m,n)]^{\wedge t'}(\tau) = \widehat{f}(m,n,\tau+l(m,n)) \in L^1(\mathbb{R}_\tau).$$

De este hecho, de (1.2) y de la propiedad de que para una función $g\in L^1(\mathbb{R}_t)$ con $\widehat{g}\in L^1(\mathbb{R}_\tau)$ se cumple que

$$\int_0^t g(t')\,dt' = \frac{1}{(2\pi)^{\frac12}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{it\tau}-1}{i\tau}\widehat{g}(\tau)\,d\tau\,,$$

concluimos que

$$\begin{aligned}
&\left[\int_0^t W(t-t')f(t')\,dt'\right](x,y)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac32}}\sum_{m\neq 0,n} e^{imx}e^{iny}e^{itl(m,n)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{it\tau}-1}{i\tau}\widehat{f}(m,n,\tau+l(m,n))\,d\tau\\
&= \sum e^{i(mx+ny)}e^{itl(m,n)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{it(\tau-l(m,n))}-1}{i(\tau-l(m,n))}\widehat{f}(m,n,\tau)\,d\tau\,.
\end{aligned}$$

Si $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ es igual a 1 en una vecindad de 0, entonces la expresión anterior es igual a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^{\frac32}}\sum e^{i(mx+ny)}e^{itl(m,n)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{it\sigma}-1}{i\sigma}\varphi(\sigma)\widehat{f}(m,n,\tau)\,d\tau\\
&+\frac{1}{(2\pi)^{\frac32}}\sum e^{i(mx+ny)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{it\tau}}{i\sigma}(1-\varphi(\sigma))\widehat{f}(m,n,\tau)\,d\tau\\
&+\frac{1}{(2\pi)^{\frac32}}\sum e^{i(mx+ny)}e^{itl(m,n)}\int_{-\infty}^{+\infty}-\frac{1-\varphi(\sigma)}{i\sigma}\widehat{f}(m,n,\tau)\,d\tau\,.
\end{aligned}$$

Sean f_0, f_1 y h definidos por

$$\begin{aligned}
\widehat{f_1(t)}(m,n) &:= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{it\sigma}-1}{i\sigma}\varphi(\sigma)\widehat{f}(m,n,\tau)\,d\tau\,,\\
\widehat{h}(m,n,\tau) &:= \frac{\widehat{f}(m,n,\tau)}{i\sigma}(1-\varphi(\sigma))\,,\\
\widehat{f_0}(m,n) &:= -\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\varphi(\sigma)}{i\sigma}\widehat{f}(m,n,\tau)\,d\tau\ ;
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\int_0^t W(t-t')f(t')\,dt' &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}W(t)f_1(t) + h(t) + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}W(t)f_0 \\ &=: I(f)(t) + I\!I(f)(t) + I\!I\!I(f)(t)\,,\end{aligned} \tag{1.3}$$

donde $h(t) := h(\cdot_x, \cdot_y, t)$.

Sea $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi \equiv 1$ en $[-1,1]$ y $\psi \equiv 0$ por fuera de $[-2,2]$. Sea $T > 0$ y escojamos la función $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mencionada arriba tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi \equiv 1$ en $[-\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}]$ y $\varphi \equiv 0$ por fuera de $[-\frac{2}{T^{\frac{1}{2}}}, \frac{2}{T^{\frac{1}{2}}}]$. Para $u, v \in Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon} \cap \mathcal{S}(\Pi \times \mathbb{R})$ definamos

$$A_T(u,v) := \psi(T^{-1}\cdot_t)I(-\frac{1}{2}\partial_x(uv)) + I\!I(-\frac{1}{2}\partial_x(uv)) + \psi(\cdot_t)I\!I\!I(-\frac{1}{2}\partial_x(uv)) \text{ y} \tag{1.4}$$

$$B_T(u,v) := \psi(T^{-1}\cdot_t)I(-\frac{1}{2}\partial_x(uv)) + I\!I(-\frac{1}{2}\partial_x(uv)) + \psi(T^{-1}\cdot_t)I\!I\!I(-\frac{1}{2}\partial_x(uv))\,. \tag{1.5}$$

El siguiente lema, cuya demostración se dará en el capítulo II, establece que bajo condiciones adecuadas sobre s y ε, las formas bilineales A_T y B_T poseen ciertas propiedades de acotamiento que nos permitirán dar una definición de solución del problema (0.1-P) y posteriormente, vía un teorema de punto fijo, establecer la existencia de dicha solución.

Lema 1.5. *Para $s_1 > 0$, $s_2 \geq 0$ y ε tal que $0 < \varepsilon - \frac{1}{4} < \min\{\frac{1}{12}, \frac{s_1}{3}\}$ se tiene que*

(i)

$$A_T(u,v),\; B_T(u,v) \in C_b(\mathbb{R}_t; X^s_\pi) \cap Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon}\,,$$

(ii)

$$\|B_T(u,v)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_t;X^s_\pi)\cap Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon}} \leq C_T\|u\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon}\|v\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon} \quad y \tag{1.6}$$

(iii) existen $\delta > 0$ y $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ tales que para $T \in (0,1]$

$$\|A_T(u,v)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_t;X^s_\pi)\cap Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon}} \leq C(\|u\|_{s\gamma 0}\|v\|_{s\gamma 0} + T^\delta\|u\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon}\|v\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon})\,, \tag{1.7}$$

donde C es independiente de T.

Del lema 1.5 y del hecho de que $Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon} \cap \mathcal{S}(\Pi \times \mathbb{R})$ es denso en $Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon}$ se sigue que A_T y B_T tienen extensiones continuas únicas a operadores, que seguiremos denotando A_T y B_T, de $Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon} \times Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon}$ en $Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon} \cap C_b(\mathbb{R}_t; X^s_\pi)$.

Definición 1.6. Sean $T > 0$, s y ε como en el lema 1.5 y $u_0 \in X^s_\pi$. Decimos que una función $u \in Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon}[-T,T] := \{v|_{[-T,T]} | v \in Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon} \cap C_b(\mathbb{R}_t; X^s_\pi)\}$ es solución en $[-T,T]$ del problema (0.1-P) con dato inicial u_0 si existe una $v \in C_b(\mathbb{R}_t; X^s_\pi) \cap Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon}$ extensión de u tal que

$$u(t) = W(t)u_0 + [B_T(v,v)](t) \quad \forall t \in [-T,T]\,.$$

Observación 1.7. De la demostración del lema 1.5 podrá verse que cada uno de los tres sumandos que conforman la definición de A_T en (1.4) posee las propiedades de acotamiento expresadas en (1.7) y similarmente, cada uno de los sumandos en la definición de B_T en (1.5) cumple las propiedades de acotamiento expresadas en (1.6). En particular, cada sumando puede extenderse a una forma bilineal continua de $Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon} \times Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon}$ en $C_b(\mathbb{R}_t; X^s_\pi) \cap Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon}$. Ello permite probar, usando densidad, que si ψ_1, T_1, φ_1 y ψ_2, φ_2, T_2, son dos ternas que satisfacen las propiedades exigidas para ψ, T y φ; si $A_{T_1\varphi_1\psi_1}$, $B_{T_1\varphi_1\psi_1}$ y $A_{T_2\varphi_2\psi_2}$, $B_{T_2\varphi_2\psi_2}$ corresponden a los operadores A_T y B_T definidos con ψ_1, T_1, φ_1 y con ψ_2, T_2, φ_2, respectivamente; si $T_1 \leq T_2$ y si v_1 y v_2 son dos extensiones en $Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon}$ de la misma función $u \in Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon}[-T_1, T_1]$, entonces

$$[B_{T_1\varphi_1\psi_1}(v_1,v_1)](t) = [B_{T_2\varphi_2\psi_2}(v_2,v_2)](t) \quad \forall t \in [-T_1,T_1]\,.$$

En particular, la definición 1.6 es independiente de la escogencia de φ, de ψ y de v. También se tiene que si $T_1 = T_2 = T \in (0,1]$, entonces

$$[A_{T\varphi_1\psi_1}(v_1,v_1)](t) = [B_{T\varphi_2\psi_2}(v_2,v_2)](t) \quad \forall t \in [-T,T]\,.$$

Resultados principales

A continuación presentamos los enunciados de los principales resultados de este trabajo. En los enunciados de estos teoremas suponemos que $s = (s_1, s_2)$ es tal que $s_1 > 0$ y $s_2 \geq 0$.

Teorema I. *Sea $u_0 \in X^s_\pi$. Entonces existen un $T = T(\|u_0\|_s) > 0$, y un $\varepsilon > \frac{1}{4}$ tal que el problema (0.1-P) tiene una solución $u \in Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon}[-T,T]$ en $[-T,T]$ con dato inicial u_0.*

Teorema II. *Sean $u_0 \in X^s_\pi$ y $T > 0$. Entonces existe a lo sumo una solución $u \in Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon}[-T,T]$ de (0.1-P) en $[-T,T]$ con dato inicial u_0.*

Capítulo 2

Demostración del Lema 1.5

Demostraremos las partes (iii) y (ii) del enunciado del lema 1.5. La demostración de (ii) es similar a la de (iii) pero simplificada por el hecho de que en ella no es preciso obtener una constante independiente de T. Estimaremos la normas en $L^\infty(\mathbb{R}_t; X^s_\pi)$ y en $Y_{s\frac{1}{2}\epsilon}$ de cada uno de los términos del lado derecho de (1.4). En nuestras estimaciones haremos uso repetido de los dos lemas siguientes, en los cuales se expresan algunas desigualdades elementales de cálculo y una sencilla propiedad que permite estimar una sumatoria mediante la estimación de su integral análoga.

Lema 2.1.

(i) Para $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\langle x\rangle^\alpha \langle x-\mu\rangle^\alpha} \leq \frac{C}{\langle\mu\rangle^{2\alpha-1}}\,. \tag{2.1}$$

(ii) Para $\alpha \in (0,1)$ *y* $0 < \alpha' < \alpha$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\langle x\rangle^\alpha \langle x-\mu\rangle} \leq \frac{C}{\langle\mu\rangle^{\alpha'}}\,. \tag{2.2}$$

(iii) Para $\alpha > \frac{1}{2}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{|x-a|}\langle x\rangle^\alpha} \leq \frac{C}{\langle a\rangle^{\alpha-\frac{1}{2}}}\,. \tag{2.3}$$

(iv) Para $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$,

$$\int_a^t \frac{dx}{\sqrt{|x-a|}\langle x\rangle^\alpha} \leq C\langle \max\{|a|,|t|\}\rangle^{\frac{1}{2}-\alpha}\,. \tag{2.4}$$

Lema 2.2. *Sea* $f \geq 0$ *una función real. Supongamos que cierto intervalo* I *es la unión de* N *intervalos contiguos en cada uno de los cuales* f *es monótona. Entonces*

$$\sum_{n\in I} f(n) \leq \int_I f(x)\,dx + N\sup_{x\in I} f(x)\,.$$

Estimación de $\|\psi(t)\,I\!I\!I(-\frac{1}{2}\partial_x(uv))(t)\|_s$:

De (1.3), con $f = -\frac{1}{2}\partial_x(uv)$, se tiene que $\psi(t)\,\mathit{I\!I\!I}(f)(t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\psi(t)W(t)f_0$. Por tanto, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\|\psi(t)\,\mathit{I\!I\!I}(f)(t)\|_s^2 &= C\|\psi(t)W(t)f_0\|_s^2 \leq \|f_0\|_s^2 \\
&\leq C\sum_{\substack{m\neq 0\\ n}} |m|^{2s_1}\langle n\rangle^{2s_2}\Big(\int_{|\sigma|>\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}} \frac{|\widehat{f}(m,n,\tau)|}{|\sigma|}\,d\tau\Big)^2 \\
&\leq C\sum |m|^{2s_1}\langle n\rangle^{2s_2}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2|\widehat{f}(m,n,\tau)|}{\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}+|\sigma|}\,d\tau\Big)^2 \\
&\leq C\sum |m|^{2s_1}\langle n\rangle^{2s_2}\widehat{g}_0(m,n)^2 =: \|g_0\|_s^2\,,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

donde

$$\widehat{g}_0(m,n) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{f}(m,n,\tau)|}{\langle\sigma\rangle_{T^{\frac{1}{2}}}}\,d\tau \quad \text{y} \quad \langle\sigma\rangle_{T^{\frac{1}{2}}} := (T^{-\frac{1}{2}}+|\sigma|)\,.$$

Estimaremos $\|g_0\|_s$ por dualidad. Para ello tomamos una función no negativa $g \in l^2_{m,n}$ tal que $g(0,n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, usamos para $m \neq 0$, $m_1 \neq 0$ y $m \neq m_1$ las notaciones

$$\tau_2 := \tau - \tau_1\,, \quad m_2 := m - m_1\,, \quad n_2 := n - n_1\,,$$

$$\lambda := (m,n,\tau)\,, \quad \lambda_1 := (m_1,n_1,\tau_1)\,, \quad \lambda_2 := \lambda - \lambda_1 = (m_2,n_2,\tau_2)\,,$$

$$\sigma := \tau - l(m,n)\,, \quad \sigma_1 := \tau_1 - l(m_1,n_1)\,, \quad \sigma_2 := \tau_2 - l(m_2,n_2)$$

y definimos

$$\begin{aligned}
J : &= \sum_{\substack{m\neq 0\\ n}} |m|^{s_1}\langle n\rangle^{s_2} g(m,n)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{f}(m,n,\tau)|}{\langle\sigma\rangle_{T^{\frac{1}{2}}}}\,d\tau \\
&\leq C\sum |m|^{s_1}\langle n\rangle^{s_2} g(m,n)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|m|}{\langle\sigma\rangle_{T^{\frac{1}{2}}}}\sum_{\substack{m_1\neq 0\\ m_1\neq m\\ n_1}}\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{u}(m_1,n_1,\tau_1)|\,|\widehat{v}(m_2,n_2,\tau_2)|\,d\tau_1\,d\tau \\
&= \sum\int\sum\int \frac{|m|^{s_1+1}\langle n\rangle^{s_2}}{\langle\sigma\rangle_{T^{\frac{1}{2}}}} g(m,n)|\widehat{u}(\lambda_1)|\,|\widehat{v}(\lambda_2)|\,d\tau_1\,d\tau\,.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Por un argumento de simetría puede verse que es suficiente estimar la expresión anterior considerando sólo las sumas e integrales en el conjunto $\{(\lambda,\lambda_1)\,|\,|\sigma_1| \geq |\sigma_2|\}$. De acuerdo con esta consideración, escribimos el lado derecho de (2.6) como una suma $J_{A_1} + J_{A_2} + J_{B_1} + J_{B_2}$, donde J_{A_1}, J_{A_2}, J_{B_1} y J_{B_2} corresponden respectivamente a las sumas e integrales efectuadas sobre los conjuntos:

$$A_1 := \{(\lambda,\lambda_1)\,|\,|\sigma|\geq|\sigma_1|\geq|\sigma_2|\ \wedge\ \frac{3}{4}|m|^3\leq 4|\sigma|\},$$

$$A_2 := \{(\lambda,\lambda_1)\,|\,|\sigma|\geq|\sigma_1|\geq|\sigma_2|\ \wedge\ \frac{3}{4}|m|^3> 4|\sigma|\ \},$$

$$B_1 := \{(\lambda,\lambda_1)\,|\,|\sigma_1|>|\sigma|\ \wedge\ |\sigma_1|\geq|\sigma_2|\ \wedge\ \frac{3}{4}|m_1|^3\leq 4|\sigma_1|\}\ \text{y}$$

$$B_2 := \{(\lambda,\lambda_1)\,|\,|\sigma_1|>|\sigma|\ \wedge\ |\sigma_1|\geq|\sigma_2|\ \wedge\ \frac{3}{4}|m_1|^3> 4|\sigma_1|\}.$$

ESTIMACIÓN DE J_{A_1}:

Para $\gamma\in(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$, a ser escogido más adelante, se tiene que

$$J_{A_1}=\sum_{\{\lambda|\exists\lambda_1:(\lambda,\lambda_1)\in A_1\}}\int\frac{|m|^{s_1+1}\langle n\rangle^{s_2}}{\langle\sigma\rangle_{T^{\frac{1}{2}}}}g(m,n)\sum_{\{\lambda_1|(\lambda,\lambda_1)\in A_1\}}\int\frac{p_A(\lambda_1)}{\langle\sigma_1\rangle^{\gamma}|m_1|^{s_1}\langle n_1\rangle^{s_2}}\frac{q_A(\lambda_2)}{\langle\sigma_2\rangle^{\gamma}|m_2|^{s_1}\langle n_2\rangle^{s_2}}\,d\tau_1\,d\tau\,,$$

donde

$$\begin{aligned}p_A(\lambda)&:=|m|^{s_1}\langle n\rangle^{s_2}\langle\sigma\rangle^{\gamma}|\widehat{u}(\lambda)|\quad\text{y}\\ q_A(\lambda)&:=|m|^{s_1}\langle n\rangle^{s_2}\langle\sigma\rangle^{\gamma}|\widehat{v}(\lambda)|\,.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Entonces, teniendo en cuenta que $T\in(0,1]$ y que $\langle n\rangle^{s_2}\langle n_1\rangle^{-s_2}\langle n_2\rangle^{-s_2}\leq C$ y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en la variable λ_1, obtenemos:

$$J_{A_1}\leq C\sum_{\{\lambda|\frac{3}{4}|m|^3\leq 4|\sigma|\}}\int\frac{|m|^{s_1+\frac{1}{4}}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{4}}}\frac{|m|^{\frac{3}{4}}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{3}{4}}}g(m,n)\Big\{\sum_{\{\lambda_1||\sigma_2|\leq|\sigma_1|\leq|\sigma|\}}\int\frac{d\tau_1}{\langle\sigma_1\rangle^{2\gamma}\langle\sigma_2\rangle^{2\gamma}|m_1|^{2s_1}|m_2|^{2s_1}}\Big\}^{\frac{1}{2}}\Big\{\sum_{\{\lambda_1||\sigma_2|\leq|\sigma_1|\leq|\sigma|\}}\int p_A^2(\lambda_1)q_A^2(\lambda_2)\ d\tau_1\Big\}^{\frac{1}{2}}d\tau.\tag{2.8}$$

