

Evaluación del Desempeño en porcentaje												
Número de la base	de los Métodos de Reducción de Dimensionalidad Ponderada											
	PCA		PPCA		WPCA		WRDA		LPCA1		LPCA2	
	Acier	Error	Acier	Error	Acier	Error	Acier	Error	Acier	Error	Acier	Error
501	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
502	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0,9763	0,0001
503	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
504	0,9906	0,0001	0,9906	0,0001	0,9906	0,0001	0,7887	0,0003	0,9953	0,0001	1	0,0001
505	0,9863	0,0001	0,9863	0,0001	0,9863	0,0001	0,9909	0,0001	1	0,0001	0,9909	0,0001
506	0,9573	0,0007	0,9528	0,0007	0,9888	0,0006	0,9978	0,0006	0,9978	0,0006	1	0,0006
507	0,9188	0,0007	0,9209	0,0007	0,9509	0,0006	0,9509	0,0006	0,9509	0,0006	1	0,0006
508	0,4137	0,0025	0,6131	0,0020	0,8782	0,0015	1	0,0012	0,9264	0,0014	0,9572	0,0013
509	0,4517	0,0025	0,6578	0,0020	0,8817	0,0015	1	0,0012	0,9059	0,0014	0,9466	0,0013
511	0,9694	0,0009	0,9724	0,0009	0,9561	0,0009	0,9384	0,0010	1	0,0008	0,9841	0,0008
512	0,9806	0,0009	0,9806	0,0009	0,9943	0,0008	0,9669	0,0009	1	0,0008	1	0,0008
513	0,6064	0,0022	0,6064	0,0022	0,9130	0,0010	1	0,0008	0,9040	0,0011	0,9040	0,0011
514	0,3314	0,0012	0,3314	0,0012	0,5621	0,0006	0,5680	0,0006	1	0	0,5030	0,0007
515	0,3592	0,0012	0,3592	0,0012	0,6293	0,0007	0,6925	0,0005	1	0,0001	0,5603	0,0008
516	0,8447	0,0020	0,8447	0,0020	0,9359	0,0012	0,8746	0,0017	1	0,0007	0,9359	0,0012
517	0,8854	0,0006	0,8750	0,0006	0,9792	0,0005	1	0,0005	0,9896	0,0005	0,9583	0,0005
518	0,8804	0,0006	0,8804	0,0006	0,9457	0,0005	0,8913	0,0005	0,9783	0,0005	1	0,0005
519	0,9090	0,0006	0,9453	0,0005	1	0,0002	0,9453	0,0005	0,9629	0,0004	0,9453	0,0005
530	0,9036	0,0001	0,9036	0,0001	0,9277	0,0001	0,3855	0,0005	1	0	0,9880	0
531	0,9014	0,0001	0,9014	0,0001	0,9577	0	0,9718	0	1	0	1	0
542	0,5543	0,0004	0,5870	0,0003	0,6957	0,0002	0,8370	0,0001	1	0	0,8913	0,0001
543	0,5324	0,0011	0,5509	0,0010	0,6219	0,0009	0,8596	0,0004	1	0,0001	0,8719	0,0003
544	0,4545	0,0012	0,5955	0,0009	0,7939	0,0005	0,8227	0,0004	1	0,0001	0,8121	0,0005
545	0,5442	0,0015	0,4188	0,0019	0,7653	0,0007	0,8923	0,0004	1	0,0001	0,9016	0,0003
546	0,6946	0,0012	0,6181	0,0015	0,7663	0,0009	0,9100	0,0003	1	0	0,9727	0,0001
547	0,4946	0,0010	0,5217	0,0010	0,7283	0,0007	0,9076	0,0004	1	0,0003	0,9076	0,0005
548	0,4293	0,0023	0,4657	0,0021	0,7836	0,0007	0,8744	0,0004	1	0	0,7836	0,0007
549	0,2743	0,0029	0,5198	0,0017	0,6176	0,0012	0,8816	0,0004	1	0	0,7974	0,0006
550	0,8013	0,0007	0,8013	0,0007	0,8565	0,0005	0,7687	0,0009	1	0	0,8875	0,0004
551	0,4061	0,0045	0,2500	0,0061	0,8794	0,0007	0,7433	0,0016	1	0	0,9778	0,0001
552	0,8889	0	0,7778	0	0,7778	0	0,8889	0	1	0	1	0
553	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
554	0,5690	0,0041	0,5494	0,0042	1	0,0019	1	0,0019	0,8505	0,0026	0,8298	0,0027
555	0,5584	0,0041	0,5351	0,0042	1	0,0019	1	0,0019	0,8543	0,0026	0,8285	0,0027
556	0,7486	0,0011	0,7486	0,0012	0,8461	0,0009	0,8461	0,0009	1	0,0006	0,7550	0,0012
557	0,7528	0,0011	0,7528	0,0011	0,7931	0,0011	0,8474	0,0009	1	0,0006	0,7537	0,0012
576	1	0,0001	1	0,0001	1	0,0001	1	0,0001	1	0,0001	1	0,0001
577	1	0,0002	1	0,0002	1	0,0002	1	0,0002	1	0,0002	1	0,0002
578	1	0,0001	1	0,0001	1	0,0001	1	0,0001	1	0,0001	1	0,0001
579	0,9127	0,0002	0,9444	0,0001	0,6587	0,0004	1	0,0001	0,9762	0,0001	0,9603	0,0001
580	0,7120	0,0021	0,7120	0,0021	0,8492	0,0014	0,9486	0,0009	1	0,0007	0,8492	0,0014
581	0,2101	0,0009	0,4710	0,0005	0,7681	0,0003	0,9928	0,0001	1	0,0001	0,9130	0,0002
582	0,2855	0,0039	0,2855	0,0039	0,9794	0,0019	1	0,0018	0,9433	0,0020	0,6806	0,0024
583	0,2912	0,0036	0,2912	0,0036	1	0,0018	1	0,0018	0,9292	0,0019	0,7062	0,0022
584	0,4061	0,0045	0,2500	0,0061	0,8794	0,0007	0,7433	0,0016	1	0	0,9778	0,0001
585	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0,9227	0,0015
587	0,8859	0,0015	0,8859	0,0015	0,9639	0,0009	1	0,0006	1	0,0006	1	0,0006
588	0,8516	0,0010	0,8516	0,0010	0,9499	0,0008	0,9740	0,0008	0,9870	0,0008	1	0,0007
589	0,8333	0,0011	0,8333	0,0011	0,8973	0,0010	0,9954	0,0009	0,9795	0,0009	1	0,0008

