

Figura 3.2: Nubes solapadas

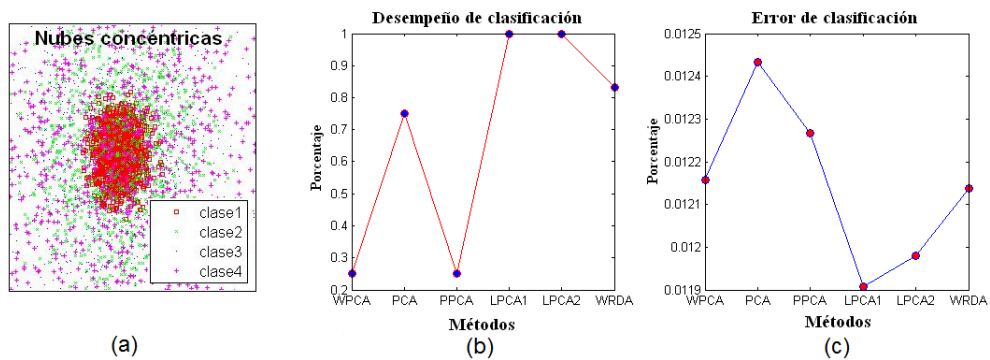


Figura 3.3: Nubes concéntricas

Tabla 3.1: Desempeño de métodos de reducción ponderados

Bases de datos	Métodos de reducción					
	PCA	PPCA	WPCA	WRDA	LPCA1	LPCA2
Nube solapada	0,1	0,12	0,5	0,3	1	0,88
Nube concéntrica	0,75	0,25	0,25	0,83	1	1
Capilares	0,8	0,8	0,93	0,94	1	0,83
Peatones	0,56	0,56	0	0	1	0

3.5. APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS DE REDUCCIÓN PONDERADOS⁶¹

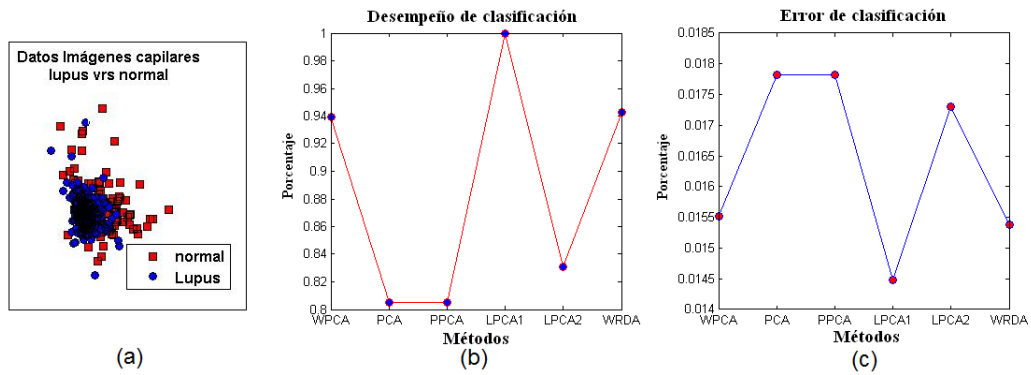


Figura 3.4: Características de imágenes capilares

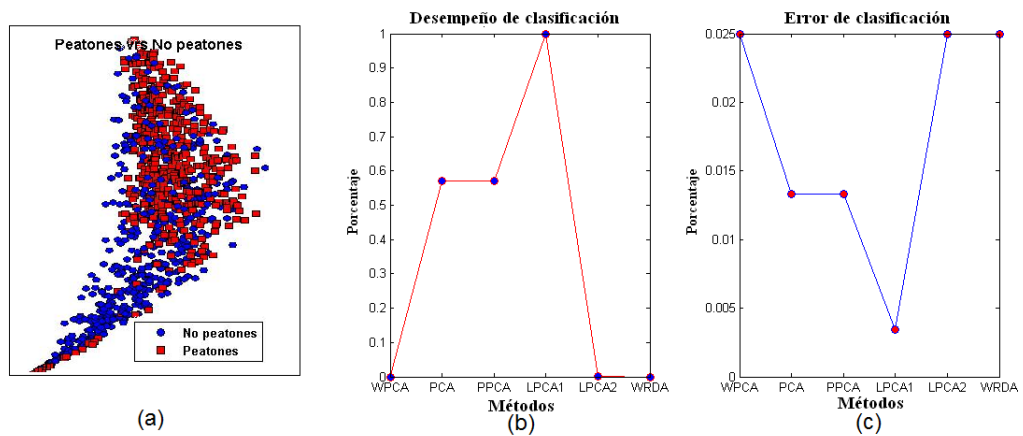


Figura 3.5: Características imágenes de peatones vs no peatones

Otro experimento que se efectúa consiste en tomar 70 bases de datos que se encuentran en [64]. Estas bases son usadas para comparar el desempeño de algoritmos “benchmark”. (En procesos de clasificación; en el apéndice B se encuentra una breve descripción de las bases mencionadas, con ellas se compararon los métodos de reducción.) Se itera cada método de reducción PCA, PPCA, WPCA, WRDA, LPCA1 y LPCA2, tantas veces como el tamaño de la base que se estaba procesando. Para calcular el desempeño de los diferentes métodos, se promediaron los desempeños que se obtuvieron en cada iteración; análogamente se procedió con el error de clasificación. Los valores posteriores a la normalización fueron denominados Aciertos y Errores.