Si aplicamos ahora la desigualdad de Cauchy-Schwarz en la variable λ y definimos

$$I_{A_1}:=\sup_{\substack{\frac{3}{4}|m|^3\leq 4|\sigma|\\ m\neq 0}}\frac{|m|^{s_1+\frac{1}{4}}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{4}}}\Big\{\sum_{\{\lambda_1||\sigma_2|\leq|\sigma_1|\leq|\sigma|\}}\int\frac{d\tau_1}{\langle\sigma_1\rangle^{2\gamma}\langle\sigma_2\rangle^{2\gamma}|m_1|^{2s_1}|m_2|^{2s_1}}\Big\}^{\frac{1}{2}},$$

observamos entonces que

$$\begin{aligned}J_{A_1}&\leq CI_{A_1}\Big\{\sum_{\substack{m\neq 0\\ n}}g(m,n)^2|m|^{\frac{3}{2}}\int_{\{\sigma:\frac{3}{4}|m|^3\leq 4|\sigma|\}}\frac{d\sigma}{\langle\sigma\rangle^{\frac{3}{2}}}\Big\}^{\frac{1}{2}}\Big\{\sum_{\substack{m\neq 0\\ n}}\int\sum_{\substack{m_1\neq 0\\ n_1}}\int p_A^2(\lambda_1)q_A^2(\lambda_2)\ d\tau_1\ d\tau\Big\}^{\frac{1}{2}}\\ &\leq CI_{A_1}\|g\|_{l^2_{m,n}}\|p_A\|\|q_A\|\,,\end{aligned}\tag{2.9}$$

donde $\|\cdot\|:=\|\cdot\|_{l^2_\lambda}$. Mostraremos que $I_{A_1}\leq C$. Observemos que

$$\begin{aligned}\sigma_1+\sigma_2-\sigma&=\tau_1-l(m_1,n_1)+\tau-\tau_1-l(m-m_1,n-n_1)-\tau+l(m,n)\\ &=l(m,n)-l(m_1,n_1)-l(m-m_1,n-n_1)\\ &=m^3-\frac{n^2}{m}-{m_1}^3+\frac{n_1^2}{m_1}-(m-m_1)^3+\frac{(n-n_1)^2}{m-m_1}\\ &=3mm_1(m-m_1)+\frac{(mn_1-m_1n)^2}{mm_1(m-m_1)}\,.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Observemos que los dos sumandos anteriores tienen el mismo signo. Si $z_1 := 3mm_1(m-m_1)$ y $\mu_1 := \sigma + z_1 + \frac{(mn_1-m_1n)^2}{mm_1(m-m_1)}$, entonces $\sigma_2 = \mu_1 - \sigma_1$. Así, para $(\lambda, \lambda_1) \in A_1 \cup A_2$, como $|\sigma_2| \leq |\sigma_1| \leq |\sigma|$, entonces $|\mu_1| \leq 2|\sigma|$ y $|z_1| \leq |\sigma_1| + |\sigma_2| + |\sigma| \leq 3|\sigma|$. Sin pérdida de generalidad consideremos sólo el caso en que $m > 0$. En dicho caso se tiene entonces que $-3|\sigma| \leq z_1 \leq \min\{\frac{3}{4}m^3, 3|\sigma|\}$. (Notemos que $\frac{3}{4}m^3$ es el máximo valor de la función cuadrática $m_1 \mapsto 3mm_1(m-m_1)$ si $m > 0$). Usando los lemas 2.1 (i) y 2.2 obtenemos:

$$\begin{aligned} I_{A_1} &\leq C \sup_{\frac{3}{4}m^3 \leq 4|\sigma|} \frac{|m|^{s_1+\frac{1}{4}}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{4}}} \Big\{ \sum_{\{(m_1,n_1) | -3|\sigma| \leq z_1 \leq \frac{3}{4}m^3\}} \frac{1}{|m_1|^{2s_1}|m_2|^{2s_1}\langle\mu_1\rangle^{4\gamma-1}} \Big\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \sup \frac{|m|^{s_1+\frac{1}{4}}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{4}}} \Big\{ \sum_{\{m_1 | -3|\sigma| \leq z_1 \leq \frac{3}{4}m^3\}} |m_1|^{-2s_1}|m_2|^{-2s_1} \Big[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dn_1}{\langle\mu_1\rangle^{4\gamma-1}} + 1 \Big] \Big\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Para m_1 fijo efectuamos el cambio de variable $\mu_1 \mapsto n_1$ cuyo jacobiano es $\frac{C\sqrt{|z_1|}}{m\sqrt{|\sigma+z_1-\mu_1|}}$. Así, teniendo en cuenta que $|m|^{s_1}|m_1|^{-s_1}|m_2|^{-s_1} \leq C$, se sigue que

$$\begin{aligned} I_{A_1} &\leq C \sup \frac{|m|^{s_1+\frac{1}{4}}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{4}}} \Big\{ \sum_{\{m_1 | -3|\sigma| \leq z_1 \leq \frac{3}{4}m^3\}} |m_1|^{-2s_1}|m_2|^{-2s_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{|z_1|}\, d\mu_1}{m\sqrt{|\sigma + z_1 - \mu_1|}\langle\mu_1\rangle^{4\gamma-1}} \Big\}^{\frac{1}{2}} \\ &+ C \sup \frac{|m|^{\frac{1}{4}}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{4}}} \Big\{ \sum_{\{m_1 | -3|\sigma| \leq z_1 \leq \frac{3}{4}m^3\}} 1 \Big\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Como para $(\lambda, \lambda_1) \in A_1$ se tiene que $|z_1| \leq 3|\sigma|$, entonces

$$|\sigma| \geq m|m_1||m_2| \geq m \min\{|m_1|^2, |m_2|^2\} = m \min\{|m_1|^2, |m - m_1|^2\}$$

y por tanto

$$|m_1| \leq C(m + \frac{|\sigma|^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}}) \leq C \frac{m^{\frac{3}{2}} + |\sigma|^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}} \leq C \frac{|\sigma|^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}}. \tag{2.11}$$

De este modo, la cardinalidad del conjunto $\{m_1 | -3|\sigma| \leq z_1 \leq \frac{3}{4}m^3\}$ está acotada por $C\frac{|\sigma|^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}}$.

Por lo tanto, usando (2.3) se sigue que

$$\begin{aligned} I_{A_1} &\leq C \sup \frac{m^{\frac{1}{4}}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{4}}} \Big\{ \sum_{m_1} \frac{|m|^{2s_1}\sqrt{|z_1|}}{|m_1|^{2s_1}|m_2|^{2s_1} m\langle\sigma + z_1\rangle^{4\gamma-\frac{3}{2}}} \Big\}^{\frac{1}{2}} + C \sup \frac{m^{\frac{1}{4}}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{4}}} \frac{|\sigma|^{\frac{1}{4}}}{m^{\frac{1}{4}}} \\ &\leq C \sup \frac{m^{\frac{1}{4}}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{4}}} \Big\{ \int_{\{m_1 | -3|\sigma| \leq z_1 \leq \frac{3}{4}m^3\}} \frac{|m|^{2s_1}\sqrt{|z_1|}\, dm_1}{|m_1|^{2s_1}|m_2|^{2s_1} m\langle\sigma + z_1\rangle^{4\gamma-\frac{3}{2}}} + \frac{|\sigma|^{\frac{1}{2}}}{m} \Big\}^{\frac{1}{2}} + C. \end{aligned}$$

Hacemos ahora el cambio de variable $z_1 \mapsto m_1$ cuyo jacobiano es $\frac{C}{m^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{3}{4}m^3-z_1}}$ y definimos z_0' como el valor de z_1 correspondiente a $m_1 = -\frac{1}{8}|\sigma|^{\frac{1}{3}}$, entonces vemos que $z_0' < 0$ y que $|z_0'| \leq C m|\sigma|^{\frac{2}{3}}$. Por tanto,

$$I_{A_1} \leq C \sup \frac{m^{s_1+\frac{1}{4}}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{4}}}\Big\{\int_{-3|\sigma|}^{z_0'} \frac{\sqrt{|z_1|}\,dz_1}{|m_1|^{2s_1}|m_2|^{2s_1}m^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{3}{4}m^3-z_1}\langle\sigma+z_1\rangle^{4\gamma-\frac{3}{2}}}\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+ C\sup \frac{m^{\frac{1}{4}}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{4}}}\Big\{\int_{z_0'}^{\frac{3}{4}m^3} \frac{\sqrt{|z_1|}\,dz_1}{m^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{3}{4}m^3-z_1}\langle\sigma+z_1\rangle^{4\gamma-\frac{3}{2}}}\Big\}^{\frac{1}{2}} + C\sup\frac{|m|^{\frac{1}{4}}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{4}}}\frac{|\sigma|^{\frac{1}{4}}}{m^{\frac{1}{2}}} + C.$$

Observemos ahora que para z_1 en el intervalo de integración $[-3|\sigma|, z_0']$, los valores correspondientes de $|m_1|$ y $|m_2|$ exceden $C|\sigma|^{\frac{1}{3}}$. De esta manera,

$$\begin{aligned}
I_{A_1} &\leq C\sup \frac{m^{s_1+\frac{1}{4}}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{4}}}\Big\{\int_{-3|\sigma|}^{z_0'} \frac{\sqrt{|z_1|}\,dz_1}{|\sigma|^{\frac{4}{3}s_1}m^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{3}{4}m^3+|z_1|}\langle\sigma+z_1\rangle^{4\gamma-\frac{3}{2}}}\Big\}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + C\sup\frac{m^{\frac{1}{4}}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{4}}}\Big\{\int_{z_0'}^{\frac{3}{4}m^3}\frac{m^{\frac{1}{2}}|\sigma|^{\frac{1}{3}}\,dz_1}{m^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{3}{4}m^3-z_1}\langle\sigma+z_1\rangle^{4\gamma-\frac{3}{2}}}\Big\}^{\frac{1}{2}} + C \\
&\leq C\sup\frac{m^{s_1+\frac{1}{4}}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{4}+\frac{2}{3}s_1}m^{\frac{3}{4}}}\Big\{\int_{-3|\sigma|}^{z_0'}\frac{dz_1}{\langle\sigma+z_1\rangle^{4\gamma-\frac{3}{2}}}\Big\}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + C\sup\frac{1}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{12}}m^{\frac{1}{4}}}\Big\{\int_{z_0'+\sigma}^{\frac{3}{4}m^3+\sigma}\frac{dz_1}{\sqrt{\frac{3}{4}m^3+\sigma-z_1}\;\langle z_1\rangle^{4\gamma-\frac{3}{2}}}\Big\}^{\frac{1}{2}} + C.
\end{aligned}$$

Usando la desigualdad de cálculo (2.4) obtenemos:

$$\begin{aligned}
I_{A_1} &\leq C\sup\frac{m^{s_1}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{4}+\frac{2}{3}s_1}m^{\frac{1}{2}}}\{\langle\sigma\rangle^{\frac{5}{2}-4\gamma}\}^{\frac{1}{2}} + C\sup\frac{1}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{12}}m^{\frac{1}{4}}}\{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}-(4\gamma-\frac{3}{2})}\}^{\frac{1}{2}} + C \\
&\leq C\sup\frac{1}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{4}+\frac{2}{3}s_1-\frac{1}{3}s_1-\frac{5}{4}+2\gamma}m^{\frac{1}{2}}} + C\sup\frac{1}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{12}-(1-2\gamma)}m^{\frac{1}{4}}} + C \\
&\leq C\sup\frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2\gamma-1+\frac{1}{3}s_1}m^{\frac{1}{2}}} + C + C \leq C,
\end{aligned}$$

si escogemos γ tal que $\frac{1}{2}-\gamma \leq \frac{s_1}{6}$ y $\frac{1}{2}-\gamma\leq\frac{1}{24}$.

Estimación de J_{A_2}:

Observemos primero que para $(\lambda,\lambda_1)\in A_2$ se cumple que $|3mm_1(m-m_1)| = |z_1| \leq 3|\sigma|$. Como para todo m_1 se tiene que $|m_1|\geq |m|/2$ o $|m-m_1|\geq |m|/2$, entonces, teniendo en cuenta además que $|m_1|\geq 1$ y $|m-m_1|\geq 1$, vemos que $\frac{m^2}{2}\leq|\sigma|$. Así, de (2.6), con p_A y q_A definidos por (2.7), tenemos:

$$J_{A_2} \leq C \sum_{\{\lambda \mid 2m^2\leq 4|\sigma|\leq\frac{3}{4}|m|^3\}} \int \frac{|m|^{s_1+1}}{\langle\sigma\rangle}\langle n\rangle^{s_2} g(m,n) \sum_{\{\lambda_1 \mid |\sigma_2|\leq|\sigma_1|\leq|\sigma|\}}\int \frac{p_A(\lambda_1)}{\langle\sigma_1\rangle^{\gamma}|m_1|^{s_1}\langle n_1\rangle^{s_2}}\frac{q_A(\lambda_2)}{\langle\sigma_2\rangle^{\gamma}|m_2|^{s_1}\langle n_2\rangle^{s_2}}\,d\tau_1 d\tau.$$

Para $\eta \in [0, \frac{1}{2})$ a ser escogido adecuadamente más adelante, de un procedimiento similar al utilizado para la obtención de (2.8) y (2.9) se sigue que

$$J_{A_2} \leq CI_{A_2} \Big\{ \sum_{m,n} g^2(m,n)|m|^{2-4\eta} \int_{\{\sigma | 2m^2 \leq 4|\sigma| \leq \frac{3}{4}|m|^3\}} \frac{d\sigma}{\langle\sigma\rangle^{2-2\eta}} \Big\}^{\frac{1}{2}} \|p_A\| \|q_A\| \leq CI_{A_2} \|g\|_{l^2_{m,n}} \|p_A\| \|q_A\| ,$$

donde

$$I_{A_2} := \sup_{\substack{2m^2 \leq 4|\sigma| \leq \frac{3}{4}|m|^3 \\ m \neq 0}} \frac{|m|^{s_1} |m|^{2\eta} \langle n\rangle^{s_2}}{\langle\sigma\rangle^{\eta}} \Big\{ \sum \int_{\{\lambda_1 | |\sigma_2| \leq |\sigma_1| \leq |\sigma|\}} \frac{d\tau_1}{\langle\sigma_1\rangle^{2\gamma} \langle\sigma_2\rangle^{2\gamma} |m_1|^{2s_1} |m_2|^{2s_1} \langle n_1\rangle^{2s_2} \langle n_2\rangle^{2s_2}} \Big\}^{\frac{1}{2}} .$$

Veamos que $I_{A_2} \leq C$ para cierto $\eta \in [0, \frac{1}{2})$.

Consideramos el caso $m > 0$ y usamos en su orden (2.1), el lema 2.2, el cambio de variable $\mu_1 \mapsto n_1$ y (2.3) para obtener:

$$\begin{aligned} I_{A_2} &\leq C \sup_{2m^2 \leq 4|\sigma| \leq \frac{3}{4}m^3} \frac{m^{s_1+2\eta}}{\langle\sigma\rangle^{\eta}} \Big\{ \sum_{\{(m_1,n_1) | -3|\sigma| \leq z_1 \leq 3|\sigma|\}} \frac{1}{|m_1|^{2s_1} |m_2|^{2s_1} \langle\mu_1\rangle^{4\gamma-1}} \Big\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \sup \frac{m^{s_1+2\eta}}{\langle\sigma\rangle^{\eta}} \Big\{ \sum_{\{m_1 | -3|\sigma| \leq z_1 \leq 3|\sigma|\}} |m_1|^{-2s_1} |m_2|^{-2s_1} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{|z_1|}\, d\mu_1}{m\sqrt{|\sigma + z_1 - \mu_1|} \langle\mu_1\rangle^{4\gamma-1}} + 1 \Big) \Big\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \sup \frac{m^{s_1+2\eta}}{\langle\sigma\rangle^{\eta}} \Big\{ \sum \frac{|m_1|^{-2s_1} |m_2|^{-2s_1} \sqrt{|z_1|}}{m \langle\sigma + z_1\rangle^{4\gamma-\frac{3}{2}}} + \sum \frac{1}{|m_1|^{2s_1} |m_2|^{2s_1}} \Big\}^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

Por simetría, basta considerar sólo las sumatorias anteriores en el conjunto $R := \{m_1 \,|\, |z_1| \leq 3|\sigma| \,,\; m_1 \geq \frac{m}{2}\}$. Si $m_1 \in R$, entonces $\frac{m^2}{2}|m_2| \leq |m m_1 m_2| \leq |\sigma|$ y por tanto $|m_2| \leq \frac{2|\sigma|}{m^2}$. Entonces $m - \frac{2|\sigma|}{m^2} \leq m_1 \leq m + \frac{2|\sigma|}{m^2}$; y como $\frac{|\sigma|}{m^2} \leq cm$ entonces $m_1 \sim m$.