590	0,6207	0,0016	0,6207	0,0016	0,5259	0,0017	1	0,0012	1	0,0012	0,9397	0,0013
600	0,9818	0,0001	0,9818	0,0001	0,9545	0,0001	0,9636	0,0001	0,9909	0,0001	1	0,0001
601	0,4329	0,0038	0,4329	0,0038	0,8350	0,0012	0,8350	0,0012	1	0,0003	0,8350	0,0012
603	0,7975	0,0011	0,7975	0,0011	1	0	0,9809	0,0001	1	0	1	0
604	0,6732	0,0021	0,6732	0,0021	0,8700	0,0009	0,8700	0,0009	1	0,0002	0,7453	0,0016
605	0,7081	0,0024	0,7081	0,0024	0,9089	0,0013	1	0,0009	1	0,0009	1	0,0009
606	0,7937	0,0015	0,7937	0,0015	0,8357	0,0013	0,9152	0,0009	1	0,0004	0,9998	0,0004
607	0,9023	0,0010	0,9023	0,0010	0,9761	0,0007	0,8711	0,0012	0,9748	0,0007	1	0,0005
608	0,9140	0,0005	0,9140	0,0005	0,9572	0,0003	1	0,0001	1	0,0001	0,9572	0,0003
609	0,6753	0,0029	0,6753	0,0029	0,8552	0,0020	1	0,0013	0,9677	0,0014	0,7992	0,0022
610	0,7410	0,0014	0,7067	0,0016	0,8657	0,0008	0,2047	0,0056	1	0	0,9205	0,0004
611	0,5961	0,0034	0,5961	0,0034	0,7804	0,0023	1	0,0013	1	0,0013	0,9402	0,0016
612	0,5043	0,0010	0,5043	0,0010	0,4915	0,0011	1	0,0003	0,6496	0,0007	0,5940	0,0008
613	0,7810	0,0008	0,7810	0,0008	0,7299	0,0009	1	0,0007	0,8905	0,0008	0,8321	0,0008
614	0,2283	0,0012	0,2283	0,0012	0,4658	0,0009	1	0,0003	0,7626	0,0005	0,5708	0,0007
615	0,8121	0,0008	0,8121	0,0008	0,8456	0,0008	1	0,0006	0,8993	0,0007	0,8658	0,0008
616	0,9347	0,0012	0,9654	0,0011	1	0,0010	1	0,0010	0,9984	0,0010	0,9654	0,0011
617	0,9258	0,0012	0,9056	0,0013	0,9985	0,0010	0,8886	0,0013	1	0,0010	0,9644	0,0011
618	0,9795	0,0007	0,9795	0,0007	0,9145	0,0010	0,9536	0,0008	0,9795	0,0007	1	0,0005
619	0,9544	0,0007	0,9544	0,0007	0,9990	0,0004	0,8417	0,0012	0,9780	0,0005	1	0,0004
620	0,5172	0,0004	0,5172	0,0004	0,5862	0,0004	1	0,0001	1	0,0002	0,9310	0,0002
Media	0,7265	0,0013	0,7341	0,0013	0,8678	0,0008	0,9146	0,0008	0,9746	0,0005	0,9070	0,0007
Desviación	0,2393	0,0012	0,2304	0,0013	0,1427	0,0006	0,1402	0,0008	0,0589	0,0006	0,1203	0,0007
Mediana	0,7956	0,0010	0,7874	0,0010	0,9109	0,0007	0,9729	0,0006	1	0,0003	0,9572	0,0005
Mínimo	0,2101	0	0,2283	0	0,4658	0	0,2047	0	0,6469	0	0,5030	0
Número de Aciertos (1)	8		8		14		29		44		22	
Número de Errores (0)		6		6		8		7		18		7

## B.2. Análisis estadístico de características

Se realizaron pruebas de normalidad y dependencia de los datos, su estudio incluye pruebas de hipótesis, Para cada una de las variables trabajando las por separado y usando todas las variables se realizó tratamientos a través del análisis multivariante, para mostrar el grado de dependencia entre las características geométricas y los momentos estadísticos, Se pudo observar la anormalidad de las nubes de datos lo cual se puede observar en las siguientes figuras.

