Una solución alternativa al problema de política económica de n objetivos y m instrumentos, incorporando costos de ajuste

Arcenio Pecha C.
Matemático

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Económicas
Departamento de Economía
Bogotá, D.C.
Junio de 2010

Una solución alternativa al problema de política económica de n objetivos y m instrumentos, incorporando costos de ajuste

Arcenio Pecha C.
Matemático

Trabajo de tesis para optar al título de
Magister en Economía

Director
Alvaro M. Moreno R.
Magister en Economía

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Económicas
Departamento de Economía
Bogotá, D.C.
Junio de 2010

Título en español

Una solución alternativa al problema de política económica de n objetivos y m instrumentos, incorporando costos de ajuste

Title in English

An alternative solution for economic policy with n objectives and m instruments, that incorporates adjustments costs

Resumen: Se hace una exploración de los problemas de política económica y, mediante el uso de un procedimiento matricial para polinomios de Taylor, se encuentra una solución aproximada a la versión como juego diferencial tiempo variante de este tipo de problemas.

Abstract: It was made an exploration of policy issues (problems) and, using a matrix procedure for Taylor's polynomials, it was found an approximate solution to the version as differential game - time varying of this type of problems.

Palabras clave: Política económica, polinomios de Taylor, juegos diferenciales

Keywords: Economic policy, Taylor's polynomials, differencial games

Nota de aceptación

Trabajo de tesis
Aprobado

"Mención Laureada"

Jurado
Isidro Hernandez

Jurado
Gustavo Junca

Jurado
Raul Chamorro

Director
Alvaro Moreno R.

Bogota, D.C., Octubre 22 de 2010

Dedicado a

Mis hijos Diego Andrés, Santiago Augusto y Camilo José y a Diana Carolina

Agradecimientos

a Alvaro Moreno quien mas que director ha sido y será un gran amigo.

Índice general

Índice general **I**

Introducción **III**

1. Génesis y evolución de los problemas de política económica **1**

1.1. La génesis como un problema estático . . . 2

1.2. Evolución a dinámica continua . . . 3

1.3. Los problemas LQ continuos . . . 8

1.4. Problemas dinámicos discretos . . . 10

1.5. El no determinismo . . . 10

1.6. Las decisiones de política como un juego dinámico . . . 14

2. El problema **16**

2.1. Control LQ . . . 16

2.1.1. Problemas invariantes en el tiempo . . . 16

2.1.2. Problemas variantes en el tiempo . . . 18

2.2. Juegos diferenciales . . . 19

2.2.1. Juegos invariantes en el tiempo . . . 19

2.2.2. Juegos variantes en el tiempo . . . 20

3. Solución aproximada al problema de política LQ **22**

3.1. Aproximación de funciones analíticas por polinomios de Taylor . . . 23

3.2. Aproximación de producto de funciones . . . 24

3.3. Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales variantes en el tiempo 25

3.4. Solución de juegos diferenciales LQ . . . 27

Conclusiones **28**

Trabajo futuro **29**

Problemas con un objetivo y un instrumento **30**

Una aplicación computacional **34**

Bibliografía **39**

Introducción

Los responsables de la política económica, en general, persiguen varios objetivos o metas finales al mismo tiempo. Si se puediese llegar a un concenso entre quienes formulan los objetivos, el problema se reduciría a la decisión de como asignar y manejar los instrumentos para alcanzar esos objetivos consensuados; pero la formulación de políticas es más complicada. Normalmente existen autoridades independientes, quienes toman sus propias decisiones y cuentan con un conjunto de instrumentos no necesariamente independientes. En nuestro medio, por ejemplo, la constitución le asignó al Banco de la República la tarea de controlar la inflación, esto no implica que el Ministerio de Hacienda y Planeación Nacional no tengan interés en su comportamiento, sin embargo, cada uno de ellos tiene una visión distinta sobre cual debe ser su valor óptimo y cada uno posee otros objetivos, no necesariamente los mismos, que definen su función objetivo.

El problema se puede formular de la manera siguiente: se trata de determinar como asignar y ajustar unas variables instrumentales o de control que influyen sobre otras variables, llamadas de estado, para que estas alcancen unos ciertos valores objetivo en un tiempo determinado. Usando una metáfora del mundo de la física, esto equivale a determinar si un cierto vehículo puede ir de un punto inicial a uno final en un tiempo dado y de ser esto posible como deben usarse el timón, acelerador y freno para realizar dicha acción. Estas son preguntas fundamentales: ¿existen los valores adecuados de las variables de control que solucionen el problema?; ¿los valores de las variables de control que solucionen el problema son únicos? y ¿cómo encontrar la solución?. La primera hace referencia al problema de existencia; la segunda a la unicidad y la última a su posibilidad de computo o calculabilidad.

En política económica inicialmente se plantearon problemas en los que las relaciones entre las variables de estado y control era estático: si se conoce la incidencia de los valores instrumentales sobre los objetivos, se trataba de determinar qué valores asignar a los instrumentos para lograr ciertos valores de los objetivos. Este problema en versión lineal, está totalmente solucionado, en el sentido que se han encontrado condiciones necesarias y suficientes para la existencia de la solución y, cuando estas condiciones se cumplan, se ha construido un proceso analítico para calcular la solución al problema.

La evolución de las ciencias y particularmente de la política económica hizo que luego se estudiaran modelos dinámicos deterministicos donde las variables de estado cambian temporalmente de acuerdo a sus propios valores y a los ajustes que reciben de las variables de control. Este estudio se hizo en sus dos versiones: modelos dinámicos discretos, en los que los cambios de valor de las variables sólo se dan en unos ciertos momentos bien determinados del tiempo, y modelos dinámicos continuos, en los que los cambios de esos valores se pueden dar en cualquier instante del tiempo. Ahora se trataba de determinar cómo usar intertemporalmente las variables de control, en un intervalo de tiempo, ya sea para que las variables objetivo alcanzaran un valor meta al final del intervalo o para que se comportasen de forma determinada en cada instante del intervalo; en el primer caso, por ejemplo, la meta es que la inflación en un año sea del 2 % y en el segundo, además, la inflación durante ese periodo debe seguir una trayectoria determinada. En el primer caso sólo se trata de alcanzar una meta al finalizar el año sin importar los valores de la variable durante el periodo, en el segundo es importante el comportamiento durante todo el periodo.

Los problemas dinámicos a su vez pueden ser invariantes o variantes en el tiempo; en los primeros la interacción entre las variables es constante en todo momento, esto significa que el responsable de tomar las decisiones de política asume que las variables objetivo cambian en proporción constante a sus valores y a los de los instrumentos. Bajo esta percepción, por ejemplo, la inflación cambia en proporción constante a su nivel y será afectada en forma constante por la tasa de interés. Los problemas dinámicos lineales invariantes en el tiempo están totalmente solucionados en el mismo sentido de los estáticos.

Por otro lado, si el decisor de política considera que las variaciones de los objetivos son proporciones variables a sus valores y usa los instrumentos en proporciones variables para hacer el control, considera que los problemas son variantes en el tiempo. En los problemas dinámicos variantes en el tiempo los valores de las variables de estado y control modifican cada instante el impacto sobre las variaciones de las variables de estado.

Como muchos de los modelos económicos, los de política económica, han sido tratados con técnicas matemáticas sofisticadas como los cálculos de ecuaciones diferenciales, estocástico y de variaciones y las teorías de control y de juegos. De la teoría de control los problemas que mas se adaptan a las necesidades de la política económica son los que tiene objetivos cuadráticos y restricciones lineales (Problemas LQ). Las restricciones, que son ecuaciones diferenciales, en su parte diferencial modelan las variaciones de las variables de estado y por el otro las relaciones de estas con los valores de las variables de estado y control y las funciones objetivo se interpretan como los costos de ajuste en que se incurre por la discrepancia entre los valores de las variables y sus metas. Puesto que se deseaban modelos para varios hacedores de política interactuando, el camino natural fue el uso de juegos diferenciales LQ en los que un jugador es uno de los hacedores de política con un objetivo, que se construye a partir de la percepción que él tiene de los costos de ajuste, y un conjunto de instrumentos que puede controlar. Esto es, un juego diferencial LQ está formado por un conjunto de problemas de control LQ, uno por cada hacedor de política. Como los juegos diferenciales LQ en particular son problemas dinámicos pueden ser invariantes o variantes en el tiempo, los primeros están totalmente solucionados.

Los problemas variantes en el tiempo, salvo algunos casos muy particulares, no poseen soluciones análiticas cerradas, esto es, no existe un método general de solución. Puesto que solucionar sistemas de ecuaciones diferenciales es la herramienta fundamental para solucionar cualquier problema dinámico ya sea de cálculo de variaciones, control o juego diferencial, el objetivo de este trabajo es encontrar buenas aproximaciones a soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales variantes en el tiempo, entendiendo por buenas aproximaciones funciones que estén tan cerca como se quiera a la solución real del problema. Con ello se pretende dar un paso en el tratamiento de problemas de política económica en el contexto de estrategias LQ.

El trabajo está dividido en tres capítulos. En el primero se hace un barrido bibliográfico para determinar el estado del arte de la materia. Se revisan las distintas versiones y alcances del problema: desde sus inicios con Tinbergen y su visión lineal estática del problema: la dinamización de Preston, sus condiciones de controlabilidad y solución. Las versiones dinámicas no determinísticas de Theil, como generalización de la de Simon, y la de Chow y se revisa las soluciones allí encontradas. La visión del problema desde la teoría de control determinístico y estocástico de Aoki y otros hasta las versiones de Hallet, Di Bartolomeo y Aconcella en las que se considera como un juegos diferencial estocástico.

En el segundo capítulo se hace un barrido sobre la teoría de problemas de control LQ y los resultados sobre su solución, esto es, la relación entre la solución del problema y la ecuación de Riccati para luego usarlos en la solución de juegos diferenciales LQ. Se enuncian los teoremas que relacionan el comportamiento de las variables de control y la ecuación de Riccati y los teoremas sobre la solución de la ecuación de Riccati. Por último, se plantea el sistema de ecuaciones y se deriva la solución a un juego diferencial LQ variante en el tiempo.

El tercer capítulo presenta las aplicaciones matriciales a los desarrollos de Taylor, la interpretación del producto de funciones analíticas como producto de matrices adecuadas base para la solución del problema considerado y por último el uso de la herramienta construida para convertir un sistema de ecuaciones diferenciales lineales variantes en el tiempo en un sistema de ecuaciones lineales y su uso en la solución de problemas de juegos diferenciales LQ variantes en el tiempo.

En el primer apéndice se hace una ilustración de los distintos tipos de problemas y sus soluciones en una variable. En el segundo se presenta una aplicación computacional, usando el programa MATHEMATICA®, del proceso diseñado para solucionar el problema mostrado en el primer capítulo que fue planteado pero no resuelto por Turnovsky (1973).

CAPÍTULO 1

Génesis y evolución de los problemas de política económica

El problema de política económica de Timbergen (1961) en su forma estática, en la que se trata de determinar el número mínimo y valor de ciertos instrumentos para lograr algunos objetivos, se ha extendido en la literatura moderna hasta la más cercana a la definición de economía como un juego diferencial en la que se modelan varios agentes tomadores de decisiones políticas, cada uno de los cuales es capaz de utilizar algunos instrumentos con objetivos individuales que pueden estar en conflicto.

El tipo de problema y las respuesta que los responsables de política deben proporcionar genera varios tipos de resultados a evaluar: por un lado están los teoremas de existencia y unicidad que garantizan que el problema tiene solución y si la tiene ésta es única. En este camino están los resultados sobre controlabilidad y solución, los cuales determinan si el problema es controlable, el tipo de controlabilidad y si existen valores de las variables involucradas que solucionan el problema. La inoperancia de este tipo de resultados está en que muchas veces las pruebas no son constructivas, esto es, no dicen como se calculan los valores óptimos de las variables involucradas en el problema. Por otro lado, están los resultados sobre estabilización y su tipo, aquí nuevamente muchos resultados no son útiles por la misma razón.

En el problema inicial de Timbergen (1961), por ser estático, el objeto del problema es encontrar valores adecuados de los instrumentos para que las variables de estado alcancen ciertos valores objetivos, por esto y su formulación la solución es un resultado de álgebra lineal. Preston (1974) considera que la estática es generadora de dinámica por lo que puede dinamizar el modelo considerado por Timbergen, mantener el objetivo de encontrar los valores de los instrumentos para alcanzar las metas e iniciar el estudio del manejo de instrumentos intertemporalmente para lograr que los objetivos sigan trayectorias predeterminadas.

A partir de la aparición de la teoría de control, que soluciona problemas de optimización con restricciones dinámicas, los problemas conservaron sus restricciones lineales[1]

[1]Ya sea porque Timbergen (1961) planteó su análisis en forma lineal y desde ahí se ha aceptado ese planteamiento, porque el Teorema de Taylor garantiza que cualquier función doblemente diferenciable con

pero fueron enriquecidos con valores objetivos que buscan que las variables de estado estén lo más cerca posible de unos ciertos valores metas, ésta formulación hace que sea natural usar algún tipo de distancia entre los valores de las variables de estado y sus metas.

La distancia Euclidiana, que pesa de forma igual las discrepancias entre los valores de las variables y sus metas, no es económicamente aplicable. Por ejemplo, el impacto de la inflación o la tasa de desempleo sobre el bienestar no necesariamente es igual, por lo que fue necesario usar normas (distancias) generadas por formas cuadráticas, en las que se pueden pesar de forma distinta las discrepancias de variables diferentes, para representar los costos de ajuste de las variables a sus metas; dando lugar al uso de problemas de control conocidos como LQ, esto es, problemas de optimización con objetivos cuadráticos y restricciones lineales. En el primer apéndice se muestran ejemplos algebraicos para modelos de un objetivo y un instrumento.

1.1. La génesis como un problema estático

Tinbergen (1961) es el primer texto que enfoca la Política económica como la interacción de fines y medios, objetivos e instrumentos o en otros términos variables de estado y variables de control. Allí se muestra la distinción entre la existencia y el diseño como conceptos centrales en la teoría de la política económica. La existencia se refiere a la capacidad de diseñar cualquier política, mientras que el diseño se refiere a los métodos de construcción o elaboración de soluciones. Esto equivale a los problemas de existencia y calculabilidad. Algunas veces las pruebas de los teoremas de existencia, -que garantizan la solución de un problema-, dan un algoritmo para encontrarla, en este caso se dice que la prueba es construible, sin embargo, no siempre este es el caso.

La relación entre modelos dinámicos y estáticos puede hacerse de dos formas. En una, los modelos estáticos pueden verse como los valores de estado estables de algunos modelos dinámicos. En la otra, definida por Preston (1974), los modelos estáticos son generadores de modelos dinámicos mediante la introducción explícita de ajustes temporales. A partir de esta concepción Preston (1974) dinamiza los modelos estáticos de Timbergen (1961).