Así,

$$\begin{aligned} I_{A_2} &\leq C \sup \frac{m^{2\eta}}{\langle\sigma\rangle^{\eta}} \Big\{ \sum_{m_1 \in R} \frac{\sqrt{m^2 |m_2|}}{m |m_2|^{2s_1}} \frac{1}{\langle\sigma + z_1\rangle^{4\gamma-\frac{3}{2}}} + \sum_{m_1 \in R} \frac{1}{|m_2|^{2s_1}} \Big\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \sup \frac{m^{2\eta}}{\langle\sigma\rangle^{\eta}} \Big\{ [1 + (\frac{|\sigma|}{m^2})^{\frac{1}{2}-2s_1}] \Big[\int_{-3|\sigma|}^{3|\sigma|} \frac{dz_1}{m^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{3}{4}m^3 - z_1} \langle\sigma + z_1\rangle^{4\gamma-\frac{3}{2}}} + 1 \Big] \Big\}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + C \sup \frac{m^{2\eta}}{\langle\sigma\rangle^{\eta}} \Big\{ \int_0^{\frac{C|\sigma|}{m^2}} \frac{d\xi}{(1+\xi)^{2s_1}} + 1 \Big\}^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

Observando que si $|z_1| \leq 3|\sigma|$, entonces $\frac{3}{4}m^3 - z_1 \sim m^3$, tenemos que

$$I_{A_2} \leq C \sup \frac{m^{2\eta}}{\langle\sigma\rangle^{\eta}} [1 + (\frac{|\sigma|}{m^2})^{\frac{1}{2}-2s_1}]^{\frac{1}{2}} [\frac{\langle\sigma\rangle^{\frac{5}{2}-4\gamma}}{m^2} + 1]^{\frac{1}{2}} + C \sup \frac{m^{2\eta}}{\langle\sigma\rangle^{\eta}} \Big\{ \int_0^{\frac{C|\sigma|}{m^2}} \frac{d\xi}{(1+\xi)^{2s_1}} + 1 \Big\}^{\frac{1}{2}} . \tag{2.12}$$

Si $0 < s_1 < \frac{1}{2}$, tomamos $\eta = \frac{1}{2} - s_1$ y observamos que para $s_1 \in (0, \frac{1}{4}]$, como $\frac{|\sigma|}{m^2} > \frac{1}{2}$, se sigue que:

$$\begin{aligned} I_{A_2} &\leq C \sup \frac{m^{1-2s_1}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}-s_1}} \frac{|\sigma|^{\frac{1}{4}-s_1}}{m^{\frac{1}{2}-2s_1}} [\frac{\langle\sigma\rangle^{\frac{5}{4}-2\gamma}}{m} + 1] + C \sup \frac{m^{1-2s_1}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}-s_1}} [(\frac{|\sigma|}{m^2})^{1-2s_1}]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \sup [\frac{\langle\sigma\rangle^{1-2\gamma}}{m^{\frac{1}{2}}} + \frac{m^{\frac{1}{2}}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{4}}}] + C \leq C \sup \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{6}-2(\frac{1}{2}-\gamma)}} + C + C \leq C\,, \end{aligned}$$

escogiendo γ de tal modo que $0 < \frac{1}{2} - \gamma \leq \frac{1}{12}$. De otra parte, si $s_1 \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, entonces de (2.12), como

$$\left(\frac{|\sigma|}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}-2s_1} \leq 1\,,$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} I_{A_2} &\leq C \sup [\frac{m^{1-2s_1}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}-s_1}} \cdot 1 \cdot \frac{\langle\sigma\rangle^{\frac{5}{4}-2\gamma}}{m} + \frac{m^{1-2s_1}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}-s_1}} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{m^{1-2s_1}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}-s_1}} (\frac{|\sigma|}{m^2})^{\frac{1}{2}-s_1}] \\ &\leq C \sup \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2\gamma-\frac{3}{4}-s_1} m^{2s_1}} + C + C \\ &\leq C \sup \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2\gamma-\frac{3}{4}-s_1+\frac{2}{3}s_1}} + C \leq C, \end{aligned}$$

escogiendo γ tal que $2\gamma - \frac{3}{4} - \frac{1}{3}s_1 \geq 0$, es decir, tal que $2(\frac{1}{2} - \gamma) \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{3}s_1$.

Si $s_1 = \frac{1}{2}$, tomamos $\eta = \frac{1}{4}$ y así, de (2.12):

$$\begin{aligned} I_{A_2} &\leq C \sup \frac{m^{\frac{1}{2}}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{4}}} [\frac{\langle\sigma\rangle^{\frac{5}{4}-2\gamma}}{m} + 1 + \log^{\frac{1}{2}} \frac{\langle\sigma\rangle}{m^2} + 1] \leq C \sup [\frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2\gamma-1} m^{\frac{1}{2}}} + \frac{m^{\frac{1}{2}}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{4}}} (\frac{\langle\sigma\rangle}{m^2})^{\frac{1}{4}} + 1] \\ &\leq C \sup \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2\gamma-1+\frac{1}{6}}} + C + C \leq C\,, \end{aligned}$$

si tomamos γ tal que $0 < \frac{1}{2} - \gamma \leq \frac{1}{12}$. Si $s_1 > \frac{1}{2}$, tomamos $\eta = 0$ y en (2.12) se tiene que

$$\begin{aligned} I_{A_2} &\leq C \sup \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2\gamma-\frac{5}{4}} m} + C + C \int_0^\infty \frac{d\xi}{(1+\xi)^{2s_1}} \\ &\leq C \sup \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2\gamma-\frac{5}{4}+\frac{1}{3}}} + C + C \leq C\,, \end{aligned}$$

si γ se toma de tal modo que $2\gamma - \frac{11}{12} = 2\gamma - 1 + \frac{1}{12} \geq 0$; es decir si $0 < \frac{1}{2} - \gamma \leq \frac{1}{24}$.

Estimación de J_{B_1}: De (2.6):

$$J_{B_1} \leq C \sum \int \sum_{(\lambda,\lambda_1)\in B_1} \int \frac{|m|^{s_1+1} \langle n\rangle^{s_2} g(m,n)}{\langle\sigma\rangle_{T^{\frac{1}{2}}}^{\beta+2\delta} \langle\sigma\rangle_{T^{\frac{1}{2}}}^{1-(\beta+2\delta)}} \frac{p_B(\lambda_1)}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}} |m_1|^{s_1} \langle n_1\rangle^{s_2} \langle\theta_1\rangle^{\varepsilon}} \frac{q_B(\lambda_2)}{\langle\sigma_2\rangle^{\frac{1}{2}} |m_2|^{s_1} \langle n_2\rangle^{s_2} \langle\theta_2\rangle^{\varepsilon}}\, d\tau\, d\tau_1\,,$$

donde

$$p_B(\lambda_1) := \langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}}|m|^{s_1}\langle n\rangle^{s_2}\langle\theta\rangle^{\varepsilon}|\widehat{u}(\lambda)|,$$
$$q_B(\lambda_1) := \langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}}|m|^{s_1}\langle n\rangle^{s_2}\langle\theta\rangle^{\varepsilon}|\widehat{v}(\lambda)| \tag{2.13}$$

y β y δ son números positivos tales que $\beta + 2\delta < \frac{1}{2}$ y serán escogidos adecuadamente más adelante. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en la variable λ y teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2\delta}_{T^{\frac{1}{2}}}} \leq CT^{\delta}$$

se obtiene que:

$$J_{B_1}$$
$$\leq CT^{\delta} \sum_{\{\lambda_1 | \frac{3}{4}|m_1|^3 \leq 4|\sigma_1|\}} \int \frac{p_B(\lambda_1)}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}}\langle\theta_1\rangle^{\varepsilon}|m_1|^{s_1}} \Big\{ \sum_{\{\lambda | |\sigma_1|>|\sigma|\ ,\ |\sigma_1|>|\sigma_2|\}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|m|^{2+2s_1}\, d\tau}{\langle\sigma\rangle^{2\beta}\langle\sigma_2\rangle|m_2|^{2s_1}} \Big\}^{\frac{1}{2}} \Big\{ \sum_{m\neq 0,n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(m,n)^2 q_B^2(\lambda_2)\, d\tau}{\langle\sigma\rangle^{2(1-\beta-2\delta)}} \Big\}^{\frac{1}{2}} d\tau_1 .$$

De una nueva aplicación de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, esta vez con respecto a λ_1, vemos que $J_{B_1} \leq CT^{\delta} I_{B_1} \|p_B\| \|q_B\| \|g\|_{l^2_{m,n}}$, donde

$$I_{B_1} := \sup_{\frac{3}{4}|m_1|^3 \leq 4|\sigma_1|} \frac{1}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}}\langle\theta_1\rangle^{\varepsilon}|m_1|^{s_1}} \Big\{ \sum_{\{\lambda | |\sigma_1|>|\sigma|\ ,\ |\sigma_1|\geq|\sigma_2|\}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|m|^{2+2s_1}\, d\tau}{\langle\sigma\rangle^{2\beta}\langle\sigma_2\rangle|m_2|^{2s_1}} \Big\}^{\frac{1}{2}} .$$

Probaremos que $I_{B_1} \leq C$.

Sin pérdida de generalidad supondremos que $m_1 > 0$. De modo similar a como se hizo en (2.10) y las líneas siguientes definimos

$$z := 3mm_1(m_1 - m),$$
$$\mu := \sigma_1 + z + \frac{(mn_1 - m_1 n)^2}{mm_1(m_1 - m)}$$

y observamos que $\sigma_2 = \sigma - \mu$ y así, para $(\lambda, \lambda_1) \in B_1$, como $|\sigma| \leq |\sigma_1|$ y $|\sigma_2| \leq |\sigma_1|$, concluimos que $\mu \leq 2|\sigma_1|$ y que $|z| \leq 3|\sigma_1|$. Observamos además que el máximo valor de la función cuadrática $m \mapsto 3mm_1(m_1 - m)$ es $\frac{3}{4}m_1^3$ y por tanto $-3|\sigma_1| \leq z \leq \min\{3|\sigma_1|, \frac{3}{4}m_1^3\}$.

Teniendo en cuenta estas consideraciones y usando la desigualdad (2.2) obtenemos:

$$I_{B_1} \leq C \sup \frac{m_1^{3\varepsilon}}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}}\langle\sigma_1\rangle^{\varepsilon}} \Big\{ \sum_{\{(m,n) | -3|\sigma_1| \leq z \leq \frac{3}{4}m_1^3\}} \frac{m^2}{\langle\mu\rangle^{2\beta'}} \Big\}^{\frac{1}{2}},$$

donde $0 < \beta' < \beta$. Aplicando el lema 2.2 y efectuando el cambio de variable $\mu \mapsto n$ cuyo jacobiano es $\frac{C\sqrt{|z|}}{m_1\sqrt{|\sigma_1 + z - \mu|}}$, se sigue que

$$I_{B_1} \leq C \sup \frac{m_1^{3\varepsilon}}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \Big\{ \sum_{\{m | -3|\sigma_1| \leq z \leq \frac{3}{4}m_1^3\}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{|z|} m^2\, d\mu}{m_1\sqrt{|\sigma_1 + z - \mu|}\langle\mu\rangle^{2\beta'}} + \sum_{\{m | -3|\sigma_1| \leq z \leq \frac{3}{4}m_1^3\}} m^2 \Big\}^{\frac{1}{2}} .$$

Para $(\lambda,\lambda_1)\in B_1$, puede verse, procediendo de modo similar a como se hizo para obtener 2.11, que

$$|m|,\, m_1 \leq C\frac{|\sigma_1|^{\frac{1}{2}}}{m_1^{\frac{1}{2}}}.$$

De esta manera, usando la desigualdad (2.3), se sigue que:

$$I_{B_1}\leq C\sup\frac{m_1^{3\varepsilon}}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\Big\{\sum\frac{\sqrt{|z|}m^2}{m_1\langle\sigma_1+z\rangle^{2\beta'-\frac{1}{2}}}+\Big(\frac{|\sigma_1|^{\frac{1}{2}}}{m_1^{\frac{1}{2}}}\Big)^3\Big\}^{\frac{1}{2}}.$$

Aplicando nuevamente el lema 2.2 y efectuando el cambio de variable $z\mapsto m$ cuyo jacobiano es $\frac{C}{m_1^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{3}{4}m_1^3-z}}$, vemos que

$$I_{B_1}\leq C\sup\frac{m_1^{3\varepsilon}}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\Big\{\int_{-3|\sigma_1|}^{\frac{3}{4}m_1^3}\frac{\sqrt{|z|}m^2\,dz}{m_1^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{3}{4}m_1^3-z}\langle\sigma_1+z\rangle^{2\beta'-\frac{1}{2}}}+\frac{|\sigma_1|^{\frac{1}{2}}|\sigma_1|/m_1}{m_1}\Big\}^{\frac{1}{2}}$$
$$+C\sup\frac{m_1^{3\varepsilon-\frac{3}{4}}}{\langle\sigma_1\rangle^{\varepsilon-\frac{1}{4}}}.$$

Si definimos z_0 como el valor de z correspondiente a $m=-\frac{1}{8}|\sigma_1|^{\frac{1}{3}}$, entonces $|z_0|\leq cm_1|\sigma_1|^{\frac{2}{3}}$ y para $z\in[z_0,\frac{3}{4}m_1^3]$ se tiene que $|m|\leq c|\sigma_1|^{\frac{1}{3}}$. Por lo tanto

$$I_{B_1}\leq C\sup\frac{m_1^{3\varepsilon}}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\Big\{\int_{-3|\sigma_1|}^{z_0}\frac{\sqrt{|z|}\frac{|\sigma_1|}{m_1}\,dz}{m_1^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{3}{4}m_1^3+|z|}\langle\sigma_1+z\rangle^{2\beta'-\frac{1}{2}}}+\int_{z_0}^{\frac{3}{4}m_1^3}\frac{\sqrt{m_1|\sigma_1|^{\frac{2}{3}}}|\sigma_1|^{\frac{2}{3}}\,dz}{m_1^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{3}{4}m_1^3-z}\langle\sigma_1+z\rangle^{2\beta'-\frac{1}{2}}}\Big\}^{\frac{1}{2}}$$
$$+C\sup\frac{m_1^{3\varepsilon-1}|\sigma_1|^{\frac{3}{4}}}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}+C,$$

y por (2.3),

$$\begin{aligned}I_{B_1}&\leq C\sup\frac{m_1^{3\varepsilon}}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\Big[\frac{|\sigma_1|^{\frac{1}{2}}}{m_1^{\frac{5}{4}}}\langle\sigma_1\rangle^{\frac{3}{4}-\beta'}+\frac{|\sigma_1|^{\frac{1}{2}}}{m_1^{\frac{1}{2}}}\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}-\beta'}\Big]+C\sup\frac{1}{\langle\sigma_1\rangle^{\varepsilon-\frac{1}{4}}m_1^{1-3\varepsilon}}+C\\&\leq C\sup\frac{1}{\langle\sigma_1\rangle^{\beta'+\varepsilon-\frac{3}{4}}m_1^{\frac{5}{4}-3\varepsilon}}+\sup\frac{m_1^{3(\varepsilon-\frac{1}{6})}}{\langle\sigma_1\rangle^{\varepsilon+\beta'-\frac{1}{2}}}+C+C\\&\leq C+C\sup\frac{1}{\langle\sigma_1\rangle^{\beta'-\frac{1}{3}}}+C+C\leq C,\end{aligned}$$

si tomamos $\beta'\in(0,\beta)$ tal que $\beta'+\varepsilon-\frac{3}{4}\geq 0$, y $\beta'\geq\frac{1}{3}$; es decir, si $\frac{1}{2}-\beta'\leq\min\{\varepsilon-\frac{1}{4},\frac{1}{6}\}$.