Algunas de las descripciones se pueden apreciar en la siguiente Figura B.1 en los histogramas para 2, 4 y 10 característica, donde se aprecia la tendencias asimétricas de muchas de las variables.

En las siguientes figuras B.3-B.5 se relaciona el grado de correlación para 4 variables en la Figura B.3, 10 variables en la Figura B.4 y 20 variables en la Figu-

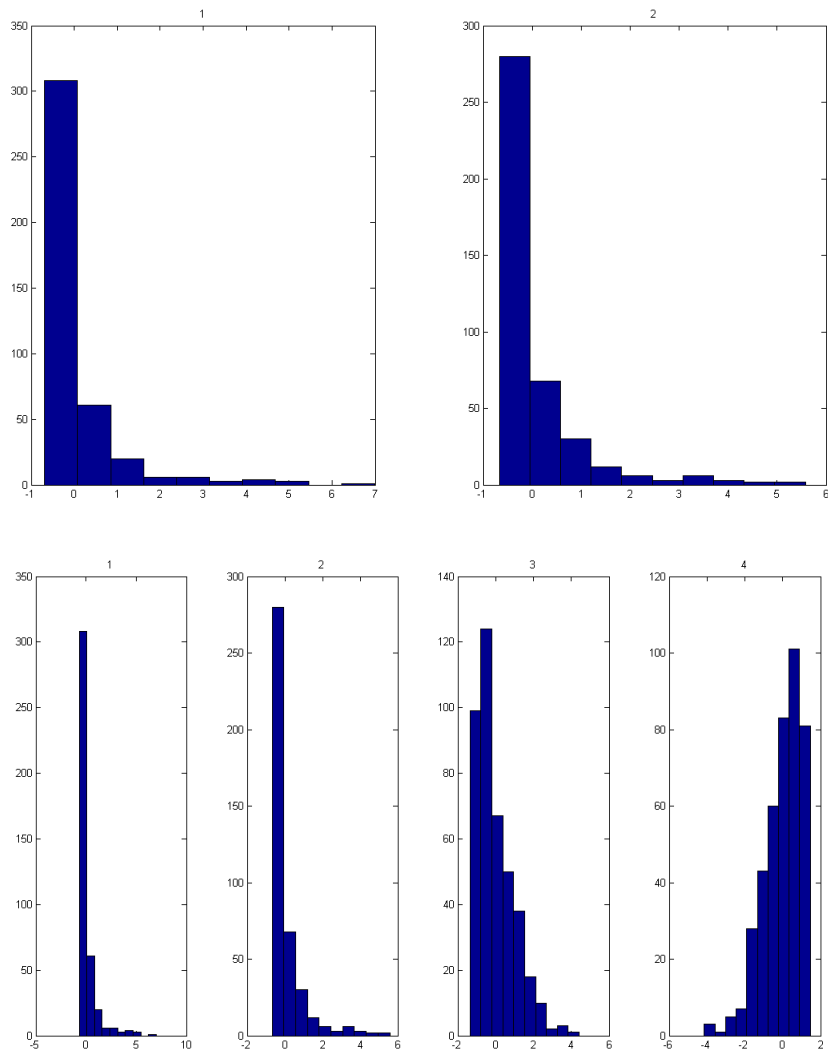


Figura B.1: Histogramas para 2 y 4 características

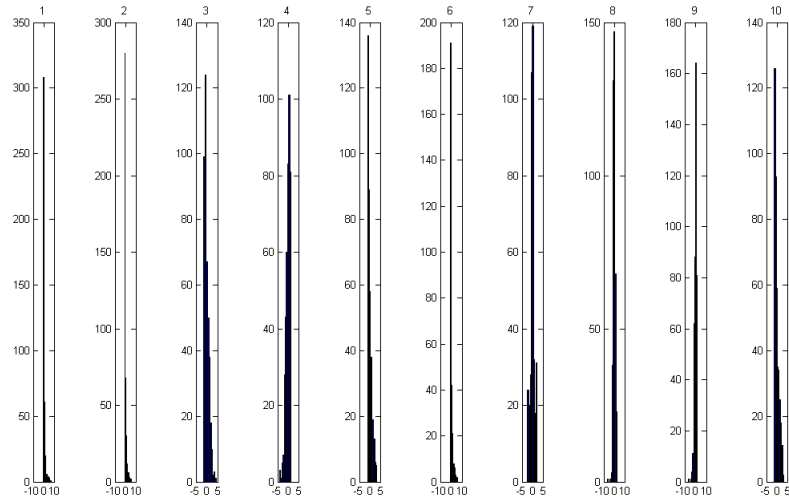


Figura B.2: Histogramas para las 10 primeras características

ra B.5. Se percibe el alto grado de dependencia para la primeras variables, estas corresponden a las características geométricas.