El sistema considerado por Timbergen, es equivalente al sistema estático en forma reducida

$$\hat{A}\hat{\mathbf{x}} + \hat{B}\hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{z}} = 0, \tag{1.1}$$

donde, $\hat{\mathbf{x}}$ es el vector de variables de estado (objetivos) de tamaño $n \times 1$, $\hat{\mathbf{u}}$ es el vector de tamaño $k \times 1$ de variables de control (instrumentos), el vector $\hat{\mathbf{z}}$ de tamaño $n \times 1$ está formado por variables exógenas y las matrices $\hat{A}$ y $\hat{B}$ de tamaño $n \times n$ y $n \times k$ respectivamente, tienen como entradas los coeficientes del problema [2]. $\hat{A}$, la matriz de coeficientes de los objetivos, contiene la influencia que reciben las variables objetivo y $\hat{B}$, la matriz la de los instrumentos, está formada por el impacto que tienen las variables instrumento en el diseño. En este modelo las matrices son fijas, invariantes en el tiempo, Preston (1974) considera que el modelo describe un equilibrio fijo para una economía estática o equivalete

continuidad se puede aproximar linealmente o porque los sistemas lineales han sido mas estudiados que los nolineales, generalmente las restricciones de los problemas se consideran lineales.

[2] En adelante las mayúsculas en una fórmula representan matrices, salvo T que se reserva para tiempo final, las letras en negrilla representan vectores y ($'$) la operación de transposición.

al equilibrio de estado estable de una economía dinámica. Bajo el supuesto que las matrices $\hat{A}$ y $\hat{B}$ tiene rangos n y k respectivamente, lo que equivale a decir que existen n objetivos y k instrumentos linealmente independientes, el problema estático propuesto por Tinbergen o de **controlabilidad estática** consiste en encontrar las condiciones para que existan los valores de las variables instrumentales $\bar{\mathbf{u}}$ tales que para cualquier combinación de valores para las variables objetivo $\bar{\mathbf{x}}$ dadas; $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{\mathbf{x}}$ satisface el sistema (1.1), esto es

$$\hat{A}\bar{\mathbf{x}} + \hat{B}\bar{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{z}} = 0.$$

Las condiciones necesarias y suficientes están dadas por el llamado Teorema de Controlabilidad de Timbergen,

Teorema 1. *El sistema en forma reducida (1.1), con Rango de* $(\hat{A}) = n$, *es estáticamente controlable para todo* $\hat{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{x}}$ *si y sólo si, la matriz* $\hat{B}$ *de instrumentos es de tamaño* $n \times n$ *y tiene rango* n.

Este resultado asegura que un sistema es estáticamente controlable si y sólo si existen tantos objetivos linealmente independientes como instrumentos linealmente independientes. Puesto que el problema es un sistema de ecuaciones lineales simultáneas, la solución se encuentra por cualquiera de los métodos de solución usuales para este tipo de sistemas.

1.2. Evolución a dinámica continua

Preston dinamiza el sistema (1.1) en la forma

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \Lambda(\hat{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{B}\hat{\mathbf{u}}(t) + \hat{\mathbf{z}}), \qquad \hat{\mathbf{x}}(0) \neq \bar{\mathbf{x}},$$ [3]

donde, Λ es una matriz no singular de tamaño $n \times n$ que representa la velocidad de ajuste de los objetivos. Estos ajustes temporales depende de los valores de la variables de estado, de como se controlen por medio de los instrumento y de valores exógenos.

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \Lambda(\hat{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{B}\hat{\mathbf{u}}(t) + \hat{\mathbf{z}}) = \Lambda(\hat{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{B}\hat{\mathbf{u}}(t) + \hat{\mathbf{z}} - 0) \\
&= \Lambda(\hat{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{B}\hat{\mathbf{u}}(t) + \hat{\mathbf{z}} - \hat{A}\bar{\mathbf{x}} - \hat{B}\bar{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{z}}) \\
&= \Lambda[\hat{A}(\hat{\mathbf{x}}(t) - \bar{\mathbf{x}}) + \hat{B}(\hat{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}})] \\
&= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)
\end{aligned}$$

que se reduce a

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \tag{1.2}$$

con condición inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \neq 0$, donde, $\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) - \bar{\mathbf{x}}$, $\mathbf{u}(t) = \hat{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}}$, $A = \Lambda\hat{A}$ y $B = \Lambda\hat{B}$. $\mathbf{x}(t)$ representa el desajuste de los objetivos de su valor ideal.

Para Buitter y Gersovitz (1981) "el sistema (1.2) es **puntualmente dinámicamente controlable (PDC)** si y sólo si, existe una trayectoria (función del tiempo) para el control (instrumento) capaz de mover las variables de estado de cualquier estado inicial (en el espacio de estado) y tiempo inicial a cualquier meta (objetivo) o estado terminal en un tiempo finito preasignado", ésta definición equivale a la **controlabilidad dinámica** de Preston. Las condiciones necesarias y suficientes para que el sistema sea PDC están dadas por el

[3] El punto sobre una variable representa la derivada con respecto al tiempo, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

Teorema 2. *El sistema (1.2) es PDC (puntualmente dinamicamente controlable) si y sólo si, la matriz de tamaño $n \times nk$*

$$\psi = [B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B],$$

tiene rango completo, esto es rango n.

El concepto de PDC del vector de estado $\mathbf{x}$ puede ser extendido al vector de metas $\mathbf{y}$

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u},$$

para lo cual las condiciones necesarias y suficientes son que la matriz

$$\Omega = [D, CB, CAB, CA^2B, ..., CA^{n-1}B],$$

tenga rango completo. Para Aoki (1975) esto significa que dado cualquier $\bar{\mathbf{y}}$ y un tiempo finito T, existe un vector de variables instrumentales $\mathbf{u}(t)$, definidas en el intervalo $[0, T]$, tales que

$$\mathbf{y}(T) = \bar{\mathbf{y}},$$

para él esto significa que el sistema es **globalmente controlable**.

El sistema (1.2) está en equilibrio si existe un vector $\mathbf{x}^*$ para el cual

$$0 = A\mathbf{x}^* + B\mathbf{u},$$

para $\mathbf{u}$ constante. Buitter y Gersovitz (1981) definen la controlabilidad estática del equilibrio si y sólo si, existe $\bar{\mathbf{u}}$ tal que $0 = A\mathbf{x}^* + B\bar{\mathbf{u}}$ para cualquier $\mathbf{x}^*$, esto equivale a la controlabilidad estática de Timbergen y Preston, solo que vista como un comportamiento particular del sistema dinámico. Si A tiene rango completo, el equilibrio es estáticamente controlable si y sólo si, el rango de B es n, esto es, hay tantas metas linealmente independientes como instrumentos linealmente independientes. Es de notar, que Buitter y Gersovitz (1981) ven la estática como el equilibrio dinámico, mientras que para Preston es la generadora de la dinámica.

Preston considera que el problema de política dinámica es determinar la existencia de un vector temporal de control $\mathbf{u}(t)$, con $t \in [0, T]$, capaz de llevar la variable objetivo de su valor inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \neq 0$ a $\mathbf{x}(T) = 0$ en un tiempo predeterminado finito T. Si $\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}$, la solución del problema encuentra la forma de controlar los instrumento con el fin de llevar los objetivos de un valor arbitrario al valor ideal en un tiempo predeterminado.

Para encontrar el número mínimo de intrumentos se hacen las siguientes transformaciones y supuestos: el sistema (1.2)es diagonalizable en las variables de estado. Esto implica que la matriz A tiene n valores propios distintos, en cuyo caso existe una matriz P de tamaño $n \times n$, tal que $P^{-1}AP$ es diagonal, y al premultiplicar el sistema por P se tiene que

$$P\dot{\mathbf{x}}(t) = PA\mathbf{x}(t) + PB\mathbf{u}(t),$$

que se reescribe en la forma

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = \tilde{A}\mathbf{w}(t) + \tilde{B}\mathbf{u}(t),$$

donde, $\mathbf{x} = P\mathbf{w}$, $\tilde{A} = PAP^{-1}$ y $\tilde{B} = P^{-1}B$. En este sistema, la derivada de cada variable de estado $\dot{w}_i$ es dependiente solo de su valor e independiente de los de cualquier otra w_j

para $i \neq j$; por lo tanto, para que el sistema sea controlable cada ecuación debe contener por lo menos una variable de control[4]. Esta condición se reduce a que la matriz $\tilde{B}$ debe contener por lo menos una entrada no nula en cada fila. Para limitar las posiblilidades Preston analiza los sistemas correspondientes a cada columna de B,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B_{\cdot j}u_j(t),$$

el sistema completo está formado por k de estos sistemas, uno por cada variable de control. Este sistema es controlable si y sólo si, el vector $\tilde{B}_{\cdot j} = P^{-1}B_{\cdot j}$ tiene n entradas no nulas. Este vector tiene un cero en la posición i si y sólo si, la fila correspondiente de P^{-1} es ortogonal a $B_{\cdot j}$, en términos de álgebra lineal, si A es la matriz de representación de una transformación lineal, el sistema es incontrolable si y sólo si, las columnas de B están en un espacio invariante de la transformación representada por A de dimensión menor que n. Lo anterior se resume en el

Teorema 3. *El sistema transformado*

$$\dot{\boldsymbol{w}}(t) = \tilde{A}\boldsymbol{w}(t) + \tilde{B}\boldsymbol{u}(t).$$

con n valores propios distintos. Si se representa la $\binom{K}{i}$ combinación de j instrumentos entre K, para $j = 1, ..., K$, por la submatriz de coeficientes formada por las columnas $\tilde{B}_{\cdot i}$ de tama no $N \times j$ para $i = 1, ..., \binom{K}{i}$, $\tilde{B}_j(i)$. Entonces, un conjunto mínimo de k instrumentos necesarios y suficientes para la controlabilidad dinámica es la más pequeña matriz $\tilde{B}_k(i)$ que tenga n filas no nulas. Este conjunto de instrumentos es única si y sólo si la matriz es única entre todas las escogencias de las $\binom{K}{k}$ matrices.

El resultado de este teorema parece contradictorio con el teorema 1, ya que es posible controlar un sistema dinámico con n variables de estado linealmente independientes con un instrumento, mientras que si el sistema es estático son necesarios n instrumentos linealmente independientes. Según Preston "La capacidad de estabilizar el sistema de forma dinámica con un solo instrumento podría aparecer en contradicción con la necesidad de usar muchos instrumentos para la estabilización estática, pero los procesos de estabilización estática y la estabilización de desequilibrio dinámico se producen simultáneamente. Utilizar sólo un instrumento para la estabilización dinámica, no significa que el teorema de Tinbergen es irrelevante, sólo que uno de estos instrumentos estáticos necesarios deben variar de forma dinámica. La estabilización estática se refiere a la adecuada especificación de valores fijos de los objetivos y los instrumentos, la estabilización dinámica con los ajustes apropiados en las trayectorias a esos valores."

El tema central de Aoki (1975) es la perfecta controlabilidad del sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u},$$

con las condiciones de salida

$$\mathbf{y} = C\mathrm{x}.$$

[4]Si la ecuación no contiene ninguna variable de control, la estabilidad de la variable solo estará determinada por el valor propio correspondiente y si el valor propio es positivo la variable será incontrolable.

Se trata de determinar, sí es posible encontrar y controlar instrumentos,durante un intervalo de tiempo, para que la variable de salida siga una trayectoria determinada. Esto es, sí existe un vector de variables instrumentales $\mathbf{u}(t)$ para las que $\mathbf{y}(t) = \bar{\mathbf{y}}(t)$ en el intervalo $[T, T+\delta]$ con $\bar{\mathbf{y}}(t)$ dada para cada t en el intervalo $[T, T+\delta]$.

Puesto que este tipo de controlabilidad puede no ser posible, se trata por lo menos de estar cerca del comportamiento deseado, por lo que se usa la definición: un sistema es **perfectamente controlable en su salida** si el error cometido entre la salida y el valor deseado es tan pequeño como se desee. Esto es, dado $\bar{\mathbf{y}}(t)$, el valor deseado para la salida, se pueden encontrar las variables de control $\hat{\mathbf{u}}$ de forma que para cada $\tau > o$ existe $\delta > 0$ tal que

$$||\bar{\mathbf{x}}(t) - C\mathbf{x}(t; \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{x}_0)|| < \delta^5$$

para $T \leq t \leq T + \tau$.

El resultado relevante de Aoki (1975) es su proposición 3, dice que un sistema nolineal es perfectamente controlable en el sentido anterior si su linealización lo es.

Aoki y Canzoneri (1979) generalizan el estudio a un sistema en lo que los autores llaman "representación de espacio estado", para facilitar su comparación con otros modelos. El modelo está formado por dos sistemas

$$\begin{array}{ll} \text{Ecuaciones de estado} & \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) + B_1\mathbf{z}(t) \\ \text{Ecuaciones objetivo} & \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) + D_1\mathbf{z}(t), \end{array} \tag{1.3}$$

donde, $\mathbf{x}$ es un n-vector de variables de estado, $\mathbf{u}$ es un k-vector de variables intrumentales, $\mathbf{z}$ es un vector de variables exógenas y $\mathbf{y}$ es un m-vector funciones de metas.

El sistema (1.3) es **perfectamente controlable** o **controlable en su trayectoria** si existe una trayectoria $\mathbf{x}(t)$ capaz de llevar (guiar) $\mathbf{y}(t)$ a lo largo de cualquier m-dimensional trayectoria $\bar{\mathbf{y}}(t)$ diferenciable.

Nótese que aquí no solo se trata de ir de un punto inicial a uno final en un cierto tiempo finito, sino de seguir un camino previamente trazado. Aunque Aoki y Canzoneri comentan que no existen condiciones necesarias y suficientes para la perfecta controlabilidad, sin embargo, en ciertos casos cualquiera de las siguientes condiciones garantiza la perfecta controlabilidad del sistema:

1. $|D| \neq 0$.
2. $D = 0$ y $|CB| \neq 0$.
3. $|D - CA^{-1}B| \neq 0$
4. D tiene rango $l < m$; existe una matriz no singular S tal que $[SC|SD] = \begin{pmatrix} C_1 & D_2 \\ C_2 & 0 \end{pmatrix}$,[6] donde D_2 es $l \times m$ y $\begin{pmatrix} D_2 \\ C_2B_1 \end{pmatrix}$ tiene rango m. La matriz S representa la sucesión de

[5] $\mathbf{x}(t; \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{x}_0)$ representa el valor de la variable de estado solución del sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathrm{y}$ en el momento t, con condiciones iniciales $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ y controlado por el vector $\hat{\mathbf{u}}$.