Estimación de J_{B_2}:

De (2.6) y teniendo en cuenta que $\langle\theta_1\rangle\geq 1$ y $\langle\theta_2\rangle\geq 1$, tenemos que:

$$J_{B_2} \leq C \sum \int_{(\lambda,\lambda_1)\in B_2} \sum \int \frac{|m|^{1+s_1}\langle n\rangle^{s_2}}{\langle\sigma\rangle_{T^{\frac{1}{2}}}^{\beta+2\delta}\langle\sigma\rangle_{T^{\frac{1}{2}}}^{1-\beta-2\delta}} g(m,n) \frac{p_B(\lambda_1)}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}}|m_1|^{s_1}\langle n_1\rangle^{s_2}} \frac{q_B(\lambda_2)}{\langle\sigma_2\rangle^{\frac{1}{2}}|m_2|^{s_1}\langle n_2\rangle^{s_2}}\, d\tau\, d\tau_1\,,$$

donde p_B y q_B están definidos por (2.13) y $\beta > 0$ y $\delta > 0$ son números tales que $0 < \beta + 2\delta < \frac{1}{2}$ y serán escogidos de modo conveniente más adelante. De modo similar a como se procedió para estimar J_{B_1} se tiene que

$$J_{B_2} \leq CT^{\delta} I_{B_2} \|p_B\| \|q_B\| \|g\|_{l^2_{m,n}}\,,$$

donde

$$I_{B_2} := \sup_{\substack{2m_1^2 \leq 4|\sigma_1| \leq \frac{3}{4}|m_1|^3 \\ m_1 \neq 0}} \frac{1}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}}|m_1|^{s_1}} \Big\{ \sum_{\{\lambda | |\sigma| \leq |\sigma_1|,\, |\sigma_2| \leq |\sigma_1|\}} \int \frac{|m|^{2+2s_1}}{\langle\sigma\rangle^{2\beta}\langle\sigma_2\rangle|m_2|^{2s_1}} \Big\}^{\frac{1}{2}}.$$

Veamos que $I_{B_2} \leq C$. Con $m_1 > 0$, usando (2.2)y el lema 2.2 vemos que para $0 < \beta' < \beta$:

$$\begin{aligned} I_{B_2} &\leq C \sup \frac{1}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}}} \Big\{ \sum_{\{(m,n)| -3|\sigma_1| \leq z \leq 3|\sigma_1|\}} \frac{m^2}{\langle\mu\rangle^{2\beta'}} \Big\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \sup \frac{1}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}}} \Big\{ \sum_{\{m| -3|\sigma_1| \leq z \leq 3|\sigma_1|\}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m^2 \sqrt{|z|}\, d\mu}{m_1\sqrt{|\sigma_1 + z - \mu|}\langle\mu\rangle^{2\beta'}} + \sum_{\{m| -3|\sigma_1| \leq z \leq 3|\sigma_1|\}} m^2 \Big\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Como en el estimativo de I_{A_2} observamos que la cardinalidad del conjunto $\{m| -3|\sigma_1| \leq z \leq 3|\sigma_1|\}$ es del orden de $\frac{|\sigma_1|}{m_1^2}$ y que en dicho conjunto $m \leq cm_1$. Por tanto, usando (2.3) se sigue que

$$\begin{aligned} I_{B_2} &\leq C \sup \frac{1}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}}} \Big\{ \sum \frac{m_1\sqrt{|z|}}{\langle\sigma_1 + z\rangle^{2\beta' - \frac{1}{2}}} \Big\}^{\frac{1}{2}} + C \sup \frac{1}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}}} m_1 \frac{|\sigma_1|^{\frac{1}{2}}}{m_1} \\ &\leq C \sup \frac{1}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}}} \Big\{ \int_{-3|\sigma_1|}^{3|\sigma_1|} \frac{m_1\sqrt{|z|}\, dz}{m_1^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{3}{4}m_1^3 - z}\langle\sigma_1 + z\rangle^{2\beta' - \frac{1}{2}}} + m_1|\sigma_1|^{\frac{1}{2}} \Big\}^{\frac{1}{2}} + C. \end{aligned}$$

Como para $|z| \leq 3|\sigma_1|$ se tiene que $\frac{3}{4}m_1^3 - z \sim m_1^3$, entonces

$$\begin{aligned} I_{B_2} &\leq C \sup \frac{1}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}}} \Big(\frac{|\sigma_1|^{\frac{1}{4}}}{m_1^{\frac{1}{2}}} \langle\sigma_1\rangle^{\frac{3}{4} - \beta'} \Big) + C \sup \frac{m_1^{\frac{1}{2}}}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{4}}} + C \\ &\leq C \sup \frac{1}{\langle\sigma_1\rangle^{\beta' - \frac{1}{2}} m_1^{\frac{1}{2}}} + C + C \leq C \sup \frac{1}{\langle\sigma_1\rangle^{\beta' - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}}} + C \leq C, \end{aligned}$$

si β' se escoge tal que $\frac{1}{2}-\beta' \leq \frac{1}{6}$. De los estimativos para J_{A_1}, J_{A_2}, J_{B_1} y J_{B_2} y de las condiciones impuestas para γ, β, β' y δ, vemos que para $\gamma < \frac{1}{2}$ y $\delta > 0$, tales que $\frac{1}{2}-\gamma$ y δ son suficientemente pequeños,

$$J \leq (C\|p_A\|\|q_A\| + CT^{\delta}\|p_B\|\|q_B\|)\|g\|_{l^2_{m,n}}\,.$$

Luego

$$\|g_0\|_s \leq C\|u\|_{s\gamma 0}\|v\|_{s\gamma 0} + CT^{\delta}\|u\|_{s\frac{1}{2}\epsilon}\|v\|_{s\frac{1}{2}\epsilon}\,. \tag{2.14}$$

De esta manera,

$$\left\|\psi(t)\, I\!I\!I(-\frac{1}{2}\partial_x(uv))(t)\right\|_s \leq C\|u\|_{s\gamma 0}\|v\|_{s\gamma 0} + CT^{\delta}\|u\|_{s\frac{1}{2}\epsilon}\|v\|_{s\frac{1}{2}\epsilon}\,. \tag{2.15}$$

Estimación de $\left\|\psi(T^{-1}t)\, I(-\frac{1}{2}\partial_x(uv))(t)\right\|_s$ *y de* $\left\|I\!I(-\frac{1}{2}\partial_x(uv))(t)\right\|_s$:

De (1.3):

$$\begin{aligned}
&\left\|\psi(T^{-1}t)\, I(-\frac{1}{2}\partial_x(uv))(t)\right\|_s \leq C\|\psi(T^{-1}t)W(t)f_1(t)\|_s \\
&\leq C\psi(T^{-1}t)\|f_1(t)\|_s \leq \begin{cases} \|f_1(t)\|_s & \text{si } t \in [-2T, 2T]\,, \\ 0 & \text{si } t \notin [-2T, 2T]\,, \end{cases}
\end{aligned}$$

donde $\widehat{f_1(t)}(m,n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it\sigma}-1}{i\sigma}\varphi(\sigma)\widehat{f}(m,n,\tau)\, d\tau$ y $f = -\frac{1}{2}\partial_x(uv)$.

Si $t \in [-2T, 2T]$:

$$\begin{aligned}
|\widehat{f_1(t)}(m,n)| &\leq |t| \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{e^{it\sigma}-1}{it\sigma}\right| |\varphi(\sigma)||\widehat{f}(m,n,\tau|\, d\tau \\
&\leq CT \int_{|\sigma|<\frac{2}{T^{\frac{1}{2}}}} |\widehat{f}(m,n,\tau|\, d\tau \leq CT^{\frac{1}{2}} \int_{|\sigma|<\frac{2}{T^{\frac{1}{2}}}} \frac{|\widehat{f}(m,n,\tau|}{\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}}\, d\tau \\
&\leq CT^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{f}(m,n,\tau|}{\langle\sigma\rangle_{T^{\frac{1}{2}}}}\, d\tau = CT^{\frac{1}{2}}\widehat{g}_0(m,n)\,.
\end{aligned}$$

Por tanto, de (2.14) se tiene que

$$\left\|\psi(T^{-1}t)\, I(-\frac{1}{2}\partial_x(uv))(t)\right\|_s \leq CT^{\frac{1}{2}}\|u\|_{s\gamma 0}\|v\|_{s\gamma 0} + CT^{\frac{1}{2}+\delta}\|u\|_{s\frac{1}{2}\epsilon}\|v\|_{s\frac{1}{2}\epsilon}\,. \tag{2.16}$$

De otra parte, de (1.3) vemos que

$$\|I\!\!I(-\frac{1}{2}\partial_x(uv))(t)\|_s = \Big\{\sum_{\substack{m,n\\m\neq 0}} |m|^{2s_1}\langle n\rangle^{2s_2}\Big|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{it\tau}}{i\sigma}(1-\varphi(\sigma))\widehat{f}(m,n,\tau)\;d\tau\Big|^2\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C\Big\{\sum |m|^{2s_1}\langle n\rangle^{2s_2}\Big(\int_{|\sigma|>\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}}\frac{|\widehat{f}(m,n,\tau)|\;d\tau}{|\sigma|}\Big)^2\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C\Big\{\sum |m|^{2s_1}\langle n\rangle^{2s_2}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\widehat{f}(m,n,\tau)|}{\langle\sigma\rangle_{T^{\frac{1}{2}}}}\;d\tau\Big)^2\Big\}^{\frac{1}{2}} \leq C\|g_0\|_s$$

$$\leq C\|u\|_{s\gamma 0}\|v\|_{s\gamma 0} + CT^{\delta}\|u\|_{s\frac{1}{2}\epsilon}\|v\|_{s\frac{1}{2}\epsilon}\,. \tag{2.17}$$

Estimación de $\|\psi(T^{-1}\cdot_t)I(-\frac{1}{2}\partial_x(uv))\|_{s\frac{1}{2}\epsilon}$*:*

Con $f=-\frac{1}{2}\partial_x(uv)$ se tiene de (1.3) que

$$[\psi(T^{-1}t)I(-\frac{1}{2}\partial_x(uv))(t)](x,y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}[\psi(T^{-1}t)W(t)f_1(t)](x,y)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\sum_{\substack{m,n\\m\neq 0}} e^{i(mx+ny)}\psi(T^{-1}t)e^{itl(m,n)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{it\sigma}-1}{i\sigma}\varphi(\sigma)\widehat{f}(\lambda)\;d\tau$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\sum e^{i(mx+ny)}\psi(T^{-1}t)e^{itl(m,n)}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=0}^{\infty} i^k\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\sigma^k\varphi(\sigma)\widehat{f}(\lambda)\;d\tau$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\sum e^{i(mx+ny)}\sum_{k=0}^{\infty}\psi(T^{-1}t)\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}e^{itl(m,n)}\int_{-\infty}^{+\infty} i^k\sigma^k\varphi(\sigma)\widehat{f}(\lambda)\;d\tau$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\sum e^{i(mx+ny)}\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k(t)e^{itl(m,n)}g_k(m,n)\,,$$

donde

$$\psi_k(t) := \frac{\psi(T^{-1}t)t^{k+1}}{(k+1)!} \quad \text{y} \quad g_k(m,n) := \int_{-\infty}^{+\infty} i^k\sigma^k\varphi(\sigma)\widehat{f}(\lambda)\;d\tau\,.$$

Luego, como

$$[e^{itl(m,n)}\psi_k(t)]^{\wedge t}(\tau) = \widehat{\psi_k}(\sigma)\,,$$

se sigue que:

$$[\psi(T^{-1}t)I(-\frac{1}{2}\partial_x(uv))(t)](x,y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\sum e^{i(mx+ny)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{\psi}_k(\sigma)g_k(m,n)\;d\tau$$

y por tanto

$$[\psi(T^{-1}\cdot_t)I(-\frac{1}{2}\partial_x(uv))]^{\wedge}(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{\psi}_k(\sigma)g_k(m,n)\,.$$

Usando la desigualdad de Minkowski, el teorema de Plancherel y teniendo en cuenta que $T \in (0,1]$ y el estimativo (2.14) se sigue que

$$\|\psi(T^{-1}\cdot_t)I(-\frac{1}{2}\partial_x(uv))\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon} \leq C\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{\sum_{\substack{m\neq 0\\ n}}\int_{-\infty}^{+\infty}\langle\sigma\rangle\langle\theta\rangle^{2\varepsilon}|\widehat{\psi}_k(\sigma)|^2\langle m\rangle^{2s_1}\langle n\rangle^{2s_2}|g_k(m,n)|^2\,d\tau\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itl(m,n)}\langle\tau\rangle^{2\varepsilon}|\widehat{\psi}_k(\tau)|^2\,d\tau\Big\}^{\frac{1}{2}}\Big\{\sum_{\substack{m\neq 0\\ n}}\langle m\rangle^{2s_1}\langle n\rangle^{2s_2}|g_k(m,n)|^2\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|\tau|^2)|\widehat{\psi}_k(\tau)|^2\,d\tau\Big\}^{\frac{1}{2}}\Big\{\sum_{\substack{m\neq 0\\ n}}\langle m\rangle^{2s_1}\langle n\rangle^{2s_2}\Big(\int_{|\sigma|\leq\frac{2}{T^{\frac{1}{2}}}}\frac{2^k}{T^{\frac{k}{2}}}|\widehat{f}(\lambda)|\,d\tau\Big)^2\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{\int_{-2T}^{2T}\big(|\psi_k(t)|^2+|\frac{d}{dt}\psi_k(t)|^2\big)\,dt\Big\}^{\frac{1}{2}}\frac{2^k}{T^{\frac{k}{2}}}\Big\{\sum\langle m\rangle^{2s_1}\langle n\rangle^{2s_2}\Big(T^{-\frac{1}{2}}\int_{|\sigma|\leq\frac{2}{T^{\frac{1}{2}}}}\frac{|\widehat{f}(\lambda)|}{T^{-\frac{1}{2}}}\,d\tau\Big)^2\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^kT^{-\frac{1}{2}}}{T^{\frac{k}{2}}(k+1)!}\Big\{\int_{-2T}^{2T}\big(t^{2k+2}+(k+1)^2t^{2k}\psi(T^{-1}t)^2+|t^{k+1}\psi'(T^{-1}t)T^{-1}|^2\big)\,dt\Big\}^{\frac{1}{2}}\|g_0\|_s$$

$$\leq C\|g_0\|_s\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^kT^{-\frac{1}{2}}}{T^{\frac{k}{2}}(k+1)!}\Big\{\frac{T^{2k+3}}{2k+3}+\frac{(k+1)^2T^{2k+1}}{2k+1}+\frac{T^{2k+3}}{T^2(2k+3)}\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C\|g_0\|_s\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^kT^{-\frac{1}{2}}}{T^{\frac{k}{2}}(k+1)!}(k+1)^{\frac{1}{2}}T^{k+\frac{1}{2}} \leq C\|g_0\|_s\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^kT^{\frac{k}{2}}}{k!}\Big) \leq Ce^{2T^{\frac{1}{2}}}\|g_0\|_s$$

$$\leq Ce^{2T^{\frac{1}{2}}}\big(\|u\|_{s\gamma 0}\|v\|_{s\gamma 0}+T^{\delta}\|u\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon}\|v\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon}\big)\,. \tag{2.18}$$

Estimación de $\|\psi(\cdot_t)I\!I\!I(-\frac{1}{2}\partial_x(uv))\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon}$:

De (1.3) con $f=-\frac{1}{2}\partial_x(uv)$ tenemos que $\psi(\cdot_t)I\!I\!I(-\frac{1}{2}\partial_x(uv))=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\psi(\cdot_t)W(\cdot_t)f_0$. Como $[\psi(\cdot_t)W(\cdot_t)f_0]^\wedge(\lambda)=[\psi(t)e^{itl(m,n)}\widehat{f}_0(m,n)]^{\wedge t}(\tau)=\widehat{\psi}(\sigma)\widehat{f}_0(m,n)$ entonces

$$\|\psi(\cdot_t)I\!I\!I(-\frac{1}{2}\partial_x(uv))\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon} \leq C\Big\{\sum_{m\neq 0,\,n}|m|^{2s_1}\langle n\rangle^{2s_2}|\widehat{f}_0(m,n)|^2\int_{-\infty}^{+\infty}\langle\sigma\rangle\langle\frac{\sigma}{m^3}\rangle^{2\varepsilon}|\widehat{\psi}(\sigma)|^2\,d\tau\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C\|f_0\|_s\Big\{\int_{-\infty}^{+\infty}\langle\sigma\rangle^{1+2\varepsilon}|\widehat{\psi}(\sigma)|^2\,d\sigma\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C\|f_0\|_s\,.$$

Por tanto, procediendo como en (2.5):

$$\|\psi(\cdot)I\!I\!I(-\frac{1}{2}\partial_x(uv))\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon} \leq C\|g_0\|_s \leq C\|u\|_{s\gamma 0}\|v\|_{s\gamma 0}+CT^{\delta}\|u\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon}\|v\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon}\,. \tag{2.19}$$

Estimación de $\|I\!I(-\frac{1}{2}\partial_x(uv))\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon}$*:*

De la definición de $I\!I$ tenemos que:

$$|I\!I(f)^\frown(\lambda)| = |\frac{1-\varphi(\sigma)}{i\sigma}\widehat{f}(\lambda)| \leq C\frac{|\widehat{f}(\lambda)|}{\langle\sigma\rangle_{T^{\frac{1}{2}}}}.$$

Por lo tanto, procediendo por dualidad y con $f := -\frac{1}{2}\partial_x(uv)$, estimamos $\|I\!I(-\frac{1}{2}\partial_x(uv))\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon}$ tomando $h(\lambda) \geq 0$ y considerando la expresión

$$J^* := \sum_{\substack{m,n\\ m\neq 0}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{\substack{m_1,n_1\\ m_1\neq 0}}\int_{-\infty}^{+\infty}|m|^{s_1+1}\langle n\rangle^{s_2}\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}}\langle\theta\rangle^{\varepsilon}\frac{1}{\langle\sigma\rangle_{T^{\frac{1}{2}}}}h(\lambda)\widehat{u}(\lambda_1)\widehat{v}(\lambda_2)\,d\tau_1\,d\tau. \qquad (2.20)$$

Como en la estimación de J y para los mismos conjuntos A_1, A_2, B_1 y B_2 definidos a continuación de (2.6), escribimos $J^* \leq C(J^*_{A_1} + J^*_{A_2} + J^*_{B_1} + J^*_{B_2})$, donde cada uno de estos últimos cuatro sumandos corresponde a la expresión en la definición de J^* con las sumas e integrales efectuadas respectivamente en A_1, A_2, B_1 y B_2.