En las Figuras 3.6 y 3.7 se muestran los resultados del desempeño y el error de todos los métodos de reducción aplicados a las 70 bases de datos. Al igual que en las Figuras 3.2 a la 3.5, se observa un mejor desempeño del método LPCA1. Estos y otros resultados se presentan en la Tablas 3.2,3.3. Allí se observa que el método de reducción propuesto LPCA1 se comporta muy bien, puesto que al observar la fila: Número de aciertos (1), las bases de datos procesadas obtuvo el siguiente resultado: 65 % de los casos ocupan el primer lugar, 25 % de los casos ocupan el segundo lugar y el 10 % de los casos restantes ocupó el tercer lugar.

Cuando LPCA1 no ocupó el primer lugar el 29 % de las bases LPCA2 ocupó el primer lugar. Además, se nota que en estos casos las bases correspondientes son solapadas y los errores de clasificación de los diferentes métodos no difieren entre sí más de 1×10^{-4} . En las Tablas 3.2, 3.3 se observan otros descriptores estadísticos como: el promedio, desviación estándar, mediana y mínimo, confirmando que los mejores valores en la columna de aciertos se obtuvieron con el método propuesto LPCA1 y como se esperaba en la columna Error, este método propuesto obtiene los mejores resultados (valor pequeño). En la fila Número de Errores (0) en la Tabla 3.3, se tiene el número de veces que el error fue cero, confirmando que el método propuesto LPCA1 obtiene en muchos más casos los menores errores.

3.6. Conclusiones

1. Se demostró la convergencia de los métodos WPCA y WRDA desde dos puntos de vista; la primera analíticamente usando el teorema de completitud y la segunda algebraicamente, usando descomposición espectral. Fue necesario garantizar teóricamente este resultado, ya que en la literatura, a

Tabla 3.2: Desempeño en términos de porcentajes de aciertos de clasificación de los métodos de reducción ponderados en base benchmark

	Evaluación del Desempeño por aciertos de clasificación					
	Métodos de Reducción de Dimensionalidad Ponderada					
	PCA	PPCA	WPCA	WRDA	LPCA1	LPCA2
Media	0,7265	0,7341	0,8678	0,9146	0,9746	0,9070
Desviación	0,2393	0,2304	0,1427	0,1402	0,0589	0,1203
Mediana	0,7956	0,7874	0,9109	0,9729	1	0,9572
Mínimo	0,2101	0,2283	0,4658	0,2047	0,6469	0,5030
Número de Aciertos (1)	8	8	14	29	44	22

Tabla 3.3: Desempeño en términos de porcentajes de errores de clasificación de los métodos de reducción ponderados en base benchmark

	Evaluación del Desempeño por errores de clasificación					
	Métodos de Reducción de Dimensionalidad Ponderada					
	PCA	PPCA	WPCA	WRDA	LPCA1	LPCA2
Media	0,0013	0,0013	0,0008	0,0008	0,0005	0,0007
Desviación	0,0012	0,0013	0,0006	0,0008	0,0006	0,0007
Mediana	0,0010	0,0010	0,0007	0,0006	0,0003	0,0005
Mínimo	0	0	0	0	0	0
Número de Errores (0)	6	6	8	7	18	7