[6] La matriz C se descompone de acuerdo a D en la forma $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$

operaciones elementales entre filas que reducen D_1 a $\begin{pmatrix} D_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Para dar una solución al problema de aplicabilidad de las soluciones de Aoki y Canzoneri (1979) "que puede suceder que un conjunto de variables objetivo sea perfectamente controlable, en teoría existe una trayectoria $\mathbf{u}(t)$ que soluciona el problema de controlabilidad, pero que en el mundo "real" no se tenga pleno conocimiento de los instrumentos o la interacción entre las variables por lo que en la práctica la solución teórica es inaplicable", ellos introducen el concepto de disociación que se refiere a la interdependencia entre las variables objetivo, para esto define un nuevo vector $\mathbf{v}$ de instrumentos por

$$\mathbf{u}(t) = K\mathbf{x}(t) + L\mathbf{v}(t)$$

con L no singular, con lo que el sistema (1.3) se convierte en

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= (A + BK)\mathbf{x}(t) + BL\mathbf{v}(t) + B_1\mathbf{z}(t) \\ \mathbf{q}(t) &= (C + DK)\mathbf{x}(t) + DL\mathbf{v}(t) + D_1\mathbf{z}(t). \end{aligned} \tag{1.4}$$

El sistema (1.3) es **disociable** si existen matrices K y L que reducen el sistema (1.4) a un conjunto de m ecuaciones (una para cada variable objetivo) de la forma

$$\begin{aligned} f_1(\dot{x}_{M1}, x_{M1}, \dot{v}_1, v_1, \dot{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) &= 0 \\ f_2(\dot{x}_{M2}, x_{M2}, \dot{v}_2, v_2, \dot{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(\dot{x}_{Mm}, x_{Mm}, \dot{v}_m, v_m, \dot{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) &= 0 \end{aligned}$$

esto es, cada variable objetivo x_{Mi} solo es dependiente de la correspondiente variable instrumental v_i y las variables exógenas. En otras palabras, para determinar el comportamiento de una variable objetivo x_{Mi} solo de debe manejar adecuadamente la variable v_i. Para determinar la disociabilidad de un sistema, Aoki y Canzoneri, determinan que cualquiera de las primeras condiciones también garantiza que el sistema (1.3) es disociable.

Wohltmann (1984) revisa los conceptos y resultados de Aoki (1975) y Aoki y Canzoneri (1979) para el sistema (1.2) para ($t \geq 0$) define los conceptos de conjunto admisible para las variables de control y el de espacio de estado para el problema y prueba que la perfecta controlabilidad se reduce a determinar el rango de una matriz. Para él Z_k el **conjunto de vectores de control admisibles** es el conjunto de todas los vectores de k funciones continuas a trozos y X_n el **espacio de estado para el sistema** como el conjunto de los vectores de n funciones $\mathbf{x}(t)$ tales que dados $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{u} \in Z_k$, $\mathbf{x}(t)$ es el único vector de estado $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; \mathbf{u}, \mathbf{x}_0)$ solución del sistema (1.2).

El sistema dinamico (1.2) es **controlable en su trayectoria o perfectamente controlable** en el intervalo $[t_1, t_2]$ ($0 < t_1 < t_2 < \infty$) si para cada estado inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y cada función de estado $\mathbf{x}^* \in X_n$ existe una función de control admisible $\mathbf{u} \in Z_m$ tal que la solución correspondiente al sistema (1.2), $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{u})$ satisface $\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}(t)$ para todo $t \in [t_1, t_2]$. Al respecto Wohltmann (1984) prueba el

Teorema 4. *El sistema dinamico (1.2) es perfectamente controlable en el intervalo $[t_1 t_2]$ con respecto al conjunto admisible Z_k de vectores de control si y sólo si, rango de B es n.*

Y luego generaliza sus resultado para el sistema con metas

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{1.5}$$

con $\mathbf{y}$ un p-dimensional vector objetivo y Y_p el **conjunto admisible de vectores meta** definido por

$$Y_p = CX_n = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{y} = C\mathbf{x}, \mathbf{x} \in X_n\}.$$

Teorema 5. *El sistema dinamico (1.5) es perfectamente controlable en las variables objetivo sobre el espacio objetivo Y_p con respecto al conjunto admisible Z_k de vectores de control si y sólo si, el rango de CB es p.*

Este par de teoremas convierten la perfecta controlabilidad en un problema matricial simple: determinar el rango de una matriz.

1.3. Los problemas LQ continuos

Aoki (1973) formula el problema de política económica como uno de optimización dinámica con objetivo cuadrático conservando las restricciones lineales, esto es, lo formula como un problema de control LQ, generaliza el concepto de controlabilidad e introduce el de observabilidad para éste tipo de problemas en dos casos. Cuando el horizonte temporal es finito, en el que busca minimizar el valor de

$$J_T = \text{mín} \int_0^T [\mathbf{x}'(t)L\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}'(t)\mathbf{u}(t)]dt + \mathbf{x}'(T)Q\mathbf{x}(T)$$

sujeta a la restricción

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u},$$

donde, A y B pueden ser variables en el tiempo y las matrices L y Q son simétricas semidefinidas positivas; y cuando el horizonte temporal es infinito, que se quiere minimizar

$$J_\infty = \text{mín} \int_0^\infty [\mathbf{x}'(t)L\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}'(t)\mathbf{u}(t)]dt$$

sujeta a la restricción

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u},$$

con A y B matrices constantes. Para él un par de matrices constantes (A, B) es controlable o el sistema (1.2) es globalmente controlable, si el rango de $(B, AB, ..., A^{n-1}B)$ es n; además el par (A, B) es observable si el par (A', B') es controlable. El par de matrices variables en el tiempo $(A(t), B(t))$ es controlable si el rango de $(B(t), \boldsymbol{\mathcal{L}}B, ..., \boldsymbol{\mathcal{L}}^{n-1}B)$ es n, donde $\boldsymbol{\mathcal{L}} = A(t) - d/dt$.

Aoki enuncia los siguientes teoremas que dan las condiciones y los valores de la solución para las variables de control como funciones de las variables de estado para cada uno de los problemas planteados

Teorema 6. *Si existe una matriz simétrica* $\Pi(t; Q, T)$[7] *solución del sistema de ecuaciones diferenciales (ecuación de Riccati)*

$$\dot{K}(t) = -A'(t)K(t) - K(t)A(t) + K(t)B(t)B'(t)K(t) - L(t)$$

con $K(T) = Q$ *en el intervalo* $[t_0, T]$, *entonces*

$$\boldsymbol{u}(t) = -B'(t)\Pi(t; Q, T)\boldsymbol{x}(t)$$

minimiza J_T *y* $\min J_T = \boldsymbol{x}(0)'\Pi(t; Q, T)\boldsymbol{x}(0)$.

Teorema 7. *Sean* $A(t)$, $B(t)$ *y* $H(t)$, *con* $L(t) = H'(t)H(t)$ *y* H *de rango maximal, son uniformemente acotadas,* $(A(t), B(t))$ *es controlable y* $(A(t), H(t))$ *es observable, entonces existe una solución simétrica, definida positiva de la ecuación de Riccati*

$$\dot{K}(t) = -A'(t)K(t) - K(t)A(t) + K(t)B(t)B'(t)K(t) - L(t).$$

Teorema 8. *Si* $(A(t), B(t))$ *es controlable y* $(A(t), H(t))$ *es observable, entonces existe una solución simétrica, definida positiva única* Π_∞ *de la ecuación de Riccati*

$$A'K + KA - KBB'K + H'H = 0,$$

$\boldsymbol{u}(t) = -B'\Pi_\infty \boldsymbol{x}(t)$ *minimiza* J_∞ *y* $\min J_\infty = \boldsymbol{x}(0)'\Pi_\infty \boldsymbol{x}(0)$.

Sin embargo, en ninguno de los documentos se dá o sugiere un procedimiento para solucionar el sistema de ecuaciones de Riccati.

Un desarrollo similar es el de Turnovsky (1973), quien aplica los resultados encontrados por Wonham al estudio de la estabilidad y la solución de un problema particular de la forma,

$$W_T = \int_0^T (\mathbf{x}'M\mathbf{x} + nu^2)dt \text{ sujeto a } \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t).$$

Para este tipo de problema el valor óptimo de la variable instrumental es

$$u = -\frac{1}{n}B'P(t)\mathbf{x}(t)$$

donde $P(t)$ es la matriz solución de la ecuación de Riccati

$$\dot{P}(t) = -P(t)A - A'P(t) + \frac{1}{n}P(t)BB'P(t) - M(t),$$

sin embargo, la conclusión de Turnovsky (1973) es que esta ecuación no es soluble analíticamente porque tiene coeficientes variables, es un problema variante en el tiempo.

[7] Esta notación dice que la solución es una función del tiempo t, de la matriz Q y del tiempo terminal del problema T.

1.4. Problemas dinámicos discretos

Los argumentos que algunos autores dan para no hacer análisis separados para los sistemas diámicos discretos y continuos es que estos se comportan en forma análoga. Para Aoki (1974), por ejemplo, si $\psi(t; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}, \Theta)$[8] es la solución de la ecuación en diferencias

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \Theta_t), \quad t = t_0, t_0+1, t_0+2, ..., \quad \mathbf{x}_{t_0} = \mathbf{x}_0.$$

Un vector de control es admisible si satisface todas las restricciones impuestas al problema, esto es, es factible en términos de programación matemática. El sistema anterior es **localmente controlable** en un punto $\hat{\mathbf{x}}$ del espacio de estado si existe un conjunto abierto que contiene a $\hat{\mathbf{x}}$, $\beta(\hat{\mathbf{x}})$, tal que cualquier punto en ese abierto puede ser alcanzado por la variable de estado usando un control admisible adecuado. Esto es, si $\mathbf{x}_{t_0} = \hat{\mathbf{x}}$, para cada $\hat{\mathbf{x}}'$ en $\beta(\hat{\mathbf{x}})$, existe $\mathbf{u}_s$ admisible para $t_0 \leq s \leq t$ tal que $\hat{\mathbf{x}}' = \Pi(t; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_s, \Theta)$ para todo $t \geq t_0$ finito. Para la contraparte de controlabilidad local de un sistema continuo se asume un comportamiento análogo.

Simúltaneamente a Aoki (1973), Pindyck (1973) encuentra los resultados para problemas LQ discretos, él analiza el problema

$$J = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{T}\left[(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_i)'Q(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_i) + (\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}}_i)'R(\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}}_i)\right],$$

sujeto a

$$\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i = A\mathbf{x}_i + B\mathbf{u}_i + C\mathbf{z}_i$$

con condición inicial $\mathbf{x}_0$ dada y la mismas definiciones para las variables a las del sistema (1.2) y a partir del principio del mínimo de Pontryagin encuentra la versión

$$K_i = Q + (I+A)'(K_{i+1} - K_{i+1}B(R + B'K_{i+1}B)^{-1}B'K_{i+1})(I+A)$$

de la ecuación de Riccati y el comportamiento de las variables de control en términos de la solución de la ecuación, sin embargo, **en estos documentos no existe procedimiento para encontrar la solución analítica de la ecuación de Riccati**.

En los documentos referenciados hasta aquí los autores parecen no estar interesados en la solución de los problemas LQ, sin embargo cuando se pregunta por el diseño de políticas óptimas se deben encontrar soluciones explícitas a los problemas y aunque es de gran interés la controlabilidad y el número óptimo de instrumentos debe ser mucho mas relevante el conocimiento de los comportamientos de las variables instrumentales y las de estado.

1.5. El no determinismo

Simon (1956) inicio el estudio de problemas LQ que involucran variables aleatorias en un problema de minimización de costos de un productor, consistentes en costos de inventario

[8] Como en sistemas continuos $\psi(t; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}, \Theta)$ representa la solución al sistema en el momento t, con condiciones iniciales, $\mathbf{x}_{t_0} = \mathbf{x}_0$, controlada por $\mathbf{u}$ y con parámetros Θ.

y costos de producción que a su vez son divididos en estáticos, asociados a la capacidad instalada, y dinámicos, que dependen de las variaciones de productividad entre periodos. En el problema, durante el intervalo de tiempo, se controla la producción, mientras que el inventario está determinado por la diferencia entre la producción y la demanda. Dada la distribución conjunta de probabilidad de las ventas, Simon demuestra que "cuando la función objetivo es cuadrática, el problema de planificación para el caso de incertidumbre se puede reducir al problema para el caso seguro óptimo en el primer período, cambiando los valores futuros **indeterminados** por sus **expectativas**, esto es, el problema se puede reducir a un **equivalente cierto**".

La toma de decisiones sobre acciones que están influidas por variables que involucran incertidumbre se puede reducir a "La tarea inicial es determinar el curso de acción para el primer periodo de tiempo. Al final de ese período, y sobre la base de la nueva información disponible, se escoge un curso de acción para el segundo período, y así sucesivamente."

Los resultados de Simon (1956) son generalizados por Theil (1957). Para Theil (1957) el vector $\mathbf{u} = (u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t))$ está formado por el valor de los instrumento en el momento t y se interesa por el comportamiento del vector $\mathbf{x} = (x_1(t), x_2(t), ...x_n(t))$ de variables de estado no totalmente controladas en t, relacionadas con $\mathbf{u}$ por

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{u} + \boldsymbol{\mu},$$

donde $\mathbf{R}$ es la matriz particionada triangular inferior

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ R_{T1} & R_{T2} & \cdots & R_{TT} \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{\mu}$ es un vector de elementos aleatorios con distribución de probabilidad conjunta independiente de $\mathbf{u}$ y se quiere maximizar el valor esperado ("función de bienestar") de la combinación lineal, mas una forma cuadrática de los vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{u}$,

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (\mathbf{m}_x, \mathbf{m}_y)(\mathbf{x}, \mathbf{u})' + \frac{1}{2}(\mathbf{x}, \mathbf{u})Q(\mathbf{x}, \mathbf{u})'.$$

Esto equivale a una combinación mas una forma cuadrática de variables de estado y control durante los periodos $t = 1, ..., T$.

Theil muestra que el resultado de éste problema de optimización no se ve afectado si se optimiza en el primer periodo suponiendo que la relación entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{x}$ es

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{u} + \bar{\boldsymbol{\mu}},$$

en ese periodo, donde $\bar{\boldsymbol{\mu}}$ es el valor esperado de $\boldsymbol{\mu}$. Esto es, un problema de optimización estocástico puede, a partir del conocimiento de los valores promedio, convertirse en un problema de optimización determinístico.