Estimación de $J^*_{A_1}$:

$$J^*_{A_1} \leq C\sum_{\{\lambda\,|\,\exists\lambda_1\,(\lambda,\lambda_1)\in A_1\}}\int|m|^{s_1+1}\langle n\rangle^{s_2}\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}}\frac{\langle\sigma\rangle^{\varepsilon}}{|m|^{3\varepsilon}}\frac{h(\lambda)}{\langle\sigma\rangle_{T^{\frac{1}{2}}}}\sum_{\{\lambda_1|(\lambda,\lambda_1)\in A_1\}}\int\frac{p_A(\lambda_1)q_A(\lambda_2)\,d\tau_1\,d\tau}{\langle\sigma_1\rangle^{\gamma}\langle\sigma_2\rangle^{\gamma}|m_1|^{s_1}|m_2|^{s_1}\langle n_1\rangle^{s_2}\langle n_2\rangle^{s_2}},$$

donde, como en (2.7),

$$p_A(\lambda) := |m|^{s_1}\langle n\rangle^{s_2}\langle\sigma\rangle^{\gamma}|\widehat{u}(\lambda)| \quad \text{y}$$
$$q_A(\lambda) := |m|^{s_1}\langle n\rangle^{s_2}\langle\sigma\rangle^{\gamma}|\widehat{v}(\lambda)|$$

y γ es un número en $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ a ser escogido más adelante. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$J^*_{A_1} \leq CI^*_{A_1}\|p_A\|\|q_A\|\|h\| \leq CI^*_{A_1}\|u\|_{s\gamma 0}\|v\|_{s\gamma 0}\|h\|,$$

donde

$$I^*_{A_1} := \sup_{\substack{\frac{3}{4}|m|^3\leq 4|\sigma|\\ m\neq 0}}\frac{|m|^{s_1+1}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}-\varepsilon}|m|^{3\varepsilon}}\Big\{\sum_{\{\lambda_1||\sigma_2|\leq|\sigma_1|\leq|\sigma|\}}\int\frac{d\tau_1}{\langle\sigma_1\rangle^{2\gamma}\langle\sigma_2\rangle^{2\gamma}|m_1|^{2s_1}|m_2|^{2s_1}}\Big\}^{\frac{1}{2}}.$$

Probemos que $I^*_{A_1} \leq C$. Para ello consideramos nuevamente el caso en que $m > 0$ y seguimos el mismo esquema de la estimación de I_{A_1}.

Usando las desigualdades de cálculo (2.1), (2.3) y el lema 2.2, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
I^*_{A_1} &\leq C\sup\frac{m^{s_1+1-3\varepsilon}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}\Big\{\sum_{\{(m_1,n_1)|-3|\sigma|\leq z_1\leq\frac{3}{4}m^3\}}\frac{1}{|m_1|^{2s_1}|m_2|^{2s_1}\langle\mu_1\rangle^{4\gamma-1}}\Big\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C\sup\frac{m^{s_1+1-3\varepsilon}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}\Big\{\sum_{\{m_1|-3|\sigma|\leq z_1\leq\frac{3}{4}m^3\}}\frac{1}{|m_1|^{2s_1}|m_2|^{2s_1}}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt{|z_1|}\,d\mu_1}{m\sqrt{|\sigma+z_1-\mu_1|}\langle\mu_1\rangle^{4\gamma-1}}+1\Big)\Big\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C\sup\frac{m^{s_1+1-3\varepsilon}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}\Big\{\sum\frac{\sqrt{|z_1|}}{m|m_1|^{2s_1}|m_2|^{2s_1}\langle\sigma+z_1\rangle^{4\gamma-\frac{3}{2}}}\Big\}^{\frac{1}{2}}+C\sup\frac{m^{1-3\varepsilon}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}\Big\{\sum_{\{m_1|\frac{m}{2}\leq m_1\leq\frac{C|\sigma|^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}}\}}\frac{m^{2s_1}}{|m_1|^{2s_1}|m_2|^{2s_1}}\Big\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C\sup\frac{m^{s_1+1-3\varepsilon}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}\Big\{\sum_{\{m_1|-3|\sigma|\leq z_1\leq z_0'\}}\frac{\sqrt{|z_1|}}{|\sigma|^{\frac{4}{3}s_1}m\langle\sigma+z_1\rangle^{4\gamma-\frac{3}{2}}}\Big\}^{\frac{1}{2}}\\
&\quad+C\sup\frac{m^{1-3\varepsilon}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}\Big\{\sum_{\{m_1|z_0'\leq z_1\leq\frac{3}{4}m^3\}}\frac{\sqrt{|z_1|}}{m\langle\sigma+z_1\rangle^{4\gamma-\frac{3}{2}}}\Big\}^{\frac{1}{2}}+C\sup\frac{m^{1-3\varepsilon}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}\Big\{\sum_{\{m_1|\frac{m}{2}\leq m_1\leq\frac{C|\sigma|^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}}\}}\frac{1}{|m_2|^{2s_1}}\Big\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C\sup\frac{m^{s_1+1-3\varepsilon}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}-\varepsilon}|\sigma|^{\frac{2}{3}s_1}m^{\frac{1}{2}}}\Big\{\int_{-3|\sigma|}^{z_0'}\frac{\sqrt{|z_1|}\,dz_1}{m^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{3}{4}m^3+|z_1|}\langle\sigma+z_1\rangle^{4\gamma-\frac{3}{2}}}+|\sigma|^{\frac{1}{2}}\Big\}^{\frac{1}{2}}\\
&\quad+C\sup\frac{m^{1-3\varepsilon}m^{\frac{1}{4}}|\sigma|^{\frac{1}{6}}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}-\varepsilon}m^{\frac{1}{2}}}\Big\{\int_{z_0'}^{\frac{3}{4}m^3}\frac{dz_1}{m^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{3}{4}m^3-z_1}\langle\sigma+z_1\rangle^{4\gamma-\frac{3}{2}}}+1\Big\}^{\frac{1}{2}}\\
&\quad+C\sup\frac{m^{1-3\varepsilon}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}\Big\{\int_0^{\frac{c|\sigma|^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}}}\frac{d\xi}{(1+|\xi|)^{2s_1}}+1\Big\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C\sup\frac{m^{s_1+\frac{1}{2}-3\varepsilon}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}-\varepsilon+\frac{2}{3}s_1}}\Big\{\frac{\langle\sigma\rangle^{\frac{5}{4}-2\gamma}}{m^{\frac{1}{4}}}+|\sigma|^{\frac{1}{4}}\Big\}+C\sup\frac{m^{\frac{3}{4}-3\varepsilon}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}\frac{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-4\gamma+\frac{3}{2})}}{m^{\frac{1}{4}}}+C\sup\frac{m^{\frac{3}{4}-3\varepsilon}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}+C\\
&\leq C\sup\Big\{\frac{m^{s_1+\frac{1}{4}-3\varepsilon}}{\langle\sigma\rangle^{2\gamma-\frac{3}{4}-\varepsilon+\frac{2}{3}s_1}}+\frac{m^{s_1+\frac{1}{2}-3\varepsilon}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{4}-\varepsilon+\frac{2}{3}s_1}}+\frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2\gamma-\frac{2}{3}-\varepsilon}m^{3\varepsilon-\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{3}-\varepsilon}m^{3\varepsilon-\frac{3}{4}}}\Big\}+C.
\end{aligned}
$$

Si tomamos $\gamma<\frac{1}{2}$ de tal modo que $2\gamma-\frac{2}{3}-\varepsilon\geq 0$, es decir, tal que $2(\frac{1}{2}-\gamma)\leq(\frac{1}{3}-\varepsilon)$ (lo cual es posible pues $\frac{1}{4}<\varepsilon<\frac{1}{3}$), entonces la expresión anterior no excede a

$$
\begin{aligned}
&C\sup\Big\{\frac{|\sigma|^{\frac{s_1}{3}}m^{\frac{1}{4}-3\varepsilon}}{\langle\sigma\rangle^{2\gamma-\frac{3}{4}-\varepsilon+\frac{2}{3}s_1}}+\frac{m^{s_1+\frac{1}{2}-3\varepsilon}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{4}-\varepsilon+\frac{2}{3}s_1}}\Big\}+C+C+C\\
&\leq C\sup\Big\{\frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2\gamma-\frac{3}{4}+\frac{1}{3}s_1-\varepsilon}m^{3\varepsilon-\frac{1}{4}}}+\frac{1}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}s_1-\varepsilon}m^{3\varepsilon-\frac{1}{2}}}\Big\}^{\frac{1}{2}}+C.
\end{aligned}
$$

Tomando $\gamma<\frac{1}{2}$, tal que $2\gamma-\frac{3}{4}+\frac{1}{3}s_1-\varepsilon\geq 0$, es decir, tal que $2(\frac{1}{2}-\gamma)<\frac{1}{4}+\frac{1}{3}s_1-\varepsilon$ (lo cual es posible porque $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}s_1-\varepsilon>0$), se tiene que

$$I^*_{A_1}\leq C.$$

ESTIMACIÓN DE $J^*_{A_2}$:

De (2.20)

$$J^*_{A_2} \le C \sum_{\{\lambda|\exists\lambda_1\,(\lambda,\lambda_1)\in A_2\}} \int |m|^{s_1+1}\langle n\rangle^{s_2}\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\langle\sigma\rangle_{T^{\frac{1}{2}}}}h(\lambda)\sum_{\{\lambda_1|(\lambda,\lambda_1)\in A_2\}}\int \frac{p_A(\lambda_1)q_A(\lambda_2)\,d\tau_1\,d\tau}{\langle\sigma_1\rangle^{\gamma}\langle\sigma_2\rangle^{\gamma}|m_1|^{s_1}|m_2|^{s_1}\langle n_1\rangle^{s_2}\langle n_2\rangle^{s_2}}$$

donde p_A y q_A son como en (2.7) y γ es un número en $(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$ a ser escogido. Procediendo como en la estimación de $J^*_{A_1}$, se tiene que

$$J^*_{A_2} \le CI^*_{A_2}\|p_A\|\|q_A\|\|h\|,$$

donde

$$I^*_{A_2} := \sup_{\substack{2m^2\le 4|\sigma|\le\frac{3}{4}|m|^3\\ m\neq 0}} \frac{|m|^{s_1+1}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}}}\Big\{\sum_{\{\lambda_1|\,|\sigma_2|\le|\sigma_1|\le|\sigma|\}}\int\frac{d\tau_1}{\langle\sigma_1\rangle^{2\gamma}\langle\sigma_2\rangle^{2\gamma}|m_1|^{2s_1}|m_2|^{2s_1}}\Big\}^{\frac{1}{2}}.$$

Probemos que $I^*_{A_2}\le C$. Con $m>0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
I^*_{A_2} &\le C\sup\frac{m^{s_1+1}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}}}\Big\{\sum_{\{(m_1,n_1)|-3|\sigma|\le z_1\le 3|\sigma|\}}\frac{1}{|m_1|^{2s_1}|m_2|^{2s_1}\langle\mu_1\rangle^{4\gamma-1}}\Big\}^{\frac{1}{2}}\\
&\le C\sup\frac{m^{s_1+1}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}}}\Big\{\sum_{\{m_1|-3|\sigma|\le z_1\le 3|\sigma|\}}\frac{1}{|m_1|^{2s_1}|m_2|^{2s_1}}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt{|z_1|}\,d\mu_1}{m\sqrt{|\sigma+z_1-\mu_1|}\langle\mu_1\rangle^{4\gamma-1}}+1\Big]\Big\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Como se vio en la estimación de I_{A_2}, si $m_1\ge\frac{m}{2}$ y $|z_1|\le 3|\sigma|$, entonces $m-\frac{2|\sigma|}{m^2}\le m_1\le m+\frac{2|\sigma|}{m^2}$. Por tanto la cardinalidad del conjunto $\{m_1||z_1|\le 3|\sigma|\ ,\ m_1\ge\frac{m}{2}\}$ está acotada por $\frac{C|\sigma|}{m^2}$. Similarmente se ve que la misma cota es válida para la cardinalidad del conjunto $\{m_1||\le z_1|\le 3|\sigma|\ ,\ m_1<\frac{m}{2}\}$. Por tanto:

$$\begin{aligned}
\sup\frac{m^{s_1+1}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}}}\Big\{\sum_{\{m_1|-3|\sigma|\le z_1\le 3|\sigma|\}}\frac{1}{|m_1|^{2s_1}|m_2|^{2s_1}}\Big\}^{\frac{1}{2}} &\le C\sup\frac{m}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}}}\Big\{\sum_{\{m_1|-3|\sigma|\le z_1\le 3|\sigma|\}}1\Big\}^{\frac{1}{2}}\\
&\le C\sup\frac{m}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}}}\frac{|\sigma|^{\frac{1}{2}}}{m}\le C.
\end{aligned}$$

y por tanto, para $\gamma>\frac{3}{8}$, usando (2.3) con $\gamma>\frac{3}{8}$ y el lema 2.2 tenemos que

$$\begin{aligned}
I^*_{A_2} &\le C\sup\frac{m^{s_1+1}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}}}\Big\{\sum_{\{m_1|-3|\sigma|\le z_1\le 3|\sigma|\}}\frac{\sqrt{|z_1|}}{|m_1|^{2s_1}|m_2|^{2s_1}m\langle\sigma+z_1\rangle^{4\gamma-\frac{3}{2}}}\Big\}^{\frac{1}{2}}+C\\
&\le C\sup\frac{m}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}}}\frac{|\sigma|^{\frac{1}{4}}}{m^{\frac{1}{2}}}\Big\{\int_{-3|\sigma|}^{3|\sigma|}\frac{dz_1}{m^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{3}{4}m^3-z_1}\langle\sigma+z_1\rangle^{4\gamma-\frac{3}{2}}}+1\Big\}^{\frac{1}{2}}+C.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que si $|z_1| \leq |\sigma|$, entonces $\frac{3}{4}m^3 - z_1 \sim m^3$, se sigue que

$$\begin{aligned} I^*_{A_2} &\leq C \sup\Big[\frac{m^{\frac{1}{2}}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{4}} m^{\frac{1}{4}} m^{\frac{3}{4}}}\{\langle\sigma\rangle^{\frac{5}{2}-4\gamma}\}^{\frac{1}{2}} + \frac{m^{\frac{1}{2}}}{\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{4}}}\Big] + C \\ &\leq C \sup \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2\gamma-1} m^{\frac{1}{2}}} + C \leq C \sup \frac{1}{\langle\sigma\rangle^{2\gamma-1}\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{6}}} + C \leq C\,, \end{aligned}$$

si tomamos $\gamma < \frac{1}{2}$ tal que $2\gamma - \frac{5}{6} \geq 0$, es decir, tal que $\frac{1}{2} - \gamma < \frac{1}{12}$. Así,

$$I^*_{A_2} \leq C.$$

Estimación de $J^*_{B_1}$:

De la definición de J^* en (2.20) vemos que

$$\begin{aligned} J^*_{B_1} &\leq C \sum_{(\lambda,\lambda_1)\in B_1} \int \sum \int |m|^{s_1+1}\langle n\rangle^{s_2}\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}}\langle\theta\rangle^{\varepsilon} \frac{1}{\langle\sigma\rangle_{T^{\frac{1}{2}}}} h(\lambda)|\widehat{u}(\lambda_1)||\widehat{v}(\lambda_2)|\; d\tau_1\; d\tau \\ &\leq C \sum_{(\lambda,\lambda_1)\in B_1} \int \sum \int \frac{|m|^{s_1+1}\langle n\rangle^{s_2}\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}}\langle\theta\rangle^{\varepsilon}}{\langle\sigma\rangle_{T^{\frac{1}{2}}}} \frac{h(\lambda)p_B(\lambda_1)q_B(\lambda_2)\; d\tau\; d\tau_1}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}}\langle\sigma_2\rangle^{\frac{1}{2}}|m_1|^{s_1}|m_2|^{s_1}\langle n_1\rangle^{s_2}\langle n_2\rangle^{s_2}\langle\theta_1\rangle^{\varepsilon}\langle\theta_2\rangle^{\varepsilon}}\,, \end{aligned}$$

donde, como en (2.13),

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &:= |m|^{s_1}\langle n\rangle^{s_2}\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}}\langle\theta\rangle^{\varepsilon}|\widehat{u}(\lambda)| \quad \text{y} \\ q_B(\lambda) &:= |m|^{s_1}\langle n\rangle^{s_2}\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}}\langle\theta\rangle^{\varepsilon}|\widehat{v}(\lambda)|\,. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz primero con respecto a la variable λ y luego con respecto a la variable λ_1, tenemos que

$$J^*_{B_1} \leq C I^*_{B_1}\|p_B\|\|q_B\|\|h\|\,,$$

donde

$$I^*_{B_1} := \sup_{\substack{\frac{3}{4}|m_1|^3 \leq 4|\sigma_1| \\ m_1 \neq 0}} \frac{1}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}}\langle\theta_1\rangle^{\varepsilon}|m_1|^{s_1}} \Big\{ \sum_{\{\lambda|(\lambda,\lambda_1)\in B_1\}} \int \frac{|m|^{2s_1+2}\langle\theta\rangle^{2\varepsilon}\; d\tau}{\langle\sigma\rangle_{T^{\frac{1}{2}}}\langle\sigma_2\rangle|m_2|^{2s_1}} \Big\}^{\frac{1}{2}}.$$

Probemos que existe $\delta > 0$ tal que $I^*_{B_1} \leq CT^{\delta}$.