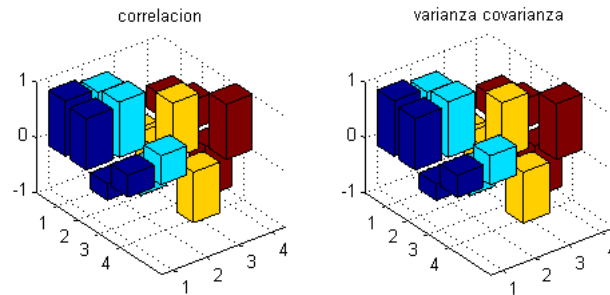


Figura B.3: Histogramas para 2 y 4 características

En las siguientes figuras B.6 se aprecia el grado de dependencia para 2, 4 Figura B.6, 10 Figura B.7 y 20 variables Figura B.8, observando que muchas características son dependientes por pares.

El la siguientes figuras se muestran la proyección de las características 2 y 4

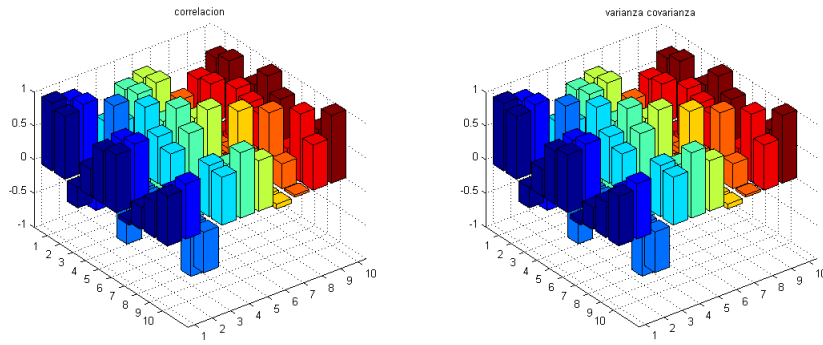


Figura B.4: Correlación para las 10 primeras características

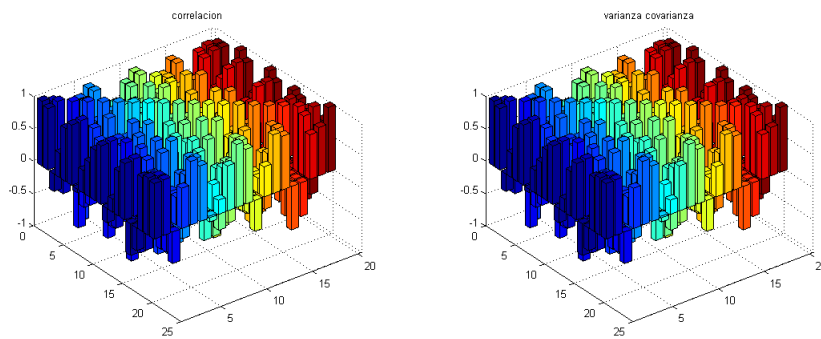


Figura B.5: Correlación para 20 características