Puesto que el análisis desarrollado por Theil (1957) está limitado a sistemas de la forma $\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{u} + \boldsymbol{\mu}$, donde $\boldsymbol{\mu}$ es un vector aleatorio, Chow lo generaliza en tres artículos. En el primero de ellos Chow (1970) considera un objetivo de la forma

$$W = E\left(-\mathbf{x}_t K \mathbf{x}_t' + 2\mathbf{k}'\mathbf{x}_t\right),$$

K es una matriz simétrica semidefinida positiva, éste problema se transforma en

$$W = E\left(-\mathbf{x}_t K \mathbf{x}_t' + 2a'k_t\right) - a'Ka$$

al escribir $\mathbf{x}_t$ como suma de su media y desviación estándar

$$\mathbf{x}_t = \bar{\mathbf{x}}_t + \mu_t.$$

Allí se hace notar que estas última versión es mas conveniente en economía. La ecuación que relaciona las variables de estado y de control allí considerada es la siguiente

$$\mathbf{x}_t = A\mathbf{x}_{t-1} + C\mathbf{u}_t + \mathbf{b} + \boldsymbol{\mu}_t \tag{1.6}$$

$\mathbf{x}_t$ es el vector de variables de estado, $\mathbf{u}_t$ es el vector de variables de control, $\mathbf{x}_0$ es dado y las condiciones para el residuo son $E\boldsymbol{\mu}_t = 0$, $E\boldsymbol{\mu}_t\boldsymbol{\mu}_t' = V$, $E\boldsymbol{\mu}_t\boldsymbol{\mu}_s' = 0$ para $t \neq s$. Chow encuentra que para éste problema, el comportamiento del control óptimo esta regido por la recursión

$$\mathbf{x}_t = G_t\mathbf{u}_{t-1} + \mathbf{g}_t$$

donde G_t y g_t se encuentran recursivamente por medio de las relaciones:

$$\begin{aligned}
G_t &= -\left(C'H_tC\right)^{-1} C'H_tA, && \text{para } t = 1, 2, ..., T,\\
H_t &= K_t, && \text{para } t = T,\\
H_{t-1} &= K_{t-1} + (A + CG_t)' H_t (A + CG_t), && \text{para } t = 2, 3, ..., T,\\
\mathbf{g}_t &= -\left(C'H_tC\right)^{-1} C' (H_tb - \mathbf{h}_t), && \text{para } t = 1, 2, ..., T,\\
\mathbf{h}_{t-1} &= \mathbf{k}_{t-1} - (A + CG_t)' (H_tb - \mathbf{h}_t), && \text{para } t = 2, 3, ..., T,\\
h_t &= k_t, && \text{para } t = T.
\end{aligned}$$

En el segundo, Chow (1972), generaliza la solución del problema,

$$\text{Maximizar } \mathbf{W} = E\sum_{t=1}^{T}\left(-\mathbf{x}_t' K_t \mathbf{x}_t + 2\mathbf{k}_t'\mathbf{x}_t\right),$$

sujeto a la restricción econométrica (1.6). La diferencia fundamental entre estos problemas es que en el primero considera la matriz K constante, mientras que ahora es variable. Y en el tercero, Chow (1973), introduce variables exógenas al sistema de restricciones, esto es, (1.6) se convierte en

$$\mathbf{x}_t = A_1\mathbf{x}_{t-1} + \cdots + A_m\mathbf{x}_{t-m} + C_0\mathbf{u}_t + \cdots + C_n\mathbf{u}_{t-n} + B\mathbf{z}_t + \boldsymbol{\mu}_t, \tag{1.7}$$

donde, $\mathbf{z}_t$ es un vector de variables exógenas y todos los parámetros son desconocidos y se tratan como aleatorios, con una función de densidad especifica. Se hace notar que el sistema (1.7) equivale a

$$\mathbf{x}_t = A\mathbf{x}_{t-1} + C\mathbf{u}_t + \mathbf{b}_t + \boldsymbol{\mu}_t$$

redefiniendo adecuadamente las matrices, el objetivo ahora consiste en

$$\text{Minimizar } \mathbf{W} = E_0\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{x}_t - \mathbf{a}_t)' K_t (\mathbf{x}_t - \mathbf{a}_t),$$

donde, $\mathbf{a}_t$ son los valores meta y K_t es simérica semidefinida positiva. Este objetivo es equivalente al de Chow (1972).

Al usar el principio de optimalidad de Bellman, Chow solo encuentra los valores óptimos para los últimos periodos, por lo que en la seción 5 convierte el problema a la forma

$$\text{mín} \quad W = E_0 \sum_{t=1}^{T} \mathbf{z}_t' Q_t \mathbf{z}_t \text{ sujeto a } \mathbf{z}_t = \alpha_t \mathbf{z}_{t-1} + \Gamma \mathbf{u}_t + \upsilon_t.$$

Chow prueba que el comportamiento del control óptimo está regido por la recursión

$$\mathbf{u}_t = G_t \mathbf{z}_{t-1}$$

donde G_t se encuentran recursivamente por medio de las relaciones:

$$\begin{aligned}
H_t &= Q_t, && \text{para } t = T,\\
c_t &= 0, && \text{para } t = T,\\
G_t &= -\left(E_{t-1}\Gamma' H_t \Gamma\right)^{-1}\left(E_{t-1}\Gamma' H_t \alpha_t\right), && \text{para } t = 1, 2, ..., T,\\
H_{t-1} &= Q_{t-1} + E_{t-1}\left(\alpha_t + \Gamma G_t\right)' H_t \left(\alpha_t + \Gamma G_t\right), && \text{para } t = 2, 3, ..., T,\\
\mathbf{c}_{t-1} &= E_{t-1}\upsilon_t' H_t \upsilon_t + E_{t-1} c_t, && \text{para } t = 1, 2, ..., T,\\
W_t &= \mathbf{z}_{t-1}' E_{t-1}\left(\alpha_t + \Gamma G_t\right)' H_t \left(\alpha_t + \Gamma G_t\right), && \text{para } t = 2, 3, ..., T,\\
h_t &= K_t a_t, && \text{para } t = T.
\end{aligned}$$

soluciona el problema de maximización.

Norman (1974) prueba que los resultados de Chow(1970, 1972, 1973) y Theil (1957) para el problema de maximizar el valor esperado de una función objetivo cuadrática restringuida por un sistema econométrico lineal son lógicamente equivalentes. La solución de Chow, construida iterativamente, y la de Theil que reduce el problema a solucionar uno equivalente con un primer periodo deterministico, el primer periodo conocido con certeza, son equivalentes. Para esto Norman muestra que los problemas considerados por Theil y Chow se pueden convertir unos en otros y, usando inducción matemática, que las soluciones son equivalentes[9].

Luego de que Norman (1974) mostró que las versiones de Chow (1970, 1972, 1973) y Theil (1957) son equivalentes cuando los coeficientes son determinísticos y solo hay un elemento estocástico aditivo, quedaba la pregunta de sí en el caso de coeficientes no determinísticos los resultados serían equivalentes. Holbrook y Howrey (1978) hacen la comparación cuando los parámetros y el término aditivo son estocásticos y determinan que las soluciones de Chow y Theil son diferentes. Ellos determinan cuatro condiciones necesarias y suficientes para que esas soluciones sean equivalentes y concluyen que los casos en los que eso se dá es muy restrictivo.

En la segunda parte de Turnovsky (1973) el objetivo es,

$$\text{Minimizar } E \int_0^{\infty} (\mathbf{x}' M \mathbf{x} + \mathbf{u}' N \mathbf{u}) dt$$

[9]Las transformaciones requeridas para convertir un problema en otro también convierten la solución de uno en la del otro.

sujeto a las restricciones dadas por el sistema,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [A + V(t)]\mathbf{x}(t) + [B + W(t)]\mathbf{u}(t) + \mathbf{e}(t),$$

donde, $\mathbf{x}(t)$ es el vector de variables de estado, $\mathbf{v}(t)$ de control, $V(t)$ y $W(t)$ son matrices cuyos elementos son ruidos blancos gaussianos y $\mathbf{e}(t)$ es un vector de ruido blanco gaussiano. Luego de algunas transformaciones las restricciones se convierten en

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) + \mathbf{e}(t).$$

Turnovsky (1973) enuncia dos teoremas debidos, según él, a Wonham[10] que dan las condiciones de controlabilidad y los valores de las variables de control dependientes de la solución de a ecuación de Riccati correspondiente para el caso continuo. En Turnovsky (1974) se analizan el caso discreto, se enuncian los teoremas de Wonham para el caso. Los resultados pueden localizarse entre los dos documentos de Chow (1970, 1972) en el primero donde se analiza el comportamiento del sistema con coeficientes constantes y término estocástico aditivo y el que considera que los coeficientes son no deterministicos

1.6. Las decisiones de política como un juego dinámico

Hallett et al. (2009) consideran los procesos de toma de decisiones de política económica como un juego dinámico discreto en el que se consideran N jugadores que minimizan un criterio cuadrático.

El i-ésimo de los jugadores tiene como objetivo minimizar

$$J_i(\mathbf{u}) = J_i(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n) = \sum_{j \in N} (\mathbf{x}_j(t) - \bar{\mathbf{x}}_j)' Q_i (\mathbf{x}_j(t) - \bar{\mathbf{x}}_j)$$

y controla el sistema

$$\mathbf{x}_i(t+1) = A_i \mathbf{x}_i(t) + \sum_{j \in N} B_{ij} \mathbf{u}_i(t),$$

donde $\mathbf{x}_i$ es su vector de variables de estado y controla las variables instrumentales $\mathbf{u}_i$.

En este tipo de problemas se está interesado en el equilibrio para el cual se usa la siguiente definición: un **equilibrio de Nash retroalimentado** es un vector $\mathbf{u}^*(t) = (\mathbf{u}_1^*(t), \mathbf{u}_2^*(t), ..., \mathbf{u}_n^*(t))$ tal que

$$J_i(\mathbf{u}^*(t)) \geq J_i(\mathbf{u}_1^*(t), \mathbf{u}_2^*(t), ..., \mathbf{u}_i(t), ..., \mathbf{u}_n^*(t))$$

para cualquier i y $\mathbf{u}_i(t)$, que tiene la interpretación usual en teoría de juegos.

Otra nociones importantes introducidas por Hallett et al. (2009) son: un decisor de política cumple la **regla de oro de economía política** si el número de instrumentos linealmente independientes es al menos igual al de metas linealmente independientes; y una política es **neutral o ineficaz** si los valores de equilibrio de las metas no se ven afectados por los cambios en los parámetros de la función de preferencias del decisor.

Los Resultados importantes encontrados por Hallett et al. (2009) son:

[10]Wonham, W. M.(1969) "Random Differential Equations in Control Theory", in A. T. Bharucha-Reid, Ed., *Probabilistic Methods in Applied Mathematics*, Vol. II , Academic Press, New York.

- "Bajo expectativas racionales cada jugador requiere en cada periodo tantos instrumentos independientes como metas independientes."
- "Siempre que existe un equilibrio, sí un jugador cumple la regla de oro, todas las políticas de los otros jugadores son ineficaces con respecto al objetivo compartido con ese jugador." y
- "Si uno (y sólo un) jugador cumple la regla de oro, todas las políticas de los otros jugadores son ineficaces con respecto a los objetivos compartidos con ese primer jugador."

Como se puede notar, a partir de este resumen, el programa de investigación en política económica ha tenido avances paralelos a las otras ciencias. En efecto, a partir de la concepción estática evolucionó a la dinámica, para tratar los nuevos desafios se recurrió a los avances de la tería del control, la econometría y los procesos estocásticos. Al momento, los modelos usados son juegos diferenciales estocásticos, con las bondades y restricciones que este tipo de modelos tiene. Como en todas las ciencias, los investigadores en política económica tratan de hacer modelos cada vez mas cercanos a la realidad para lo cual han ido recurriendo a las últimas herramientas matemáticas creadas. Podemos decir que es un programa de investigación progresivo, en el sentido que los nuevos desarrollos dan cuenta de los anteriores resultados y los extienden a nuevos problemas y campos analíticos. En el tercer capítulo se presenta un "ladrillo más en la pared" del programa de investigación, aportando un método de computabilidad al problema dinámico de política económica LQ.

CAPÍTULO 2

El problema

En la revisión bibliográfica, comentada en el capítulo precedente, no se encontró solución explícita a las problemas de control tipo LQ variantes en el tiempo, esto es, a la ecuación de Riccati. Allí tambien se dijo que Turnovsky (1973) **explícitamente comenta la imposibilidad de encontrar solución analítica al problema propuesto**. Athans y Falb (2006) hacen un comentario similar sobre la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales variantes en el tiempo. Puesto que, en particular, la solución de juegos diferenciales LQ variantes en el tiempo equivale a solución de un sistema de ecuaciones diferenciales variantes en el tiempo, estos no poseen soluciones analíticas.

Este capítulo presenta el resultado de conjugar los desarrollo de Engwerda (2005) sobre juegos diferenciales LQ invariantes en el tiempo con los resultados de Athans y Falb (2006) sobre problemas de control LQ variantes en el tiempo que dan la solución a problemas de juegos diferenciales LQ variantes en el tiempo y de esta forma plantear el problema cuya solución será aproximada en el siguiente capítulo.

El capítulo resume la teoría sobre los problemas LQ, la ecuación de Riccati y su solución y justifica la relevancia del problema a solucionar. Las nociones y resultados siguen a Engwerda (2005) para problemas invariantes en el tiempo y Athans y Falb (2006) en los resultados concernientes a problemas variantes en el tiempo.

2.1. Control LQ

Los problemas dinámicos determinísticos en general y los de control óptimo LQ, como un caso particular, pueden ser invariantes o variantes en el tiempo según si los coeficientes son constantes o funciones del tiempo.

2.1.1. Problemas invariantes en el tiempo

Un **sistema dinámico lineal invariante en el tiempo** es el conjunto de ecuaciones

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \tag{2.1}$$

donde A y B son matrices constantes de tamaño $n \times n$ y $n \times k$, $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$ son vectores de funciones de tamaño $n \times 1$ y $k \times 1$ respectivamente. Este sistema representa un problema en el que los impactos intertemporales de los valores de las variables de estado ($\mathbf{x}(t)$) y control ($\mathbf{u}(t)$) sobre el cambio de los estados ($\dot{\mathbf{x}}(t)$) es igual en todo momento.

El sistema (2.1) es **controlable** si para cualquier combinación de estado inicial $\mathbf{x}_0$, tiempo final t_1 ($t_1 > t_0$) y estado final $\mathbf{x}_1$ dados, si existe un vector de control $\mathbf{u}(t)$ continuo a trozos tal que la solución del sistema (2.1) satisface $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$. Esto es, el sistema es controlable, si es posible llevarlo de cualquier condición inicial a un estado final deseable, en un cierto tiempo. El sistema es **estabilizable** si para cualquier estado inicial $\mathbf{x}_0$ existe un vector de control $\mathbf{u}(t)$ continuo a trozos tal que la solución del sistema converge a cero.