Para $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, a ser precisado más adelante, usando las notaciones introducidas en la estimación de I_{B_1} y con $m_1 > 0$ tenemos:

$$\begin{aligned} I^*_{B_1} &\leq CT^{\delta} \sup \frac{m_1^{3\varepsilon}}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \Big\{ \sum \int \frac{m^2\langle\sigma/m^3\rangle^{2\varepsilon}\; d\tau}{\langle\sigma\rangle^{1-2\delta}\langle\sigma_2\rangle} \Big\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq CT^{\delta} \sup \frac{m_1^{3\varepsilon}}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \Big\{ \sum_{\{\lambda|(\lambda,\lambda_1)\in B_1 \wedge -3|\sigma_1| \leq z \leq z_0\}} \int \frac{m^2\langle\sigma/m^3\rangle^{2\varepsilon}\; d\tau}{\langle\sigma\rangle^{1-2\delta}\langle\sigma_2\rangle} + \sum_{\{\lambda|(\lambda,\lambda_1)\in B_1 \wedge z_0 \leq z \leq \frac{3}{4}m_1^3\}} \int \frac{m^2\langle\sigma/m^3\rangle^{2\varepsilon}\; d\tau}{\langle\sigma\rangle^{1-2\delta}\langle\sigma_2\rangle} \Big\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Como se vio en la estimación de I_{B_1}, si $(\lambda,\lambda_1)\in B_1$ y $-3|\sigma_1|\le z\le z_0$, entonces $|m|\ge C|\sigma_1|^{\frac{1}{3}}\ge C|\sigma|^{\frac{1}{3}}$ y por tanto $\langle\frac{\sigma}{m^3}\rangle\le C$. Si $(\lambda,\lambda_1)\in B_1$ y $z_0\le z\le\frac{3}{4}m_1^3$, entonces $|m|\le C|\sigma_1|^{\frac{1}{3}}$, y así

$$m^2\langle\frac{\sigma}{m^3}\rangle^{2\varepsilon}\le C(m^2+|m|^{2-6\varepsilon}|\sigma|^{2\varepsilon})\le C|\sigma_1|^{\frac{2}{3}}.$$

Luego, imponiendo una primera condición para δ, a saber, $1-3\delta>0$ y aplicando (2.2) con $\alpha'=1-3\delta$, tenemos:

$$I_{B_1}^*\le CT^\delta\sup_{\frac{3}{4}m_1^3\le4|\sigma_1|}\frac{m_1^{3\varepsilon}}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\Big\{\sum_{\{(m,n)|-3|\sigma_1|\le z\le z_0\}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{m^2\,d\sigma}{\langle\sigma\rangle^{1-2\delta}\langle\sigma_2\rangle}+\sum_{\{(m,n)|z_0\le z\le\frac{3}{4}m_1^3\}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\sigma_1|^{\frac{2}{3}}\,d\sigma}{\langle\sigma\rangle^{1-2\delta}\langle\sigma_2\rangle}\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\le CT^\delta\sup_{\frac{3}{4}m_1^3\le4|\sigma_1|}\frac{m_1^{3\varepsilon}}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\Big\{\sum_{\{(m,n)|-3|\sigma_1|\le z\le z_0\}}\frac{m^2}{\langle\mu\rangle^{1-3\delta}}+\sum_{\{(m,n)|z_0\le z\le\frac{3}{4}m_1^3\}}\frac{|\sigma_1|^{\frac{2}{3}}}{\langle\mu\rangle^{1-3\delta}}\Big\}^{\frac{1}{2}}.$$

De (2.3), tomando δ de manera que $1-3\delta>\frac{1}{2}$ y teniendo en cuenta que para $z\in[-3|\sigma_1|,z_0]$ se tiene que $|m|\le\frac{c|\sigma_1|^{\frac{1}{2}}}{m_1^{\frac{1}{2}}}$ y que para $z\in[z_0,\frac{3}{4}m_1^3]$ se cumple que $|z|\le cm_1|\sigma_1|^{\frac{2}{3}}$, obtenemos:

$$I_{B_1}^*\le CT^\delta\sup\frac{m_1^{3\varepsilon}}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\Big\{\sum_{\{m|-3|\sigma_1|\le z\le z_0\}}\frac{|\sigma_1|}{m_1}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt{|z|}\,d\mu}{m_1\sqrt{|\sigma_1+z-\mu|}\langle\mu\rangle^{1-3\delta}}+1\Big]\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+CT^\delta\sup\frac{m_1^{3\varepsilon}}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\Big\{\sum_{\{m|z_0\le z\le\frac{3}{4}m_1^3\}}|\sigma_1|^{\frac{2}{3}}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt{|z|}\,d\mu}{m_1\sqrt{|\sigma_1+z-\mu|}\langle\mu\rangle^{1-3\delta}}+1\Big]\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\le CT^\delta\sup\frac{m_1^{3\varepsilon}}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\Big\{\frac{|\sigma_1|}{m_1^2}\sum_{\{m|-3|\sigma_1|\le z\le z_0\}}\frac{\sqrt{|z|}}{\langle\sigma_1+z\rangle^{\frac{1}{2}-3\delta}}+\frac{|\sigma_1|}{m_1}\frac{|\sigma_1|^{\frac{1}{2}}}{m_1^{\frac{1}{2}}}\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+CT^\delta\sup\frac{m_1^{3\varepsilon}}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\Big\{\frac{|\sigma_1|^{\frac{2}{3}}m_1^{\frac{1}{2}}|\sigma_1|^{\frac{1}{3}}}{m_1}\sum_{\{m|z_0\le z\le\frac{3}{4}m_1^3\}}\frac{1}{\langle\sigma_1+z\rangle^{\frac{1}{2}-3\delta}}+|\sigma_1|^{\frac{2}{3}}|\sigma_1|^{\frac{1}{3}}\Big\}^{\frac{1}{2}};$$

y del lema 2.2 y de (2.4) se sigue que

$$
\begin{aligned}
I^*_{B_1} &\le CT^\delta \sup \frac{m_1^{3\varepsilon}}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac12+\varepsilon}}\Big\{\frac{|\sigma_1|}{m_1^2}\int_{-3|\sigma_1|}^{z_0}\frac{\sqrt{|z|}\,dz}{m_1^{\frac12}\sqrt{\frac34 m_1^3+|z|}\langle\sigma_1+z\rangle^{\frac12-3\delta}}+\frac{|\sigma_1|}{m_1^2}|\sigma_1|^{\frac12}+\frac{|\sigma_1|^{\frac32}}{m_1^{\frac32}}\Big\}^{\frac12}\\
&\quad + CT^\delta \sup \frac{m_1^{3\varepsilon}}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac12+\varepsilon}}\Big\{\frac{|\sigma_1|}{m_1^{\frac12}}\Big[\int_{z_0}^{\frac34 m_1^3}\frac{dz}{m_1^{\frac12}\sqrt{\frac34 m_1^3-z}\langle\sigma_1+z\rangle^{\frac12-3\delta}}+1\Big]+|\sigma_1|\Big\}^{\frac12}\\
&\le CT^\delta \sup \frac{m_1^{3\varepsilon}}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac12+\varepsilon}}\Big\{\frac{|\sigma_1|}{m_1^{\frac52}}\langle\sigma_1\rangle^{\frac12+3\delta}+\frac{|\sigma_1|^{\frac32}}{m_1^{\frac32}}+\frac{|\sigma_1|}{m_1}\langle\sigma_1\rangle^{\frac12-(\frac12-3\delta)}+|\sigma_1|\Big\}\\
&\le CT^\delta \sup\Big\{\frac{m_1^{3\varepsilon-\frac54}}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac12+\varepsilon-\frac34-\frac32\delta}}+\frac{m_1^{3\varepsilon-\frac34}}{\langle\sigma_1\rangle^{\varepsilon-\frac14}}+\frac{m_1^{3\varepsilon-\frac12}}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac12+\varepsilon-\frac12-\frac32\delta}}+\frac{m_1^{3\varepsilon}}{\langle\sigma_1\rangle^{\varepsilon}}\Big\}\\
&\le CT^\delta \sup\Big\{\frac{1}{\langle\sigma_1\rangle^{\varepsilon-\frac14-\frac32\delta}m_1^{\frac54-3\varepsilon}}+\frac{|\sigma_1|^{\varepsilon-\frac14}}{\langle\sigma_1\rangle^{\varepsilon-\frac14}}+\frac{|\sigma_1|^{\varepsilon-\frac16}}{\langle\sigma_1\rangle^{\varepsilon-\frac32\delta}}+\frac{|\sigma_1|^{\varepsilon}}{\langle\sigma_1\rangle^{\varepsilon}}\Big\}.
\end{aligned}
$$

De esta manera, si tomamos un número δ que satisfaga la condición $\varepsilon-\frac14-\frac32\delta\ge 0$ (lo cual es posible ya que $\varepsilon-\frac14>0$) y que además cumpla que $\frac16-\frac32\delta\ge 0$, es decir, $0<\delta\le\frac19$, entonces

$$I^*_{B_1}\le CT^\delta\,.$$

Estimación de $J^*_{B_2}$:

Definiendo p_B y q_B como en (2.13) y procediendo como se hizo en la estimación de $J^*_{B_1}$ para definir $I^*_{B_1}$, puede verse que

$$J^*_{B_2}\le CI^*_{B_2}\|p_B\|\|q_B\|\|h\|\,,$$

donde

$$I^*_{B_2}:=\sup_{\substack{2m_1^2\le 4|\sigma_1|\le\frac34|m_1|^3\\ m_1\neq 0}}\frac{1}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac12}|m_1|^{s_1}}\Big\{\sum_{\{\lambda|\,(\lambda,\lambda_1)\in B_2\}}\int\frac{|m|^{2s_1+2}\langle\theta\rangle^{2\varepsilon}\,d\tau}{\langle\sigma\rangle_{T^{\frac12}}\langle\sigma_2\rangle|m_2|^{2s_1}}\Big\}^{\frac12}.$$

Probemos que existe $\delta>0$ tal que $I^*_{B_2}\le CT^\delta$.

Para $\delta\in(0,\frac12)$, a ser precisado más adelante, y con $m_1>0$:

$$I^*_{B_2}\le CT^\delta\sup\frac{1}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac12}}\Big\{\sum\int\frac{m^2\langle\sigma/m^3\rangle^{2\varepsilon}\,d\tau}{\langle\sigma\rangle^{1-2\delta}\langle\sigma_2\rangle}\Big\}^{\frac12}.$$

Observamos que si $(\lambda,\lambda_1)\in B_2$, entonces $|m|$, $|m_2|\le m_1+\frac{c|\sigma_1|}{m_1^2}\le cm_1$ y por tanto

$$
\begin{aligned}
m^2\langle\frac{\sigma}{m^3}\rangle^{2\varepsilon}&\le C(m^2+|m|^{2-6\varepsilon}|\sigma|^{2\varepsilon})\le C(m_1^2+|m_1|^{2-6\varepsilon}|\sigma_1|^{2\varepsilon})\\
&\le C(m_1^2+|m_1|^{2-6\varepsilon}|m_1|^{6\varepsilon})\le Cm_1^2\,.
\end{aligned}
$$

Por tanto, de (2.2) y con δ tal que $1-3\delta>0$:

$$I^*_{B_2} \le CT^{\delta} \sup_{2m_1^2\le 4|\sigma_1|\le \frac{3}{4}m_1^3} \frac{m_1}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac12}} \Big\{ \sum_{\{(m,n)||z|\le 3|\sigma_1|\}} \frac{1}{\langle\mu\rangle^{1-3\delta}} \Big\}^{\frac12}.$$

Usando el lema 2.2 y (2.3) y exigiendo que $1-3\delta>\frac12$, se sigue que:

$$\begin{aligned}
I^*_{B_2} &\le CT^{\delta}\sup \frac{m_1}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac12}}\Big\{\sum_{\{m||z|\le 3|\sigma_1|\}}\int \frac{\sqrt{|z|}\,d\mu}{m_1\sqrt{|\sigma_1+z-\mu|}\langle\mu\rangle^{1-3\delta}} + \sum_{\{m||z|\le 3|\sigma_1|\}} 1\ \Big\}^{\frac12} \\
&\le CT^{\delta}\sup \frac{m_1}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac12}}\Big\{\sum \frac{|\sigma_1|^{\frac12}}{m_1}\frac{1}{\langle\sigma_1+z\rangle^{\frac12-3\delta}} + \frac{|\sigma_1|}{m_1^2}\Big\}^{\frac12} \\
&\le CT^{\delta}\sup \frac{m_1}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac12}}\Big\{\frac{|\sigma_1|^{\frac12}}{m_1}\int_{-3|\sigma_1|}^{3|\sigma_1|}\frac{dz}{m_1^{\frac12}\sqrt{\frac34 m_1^3-z}\langle\sigma_1+z\rangle^{\frac12-3\delta}} + \frac{|\sigma_1|^{\frac12}}{m_1} + \frac{|\sigma_1|}{m_1^2}\Big\}^{\frac12}.
\end{aligned}$$

Como en B_2, $\frac34 m_1^3 - z \sim m_1^3$, entonces

$$\begin{aligned}
I^*_{B_2} &\le CT^{\delta}\sup \frac{m_1}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac12}}\Big\{\frac{|\sigma_1|^{\frac12}}{m_1^{\frac32}}\frac{\langle\sigma_1\rangle^{\frac12+3\delta}}{m_1^{\frac32}} + \frac{|\sigma_1|^{\frac12}}{m_1} + \frac{|\sigma_1|}{m_1^2}\Big\}^{\frac12} \\
&\le CT^{\delta}\sup\Big[\frac{\langle\sigma_1\rangle^{\frac32\delta}}{m_1^{\frac12}} + \frac{m_1^{\frac12}}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac14}} + 1\Big] \\
&\le CT^{\delta}\sup\Big[\frac{\langle\sigma_1\rangle^{\frac32\delta}}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac16}} + \frac{|\sigma_1|^{\frac14}}{\langle\sigma_1\rangle^{\frac14}} + 1\Big] \le CT^{\delta},
\end{aligned}$$

si tomamos δ tal que $\frac32\delta \le \frac16$, es decir, si $\delta\le\frac19$. Así, para los valores de δ escogidos,

$$I^*_{B_2} \le CT^{\delta}.$$

De las estimaciones de $J^*_{A_1}$, $J^*_{A_2}$, $J^*_{B_1}$ y $J^*_{B_2}$, teniendo en cuenta las condiciones impuestas para γ y δ, vemos que para $\gamma<\frac12$ y $\delta>0$ tales que $\frac12-\gamma$ y δ son suficientemente pequeños, existe C tal que para $T\in(0,1]$:

$$\begin{aligned}
J^* &\le C(\|p_A\|\|q_A\| + T^{\delta}\|p_B\|\|q_B\|)\|h\| \\
&\le C(\|u\|_{s\gamma 0}\|v\|_{s\gamma 0} + T^{\delta}\|u\|_{s\frac12\varepsilon}\|v\|_{s\frac12\varepsilon})\|h\|
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\|\mathit{\Pi}(-\frac12\partial_x(uv))\|_{s\frac12\varepsilon} \le C\|u\|_{s\gamma 0}\|v\|_{s\gamma 0} + CT^{\delta}\|u\|_{s\frac12\varepsilon}\|v\|_{s\frac12\varepsilon}. \tag{2.21}$$

De las estimaciones (2.15), (2.16), (2.17), (2.18), (2.19) y (2.21) concluimos que existen $\gamma \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ y $\delta > 0$ tales que para todo $T \in (0,1]$

$$\|A_T(u,v)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_t;X^s_\pi)\cap Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon}} \leq C\|u\|_{s\gamma 0}\|v\|_{s\gamma 0} + CT^\delta \|u\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon}\|v\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon}\,,$$

lo cual prueba la parte (iii) del lema 1.5

Demostración de (i):

De (1.6) y (1.7), vemos que es suficiente probar que $A_T(u,v)$, $B_T(u,v) \in C(\mathbb{R}_t; X^s_\pi)$. Haremos la demostración sólo para A_T.