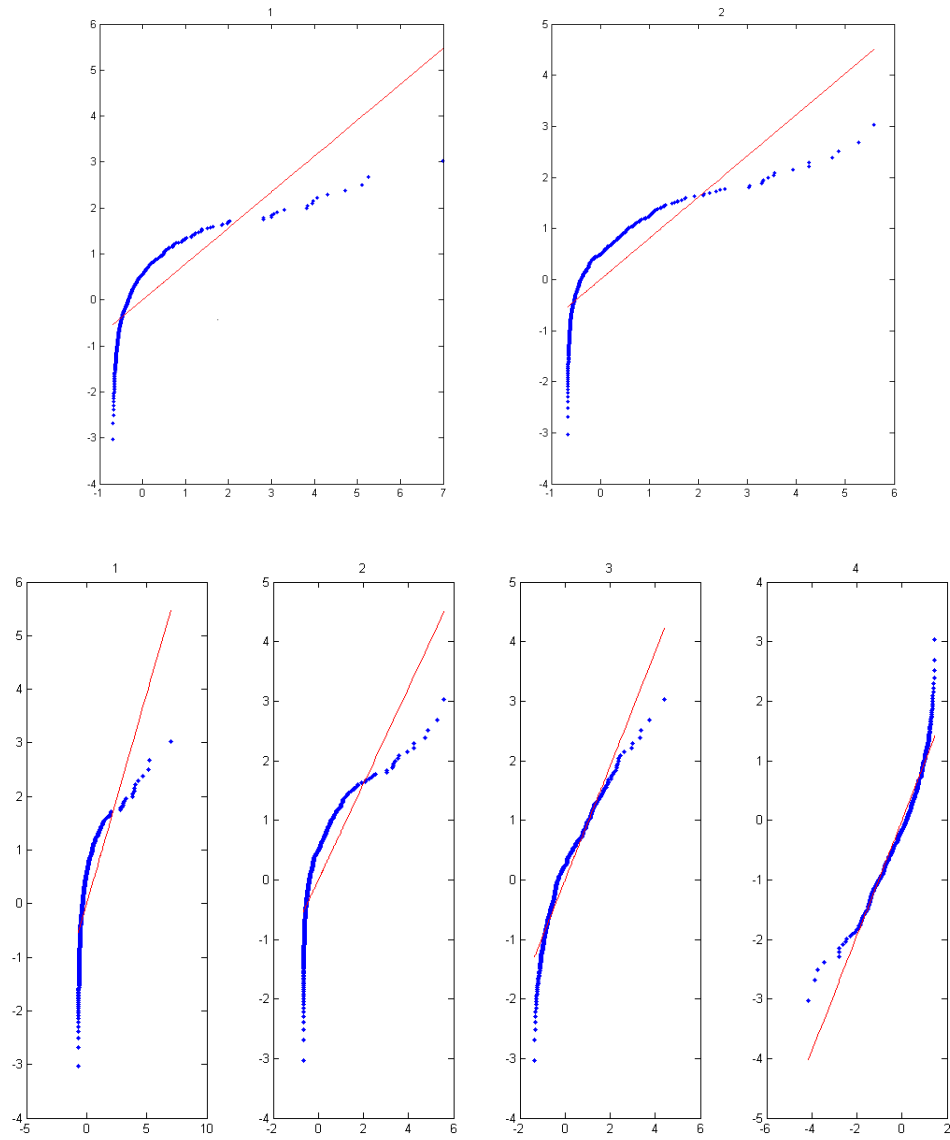


Figura B.6: Dependencia para 2 y 4 características

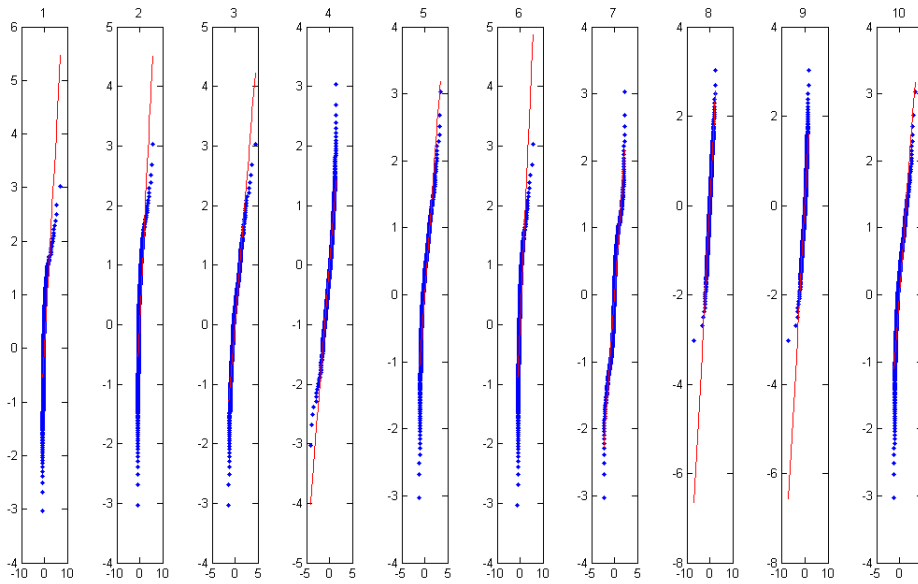


Figura B.7: Dependencia para las 10 primeras características

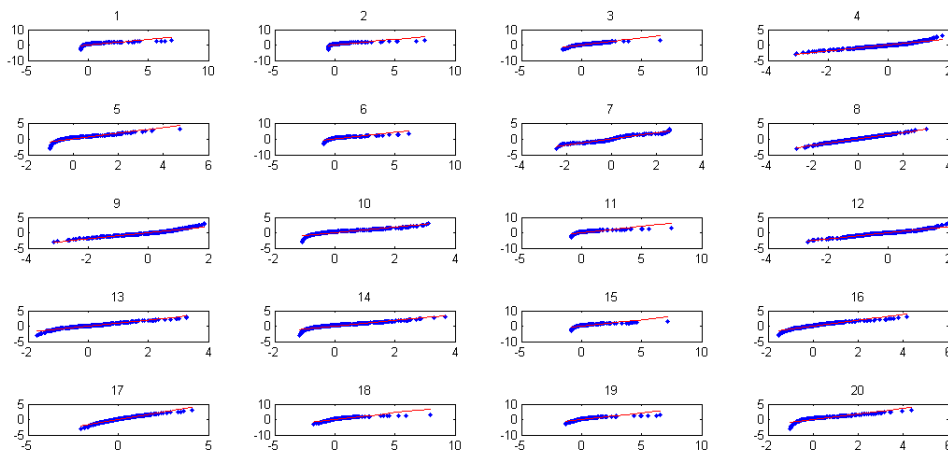


Figura B.8: Dependencia para 20 características

Figura B.9 sobre el plano principal y se observa la no esfericidad de cada nube al graficar cada par de características para 10 a 97 las características no se aprecia bien pero separando cada par se logra apreciar la no esfericidad de muchas características.