Puesto que no necesariamente todas las variables del sistema son observables, puede que algún subconjunto de variables, $\mathbf{u}(t)$, si lo sean y que éstas se relacionen linealmente con todo el conjunto de variables, en la forma:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) \end{cases}, \tag{2.2}$$

en este sistema, es posible que $\mathbf{x}_0$ sea desconocido, el sistema es observable si es posible recuperar el valor de $\mathbf{x}_0$ a partir del conocimiento de las variables de control $\mathbf{u}(t)$ y los estados $\mathbf{y}(t)$ en algún intervalo de tiempo $[0, t_0]$. Formalmente el sistema (2.2) es **observable** si existe $t_1 > 0$ tal que para cualquier $\mathbf{u}(t)$ definido en $[0, t_1]$, de $\mathbf{y}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \mathbf{y}(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{u})$ en $[0, t_1]$ se sigue que $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1$[1].

Los problemas generales de control lineal cuadráticos (LQ) invariantes en el tiempo, restricciones lineales y objetivo cuadrático, están restringidos por sistemas de tipo (2.1) y tienen como objetivo, funciones de la forma

$$J = \int_0^T \left[\mathbf{x}'(t)Q\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}'(t)R\mathbf{u}(t)\right] dt + \mathbf{x}'(T)Q_T\mathbf{x}(T), \tag{2.3}$$

esto es, el objetivo es una forma cuadrática en la que la matriz Q representa los pesos relativos de cada una de las variables de estado y las entradas de la matriz R representan los impactos de las variables de estado en el valor objetivo. $\mathbf{x}'(T)Q\mathbf{x}(T)$ es el llamado valor de salvamento del problema, por lo que Q_T involucra la importancia del valor final de las variables de estado en el objetivo.

La solución de un problema de la forma

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && J = \int_0^T \left[\mathbf{x}'(t)Q\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}'(t)R\mathbf{u}(t)\right] dt + \mathbf{x}'(T)Q_T\mathbf{x}(T) \\ &\text{sujeto a} && \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde Q, R y Q_T son matrices simétricas y R es definida positiva; está intimamente relacionado con la solución de la ecuación de Riccati

$$\dot{K}(t) = -A'K(t) - K(t)A + K(t)SK(t) - Q, \qquad K(T) = Q_T, \tag{2.5}$$

donde $S = BR^{-1}B'$. Para demostrar esta relación Engwerda (2005) prueba el siguiente,

[1] $\mathbf{y}(t, a, \mathbf{u})$ representa los valores de las variables solución del sistema (2.2) en el tiempo t, controlada por los valores de $\mathbf{u}$ cuando la condición inicial es $\mathbf{x}(0) = a$.

Teorema 9. *El problema (2.4) tiene solución si y sólo si, la ecuación (2.5) tiene una solución simétrica $K(t)$ en el intervalo $[0,T]$. Si el problema tiene solución, es única y $\boldsymbol{u}^*(t) = -R^{-1}B'K(t)\boldsymbol{x}(t)$.*

Además prueba que la solución de la ecuación (2.5) equivale a la solución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales,

$$\begin{pmatrix} \dot{U}(t) \\ \dot{V}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -S \\ -Q & -A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(t) \\ V(t) \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Teorema 10. *Si U y V es solución del sistema (2.6) y U es no singular en el intervalo $[0,T]$, entonces $K(t) = V(t)U^{-1}(t)$ es solución de la ecuación (2.5) en el intervalo $[0,T]$. Y si $K(t)$ es solución de la ecuación (2.5) en $[0,T]$ y U es solución de*

$$\dot{U}(t) = (A - SK(t))U(t),$$

entonces U y $V = KU$ es solución del sistema (2.6) en el intervalo $[0,T]$.

Todos los desarrollos de Engwerda (2005) son invariantes en el tiempo y salvo la solución tienen su contraparte variante en el tiempo.

2.1.2. Problemas variantes en el tiempo

Athans y Falb (2006) muestran resultados análogos para problemas **tiempo variantes**, esto es, de la forma

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \qquad && J = \int_0^T \left[\mathbf{x}'(t)Q(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}'(t)R(t)\mathbf{u}(t)\right] dt + \mathbf{x}'(T)Q_T\mathbf{x}(T) \\ &\text{sujeto a} && \dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

En este tipo de problemas los impactos intertemporales y los pesos de desviación de las variables de estado y control dependen del tiempo.

La ecuación de Riccati relacionada con la solución al problema (2.7) toma la forma

$$\dot{K}(t) = -A'(t)K(t) - K(t)A(t) + K(t)S(t)K(t) - Q(t), \qquad K(T) = Q_T,$$

donde, $S(t) = B(t)R^{-1}(t)B'(t)$, el sistema equivalente a (2.6) es

$$\begin{pmatrix} \dot{U}(t) \\ \dot{V}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & -S(t) \\ -Q(t) & -A'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(t) \\ V(t) \end{pmatrix}.$$

De las equivalencias dadas por el teorema 10, sólo cambia $\dot{U}(t) = (A(t) - S(t)K(t))U(t)$. En todas estas solo se ha reemplazado las matrices constantes por sus equivalentes variables.

Puesto que las soluciones de sistemas invariantes en el tiempo dependen del comportamiento de los valores propios de la matiz de coeficientes, para el caso del sistema (2.6) de los valores propios de la matriz

$$\begin{pmatrix} A & -S \\ -Q & -A' \end{pmatrix},$$

este tipo de problemas está totalmente resuelto, en contraste los sistemas tiempo variantes no poseen soluciones análiticas generales; sus soluciones raramente son funciones estándar (polinomios, exponenciales, etc.), lo que hace que aún su solución sea motivo de estudio y que se esté interesado, por lo menos, por buenas aproximaciones a las soluciones, entendidas por funciones tan cerca a las soluciones como se desee.

2.2. Juegos diferenciales

De forma análoga al comportamiento de los problemas de control LQ, los juegos diferenciales pueden ser invariantes o variantes en el tiempo.

2.2.1. Juegos invariantes en el tiempo

Un juego diferencial invariante en el tiempo es un problema de optimización donde cada uno de los N jugadores tiene restricciones de la forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \sum_{i=0}^{N} B_i \mathbf{u}_i(t), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{2.8}$$

$\mathbf{x}(t)$ es el vector de las n variables de estado, $\mathbf{x}_0$ es la condición inicial del sistema, $\mathbf{u}_i(t)$ es el vector de las k_i variables de control manejadas por el i-ésimo jugador. A y B_i son matrices de tamaño $n \times n$ y $n \times k_i$ respectivamente, para $i = 1, 2, ..., N$. Nótese que el sistema de ecuaciones (2.8) se puede reescribir en la forma (2.1) donde $\mathbf{u}' = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_N)$ es el vector de las k variables de control, formado por las variables de todos los jugadores, B es la matriz de tamaño $n \times k$

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_N \end{pmatrix},$$

y $k = \sum_{i=1}^{N} k_i$.

El objetivo para cada uno de los N jugadores es de tipo (2.3). Esto es, un **juego diferencial invariante en el tiempo** es un problema de forma,

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & J_i(\mathbf{u}_i) = \int_0^T \left[\mathbf{x}'(t) Q_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}_i'(t) R_i \mathbf{u}_i(t)\right] dt + \mathbf{x}'(T) Q_{iT} \mathbf{x}(T), \quad i = 1, 2, ..., N \\ \text{sujeto a} & \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \sum_{i=0}^{N} B_i \mathbf{u}_i(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{array}$$

esto es, conformado por N problemas LQ invariantes en el tiempo.

2.2.2. Juegos variantes en el tiempo

Un **juego diferencial variante en el tiempo** es el conjunto de N problemas LQ variantes en el tiempo,

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} \quad J_i(\mathbf{u}_i) = \int_0^T \left[\mathbf{x}'(t)Q_i(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}_i'(t)R_i(t)\mathbf{u}_i(t)\right] dt + \mathbf{x}'(T)Q_{iT}\mathbf{x}(T), \\ &\text{sujeto a} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \sum_{i=0}^{N} B_i(t)\mathbf{u}_i(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, ..., N$.

Un conjunto admisible de variables de control $\mathbf{u}^* = (u_1^*, u_2^*, ..., u_N^*)$ es **un equilibrio de Nash** para el juego, si para cada $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_N)$,

$$J_i(\mathbf{u}^*) \leq J_i(u_1^*, ..., u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, u_N^*), \quad i = 1, 2, ..., N.$$

En la literatura éste es conocido como equilibrio **open-loop** de Nash, cada jugador en cada instante del intervalo de tiempo conoce el estado inicial y toda la estructura del modelo. El equilibrio se determina simultáneamente, esto es, cada jugador determina el comportamiento de sus variables instrumentales y alguien hace que las acciones así determinadas se realicen.

Engwerda (2005) prueba que si cada jugador soluciona su correspondiente ecuación de Riccati, el conjunto de soluciones así encontradas constituye un equilibrio open-loop de Nash. Esto en versión variante en el tiempo equivale a que el jugador i-ésimo soluciona la ecuación

$$\dot{K}_i(t) = -A'(t)K_i(t) - K_i(t)A(t) + K_i(t)S_i(t)K_i(t) - Q_i(t), \qquad K_i(T) = Q_{iT},$$

donde, $S_i(t) = B_i(t)R_i^{-1}(t)B_i'(t)$. Puesto que esta ecuación es equivalente a un sistema, el i-ésimo jugador debe solucionar

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_i(t) \\ \dot{V}_i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & -S_i(t) \\ -Q_i(t) & -A'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i(t) \\ V_i(t) \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el equilibrio open-loop de Nash del juego es la solución del sistema simultáneo para los N jugadores

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1(t) \\ \dot{U}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{U}_N(t) \\ \dot{V}_1(t) \\ \dot{V}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{V}_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & 0 & \cdots & 0 & -S_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A(t) & \cdots & 0 & 0 & -S_2(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A(t) & 0 & 0 & \cdots & -S_N(t) \\ -Q_1(t) & 0 & \cdots & 0 & -A'(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -Q_2(t) & \cdots & 0 & 0 & -A'(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -Q_N(t) & 0 & & \cdots & -A'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \vdots \\ U_N(t) \\ V_1(t) \\ V_2(t) \\ \vdots \\ V_N(t) \end{pmatrix}$$

que puede reescribirse en la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{U}}(t) \\ \dot{\mathbf{V}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{A(t)} & -\mathbf{S}(t) \\ -\mathbf{Q}(t) & -\mathbf{D}_{A'(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}(t) \\ \mathbf{V}(t) \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

con $\mathbf{U}'(t) = (U_1(t), U_2(t), ..., U_N(t))$, $\mathbf{V}'(t) = (V_1(t), V_2(t), ..., V_N(t))$ y $\mathbf{D}_{A(t)}$, $\mathbf{D}_{A'(t)}$,[2] $\mathbf{Q}(t)$ y $\mathbf{S}(t)$ son matrices diagonales en bloques definidas por,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_D(t) &= \mathrm{Diag}(A(t), A(t), ..., A(t)) \\
\mathbf{A}_D(t) &= \mathrm{Diag}(A'(t), A'(t), ..., A'(t)) \\
\mathbf{Q}(t) &= \mathrm{Diag}(Q_1(t), Q_2(t), ..., Q_N(t)) \\
\mathbf{S}(t) &= \mathrm{Diag}(S_1(t), S_2(t), ..., S_N(t)).
\end{aligned}$$

Si el sistema matricial de ecuaciones difeenciales (2.9) se desarrolla equivale al sistema

$$\begin{aligned}
\dot{u}_{k_{ij}} &= \sum_{l=1}^{n} a_{il} u_{k_{lj}} - \sum_{l=1}^{n} s_{k_{il}} v_{k_{lj}} \\
\dot{v}_{k_{ij}} &= -\sum_{l=1}^{n} q_{k_{il}} u_{k_{lj}} - \sum_{l=1}^{n} a_{il} v_{k_{lj}} \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

para $k = 1, 2, ..., N$ y $i, j = 1, 2, ..., n$. Y (2.10) se puede reescribir en la forma matricial

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = \Delta \boldsymbol{\psi}, \qquad (2.11)$$

donde

$$\boldsymbol{\psi}' = (u_{1_{11}}, u_{1_{12}}, ..., u_{1_{1n}}, u_{1_{21}}, u_{1_{22}}, ..., u_{1_{2n}}, ..., v_{N_{n1}}, v_{N_{n2}}, ..., v_{N_{nn}})$$

es el vector de todas las variables de las $2N$ matrices $U_i(t)$ y $V_i(t)$ tomando inicialmente las filas de $U_1(t)$ luego las de $U_2(t)$ y así sucesivamente, hasta las de $U_N(t)$ luego las de cada una de las matrices $V_i(t)$ en la misma forma y Δ es la matriz de coeficientes.

[2]Las mayúsculas en negrilla representan matrices en bloques y la notación $\mathbf{D}_{Algo}$ denota en adelante una matriz diagonal en bloque donde los bloques diagonales son $Algo$ y D_{algo} denota una matriz diagonal con $algo$ en las entradas de la diagonal.

CAPÍTULO 3

Solución aproximada al problema de política LQ

Puesto que en el capítulo anterior, se mostró que la solución del problema de política económica en forma de un juego diferencial LQ variante en el tiempo es equivalente a solucionar el sistema de ecuaciones (2.11) y este sistema es un caso particular del sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$$

el propósito de este capítulo es encontrar soluciones aproximadas para este último sistema, sus particularizaciones a sistemas de la forma (2.11) solucionan el problema propuesto.

La solución clásica de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias con coeficientes variables hace uso de series de Taylor; esto junto con la notación matricial para las aproximaciones, introducida por Mouroutsos y Sparis (1985), proporciona un método simple de aproximación a la solución de estos sistemas, que se caracteriza por su sencillez, facilidad de computo y excelente grado de aproximación. **El método de solución consiste en convertir un sistema o ecuación diferencial en un sistema simultaneo de ecuaciones lineales, cuyas incognitas son los coeficientes de los polinomios de Taylor de las funciones solución al problema diferencial, que luego es solucionado encontrando los coeficientes buscados, esto es, los polinomios que aproximan las soluciones**.

Inicialmente se resumen, con algunas simplificaciones y modificaciones, las definiciones y notación matricial presentada por Mouroutsos y Sparis (1985) y Yang y Chen (1987) para luego introducir la notación y el proceso que sirve al objetivo de este trabajo.

3.1. Aproximación de funciones analíticas por polinomios de Taylor

Una función $f(t)$ analítica[1] en el punto $t = 0$ se puede representar mediante su serie de Taylor

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad \text{con} \quad a_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n f}{dt^n}(0).$$

Al truncarla en el k-ésimo término se obtiene una aproximación a $f(t)$

$$f(t) \approx \sum_{n=0}^{k} a_n t^n.$$

El valor de k se determina dependiendo de la exactitud de la aproximación deseada, mejores aproximaciones requieren mayor cantidad de términos, es decir, valores grandes de k.

El uso de vectores, además de simplificar la notación, ayuda a encontrar expresiones sencillas para las aproximaciones a la integración y derivación de una función.