De (1.3) y (1.4):

$$[A_T(u,v)](t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\psi(T^{-1}t)W(t)f_1(t) + h(t) + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\psi(t)W(t)f_0\,.$$

Como $f_0 \in X^s_\pi$, entonces $W(\cdot_t)f_0 \in C(\mathbb{R}_t; X^s_\pi)$ y por tanto

$$\psi(\cdot_t)W(\cdot_t)f_0 \in C(\mathbb{R}_t; X^s_\pi). \tag{2.22}$$

De otra parte, procediendo como se hizo en la estimación de $\|\psi(T^{-1}t)I(-\frac{1}{2}\partial_x(uv))\|_s$, pag 77 observamos que, como

$$\widehat{f_1(t)}(m,n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it\sigma}-1}{i\sigma}\varphi(\sigma)\widehat{f}(m,n,\tau)\,d\tau\,,$$

entonces

$$\begin{aligned}
|[f_1(t+\bar{t}) - f_1(t)]^\frown(m,n)| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\sigma}(e^{i\bar{t}\sigma}-1)\frac{\varphi(\sigma)}{i\sigma}\widehat{f}(m,n,\tau)\,d\tau\right| \\
&\leq |\bar{t}| \int_{|\sigma|\leq 2T^{-\frac{1}{2}}} |\widehat{f}(m,n,\tau)|\,d\tau \\
&\leq C\frac{|\bar{t}|}{T^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{f}(m,n,\tau)|}{\langle\sigma\rangle_{T^{\frac{1}{2}}}}\,d\tau \\
&\leq C\frac{|\bar{t}|}{T^{\frac{1}{2}}}\widehat{g}_0(m,n)\,.
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\|f_1(t+\bar{t}) - f_1(t)\|_s \leq C\frac{|\bar{t}|}{T^{\frac{1}{2}}}\|g_0\|_s \to 0 \quad \text{si } \bar{t} \to 0\,.$$

Luego $f_1 \in C(\mathbb{R}_t; X^s_\pi)$ y en consecuencia

$$\psi(T^{-1}\cdot_t)W(\cdot_t)f_1(\cdot_t) \in C(\mathbb{R}_t; X^s_\pi). \tag{2.23}$$

Finalmente, como en la estimación de $\|I\!I(-\frac{1}{2}\partial_x(uv))\|_s$, pag 13

$$\widehat{h(t)}(m,n) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\tau}\widehat{f}(m,n,\tau)\frac{1-\varphi(\sigma)}{i\sigma}\,d\tau$$

y así

$$\begin{aligned}|[h(t+\bar{t}) - h(t)]^{\frown}(m,n)]| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\tau}(e^{i\bar{t}\tau}-1)\frac{\widehat{f}(m,n,\tau)}{i\sigma}(1-\varphi(\sigma))\,d\tau\right| \\ &\le C\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{i\bar{t}\tau}-1|\frac{|\widehat{f}(m,n,\tau)|}{\langle\sigma\rangle_{T^{\frac{1}{2}}}}\,d\tau\,.\end{aligned}$$

Como el integrando anterior tiende a cero cuando $\bar{t}$ tiende a cero y está acotado por

$$\frac{2|\widehat{f}(m,n,\tau)|}{\langle\sigma\rangle_{T^{\frac{1}{2}}}}\,,$$

cuya integral con respecto a τ en $(-\infty,+\infty)$ es $2\widehat{g}_0(m,n) < \infty$, entonces, por el teorema de la convergencia dominada, para (m,n) fijo, $|[h(t+\bar{t}) - h(t)]^{\frown}(m,n)| \to 0$ cuando $\bar{t}\to 0$. Como además,

$$|[h(t+\bar{t}) - h(t)]^{\frown}(m,n)| \le 2\widehat{g}_0(m,n),$$

una nueva aplicación del teorema de la convergencia dominada muestra que

$$\|h(t+\bar{t}) - h(t)\|_s^2 = \sum_{\substack{m\neq 0\\ n}} \langle m\rangle^{2s_1}\langle n\rangle^{2s_2}|[h(t+\bar{t}) - h(t)]^{\frown}(m,n)|^2 \longrightarrow 0\,, \quad \text{cuando } \bar{t}\to 0\,. \tag{2.24}$$

(2.22), (2.23) y (2.24) muestran que $A_T(u,v) \in C(\mathbb{R}_t; X_\pi^s)$. $\square$

Capítulo 3

Demostración de los Teoremas I y II

Para demostrar la existencia de una solución del problema (0.1-P) utilizaremos las propiedades de acotamiento de la forma bilineal A_T y los siguientes lemas:

Lema 3.1. *Para* $0 < \gamma < \gamma' < \frac{1}{2}$ *se tiene que:*

$$\|\psi(T^{-1}\cdot_t)u\|_{s\gamma 0} \leq CT^{\frac{\gamma'-\gamma}{8\gamma'}}\|u\|_{s\gamma' 0}\,.$$

Demostración. Demostramos primero el caso $s = (0,0)$, es decir, probamos que

$$\|\psi(T^{-1}\cdot_t)u\|_{0\gamma 0} \leq CT^{\frac{\gamma'-\gamma}{8\gamma'}}\|u\|_{0\gamma' 0}\,. \tag{3.1}$$

Esta desigualdad se tendrá por interpolación una vez probemos que:

(i) $\qquad \|\psi(T^{-1}\cdot_t)u\|_{000} \leq CT^{\frac{1}{8}}\|u\|_{0\frac{1}{8}0}$ y $\qquad$ (3.2)

(ii) $\qquad \|\psi(T^{-1}\cdot_t)u\|_{0\gamma' 0} \leq C\|u\|_{0\gamma' 0}\,.$ $\qquad$ (3.3)

Prueba de (i):

Por un argumento de densidad, basta tomar $u \in \mathcal{S}(\Pi \times \mathbb{R}) \cap Y_{0\frac{1}{8}0}$. De la identidad de Plancherel en las variables x, y, t y observando que

$$\|W(-t)u(t)\|_{L^2(\Pi)} = \|u(t)\|_{L^2(\Pi)}\,,$$

se sigue que:

$$\begin{aligned}\|\psi(T^{-1}\cdot_t)u\|_{000}^2 &= \|\psi(T^{-1}\cdot_t)u\|^2_{L^2(\Pi\times\mathbb{R}_t)} = \int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(T^{-1}t)|^2\|u(t)\|^2_{L^2(\Pi)}dt \\ &\leq C\int_{-2T}^{2T}\|W(-t)u(t)\|^2_{L^2(\Pi)}dt = C\iint_\Pi\int_{-2T}^{2T}\big|[W(-t)u(t)](x,y)\big|^2\,dt\,dy\,dx\,.\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Hölder a la integral con respecto a t de esta última expresión con exponentes $\frac{4}{3}$ y 4, tenemos que:

$$\begin{aligned}\|\psi(T^{-1}\cdot_t)u\|_{000}^2 &\leq CT^{\frac{1}{4}}\iint_\Pi\Big(\int_{-2T}^{2T}\big|[W(-t)u(t)](x,y)\big|^{\frac{8}{3}}\,dt\Big)^{\frac{3}{4}}\,dy\,dx \\ &\leq CT^{\frac{1}{4}}\iint_\Pi\|[W(-t)u(t)](x,y)\|^2_{L_t^{\frac{8}{3}}}\,dy\,dx\,.\end{aligned}$$

Como $H^{\frac{1}{8}}(\mathbb{R}_t)$ está inmerso de forma continua en $L^{\frac{8}{3}}(\mathbb{R}_t)$, entonces

$$
\begin{aligned}
\|\psi(T^{-1}\cdot_t)u\|_{000}^2 &\le CT^{\frac{1}{4}} \iint_{\Pi} \|[W(-t)u(t)](x,y)\|^2_{H_t^{\frac{1}{8}}}\, dy\, dx \\
&= CT^{\frac{1}{4}} \iint_{\Pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle\tau\rangle^{\frac{1}{4}} \left|\left([W(-t)u(t)](x,y)\right)^{\wedge t}(\tau)\right|^2 d\tau\, dy\, dx \\
&= CT^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \iint_{\Pi} \langle\tau\rangle^{\frac{1}{4}} \left|\left([W(-t)u(t)](x,y)\right)^{\wedge t}(\tau)\right|^2 dy\, dx\, d\tau\,.
\end{aligned}
$$

Usando la identidad de Plancherel en las variables x, y tenemos:

$$
\begin{aligned}
\|\psi(T^{-1}\cdot_t)u\|_{000}^2 &\le CT^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\substack{m\neq 0\\ n}} \langle\tau\rangle^{\frac{1}{4}} \left|[W(-\cdot_t)u]^{\wedge}(m,n,\tau)\right|^2 d\tau \\
&= CT^{\frac{1}{4}} \sum \int_{-\infty}^{+\infty} \langle\tau\rangle^{\frac{1}{4}} \left|[e^{-itl(m,n)}\widehat{u(t)}(m,n)]^{\wedge t}(\tau)\right|^2 d\tau \\
&= CT^{\frac{1}{4}} \sum \int_{-\infty}^{+\infty} \langle\tau\rangle^{\frac{1}{4}} |\widehat{u}(m,n,\tau+l(m,n))|^2\, d\tau \\
&= CT^{\frac{1}{4}} \sum \int_{-\infty}^{+\infty} \langle\sigma\rangle^{\frac{1}{4}} |\widehat{u}(m,n,\tau)|^2\, d\tau \\
&= CT^{\frac{1}{4}} \|u\|^2_{0\frac{1}{8}0}\,,
\end{aligned}
$$

lo cual prueba (i).

Prueba de (ii):

Para $u \in \mathcal{S}(\Pi \times \mathbb{R}) \cap Y_{0\gamma' 0}$:

$$
\|\psi(T^{-1}\cdot_t)u\|^2_{0\gamma'0} = \sum_{\substack{m\neq 0\\ n}} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle\sigma\rangle^{2\gamma'} \left|\left[T\widehat{\psi}(T\cdot_\tau) *_\tau \widehat{u}(m,n,\cdot_\tau)\right](\tau)\right|^2 d\tau\,.
$$

Si $I(m,n)$ denota la integral en la anterior expresión, entonces

$$
\begin{aligned}
I(m,n) &\le C\|T\widehat{\psi}(T\cdot_\tau) *_\tau \widehat{u}(m,n,\cdot_\tau)\|^2_{L^2_\tau} \\
&\qquad + \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma'} \left|\left[T\widehat{\psi}(T\cdot_t) *_\tau \widehat{u}(m,n,\cdot_\tau)\right](\tau + l(m,n))\right|^2 d\tau \\
&:= II(m,n) + III(m,n).
\end{aligned}
$$

De una parte,

$$
II(m,n) \le C\|T\widehat{\psi}(T\cdot_\tau)\|^2_{L^1_\tau} \|\widehat{u}(m,n,\cdot_\tau)\|^2_{L^2_\tau} \le C\|\widehat{u}(m,n,\cdot_\tau)\|^2_{L^2_\tau}\,,
$$

y así,

$$\sum_{\substack{m\neq 0\\ n}} II(m,n) \leq C\|u\|^2_{000} \leq C\|u\|^2_{0\gamma'0}\,. \tag{3.4}$$

De otra parte,

$$III(m,n) = \|D_t^{\gamma'}\left[e^{-itl(m,n)}\psi(T^{-1}t)\widehat{u(t)}(m,n)\right]\|^2_{L^2_t}\,,$$

donde $D_t^{\gamma'}$ es la derivada fraccionaria de orden γ' con respecto a t. Usamos ahora la siguiente fórmula de Leibniz para derivadas fraccionarias demostrada en [KaPo]:

Si $\gamma' \in (0,1)$ y $1 < p < \infty$, entonces

$$\|D^{\gamma'}(fg) - fD^{\gamma'}g\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|D^{\gamma'}f\|_{L^p(\mathbb{R})}\,.$$

Aplicando esta fórmula con $p = 2$ en la anterior expresión para $III(m,n)$, tenemos

$$\begin{aligned}
III(m,n) &\leq C\|D_t^{\gamma'}[e^{-itl(m,n)}\widehat{u(t)}(m,n)\psi(T^{-1}t)] - e^{-itl(m,n)}\widehat{u(t)}(m,n)D_t^{\gamma'}\psi(T^{-1}t)\|^2_{L^2_t}\\
&\quad + C\|e^{-itl(m,n)}\widehat{u(t)}(m,n)D_t^{\gamma'}\psi(T^{-1}t)\|^2_{L^2_t}\\
&\leq C\|\psi(T^{-1}t)\|^2_{L^\infty_t}\|D_t^{\gamma'}[e^{-itl(m,n)}\widehat{u(t)}(m,n)]\|^2_{L^2_t} + C\|e^{-itl(m,n)}\widehat{u(t)}(m,n)D_t^{\gamma'}\psi(T^{-1}t)\|^2_{L^2_t}\\
&\leq C\||\tau|^{\gamma'}\widehat{u}(m,n,\tau+l(m,n))\|^2_{L^2_\tau} + C\|e^{-itl(m,n)}\widehat{u(t)}(m,n)\|^2_{L^{2p}_t}\|D_t^{\gamma'}\psi(T^{-1}t)\|^2_{L^{2p'}_t}\,,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

donde p y p' son exponentes conjugados. Como $0 < \gamma' < \frac{1}{2}$, podemos escoger $p < \infty$ de tal manera que $\frac{1}{2} - \frac{1}{2p} = \gamma'$. Entonces el espacio de Sobolev $H^{\gamma'}(\mathbb{R}_t)$ está inmerso de manera continua en $L^{2p}(\mathbb{R}_t)$. Teniendo en cuenta este hecho, que el exponente conjugado $(2p')'$ de $2p'$ es $\frac{1}{1-\gamma'}$ y que el operador de transformada inversa de Fourier es acotado de $L^{(2p')'}(\mathbb{R}_t)$ en $L^{2p'}(\mathbb{R}_t)$, de (3.5) se sigue que:

$$\begin{aligned}
III(m,n) &\leq C\|\langle\sigma\rangle^{\gamma'}\widehat{u}(\lambda)\|^2_{L^2_\tau} + C\|\langle\tau\rangle^{\gamma'}[\widehat{u(t)}(m,n)]^{\wedge t}(\tau+l(m,n))\|^2_{L^2_\tau}\||\tau|^{\gamma'}T\widehat{\psi}(T\tau)\|^2_{L_\tau^{\frac{1}{1-\gamma'}}}\\
&= C\|\langle\sigma\rangle^{\gamma'}\widehat{u}(\lambda)\|^2_{L^2_\tau}\left(1 + \int_{-\infty}^{+\infty}|\tau|^{\frac{\gamma'}{1-\gamma'}}T^{\frac{1}{1-\gamma'}}|\widehat{\psi}(T\tau)|^{\frac{1}{1-\gamma'}}\,d\tau\right)^{2(1-\gamma')}\\
&\leq C\|\langle\sigma\rangle^{\gamma'}\widehat{u}(\lambda)\|^2_{L^2_\tau}\left(1 + \int_{-\infty}^{+\infty}|T\tau|^{\frac{\gamma'}{1-\gamma'}}|\widehat{\psi}(T\tau)|^{\frac{1}{1-\gamma'}}(T\,d\tau)\right)^{2(1-\gamma')}\\
&= C\|\langle\sigma\rangle^{\gamma'}\widehat{u}(\lambda)\|^2_{L^2_\tau}\left(1 + \int_{-\infty}^{+\infty}|\tau|^{\frac{\gamma'}{1-\gamma'}}|\widehat{\psi}(\tau)|^{\frac{1}{1-\gamma'}}\,d\tau\right)^{2(1-\gamma')}\\
&= C\|\langle\sigma\rangle^{\gamma'}\widehat{u}(\lambda)\|^2_{L^2_\tau}\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{\substack{m\neq 0\\ n}} III(m,n) \leq C\|u\|^2_{0\gamma'0}\,, \tag{3.6}$$

y (ii) se tiene de (3.4) y (3.6).

De (i) y (ii), se sigue por interpolación que, para $\nu \in (0,1)$

$$\|\psi(T^{-1}\cdot_t)u\|_{0,\nu\gamma',0} \le CT^{\frac{1}{8}(1-\nu)}\|u\|_{0,(1-\nu)\frac{1}{8}+\nu\gamma',0} \le CT^{\frac{1}{8}(1-\nu)}\|u\|_{0\gamma'0}\,.$$

Si tomamos $\nu = \frac{\gamma}{\gamma'}$, entonces se tiene (3.1).

Por último, para probar el lema en el caso de s arbitrario, basta usar (3.1) con $\Gamma^s u$ en lugar de u, donde $\Gamma^s u$ se define mediante la fórmula $[\Gamma^s u]^\frown(\lambda) := \langle m\rangle^{s_1}\langle n\rangle^{s_2}\widehat{u}(\lambda)$. $\square$

Lema 3.2. *Para $\frac{1}{4} < \varepsilon < \frac{1}{2}$ y $T \in (0,1]$:*

$$\|\psi(T^{-1}\cdot_t)u\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon} \le CT^{-\varepsilon}\|u\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon}\,.$$

Demostración. Como en la prueba del lema 3.1, es suficiente considerar el caso $s = (0,0)$. Observemos primero que para $v \in S'_{\mathcal{F}}(\Pi \times \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\|v\|^2_{s\frac{1}{2}\varepsilon} &\sim \sum_{\substack{m\neq 0\\ n}} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle\sigma\rangle\langle\frac{\sigma}{m^3}\rangle^{2\varepsilon}|\widehat{v}(\lambda)|^2\,d\tau \\
&\sim \sum \int (1 + |\sigma| + \frac{|\sigma|^{2\varepsilon}}{|m|^{6\varepsilon}} + \frac{|\sigma|^{1+2\varepsilon}}{|m|^{6\varepsilon}})|\widehat{v}(\lambda)|^2\,d\tau \\
&\sim \sum \int \langle\sigma\rangle|\widehat{v}(\lambda)|^2\,d\tau + \sum \int \langle\sigma\rangle^{1+2\varepsilon}\left|\frac{\widehat{v}(\lambda)}{|m|^{3\varepsilon}}\right|^2 d\tau \\
&\sim (\|v\|_{0\frac{1}{2}0} + \|\Lambda^\varepsilon v\|_{0,\frac{1}{2}+\varepsilon,0})^2
\end{aligned} \tag{3.7}$$

donde $\Lambda^\varepsilon v$ se define mediante $[\Lambda^\varepsilon v]^\frown(\lambda) := \frac{\widehat{v}(\lambda)}{|m|^{3\varepsilon}}$, $m \neq 0$ y $[\Lambda^\varepsilon v]^\frown(0,n,\tau) := 0$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\|\psi(T^{-1}\cdot_t)u\|_{0\frac{1}{2}\varepsilon} &\sim \|\psi(T^{-1}\cdot_t)u\|_{0\frac{1}{2}\varepsilon} + \|\Lambda^\varepsilon[\psi(T^{-1}\cdot_t)u]\|_{0,\frac{1}{2}+\varepsilon,0} \\
&= \|\psi(T^{-1}\cdot_t)u\|_{0\frac{1}{2}\varepsilon} + \|\psi(T^{-1}\cdot_t)\Lambda^\varepsilon u\|_{0,\frac{1}{2}+\varepsilon,0}\,.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Estimemos la segunda norma del lado derecho de (3.8). Para ello procedemos como se hizo en la demostración del lema 3.1, para obtener expresiones análogas a (3.4) y (3.5) con $\frac{1}{2}+\varepsilon$ en lugar de γ' y con $\Lambda^\varepsilon u$ en lugar de u; es decir, encontramos que:

$$\|\psi(T^{-1}\cdot_t)\Lambda^\varepsilon u\|^2_{0,\frac{1}{2}+\varepsilon,0} \le C\sum_{\substack{m\neq 0\\ n}} II(m,n) + C\sum_{\substack{m\neq 0\\ n}} III(m,n)\,,$$

donde

$$\sum II(m,n) \le C\|\Lambda^\varepsilon u\|^2_{000} \le C\|\Lambda^\varepsilon u\|^2_{0,\frac{1}{2}+\varepsilon,0} \tag{3.9}$$

y

$$III(m,n) \leq C\| |\tau|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\widehat{(\Lambda^\varepsilon u)}(m,n,\tau+l(m,n))\|^2_{L^2_\tau} + C\|e^{-itl(m,n)}[(\Lambda^\varepsilon u)(t)]^\frown(m,n)\|^2_{L^{2p}_t}\|D_t^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\psi(T^{-1}t)\|^2_{L^{2p'}_t}\,. \tag{3.10}$$