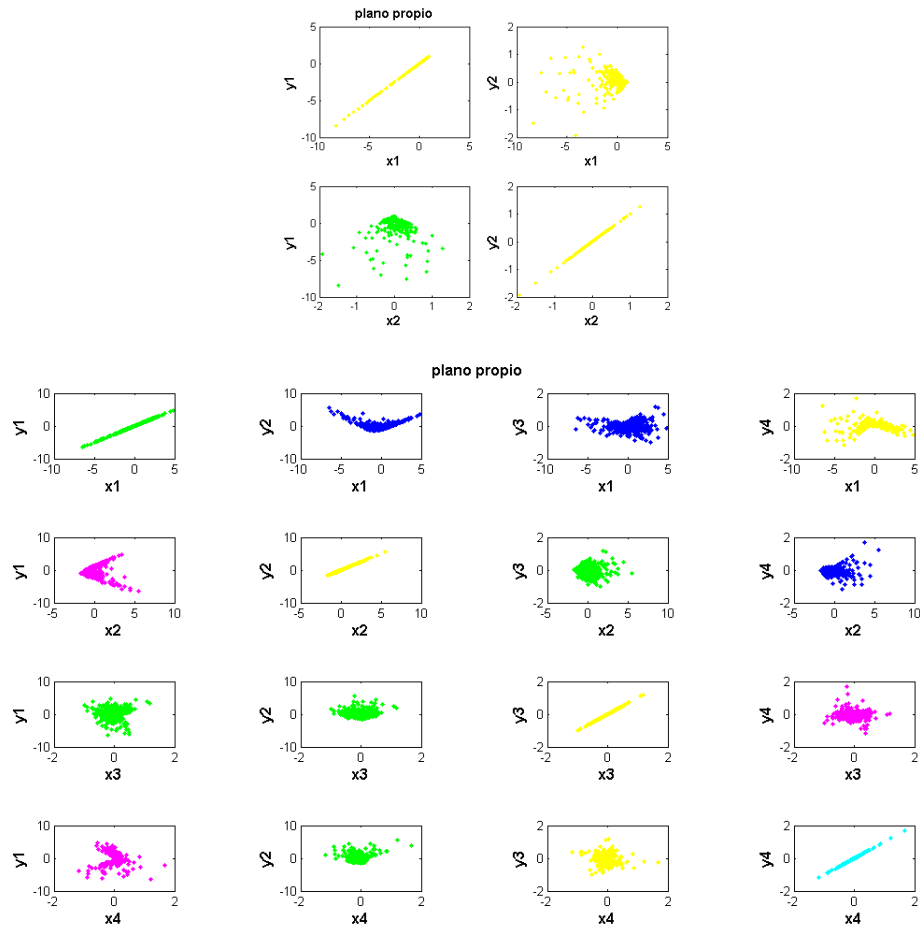


Figura B.9: Planos principales para 2 y 4 características

Además, se realiza un estudio detallado manova para determinar comparaciones entre varianzas, medias de las imágenes de personas con algún tipo de enfermedad vascular y personas sin este tipo de enfermedades; el cual confirma que el promedio y varianza de las clase normal y anormal no son factores diferentes, indicando así el nivel de solapamiento de las clases.



# Apéndice C

## Características capilares

En cualquier ocasión de esta vida, lo importante no es lo que ganamos, sino lo que hacemos.

Thomas Carlyle (1795-1881).

A continuación se describen las características utilizadas en este trabajo. Se divide en varios grupos de características. Las características no adimensionales se multiplican por el correspondiente factor del píxel vs milímetros.

Variable	Nombre de Variable	Descripción
$X_1$	Perímetro	Suma de píxeles en el borde zona capilar
$X_2$	Área	Suma de píxeles en el interior zona capilar
$X_3$	Perímetro / Área	
$X_4$	Complemento (Perímetro / Área)	
$X_5$	Altura capilar	Usando la dispersión de los píxeles

$X_6$	Ancho Capilar	Usando la dispersión de los píxeles
$X_7$	Orientación	Angulo formado entre el autovector principal principal y la vertical (0,1)
$X_8$	Índice fractal Perímetro	descrito en el capítulo de selección de características
$X_9$	Índice fractal área	descrito en el capítulo de selección de características
$X_{10}$	Alto capilar	usando varimax
$X_{11}$	Ancho capilar	usando varimax
$X_{12}$	$X_9 / X_{10}$	
$X_{13}$	$X_{10} / X_9$	
$X_{14}$	Abscisa centro de gravedad	
$X_{15}$	Ordenada centro de gravedad	
$X_{16}$	Curvatura promedio perímetro	
$X_{17}$	Curvatura promedio área	
$X_{18}$	Suma de curvaturas en el borde	
$X_{19}$	Suma de curvaturas en el interior	
$X_{20}$	Alto capilar usando PCA	
$X_{21}$	Ancho capilar usando PCA	
$X_{22}$	Abscisa	vector propio mas pesado
$X_{23}$	Ordenada	vector propio mas pesado
$X_{24}$	Índice tortuosidad de la intensidad	
$X_{25} - X_{69}$	Momentos Estadísticos centralizados $Hu \varphi_{pq}$	$\mu_{pq} = \sum_{x=0}^M \sum_{y=0}^N (x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q f(x, y)$ con $p, q = 1, \dots$
$X_{70}$	Promedio código de cadena	
$X_{71}$	Desviación estándar del código de cadena	
$X_{72}$	Entropía de la intensidad de gris	
$X_{73}$	Intensidad promedio	
$X_{74}$	Área de elipse que acota la región	menos el área real
$X_{75}$	Perímetro ideal del rectángulo	que acota la región capilar
$X_{76}$	Perímetro ideal de la elipse	que acota la región capilar
$X_{77}$	Perímetro ideal circular	que acota la región capilar
$X_{78}$	Área del rectángulo usando PCA	que acota la región menos el área real
$X_{79}$	Área del rectángulo que acota	usando varimax la región menos el área real
$X_{80}$	Perímetro de la elipse que acota	usando varimax la región menos el Perímetro real
$X_{81}$	Perímetro de la circunferencia que acota	usando varimax la región menos el Perímetro real
$X_{82}$	Correlación entre el capilar	y un capilar normal fijo imagen binaria
$X_{83}$	Área de intersección entre el capilar	y un capilar normal fijo imagen binaria
$X_{84}$	Correlación entre el capilar	y un capilar normal fijo imagen a color
$X_{85}$	Área de intersección entre el capilar	y un capilar normal fijo imagen a color