La aproximación anterior en forma vectorial es,

$$f(t) \approx \mathbf{f}'\boldsymbol{\theta}(t) \tag{3.1}$$

donde,

$$\mathbf{f}' = \left(f(0), f'(0), \frac{f'(0)}{2!}, \frac{f''(0)}{3!}, \cdots, \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right)$$

es el vector de coeficientes y

$$\boldsymbol{\theta}'(t) = \left(1, t, t^2, t^3, \cdots, t^k\right)$$

es el vector de variables. En notación matricial la aproximación de la n-ésima derivada de $f(t)$ es,

$$f^{(n)}(t) \approx \mathbf{f}' R^n \boldsymbol{\theta}(t) \tag{3.2}$$

donde,

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k & 0 \end{pmatrix}$$

y la aproximación de la n-ésima integral indefinida de $f(t)$ es,

$$\int_0^t \int_0^v \cdots \int_0^u f(x)dx\, du \cdots dv \approx \mathbf{f}' P^n \boldsymbol{\theta}(t) \tag{3.3}$$

[1] Una función es analítica en un punto t_0 si existe un intervalo abierto I que contenga a t_0 donde la función tiene derivadas continuas de cualquier orden.

con

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

las aproximaciones para las derivadas y las integrales tienen sentido si el orden de derivación o integración es menor que k, esto es una consecuencia de la forma de las matrices R y P, ya que si alguna de ellas se multiplica $k+1$ veces el resultado es la matriz nula ($R^k = P^k = 0$). La condición implica en particular que k debe ser escogido teniendo en cuenta no solo el grado de aproximación de las funciones, sino también la cantidad de derivadas o integrales involucradas en el proceso a solucionar.

3.2. Aproximación de producto de funciones

Sean $f(t)$ y $g(t)$ funciones analíticas en alguna vecindad del origen y

$$f(t) \approx \mathbf{f}'\boldsymbol{\theta}(t) = \sum_{n=0}^{k} a_n t^n, \qquad g(t) \approx \mathbf{g}'\boldsymbol{\theta}(t) = \sum_{n=0}^{k} b_n t^n$$

sus aproximaciones de orden k, entonces la forma matricial para la aproximación del producto es,

$$\begin{aligned} (fg)(t) \approx \mathbf{f}'\boldsymbol{\theta}(t)\mathbf{g}'\boldsymbol{\theta}(t) &= \sum_{n=0}^{k} \sum_{i+j=n} a_i b_j t^n = \sum_{n=0}^{k} \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} t^n \\ &= \sum_{n=0}^{k} \mathbf{f}' J_{k-n} \mathbf{g} t^n = \mathbf{f}' \left(J_k \mathbf{g}, J_{k-1}\mathbf{g}, \cdots, J_0 \mathbf{g}\right)' \boldsymbol{\theta}(t) \\ &= \mathbf{f}'\Pi_g \boldsymbol{\theta}(t) = \mathbf{g}'\Pi_f \boldsymbol{\theta}(t), \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde la matriz J_h de tamaño $(k+1) \times (k+1)$ es

$$J_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}^h \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

un incremento de h hace que, en la primera matriz, cada uno se desplace a la siguiente columna a derecha en total todos se mueven a la siguiente diagonal a la derecha y el efecto de multiplicar una matriz por la que tiene unos en la diagonal secundaria, segunda matriz, es invertir el orden en cada una de las filas, así si la fila es $(a_1, a_2, ..., a_k)$ el producto la convierte a $(a_k, a_{k-1}, ..., a_1)$.

3.3. Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales variantes en el tiempo

Dado que el sistema a resolver (2.11) puede ser llevado a la forma general de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden variante en el tiempo con m incógnitas $\mathbf{x}'(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t))$,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t), \tag{3.5}$$

con $\mathbf{x}(0)$ conocido, $A(t)$ es una matriz de tamaño $m \times m$, $B(t)$ de tamaño $m \times q$ y $\mathbf{u}(t)$ de tamaño $q \times 1$.

Bajo la hipótesis de que todas las funciones involucradas sean analíticas en algún intervalo $I = (-T, T)$, cada una de las entradas en las matrices tiene una aproximación de la forma (3.1). Al expandir en serie de Taylor cada una de las funciones que son entradas de la matriz $A(t)$ y truncar las series, se obtienen las siguientes aproximaciones:

$$\begin{aligned} A(t) = (a_{ij}(t)) \approx \left(\mathbf{a}'_{ij}\boldsymbol{\theta}(t)\right) = \left(\mathbf{a}'_{ij}\right) &\begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\theta}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{\theta}(t) \end{pmatrix} \\ = \boldsymbol{\mathcal{A}}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}(t)}, \end{aligned}$$

la matriz $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ de tamaño $m \times m(k+1)$ tiene como entradas los $k+1$ primeros coeficientes de la serie de Taylor de cada una de las funciones $a_{ij}(t)$ que forman la matriz $A(t)$, $a_{ij}(t) \approx \mathbf{a}'_{ij}\boldsymbol{\theta}(t)$ y la matriz $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}(t)}$ de tamaño $m(k+1) \times m$, con la notación introducida al final del capítulo 2 (última nota a pie de página), es diagonal en bloques con $\boldsymbol{\theta}(t)$ en la diagonal. De manera análoga se encuentra que

$$\begin{aligned} B(t) &\approx \boldsymbol{\mathcal{B}}_{m\times q(k+1)} \left(\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}(t)}\right)_{q(k+1)\times q}, \\ \mathbf{x}(t) &\approx \boldsymbol{\mathcal{X}}_{m\times(k+1)}\boldsymbol{\theta}(t), \\ \mathbf{u}(t) &\approx \boldsymbol{\mathcal{U}}_{q\times(k+1)}\boldsymbol{\theta}(t) \end{aligned}$$

Al usar todas las aproximaciones anteriores y reemplazarlas en (3.5),

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}R\boldsymbol{\theta}(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}(t)}\boldsymbol{\mathcal{X}}\boldsymbol{\theta}(t) + \boldsymbol{\mathcal{B}}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}(t)}\boldsymbol{\mathcal{U}}\boldsymbol{\theta}(t), \tag{3.6}$$

con $\mathbf{x}(0)$ conocido.

La solución de este problema proporciona una aproximación a la solución del sistema (3.5). Si el problema (3.6) se puede convertir en un sistema de ecuaciones lineales simultaneas cuyas incognitas sean los primeros $k+1$ coeficientes de las series de Taylor de las funciones que forman la matriz $\mathbf{x}(t)$, es decir, la matriz $\boldsymbol{\mathcal{X}}$.

Efectuando el producto $\boldsymbol{\mathcal{A}}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}(t)}\boldsymbol{\mathcal{X}}\boldsymbol{\theta}(t)$ y haciendo uso de la ecuación (3.4) se obtiene:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{A}}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}(t)}\boldsymbol{\mathcal{X}}\boldsymbol{\theta}(t) &= \left(\mathbf{a}'_{ij}\boldsymbol{\theta}(t)\right)_{m\times m} \left(\boldsymbol{\mathcal{X}}\boldsymbol{\theta}(t)\right)_{m\times 1} = \left(\sum_{h=1}^{m} \mathbf{a}'_{ih}\boldsymbol{\theta}(t)\mathbf{x}'_h\boldsymbol{\theta}(t)\right)_{m\times 1} \\ &= \left(\sum_{h=1}^{m} \mathbf{x}'_h \Pi_{a_{ih}}\boldsymbol{\theta}(t)\right)_{m\times 1} = \left(\sum_{h=1}^{m} \mathbf{x}'_h \Pi_{a_{ih}}\right)\boldsymbol{\theta}(t), \end{aligned}$$

de forma análoga

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}(t)}\boldsymbol{\mathcal{U}}\boldsymbol{\theta}(t) = \left(\sum_{h=1}^{q} \mathbf{u}'_h \Pi_{b_{ih}}\right) \boldsymbol{\theta}(t)$$

y reemplazando en (3.6), el problema equivale a solucionar el sistema

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} R\boldsymbol{\theta}(t) = \left(\sum_{h=1}^{m} \mathbf{x}'_h \Pi_{a_{ih}}\right) \boldsymbol{\theta}(t) + \left(\sum_{h=1}^{q} \mathbf{u}'_h \Pi_{b_{ih}}\right) \boldsymbol{\theta}(t)$$

que es un sistema lineal de ecuaciones polinómicas en t y este se satisface si y sólo si, los coeficientes de potencias iguales de t son iguales, por lo que el sistema se reduce a solucionar el sistema de ecuaciones lineales simúltaneas

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} R = \sum_{h=1}^{m} \mathbf{x}'_h \Pi_{a_{ih}} + \sum_{h=1}^{q} \mathbf{u}'_h \Pi_{b_{ih}}. \tag{3.7}$$

En este sistema, la matriz

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{x}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1_0} & x_{1_1} & \cdots & x_{1_k} \\ x_{2_0} & x_{2_1} & \cdots & x_{2_k} \\ \vdots & & & \\ x_{m_0} & x_{m_1} & \cdots & x_{m_k} \end{pmatrix}$$

es la matriz de incógnitas y la i-ésima fila del sistema (3.7) es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_i R = (x_{i0}, x_{i1}, ..., x_{ik})\, R = (x_{i1}, 2x_{i2}, ..., kx_{ik}, 0) &= \sum_{h=1}^{m} \mathbf{x}'_h \Pi_{a_{ih}} + \sum_{h=1}^{q} \mathbf{u}'_h \Pi_{b_{ih}} \\ &= \sum_{h=1}^{m} \mathbf{x}'_h \left(J_k \mathbf{a}_{ih}, J_{k-1}\mathbf{a}_{ih}, \cdots, J_0 \mathbf{a}_{ih}\right) + \sum_{h=1}^{q} \mathbf{u}'_h \left(J_k \mathbf{b}_{ih}, J_{k-1}\mathbf{b}_{ih}, \cdots, J_0 \mathbf{b}_{ih}\right) \\ &= \sum_{h=1}^{m} \left(\mathbf{x}'_h J_k \mathbf{a}_{ih}, \mathbf{x}'_h J_{k-1}\mathbf{a}_{ih}, \cdots, \mathbf{x}'_h J_0 \mathbf{a}_{ih}\right) + \sum_{h=1}^{q} \left(\mathbf{u}'_h J_k \mathbf{b}_{ih}, \mathbf{u}'_h J_{k-1}\mathbf{b}_{ih}, \cdots, \mathbf{u}'_h J_0 \mathbf{b}_{ih}\right) \end{aligned}$$

y la j-ésima $(j = 1, 2, ..., k)$ entrada de este vector es

$$jx_{ij} = \sum_{h=1}^{m} \mathbf{x}'_h J_{k-j} \mathbf{a}_{ih} + \sum_{h=1}^{q} \mathbf{u}'_h J_{k-j} \mathbf{b}_{ih},$$

o

$$jx_{ij} = \left(\sum_{h=1}^{m} (x_{h0}, x_{h1}, ..., x_{hk}) \begin{pmatrix} a_{ih_j} \\ a_{ih_{j-1}} \\ \vdots \\ a_{ih_0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{h=1}^{q} (u_{h0}, u_{h1}, ..., u_{hk}) \begin{pmatrix} b_{ih_j} \\ b_{ih_{j-1}} \\ \vdots \\ b_{ih_0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Puesto que el vector $\mathbf{x}_i'R$ en su última posición tiene un cero, resultante de la columna nula de R, el sistema a resolver se limita a las ecuaciones correspondientes a la igualación de las primeras k componentes de cada vector.

El proceso mostrado puede ser usado matricialmente o mediante esta última ecuación para generar el sistema de ecuaciones lineales, en cualquiera de estos a partir del conocimiento de las matrices de coeficientes y el vector de control se despejan los coeficientes de las funciones incógnitas.

3.4. Solución de juegos diferenciales LQ

Como el sistema (2.11) es un caso particular de (3.5) la solución del sistema (3.7) se reduce a

$$\boldsymbol{\Psi} R = \sum_{h=1}^{2n^2N} \boldsymbol{\psi}_h' \Pi_{\delta_{ih}}, \tag{3.8}$$

donde, por simplicidad en la notación

$$\Delta = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{A(t)} & -\mathbf{S}(t) \\ -\mathbf{Q}(t) & -\mathbf{D}_{A'(t)} \end{pmatrix} = (\delta_{ij})$$

es la matriz de coeficientes y

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_1' \\ \boldsymbol{\psi}_2' \\ \vdots \\ \boldsymbol{\psi}_{2n^2N}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{1_0} & \psi_{1_1} & \cdots & \psi_{1_k} \\ \psi_{2_0} & \psi_{2_1} & \cdots & \psi_{2_k} \\ \vdots & & & \\ \psi_{2n^2N_0} & \psi_{2n^2N_1} & \cdots & \psi_{2n^2N_k} \end{pmatrix}$$

con

$$\boldsymbol{\Psi}' = (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{2n^2N}) = (u_{1_{11}}, u_{1_{12}}, ..., u_{1_{1n}}, u_{1_{21}}, u_{1_{22}}, ..., u_{1_{2n}}, ..., v_{N_{n1}}, v_{N_{n2}}, ..., v_{N_{nn}})$$

es la matriz de coeficientes.

A partir de esta solución y el uso del Teorema 10 se calcula la matriz

$$K_i(t) = V_i(t)U_i^{-1}(t)$$

y por medio del Teorema 9 se calcula el valor óptimo de los instrumentos

$$\mathbf{u}_i^*(t) = -R_i^{-1}(t)B_i'(t)K_i(t)\mathbf{x}(t)$$

para cada i-ésimo de los N jugadores.

Conclusiones

- Se hizo una revisión de los problemas de Política Económica para determinar el estado del arte en cuanto a la solución de los distintos tipos de modelos matemáticos usados. A partir de esto se determinó que los problemas dinámicos tiempo invariantes estaban totalmente resueltos pero que para los tiempo variantes, en general y al momento, no.

- Puesto que hay métodos de solución aproximada, en los que se basan los algoritmos númericos, de ecuaciones diferenciales, se propuso extender el uso de polinomios de Taylor para encontrar una solución a sistemas de ecuaciones diferenciales tiempo variantes.

- Como se sabe el Teorema de Taylor genera para funciones analíticas aproximaciones por medio de un polinomio de Taylor tan buenas como se quiera para lo cual basta con usar un número adecuado de términos en los desarrollos.

- El algorítmo presentado, a pesar de su aparente dificultad, por ser iterativo puede ser implementado de forma computacionalmente sencilla.

- Dado el manejo matricial, la capacidad de manejo simbólico y las implementaciones recursivas los programas como Mahematica, Maple o Matlab, son tal vez, los mas adecuados para su implementación.

Trabajo futuro

- Encontrar la ecuación de Riccati correspondiente a juegos en diferencias LQ discretos variantes en el tiempo y explorar la aplicación del método a la solución de la ecuación.
- Extender el método a ecuaciones diferenciales no lineales y ecuaciones diferenciales parciales, dado que una limitante en el desarrollo de modelos es el estado de sus soluciones.
- La revisión bibliográfica determinó, que aunque se ha comenzado la aplicación de juegos diferenciales estocásticos a Política Económica, aún no existe solución para ellos por lo que se debe explorar la aplicación del método o uno similar a la solución de ecuaciones diferenciales estocásticas.