Tomando $p=\infty$ y $p'=1$, y teniendo en cuenta que $H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\mathbb{R}_t)$ está inmerso de manera continua en $L^\infty(\mathbb{R}_t)$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
III(m,n) &\leq C\|\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\widehat{(\Lambda^\varepsilon u)}(\lambda)\|^2_{L^2_\tau} + C\|\langle\tau\rangle^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\widehat{(\Lambda^\varepsilon u)}(m,n,\tau+l(m,n))\|^2_{L^2_\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}|\tau|^{1+2\varepsilon}T^2|\widehat{\psi}(T\tau)|^2\,d\tau \\
&\leq C\|\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\widehat{(\Lambda^\varepsilon u)}(\lambda)\|^2_{L^2_\tau}\left(1+T^{-2\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty}|\tau|^{1+2\varepsilon}|\widehat{\psi}(\tau)|^2\,d\tau\right) \\
&\leq C\|\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\widehat{(\Lambda^\varepsilon u)}(\lambda)\|^2_{L^2_\tau}(1+CT^{-2\varepsilon})\,.
\end{aligned}$$

De esta última desigualdad, de (3.9), y del hecho de que $T\leq 1$, obtenemos:

$$\|\psi(T^{-1}\cdot_t)\Lambda^\varepsilon u\|_{0,\frac{1}{2}+\varepsilon,0} \leq CT^{-\varepsilon}\|\Lambda^\varepsilon u\|_{0,\frac{1}{2}+\varepsilon,0}\,. \tag{3.11}$$

De modo similar, se tiene que

$$\|\psi(T^{-1}\cdot_t)u\|^2_{0\frac{1}{2}0} \leq C\sum_{\substack{m\neq 0\\ n}}\overline{II}(m,n) + C\sum_{\substack{m\neq 0\\ n}}\overline{III}(m,n)\,,$$

donde

$$\sum_{\substack{m\neq 0\\ n}}\overline{II}(m,n) \leq C\|u\|^2_{0\frac{1}{2}0} \tag{3.12}$$

y

$$\overline{III}(m,n) \leq C\|\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}}\widehat{u}(\lambda)\|^2_{L^2_\tau} + C\|e^{-itl(m,n)}\widehat{u(t)}(m,n)\|^2_{L^{2p}_t}\|D_t^{\frac{1}{2}}\widehat{\psi}(T^{-1}t)\|^2_{L^{2p'}_t}\,.$$

Teniendo en cuenta en este caso que para todo $p\in[1,+\infty)$, $H_t^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_t)$ está inmerso de forma continua en $L^{2p}(\mathbb{R}_t)$, y que la transformada inversa de Fourier es acotada de $L^{(2p')'}(\mathbb{R}_t)$ en $L^{2p'}(\mathbb{R}_t)$, vemos que:

$$\begin{aligned}
\overline{III}(m,n) &\leq C\|\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}}\widehat{u}(\lambda)\|^2_{L^2_\tau} \\
&\quad + C\|\langle\tau\rangle^{\frac{1}{2}}\widehat{u}(m,n,\tau+l(m,n))\|^2_{L^2_\tau}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left(|\tau|^{\frac{1}{2}}T|\widehat{\psi}(T\tau)|\right)^{\frac{2p'}{2p'-1}}\,d\tau\right)^{\frac{2p'-1}{p'}} \\
&\leq C\|\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}}\widehat{u}(\lambda)\|^2_{L^2_\tau}(1+T^{-\frac{1}{p}})\,.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

De (3.12) y (3.13), tomando $p=\frac{1}{2\varepsilon}$, obtenemos:

$$\|\psi(T^{-1}\cdot_t)u\|_{0\frac{1}{2}0} \leq CT^{-\varepsilon}\|u\|_{0\frac{1}{2}0}\,. \tag{3.14}$$

Así, de (3.8), (3.11), (3.14) y (3.7) se sigue que:

$$\|\psi(T^{-1}\cdot_t)u\|_{0\frac{1}{2}\varepsilon} \leq CT^{-\varepsilon}(\|u\|_{0\frac{1}{2}0} + \|\Lambda^\varepsilon u\|_{0,\frac{1}{2}+\varepsilon,0}) \sim CT^{-\varepsilon}\|u\|_{0\frac{1}{2}\varepsilon}\,.$$

□

Demostración del Teorema I (Existencia)

Para $u_0 \in X^s_\pi$ y $T \in (0,1]$, y para $\alpha > 0$ a ser escogido de manera adecuada, consideremos el operador $\Phi := \Phi^T_{u_0}$ de $Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon}$ en sí mismo definido por

$$\Phi(v) := \psi(\cdot_t)W(\cdot_t)u_0 + A_T\big(\psi(T^{-\alpha}\cdot_t)v, \psi(T^{-\alpha}\cdot_t)v\big)\,. \tag{3.15}$$

Una estimación directa nos permite observar que $\psi(\cdot_t)W(\cdot_t)u_0 \in Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon} \cap C_b(\mathbb{R}_t; X^s_\pi)$ y que

$$\|\psi(\cdot_t)W(\cdot_t)u_0\|_{Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon}\cap L^\infty(\mathbb{R}_t;X^s_\pi)} \leq C\|u_0\|_s\,.$$

De este hecho y de los lemas 1.5, 3.1 y 3.2 se sigue que existen $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ y $\delta > 0$ tales que

$$\begin{aligned}\|\Phi(v)\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon} &\leq C\|u_0\|_s + C\|\psi(T^{-\alpha}\cdot_t)v\|^2_{s\gamma 0} + CT^\delta\|\psi(T^{-\alpha}\cdot_t)v\|^2_{s\frac{1}{2}\varepsilon}\\ &\leq C\|u_0\|_s + CT^{\frac{\alpha(\gamma'-\gamma)}{4\gamma'}}\|v\|^2_{s\gamma' 0} + CT^\delta T^{-2\alpha\varepsilon}\|v\|^2_{s\frac{1}{2}\varepsilon}\,,\end{aligned}$$

donde γ' se escoge de tal modo que $0 < \gamma < \gamma' < \frac{1}{2}$. Tomando $\alpha \in (0,1)$ tal que $2\alpha\varepsilon < \delta$, se tiene que

$$\|\Phi(v)\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon} \leq C\|u_0\|_s + CT^\nu\|v\|^2_{s\frac{1}{2}\varepsilon},$$

para cierto $\nu > 0$.

Si se escoge $T \in (0,1]$ tal que

$$T^\nu < \frac{1}{4C^2\|u_0\|_s},$$

digamos, $T^\nu = [8C^2(\|u_0\|_s + 1)]^{-1}$, entonces $T = T(\|u_0\|_s)$ y Φ envía $B(0, 2C\|u_0\|_s)$ (la bola cerrada de centro en 0 y radio $2C\|u_0\|_s$ de $Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon}$) en sí misma. En efecto, si $\|v\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon} \leq 2C\|u_0\|_s$, entonces

$$\|\Phi(v)\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon} \leq C\|u_0\|_s + CT^\nu\|v\|^2_{s\frac{1}{2}\varepsilon} \leq C\|u_0\|_s + C\cdot\frac{1}{8C^2\|u_0\|_s}\cdot 4C^2\|u_0\|^2_s \leq 2C\|u_0\|_s\,.$$

De otra parte, si $u, v \in B(0, 2C\|u_0\|_s)$, entonces

$$\begin{aligned}\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon} &\leq \|A_T\big(\psi(T^{-\alpha}\cdot_t)(u+v), \psi(T^{-\alpha}\cdot_t)(u-v)\big)\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon}\\ &\leq CT^\nu\|u+v\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon}\|u-v\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon}\\ &\leq \frac{C}{8C^2(\|u_0\|_s + 1)}\cdot 4C\|u_0\|_s\|u-v\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon} \leq \frac{1}{2}\|u-v\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon}\,.\end{aligned}$$

Por tanto, Φ es una contracción en $B(0, 2C\|u_0\|_s)$.

Si v es el único punto fijo de Φ en $B(0, 2C\|u_0\|_s)$, entonces, del lema 1.5 y de (3.15), se sigue que $v = \Phi(v) \in C_b(\mathbb{R}_t; X^s_\pi) \cap Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon}$. Si u es la restricción de v al intervalo $[-T, T]$, entonces $u \in Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon}[-T, T]$ y, como $T \in (0, 1]$, entonces $\psi(T^{-\alpha}t)v(t) = v(t)$ para todo $t \in [-T, T]$. Así, de la observación 1.7,

$$u(t) = v(t) = [\Phi(v)](t) = W(t)u_0 + B_T(v, v)(t) \quad \text{para } t \in [-T, T]\,.$$

Por lo tanto, u es solución del problema (0.1-P) en $[-T, T]$ con dato inicial u_0. $\square$

Demostración del Teorema II (unicidad)

Sean $u_0 \in X^s_\pi$, $T > 0$ y $u_1, u_2 \in Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon}[-T, T]$ soluciones de (0.1-P) en $[-T, T]$ con dato inicial u_0. Sean v_1 y v_2 extensiones en $Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon}$ de u_1 y u_2 respectivamente. De la definición 1.6 se tiene que para $t \in [-T, T]$:

$$\begin{aligned} u_1(t) =& W(t)u_0 + [B_T(v_1, v_1)](t) \quad \text{y} \\ u_2(t) =& W(t)u_0 + [B_T(v_2, v_2)](t)\,, \end{aligned}$$

y por tanto

$$u_1(t) - u_2(t) = [B_T(v_1 + v_2, v_1 - v_2)](t) \qquad \forall t \in [-T, T]\,. \tag{3.16}$$

Sea $w_1 := v_1 + v_2$ y tomemos α como en la demostración del teorema I . Veremos que existe $T_1 > 0$, que depende sólo de $\|w_1\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon}$ y de los parámetros s, δ, γ, ε y α, tal que $u_1(t) = u_2(t)$ para todo $t \in [-T_1, T_1]$. Entonces, este resultado puede iterarse un número finito de veces para obtener que $u_1(t) = u_2(t)$ para todo $t \in [-T, T]$.

Para $0 < T_1 < \min\{1, T\}$, tomemos una extensión w en $Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon}$ de $(u_1 - u_2)|_{[-T_1, T_1]}$ tal que

$$\|w\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon} \leq 2\|u_1 - u_2\|_{Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon}[-T_1, T_1]}\,.$$

Si $g := A_{T_1}(\psi(T_1^{-\alpha}\cdot_t)w_1, \psi(T_1^{-\alpha}\cdot_t)w)$, entonces, por el lema 1.5 $g \in Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon}$. Mostremos que g es también una extensión en $Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon}$ de $(u_1 - u_2)|_{[-T_1, T_1]}$. En realidad, para $t \in [-T_1, T_1]$:

$$\begin{aligned} (v_1 + v_2)(t) &= (u_1 + u_2)(t) = w_1(t) = \psi(T_1^{-\alpha}t)w_1(t) \qquad \text{y} \\ (v_1 - v_2)(t) &= (u_1 - u_2)(t) = w(t) = \psi(T_1^{-\alpha}t)w(t)\,, \end{aligned}$$

y por tanto, de (3.16) y de la observación 1.7, se tiene que para $t \in [-T_1, T_1]$:

$$\begin{aligned} u_1(t) - u_2(t) &= [B_T(v_1 + v_2, v_1 - v_2)](t) \\ &= [B_{T_1}(\psi(T_1^{-\alpha}\cdot_t)w_1, \psi(T_1^{-\alpha}\cdot_t)w)](t) \\ &= [A_{T_1}(\psi(T_1^{-\alpha}\cdot_t)w_1, \psi(T_1^{-\alpha}\cdot_t)w)](t) \\ &= g(t)\,, \end{aligned}$$

es decir, g es una extensión en $Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon}$ de $(u_1 - u_2)|_{[-T_1,T_1]}$. De esta manera, usando los lemas 1.5, 3.1 y 3.2 y con el valor de ν obtenido en la demostración del teorema I (el cual depende de s, δ, g, γ', ε y α, y no del tamaño del intervalo $[-T_1, T_1]$), tenemos que

$$\begin{aligned}\|u_1 - u_2\|_{Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon}[-T_1,T_1]} &\leq \|g\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon} \leq CT_1^{\nu}\|w_1\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon}\|w\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon} \\ &\leq 2CT_1^{\nu}\|w_1\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon}\|u_1 - u_2\|_{Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon}[-T_1,T_1]} .\end{aligned}$$

Si tomamos

$$T_1 = \frac{1}{[4C(\|w_1\|_{s\frac{1}{2}\varepsilon} + 1)]^{\frac{1}{\nu}}} ,$$

entonces

$$\|u_1 - u_2\|_{Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon}[-T_1,T_1]} \leq \frac{1}{2}\|u_1 - u_2\|_{Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon}[-T_1,T_1]} .$$

Por tanto $\|u_1 - u_2\|_{Y_{s\frac{1}{2}\varepsilon}[-T_1,T_1]} = 0$, y así, $u_1(t) = u_2(t)$ para todo $t \in [-T_1, T_1]$. $\square$

Referencias

[B1] J. Bourgain, *Fourier Transform restriction phenomena for certain lattice subsets and application to nonlinear evolution equations, I. Schrödinger Equations*, GAFA 3 (1993), 107-156.

[B2] J. Bourgain, *Fourier Transform restriction phenomena for certain lattice subsets and application to nonlinear evolution equations, II. The KdV Equations*, GAFA 3 (1993), 209-262.

[B3] J. Bourgain, *On the Cauchy problem for the Kadomtsev-Petviashvili Equation*, GAFA 3 (1993), 315-341.

[D] J. Duoandikoetxea, *Análisis de Fourier*, Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid, (1995).

[F] A. V. Faminskii, *El problema de Cauchy para la ecuación de Kadomtsev-Petviashvili generalizada*, Sibirsk. Mat. Jour. 33 (1992), 160-172. (En ruso).

[G] J. Ginibre, *Le problème of Cauchy pour des EDP semi-linéaires périodiques in variables d'espace (d'après Bourgain)*, Seminaire Bourbaki n. 796, Astérisque 237 (1996), 163-187.

[IM] P. Isaza, J. Mejía, *Local and global Cauchy problems for the Kadomtsev-Petviashvili (KP-II) equation in Sobolev spaces of negative indices*, aprobado para publicación en la revista Communications in Partial Differential Equations.

[IMS1] P. Isaza, J. Mejía, V. Stallbohm, *Local solution for the Kadomtsev-Petviashvili equation with periodic conditions*, Manuscripta Math. 75 (1992), 383-393.

[IMS2] P. Isaza, J. Mejía, V. Stallbohm, *Local solution for the KP equation in* $\mathbb{R}^2$, Journal of Math. Anal. and Applications 196 (1995), 566-587.

[IMS3] P. Isaza, J. Mejía, V. Stallbohm, *The Cauchy problem for the Kadomtsev-Petviashvili Equation in Sobolev spaces* $H^s(\mathbb{R}^2)$, $s > 0$, Differential and Integral Equations, 14, Number 5, May 2001, 529-557.

[IoN] R.J. Iório, W.V.L. Nunes, *On equations of KP-type*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh A,128 (1998), 725-743.

[Ka] T. Kato, *Quasilinear equations of evolution with applications to PDE*, Lecture Notes in Mathematics, 448 (1975), 27-50, Springer.

[KaPo] T. Kato, G. Ponce, *Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations*, Comm. on Pure and Appl. Math, 41 (1988), 891-907.

[KadPe] B.B. Kadomtsev, V.I. Petviashvili, *On the stability of solitary waves in weakly dispersive media*, Soviet. Phys. Doklad., 15 (1970), 539-543.

[KPV1] C. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *Well posedness of the initial value problem for the Korteweg-de Vries equation*, J. Amer. Math. Soc., 4 (1991), 323-347.

[KPV2] C. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *The Cauchy problem for the Korteweg-de Vries Equation in Sobolev Spaces with negative indices*, Duke Math. J. 71 (1993), 1-21.

[KPV3] C. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *A bilinear estimate with applications to the KdV Equations*, JAMS 9 (1996), 573-603.

[TaTz] H. Takaoka, N. Tzvetkov, *On the local regularity of KP-II equation*, Prepublications Université de Paris-Sud. Mathematiques, Batiment 425, 91405, Orsay-France, 99-50 (1999).

[Tz] N. Tzvetkov, *Global low regularity solutions for Kadomtsev-Petviashvili equations*, Prepublications Université de Paris-Sud. Mathematiques, Batiment 425, 91405, Orsay-France, 99-08 (1999).

[U] S. Ukai, *Local solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation*, J. Fac. Sci. Univ. Tokio Sect. IA Math 36 (1989), 193-209.