$X_{86}$	abscisa del vector que une el centro de gravedad	con la altura mínima
$X_{87}$	ordenada del vector que une el centro de gravedad	con la altura mínima
$X_{88}$	tercera coordenada del vector que une el centro de gravedad	con la altura mínima
$X_{89}$	promedio derivada direccional de cada píxel en el borde en la dirección del vector,	que une el centro de gravedad con la altura mínima
$X_{90}$	promedio curvatura direccional de cada píxel en la dirección del vector,	que une el centro de gravedad con la altura mínima en x
$X_{91}$	promedio curvatura direccional de cada píxel en la dirección del vector,	que une el centro de gravedad con la altura mínima en y
$X_{92}$	promedio curvatura direccional de cada píxel en la dirección del vector,	que une el centro de gravedad con la altura mínima en z
$X_{93}$	promedio tortuosidad direccional de cada píxel en la dirección del vector,	que une el centro de gravedad con la altura mínima en x
$X_{94}$	promedio tortuosidad direccional de cada píxel en la dirección del vector,	que une el centro de gravedad con la altura mínima en y
$X_{95}$	promedio tortuosidad direccional de cada píxel en la dirección del vector,	que une el centro de gravedad con la altura mínima en z
$X_{96}$	entropía de toda la imagen	
$X_{97}$	densidad capilar	

Los momentos estadísticos fueron usados con las ecuaciones descritas en [110].

# Apéndice D

## Propiedades invariantes de la dimensión fractal

La teoría es asesinada tarde o temprano por la experiencia.

Albert Einstein (1879-1955).

### D.1. Invarianza del índice fractal a escalamientos

A continuación se presenta las demostraciones de la invarianza de la dimensión fractal, herramienta útil para caracterizar la tortuosidad capilar. Las siguientes propiedades demuestran la invarianza de la DF frente a escalamiento, rotaciones y traslaciones.

**Proposición**

La dimensión fractal es invariante al escalamiento.

**Demostración:** Sea  $A$  un conjunto contenido en un rectángulo  $R$  de dimensiones  $M \times N$  y sea  $B$  un escalamiento de  $A$  sobre un rectángulo  $r$  de dimensiones  $m \times n$  como se muestra en la Figura D.1. Si  $L$  y  $l$  son magnitudes de  $A$  y  $B$  respectivamente, se pueden relacionar mediante el siguiente factor de escalamiento  $l = \frac{Lq}{P}$  donde  $P = \min(M, N)$  mientras que  $q = \min(m, n)$ .

Se pretende relacionar cubrimientos de  $A$  con los de  $B$ , con el mismo cardinal pero asociados por un factor de escala. Así, por cada radio  $\epsilon > 0$  en el rectángulo  $R$ , existe un radio  $\epsilon_1 > 0$  usando el factor de escala  $l$  en el rectángulo  $r$  tal que si  $B_\epsilon$  es cubrimiento de  $A$  en  $R$ , entonces  $B_{\epsilon_1}$  sea un cubrimiento de  $B$  con  $N_\epsilon = N_{\epsilon_1}$ . Debido a esto, se tiene que cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , entonces  $\epsilon_1 \rightarrow 0$ , luego  $\log(\epsilon), \log(\epsilon_1), \log(N_\epsilon)$  y  $\log(N_{\epsilon_1}) \rightarrow \infty$ . Así obtenemos que:

$$\dim_{f(B)} = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} \left( \frac{\log(N_{\epsilon_1})}{\log(\epsilon_1^{-1})} \right)$$

Sustituyendo  $\epsilon_1 = \frac{\epsilon q}{P}$  se sigue que

$$\dim_{f(B)} = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} \left( \frac{\log(N_\epsilon)}{\log\left(\left(\frac{\epsilon q}{P}\right)^{-1}\right)} \right)$$

Por hipótesis, tenemos que  $N_\epsilon = N_{\epsilon_1}$  y por las propiedades de logaritmos, se tiene que

$$\dim_{f(B)} = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} \left( \frac{\log(N_\epsilon)}{\log\left(\left(\frac{q}{P}\right)^{-1}\right) + \log(\epsilon)^{-1}} \right)$$