APÉNDICE

Problemas con un objetivo y un instrumento

La solución para una ecuación lineal estática del tipo

$$x = ax + bu + c,^{2} \tag{9}$$

donde, x es la variable de estado, u es la variable de control y $a \neq 1$ y c son coeficientes conocidos (b mide el impacto de la variable de control sobre la de estado) es,

$$x = \frac{1}{1-a}(bu + c),$$

sin importar qué valor tome y, ésta solución es única. El problema de controlabilidad (estática) en este caso consiste en determinar si existe un valor de la variable de control para que la variable de estado tome un valor previamente determinado, esto es, ¿cuál debe ser el valor de u para que $x = \bar{x}$? la solución es

$$u = \frac{1}{b}[(1-a)\bar{x} - c],$$

esto es, si $b \neq 0$ el problema es controlable.

La dinamización discreta natural de (9) con coeficientes constantes, esto es, no hay cambio en el impacto de las variables rezagadas es,

$$x_t = ax_{t-1} + bu_{t-1} + c. \tag{10}$$

Su solución es (ver por ejemplo Pecha (2008)),

$$x_t = a^t \left[x_0 + \sum_{i=0}^{t-1} a^{-i}(bu_i + c) \right].$$

El problema de controlabilidad (dinámica) es determinar el comportamiento temporal de la variable de control para que un intervalo de tiempo $[0, T]$ la variable de estado vaya de un valor (x_I) inicial en el momento $t = 0$ a un valor (x_F) final en el momento $t = T$. Esto

[2] La escritura normal para esta ecuación es $(1-a)x + bu + c = 0$ sin embargo se usa esta forma para inducir la dinamización.

es, ¿existe una trayectoria de u_t para que $x_0 = x_I$ y $x_T = x_F$, con x_I y x_F dados?. Para esto basta reescribir la ecuación (10) en la forma

$$u_t = \frac{1}{b}x_{t+1} - \frac{a}{b}x_t - \frac{c}{b}$$

con condiciones sobre la frontera del intervalo temporal, en el momento inicial

$$u_0 = \frac{1}{b}x_1 - \frac{a}{b}x_I - \frac{c}{b}$$

y terminal

$$u_{T-1} = \frac{1}{b}x_F - \frac{a}{b}x_{T-1} - \frac{c}{b},$$

con x_1 y x_{T-1} arbitrarios. Puesto que u_t está despejada de forma única, la ecuación es perfectamente controlable, esto es, se puede encontrar los valores intertemporales para la variable de control que hacen que la variable de estado vaya sobre una trayectoria previamente determinada. En otras palabres, existen valores para la variable de control de tal forma que la variable de estado tome en cada momento t el valor $\hat{x}_t$ predeterminado,

$$u_t = \frac{1}{b}\hat{x}_{t+1} - \frac{a}{b}\hat{x}_t - \frac{c}{b}.$$

La dinamización continua de (9) con coeficientes constantes es,

$$\dot{x} = ax(t) + by(t) + c, \tag{11}$$

cuya solución es

$$x(t) = e^{at}\left[x(0) + \int_0^t e^{-as}(by(s) + c)ds\right].$$

Si las variables rezagadas no afecta en forma constante el valor de x_t, es decir, el impacto de los rezagos depende del tiempo; la forma mas general de dinamizar discretamente (9) es

$$x_t = a_{t-1}x_{t-1} + b_{t-1}u_{t-1} + c_{t-1} \tag{12}$$

y su solución según Pecha (2008) es

$$x_t = \prod_{i=0}^{t-1} a_i \left[x_0 + \sum_{i=0}^{t-1}(b_i u_i + c_i)\prod_{k=0}^{i} a_k^{-1}\right].$$

ésta solución es única e independiente de los valores de la variable de control y puesto que la ecuación (12) se puede reescribir en la forma

$$u_t = \frac{1}{b_t}x_{t+1} - \frac{a_t}{b_t}x_{t-1} - \frac{c_t}{b_t}$$

con $b_t \neq 0$ para todo t, la ecuación es perfectamente controlable.

La dinamización continua con coeficientes variables de (9),

$$\dot{x} = a(t)x(t) + b(t)u(t) + c(t) \tag{13}$$

tiene como solución

$$x(t) = e^{\int_0^t a(s)ds}\left[x(0) + \int_0^t e^{-\int_0^s a(w)dw}(b(s)u(s) + c(s))ds\right].$$

Puesto que la ecuación (13) equivale a

$$u(t) = \frac{1}{b(t)}\dot{x} - \frac{a(t)}{b(t)}x(t) - \frac{c(t)}{b(t)}$$

el problema es perfectamente controlable. Notesé en particular la similitud en el comportamiento de las soluciones para los casos dinámicos.

Hasta aquí, las ecuaciones son determinísticas, sin embargo puede que no todos los impactos sean conocidos plenamente y que solo se conozca su distribución de probabilidad, esto puede hacerse de dos formas en caso de dinámica discreta: en una c_t en la ecuación (12) es una variable aleatoria, en la otra a_t, b_t y c_t son no determinísticos.

Para el caso continuo en la ecuación (13) se puede considerar que $c(t)$ es una variable aleatoria continua o llevar la ecuación a la forma

$$dx = a(t)x(t)dt + b(t)u(t)dt + c(t)dw,$$

donde $w(t)$ es un proceso de Wiener, dando lugar a una ecuación diferencial estocástica .

Las funciones objetivo pueden ser de dos tipos: en la primera las variables de control no están involucradas, las variables de control no tienen costo asociado en el proceso modelado, para el caso discreto

$$(x_0 - \bar{x}_0, x_1 - \bar{x}_1, \cdots, x_T - \bar{x}_T)A(x_0 - \bar{x}_0, x_1 - \bar{x}_1, \cdots, x_T - \bar{x}_T)' \tag{14}$$

donde, x_i y $\bar{x}_i$ son respectivamente los valores de las variables y sus metas en el momento $i = 0, 1, ..., T$ y $(')$ transpuesta. Si $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \cdots, x_T)$ y $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_T)$ son los vectores de valores de variables de estado y valores objetivo para ellas, (14) se reduce a

$$(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})A(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})' = \mathbf{x}A\mathbf{x}' - \bar{\mathbf{x}}A\mathbf{x}' - \mathbf{x}A\bar{\mathbf{x}}' + \bar{\mathbf{x}}A\bar{\mathbf{x}}' = \mathbf{x}A\mathbf{x}' - \mathbf{b}\mathbf{x}' + c$$

como c es constante no afecta el proceso de optimización por lo que la función objetivo es

$$\mathbf{x}A\mathbf{x}' - \mathbf{b}\mathbf{x}'.$$

Cuando los instrumentos tiene costo asociado a su desajuste a valores objetivo y $\mathbf{u}$ y $\bar{\mathbf{u}}$ son los vectores de instrumentos y sus valores objetivo, el objetivo del problema es

$$(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})A(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})' + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})B(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})'$$

que se puede reducir a la forma

$$(\mathbf{x}, \mathbf{u})\hat{A}(\mathbf{x}, \mathbf{u})' - \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, \mathbf{u})'.$$

con $\hat{A}$ y $\hat{\mathbf{b}}$ adecuadas.

En caso continuo la función objetivo es

$$\int_0^T a(x(t) - \bar{x}(t))^2 dt = a\int_0^T (x^2(t) - 2\bar{x}(t)x(t) + \bar{x}^2(t))dt$$

Puesto que $\bar{x}$ es conocida el problema se reduce a

$$\int_0^T (x^2(t) - 2\bar{x}(t)x(t))dt$$

en caso que las variables instrumentales no afecten el costo en caso contrario la función objetivo es

$$\int_0^T (ax^2(t) + bu^2(t) - 2a\bar{x}(t)x(t) - 2b\bar{u}(t)u(t))dt.$$

APÉNDICE

Una aplicación computacional

Turnovsky (1973) analiza el modelo de estabilizar el gasto y consumo, esto es, minimizar la función,

$$W_T = \frac{1}{2}\left\{f_1\left(Y_T - \bar{Y}\right)^2 + f_2\left(G_T - \bar{G}\right)^2 + \int_0^T \left[m_1\left(Y - \bar{Y}\right)^2 + m_2\left(G - \bar{G}\right)^2 + n\dot{G}^2\right] dt\right\},$$

sujeto al sistema multiplicador-acelerador de Phillips

$$\begin{aligned} Z &= cY + I + G + A \\ I &= \alpha\dot{Y} - k\dot{I} \\ \dot{Y} &= r(Z - I). \end{aligned}$$

En el sistema Z representa la demanda agregada, cY el consumo, I la inversión, G el gasto gubernamental y A el gasto autónomo. Si se asume $A = 0$ y se eliminan I y Z, el sistema equivale a

$$\ddot{Y} + b_1\dot{Y} + b_2Y - \frac{r}{k}G - r\dot{G} = 0$$

Al hacer $y = Y - \bar{Y}$, $g = G - \bar{G}$ y usar el hecho que en equilibrio $s\bar{Y} = \bar{G}$, el problema se transforma en

$$\text{Minimizar } W_T = \frac{1}{2}\left\{f_1y_T^2 + f_2g_T^2 + \int_0^T \left[m_1y^2 + m_2g^2 + n\dot{G}^2\right] dt\right\},$$

sujeto a

$$\ddot{y} + b_1\dot{y} + b_2y - \frac{r}{k}g - r\dot{g} = 0.$$

Y si $\dot{y} = z$ y $\dot{g} = v$ el problema toma la forma LQ,

$$\text{Minimizar } W_T = \frac{1}{2}\left\{f_1y_T^2 + f_2g_T^2 + \int_0^T \left[\mathbf{x}M\mathbf{x}' + nv^2\right] dt\right\},$$

sujeto a

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bv,$$

donde,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ g \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -b_1 & -b_2 & \frac{r}{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix}.$$

Al aplicar el Teorema 9 la variable de control óptima satisface la ecuación tiempo variante

$$\begin{aligned} v &= -\frac{1}{n} \begin{pmatrix} r & 0 & 1 \end{pmatrix} K(t) \begin{pmatrix} z \\ y \\ g \end{pmatrix} = -\frac{1}{n} \begin{pmatrix} r & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) & k_{13}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) & k_{23}(t) \\ k_{31}(t) & k_{32}(t) & k_{33}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \\ g \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{n} \left\{ (rk_{11}(t) + k_{31}(t))\, z + (rk_{12}(t) + k_{32}(t))\, y + (rk_{13}(t) + k_{33}(t))\, g \right\}, \end{aligned} \tag{15}$$

donde, $K(t)$ es la solución de la ecuación de Riccati

$$\dot{K}(t) = -A'K(t) - K(t)A + \frac{1}{n}K(t)BB'K(t) - M \tag{16}$$

con condiciones de frontera

$$K(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_1 & 0 \\ 0 & 0 & f_2 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Al hacer las sustituciones $z = \dot{y}$ y $v = \dot{g}$ en la ecuación (15) esta equivale a

$$\dot{g} = \theta_1(t)\dot{y} + \theta_2(t)y + \theta_3(t)g \tag{18}$$

con

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= -\frac{1}{n} (rk_{11} + k_{13}) \\ \theta_2(t) &= -\frac{1}{n} (rk_{12} + k_{23}) \\ \theta_3(t) &= -\frac{1}{n} (rk_{13} + k_{33}). \end{aligned}$$

Hasta aquí el desarrollo sigue a Turnovsky (1973). Aún si el sistema original tiene coeficientes constantes la ecuación (18) es variante en el tiempo por lo que no puede ser solucionada analíticamente.

Puesto que según el Teorema 10 la solución de la ecuación (16) se deduce del sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{U}(t) \\ \dot{V}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -\frac{1}{n}BB' \\ -M & -A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(t) \\ V(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AU(t) - \frac{1}{n}BB'V(t) \\ -MU(t) - A'V(t) \end{pmatrix} \tag{19}$$

y este, para $i = 1, 2, 3$, equivale a

$$\begin{aligned} \dot{u}_{1i} &= -b_1 u_{1i} - b_2 u_{2i} + \frac{r}{k} u_{3i} - \frac{1}{n} \left(r^2 v_{1i} + r v_{3i} \right) \\ \dot{u}_{2i} &= u_{1i} \\ \dot{u}_{3i} &= -\frac{1}{n} (r v_{1i} + v_{3i}) \\ \dot{v}_{1i} &= b_1 v_{1i} + v_{2i} \\ \dot{v}_{2i} &= -m_1 u_{2i} + b_2 v_{1i} \\ \dot{v}_{3i} &= -m_2 u_{3i} - \frac{r}{k} v_{1i} \end{aligned}$$

o en forma matricial con $\mathbf{u}_i' = (u_{i1}, u_{i2}, u_{i1})$, $\mathbf{v}_i' = (v_{i1}, v_{i2}, v_{i1})$,

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}_1 \\ \dot{\mathbf{u}}_2 \\ \dot{\mathbf{u}}_3 \\ \dot{\mathbf{v}}_1 \\ \dot{\mathbf{v}}_2 \\ \dot{\mathbf{v}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{-b_1} & D_{-b_2} & D_{\frac{r}{k}} & D_{-\frac{r^2}{n}} & \mathbf{0} & D_{-\frac{r}{n}} \\ I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{-\frac{r}{n}} & \mathbf{0} & D_{-\frac{1}{n}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{b_1} & I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_{-m_1} & \mathbf{0} & D_{b_2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{-m_2} & D_{\frac{r}{k}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

donde, todas las matrices en la partición son de tamaño 3×3.