Por determinar una indeterminación de la forma  $\frac{\infty}{\infty}$  se aplica la regla de L'Hôpital

$$\dim_{f(B)} = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} \left( \frac{\frac{1}{N_\epsilon} \frac{\partial N_\epsilon}{\partial \epsilon}}{-\epsilon} \right)$$

Pero si  $\epsilon \rightarrow 0$ , también ocurre que  $\epsilon_1 \rightarrow 0$  y viceversa, por lo tanto

$$\dim_{f(B)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\log(N_\epsilon)}{\log(\epsilon^{-1})} \right) = \dim_{f(A)}$$

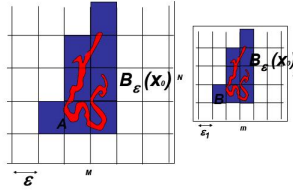


Figura D.1: Imagen original  $A$  e imagen escalada  $B$  con sus respectivos cubrimientos.

## D.2. Invarianza del índice fractal a rotaciones

La invarianza de los capilares a la rotación es importante en nuestro estudio, porque la orientación capilar puede cambiar por efectos del movimiento de la zona de interés o del aumento que se esté considerando en la captura de la una secuencia de imágenes de la misma zona.

### Proposición

La dimensión fractal es invariante a la rotación.

**Demostración:** Sean  $A, B \subset \mathbb{R}^2$ . Suponga que comparten el mismo origen, tal que  $B$  es el resultado de rotar  $\theta$  grados la región  $A$ , suponga además que  $B_{\epsilon_1}^{d_A}$  es un cubrimiento de  $A$ . Al rotar un cubrimiento de  $A$  se genera un cubrimiento  $B_{\epsilon_1}^{d_B}$  de  $B$ , convirtiéndose las cajas en paralelogramos,  $N_{\epsilon_1}^{d_A} = N_{\epsilon_1}^{d_B}$  ver Figura D.2.

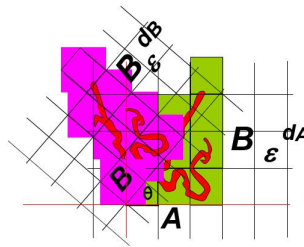


Figura D.2: Imagen original  $A$  e imagen rotada  $B$  con sus respectivos cubrimientos.

Así, la orientación del cubrimiento cambia debido a la rotación (cambian de

cuadrados a rombos). si se prueba la equivalencia entre las cajas , o si se muestra que:

Dado un paralelogramo de lado  $\epsilon_1 > 0$  se puede inscribir en una caja de radio  $\epsilon_2 > 0$  , como se muestra en la Figura D.3, y dada una caja de radio  $\epsilon_3 > 0$  se puede inscribir en un paralelogramo de lado  $\epsilon_1 > 0$  , como se muestra también en la figura se tendrá que los tamaños de los cubrimientos son iguales.

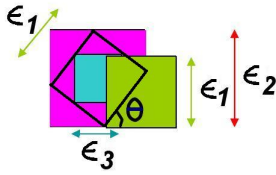


Figura D.3: Relación entre cajas rotadas y cajas normales con los mismos radios.

El uso de la trigonometría garantiza lo anterior de la siguiente manera: Como  $\epsilon_2 = \epsilon_1 d$ , donde  $d = \text{sen}\theta + \text{cos}\theta$ , por otro lado  $\epsilon_3 = \frac{\epsilon_2}{1+\text{sen}2\theta} = \epsilon_1 c$ , donde  $c = \frac{d}{1+\text{sen}2\theta}$ .

Ahora bien, observe que:  $N_{\epsilon_2}^{d_A} \leq N_{\epsilon_1}^{d_B}$ , se sigue de (a) puesto que por cada  $B_{\epsilon_1}^{d_B}$  cubrimiento rotado de  $B$  existe un cubrimiento de  $B_{\epsilon_2}^{d_A}$ . En este último, las cajas son más grandes y cubren más región de  $B$ . Por ello se requieren menos cajas de radio  $\epsilon_2$  para cubrir  $B$ .  $N_{\epsilon_1}^{d_B} \leq N_{\epsilon_3}^{d_A}$ , se sigue de (b) que cada  $B_{\epsilon_1}^{d_B}$  cubrimiento rotado de  $B$  posee un cubrimiento de  $B_{\epsilon_3}^{d_A}$ . En este último las cajas son más pequeñas, luego cubren menos región de  $B$ ; por ello se requieren más cajas pequeñas para cubrir  $B$ .

Por otro lado, se obtiene a partir (a) y las anteriores expresiones:

$$\dim_{f(B)} = \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0} \left( \frac{\log(N_{\epsilon_2}^{d_A})}{\log(\epsilon_2^{-1})} \right)$$

$$\dim_{f(B)} \leq \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} \left( \frac{\log(N_{\epsilon_1}^{d_B})}{\log((\epsilon_1 d)^{-1})} \right)$$

Considerando,  $N_{\epsilon_2}^{d_A} \leq N_{\epsilon_1}^{d_B}$  y  $\epsilon_2 = \epsilon_1 d$ , y por propiedades de logaritmos

$$\dim_{f(B)} \leq \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} \left( \frac{\log(N_{\epsilon_1}^{d_A})}{\log((\epsilon_1)^{-1}) + \log((d)^{-1})} \right)$$