La solución a un sistema de la forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t)$$

puede ser encontrada por el siguiente programa en MATHEMATICA®

```
aprox =
(*Orden de la aproximación*)
nvar =
(*Número de variables en la ecuación de Riccati*)
A =
(*Matriz de coeficiente*)
Ag = Table[Table[D[A[[i, j]], {t, p − 1}]/(p − 1)!, {p, aprox + 1}]/.t → 0, {i, 2 ∗ nvar},
{j, 2 ∗ nvar}]
(*Crea la matriz de aproximaciones de cada coeficiente*)
uv = Join [Table [u_i, {i, nvar}] , Table [v_i, {i, nvar}]]
(*Matriz auxiliar para generar las variables y sus valores iniciales*)
X = Table[SeriesCoefficient[Series[uv[[i]][t], {t, 0, aprox + 1}], p − 1], {i, 2 ∗ nvar},
{p, aprox + 1}]
(*Crea las aproximaciones par cada variable*)
var = Flatten[Table[(p − 1)! ∗ SeriesCoefficient[Series[uv[[i]][t], {t, 0, aprox + 1}], p − 1],
{i, 2 ∗ nvar}, {p, 2, aprox + 1}]]
(*Genera las variables del problema*)
valin = Table[SeriesCoefficient[Series[uv[[i]][t], {t, 0, aprox + 1}], 0], {i, 2 ∗ nvar}]
(*Valores iniciales de las variables*)
R = Table[If[i==j + 1, j, 0], {i, aprox + 1}, {j, aprox}]
(*Genera la matriz R*)
X.R
(*Matriz equivalente a al vector de derivadas de las variables*)
W1 = Table[If[i + 1==j, 1, 0], {i, aprox + 1}, {j, aprox + 1}]
(*Primera matriz auxiliar para la construccion de PI*)
W2 = Table[If[i + j == aprox + 2, 1, 0], {i, aprox + 1}, {j, aprox + 1}]
(*Segunda matriz auxiliar para la construccion de PI*)
J[s_] = MatrixPower[W1, s].W2
(*Matriz J con s variable*)
PI[S_] = Table[J[aprox + 1 − i].S, {i, aprox + 1}]
Table[Sum[X[[h]].Transpose[PI[Ag[[i, h]]]], {h, 2 ∗ nvar}], {i, 2 ∗ nvar}]
(*Genera la matriz del lado derecho del sistema*)
```

$\textbf{sol} = \textbf{Solve}[X.R == \textbf{Transpose}[\textbf{Delete}[\textbf{Transpose}[\%], \textbf{aprox} + 1]], \textbf{var}]$
(*Soluciona el sistema*)
$\textbf{resp}[t\_] = \textbf{Table}[\textbf{Simplify}[\textbf{uv}[[i]][0] + \textbf{Sum}[\textbf{sol}[[1, \textbf{Extract}[\textbf{Position}[\textbf{sol}, \textbf{var}[[\textbf{aprox} * i - j]]],$
$\{1, 2\}], 2]] * t^{\textbf{aprox}-j}, \{j, 0, \textbf{aprox} - 1\}]], \{i, 2 * \textbf{nvar}\}]$
(*Respuestas en función de t*)

Que puede usarse para solucionar un sistema general

$$\dot{\mathrm{x}}(t) = A(t)\mathrm{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t).$$

Para generar la solución de la ecuación de Riccati se usa el siguiente conjunto de instrucciones,

$U[t\_] = \textbf{Table}\left[\textbf{resp}[t][[j + i]], \{i, 0, 2 * \sqrt{\textbf{nvar}}, \sqrt{\textbf{nvar}}\}, \{j, 1, \sqrt{\textbf{nvar}}\}\right]$
(*Matriz de valores de U(t)*)
$V[t\_] = \textbf{Table}\left[\textbf{resp}[t][[j + i]], \{i, \textbf{nvar}, 2 * \textbf{nvar} - 1, \sqrt{\textbf{nvar}}\}, \{j, 1, \sqrt{\textbf{nvar}}\}\right]$
(*Matriz de valores de V(t) *)
$K[t\_] = V[t].\textbf{Inverse}[U[t]]$
(*Matriz solución de la ecuación de Riccati K(t)*)
$\textbf{coe} = \textbf{Solve}\left[K[0] == (\text{*Condiciones de transversalidad del problema*}), \textbf{valin}\right]$
(*Ajusta los coeficientes de K a las condiciones de transversalidad del problema*)
$\textbf{UF}[t\_] = U[t]/.\textbf{coe}$
(*Recalcula$U(t)$ con las condiciones de transversalidad*)
$\textbf{VF}[t\_] = V[t]/.\textbf{coe}$
(*Recalcula$V(t)$ con las condiciones de transversalidad*)
$\textbf{KF}[t\_] = \textbf{VF}[t].\textbf{Inverse}[\textbf{UF}[t]]$
(*Recalcula$K(t)$ con las condiciones de transversalidad*)

Para el caso particular de éste apéndice la matriz de coeficientes es la del sistema (20). Las condiciones de transversalidad dadas en (17) se pueden, a partir de una traslación en la variable t, tomar como

$\textbf{coe} = \textbf{Solve}\left[K[0] == \{\{0, 0, 0\}, \{0, f_1, 0\}, \{0, 0, f_2\}\}, \textbf{valin}\right]$

y la solución de la ecuación (15) se encuentra por medio de la siguiente variación del proceso general

$\textbf{DER}[t\_] = \{r, 0, 1\}.\textbf{KF}[t].\{\{y'[t]\}, \{y[t]\}, \{g[t]\}\}$
(*Lado derecho en el caso particular*)
$\textbf{XK} = \textbf{Table}[\textbf{SeriesCoefficient}[\textbf{Series}[\textbf{DER}[t][[1]], \{t, 0, \textbf{aprox} + 1\}], p - 1], \{p, \textbf{aprox} + 1\}]$
(*Aproximación de la función lado derecho*)
$\textbf{gvar} = \textbf{Flatten}[\textbf{Table}[(p - 1)! * \textbf{SeriesCoefficient}[\textbf{Series}[g[t], \{t, 0, \textbf{aprox} + 1\}], p - 1],$
$\{p, 2, \textbf{aprox} + 1\}]]$
(*Variables del problema*)
$\textbf{solg} = \textbf{Solve}[\textbf{gvar} == \textbf{Delete}[\textbf{XK}, \textbf{aprox}], \textbf{gvar}]$
(*Solución a la variable de control*)
$G[t\_] = \textbf{Simplify}\left[g[0] + \textbf{Sum}\left[\textbf{solg}[[1, j, 2]] * t^{\textbf{aprox}-j+1}, \{j, 1, \textbf{aprox}\}\right]\right]$
(*Construcción de la función de control óptimo*)

Tomando una aproximación de orden dos la solución es,

$$\begin{aligned}g(t) \approx & g[0] + tg[0]f_2 - \frac{1}{kn^2(-2+f_2)} 2t^2 \left(kg[0]f_2^3 + kng[0]f_2^3 - kng[0]f_2m_2\right.\\ & \left.-kn^2g[0]f_2m_2 + n^2rf_1y[0] + kn^2rb_1f_1y[0] + knrf_1f_2y[0] - kn^2rm_1y[0]\right),\end{aligned}$$

para una aproximación de tercer orden la función de control óptimo toma la forma,

$$\begin{aligned}g(t) \approx & g[0] + tg[0]f_2 - \frac{t^2\left(-g[0]f_2^2 - ng[0]f_2^2 + ng[0]m_2 - nrf_1y[0]\right)}{n}\\ & - \frac{1}{kn^3(-6+f_2)} 3t^3 \left(2kg[0]f_2^4 + 3kng[0]f_2^4 + kn^2g[0]f_2^4 - 2kng[0]f_2^2m_2\right.\\ & -4kn^2g[0]f_2^2m_2 - kn^3g[0]f_2^2m_2 + kn^3g[0]m_2^2 + 2n^3rb_1f_1y[0] + 2kn^3rb_1^2f_1y[0]\\ & +2kn^3rb_2f_1y[0] + 2n^2rf_1f_2y[0] + 2kn^2rb_1f_1f_2y[0] + 2knrf_1f_2^2y[0] + kn^2rf_1f_2^2y[0]\\ & -2n^3rm_1y[0] - 2kn^3rb_1m_1y[0] - 2kn^2rf_2m_1y[0] - kn^3rf_1m_2y[0] - 2kn^3rm_1y'[0]\\ & \left.-kn^3rf_1y''[0]\right),\end{aligned}$$

y cuando la aproximación es de orden cuatro,

$$\begin{aligned}g(t) \approx & g[0] + tg[0]f_2 - \frac{t^2\left(-g[0]f_2^2 - ng[0]f_2^2 + ng[0]m_2 - nrf_1y[0]\right)}{n} - \frac{1}{2kn^2}t^3\left(-2kg[0]f_2^3\right.\\ & -3kng[0]f_2^3 - kn^2g[0]f_2^3 + 2kng[0]f_2m_2 + 3kn^2g[0]f_2m_2 - 2n^2rf_1y[0]\\ & \left.-2kn^2rb_1f_1y[0] - 2knrf_1f_2y[0] - kn^2rf_1f_2y[0] + 2kn^2rm_1y[0]\right)\\ & + t^4\left(-\frac{g[0]f_2\left(-24knf_2^4 + 24kn^2f_2^2m_2\right)}{24kn^4 - kn^4f_2}\right.\\ & + \frac{\left(-12kn^2f_2^3 + 12kn^3f_2m_2\right)\left(-g[0]f_2^2 - ng[0]f_2^2 + ng[0]m_2 - nrf_1y[0]\right)}{n\left(24kn^4 - kn^4f_2\right)}\\ & + \left(\left(-4kn^3f_2^2 + 4kn^4m_2\right)\left(-2kg[0]f_2^3 - 3kng[0]f_2^3 - kn^2g[0]f_2^3 + 2kng[0]f_2m_2\right.\right.\\ & +3kn^2g[0]f_2m_2 - 2n^2rf_1y[0] - 2kn^2rb_1f_1y[0] - 2knrf_1f_2y[0] - kn^2rf_1f_2y[0]\\ & \left.\left.+2kn^2rm_1y[0]\right)\right)/\left(2kn^2\left(24kn^4 - kn^4f_2\right)\right) - \frac{1}{24kn^4 - kn^4f_2}\left(-24kg[0]f_2^5\right.\\ & +24kng[0]f_2^3m_2 - 24n^4rb_1^2f_1y[0] - 24kn^4rb_1^3f_1y[0] - 24n^4rb_2f_1y[0]\\ & -48kn^4rb_1b_2f_1y[0] - 24n^3rb_1f_1f_2y[0] - 24kn^3rb_1^2f_1f_2y[0] - 24kn^3rb_2f_1f_2y[0]\\ & -24n^2rf_1f_2^2y[0] - 24kn^2rb_1f_1f_2^2y[0] - 24knrf_1f_2^3y[0] + 24n^4rb_1m_1y[0]\\ & +24kn^4rb_1^2m_1y[0] + 24kn^4rb_2m_1y[0] + 24n^3rf_2m_1y[0] + 24kn^3rb_1f_2m_1y[0]\\ & +24kn^2rf_2^2m_1y[0] + 24n^4rm_1y'[0] + 24kn^4rb_1m_1y'[0] + 24kn^3rf_2m_1y'[0]\\ & +12n^4rf_1y''[0] + 12kn^4rb_1f_1y''[0] + 12kn^3rf_1f_2y''[0] + 12kn^4rm_1y''[0]\\ & \left.\left.+8kn^4rf_1y^{(3)}[0]\right)\right).\end{aligned}$$

Bibliografía

[1] Aoki, M.(1973, Enero). "Sufficient Conditions for Optimal Stabilization Policies", *The Review of Economic Studies*, 40(1), 131-138.

[2] Aoki, M.(1974, Enero). "Local Controllability of a Decentralized Economic System", *The Review of Economic Studies*, 41(1), 51-63.

[3] Aoki, M.(1975, Abril). "On a Generalization of Tinbergen's Condition in the Theory of Policy to Dynamic Models", *The Review of Economic Studies*, 42(2), 293-296.

[4] Aoki, M. y M. Canzoneri(1979, Octubre). "Sufficient Conditions for Control of Target Variables and Assignment of Instruments in Dynamic Macroeconomic Models", *International Economic Review*, 20(3), 605-616.

[5] Athans, M. y P. L. Falb(2006). *Optimal Control, An Introduction to the Theory an its Applications*, DoverPublications, Inc., New York.

[6] Buitter, W.H. y M. Gersovitz(1981). "Issues in Controllability and the Theory of Economic Policy", *J. of Public Economics*, 15, 33-43.

[7] Chow, G. C. (1970, Agosto). "Optimal Stochastic Control of Linear Economic Systems", *Journal of Money, Credit and Banking*, 2(3), 291-302.

[8] Chow, G. C. (1972, Febrero). "Optimal Control of Linear Econometric Systems with Finite Time Horizon", *International Economic Review*, 13(1), 16-25.

[9] Chow, G. C. (1973, Octubre). "Effect of Uncertainty on Optimal Control Policies', *International Economic Review*, 14(3), 632-645.

[10] Holbrook R. S. y E. P. Howrey(1978, Octubre). "A Comparison of the Chow and Theil Optimization Procedures in the Presence of Parameter Uncertainty", *International Economic Review*, 19(3), 749-759.

[11] Engwerda, J. (2005). *LQ Dynamic Optimization and Differential Games*, West Sussex: John Wiley & Sons.

[12] Hallett, A. H., N. Acocella y G. Di Bartolomeo(2009, Agosto). "Policy games, policy neutrality and Tinbergen controllability under rational expectations", *Journal of Macroeconomics*, 27(82), 1-60.

[13] Mouroutsos, S. G. y P. D. Sparis(1985). "Taylor series approach to system identification, analysis and optimal control", *J. The Franklin Institute*, 319(4), 359-371.

[14] Norman, A. L. (1974, Febrero). "On the Relationship between Linear Feedback Control and First Period Certainty Equivalence", *International Economic Review*, 15(1), 209-215.

[15] Pecha, A. (2008). *Optimización Estática y Dinámica en Economía*, Universidad Nacional de Colombia.

[16] Pindyck, R. S. (1973, Mayo). "Optimal Policies for Economic Stabilization", *Econometrica*, 41(3), 529-560.

[17] Preston, A. J. (1974, Enero). "A Dynamic Generalization of Tinbergen's Theory of Policys", *The Review of Economic Studies*, 41(1), 65-74.

[18] Simon, H. A.(1956, Abril). "Dynamic Programming Under Uncertainty with a Quadratic Criterion Function", *Econometrica*, 24(1), pp. 74-81.

[19] Theil, H.(1957, Abril). "A Note on Certainty Equivalence in Dynamic Planning", *Econometrica*, 25(2), 346-349.

[20] Timbergen, J.(1961). *Política económica*, Fondo de Cultura Económica, México.

[21] Turnovsky, S. J.(1973, Enero). "Optimal Stabilization Policies for Deterministic and Stochastic Linear Economic Systems", *The Review of Economic Studies*, 40(1), 79-95.

[22] Turnovsky, S. J.(1974, Marzo). "The Stability Properties of Optimal Economic Policies", *The American Economic Review*, 64(1), 136-148.

[23] Wohltmann, H-W.(1984, Abril). "A Note on Aoki's Conditions for Path Controllability of Continuous-Time Dynamic Economic Systems", *The Review of Economic Studies*, 51(2), 343-349.

[24] Wonham, W. M.(1969) "Random Differential Equations in Control Theory", in A. T. Bharucha-Reid, Ed., *Probabilistic Methods in Applied Mathematics*, Vol. II,

[25] Yang, L-F y C-K Chen(1987). "Analysis of bilinear systems via Taylor series", *Int. J. Systems SCI*, 18(4), 641-648.

[26] Yeung, D. W. K. y L. A. Petrosyan(2006). *Cooperative Stochastic Differential Games*, Springer, USA.