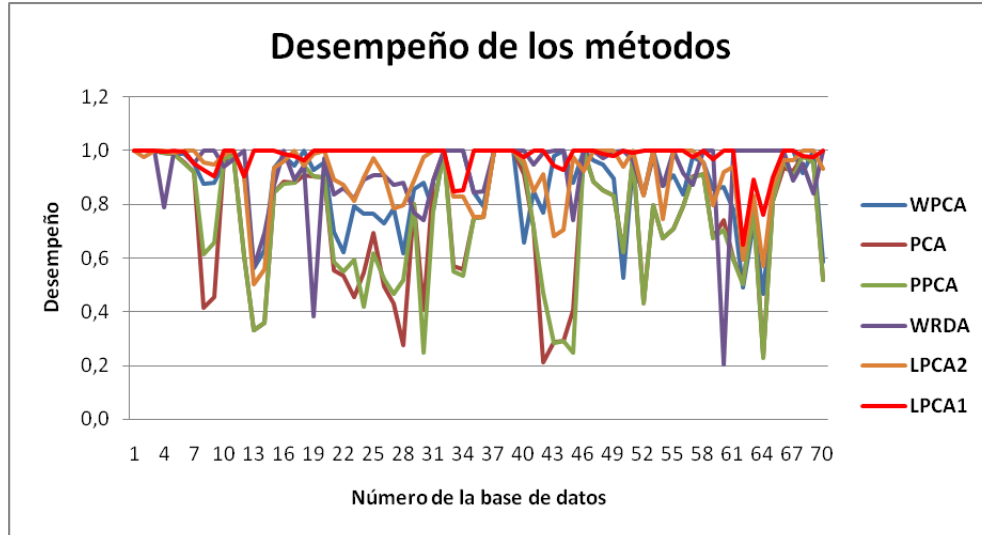


Figura 3.6: Desempeño de los métodos de reducción.

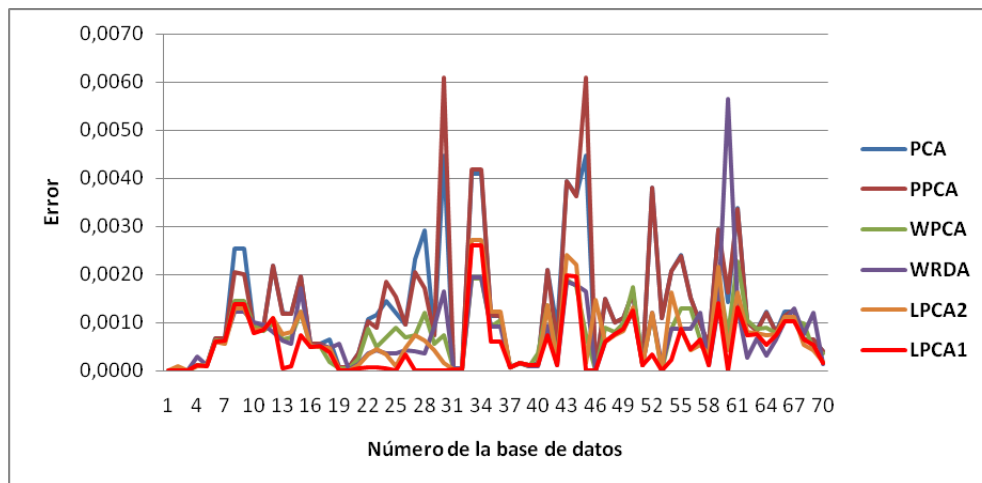


Figura 3.7: Error de los métodos de reducción.

nuestro conocimiento, no existían explícitamente pruebas de sus respectivas convergencia.

2. Los dos métodos de reducción de dimensión ponderados propuestos usando procesos de búsqueda en línea LPCA1 y LPCA2, mostraron tener mejor desempeño al validarlos sobre diferentes tipos de datos, tales como: bases benchmark, datos sintéticos, imágenes de peatones, imágenes de dígitos e imágenes capilares. Además, éstas fueron usadas en el capítulo anterior para hallar los canales de color dentro de los diferentes espacios de color, donde la zona capilar fuera más contrastada.
3. Se generalizó el concepto de reducción de dimensión por búsqueda en líneas a espacios de Banach. Se realizó la prueba de dicha extensión en espacios de Banach. Ver apéndice A.

Capítulo 4

Reducción por bloques 3D

Cualquier problema es una oportunidad disfrazada.
Abraham Lincoln (1809-1865).

4.1. Introducción

Actualmente existen varios métodos de reducción, los cuales dependen de la función objetivo, o de la naturaleza que posean las características tratadas. En esta tesis se proponen varias alternativas de reducción que fueron denominadas Reducción por bloques 3D. El objetivo del capítulo es explicar la reducción cuando los datos de entrada no son vectores sino otros tipos de datos, como por ejemplo, matrices o procesos estocásticos o imágenes multibandas o multifrecuencia.

La estrategia propuesta realiza diferentes tipos de cortes sobre un bloque original para obtener rebanadas. Con las rebanadas o tajadas obtenidas se aplica cual-

quier tipo de reducción clásica o las reducciones propuestas en el capítulo anterior, para obtener una rebanada con menor dimensión, donde se concentre justamente la información relevante de la tajada. Posteriormente, se unen cada una de las nuevas rebanadas para generar un bloque más pequeño ("bloquesito") o de menor dimensión, a las dimensiones del bloque original.

La distribución del presente capítulo es la siguiente: en la segunda sección se presenta una breve revisión del estado del arte en el tema. En la tercera sección se incluye la notación y descripción del problema. En la cuarta sección se proponen los algoritmos de reducción por bloques 3D o PCA3D. En la quinta sección se muestra algunas aplicaciones. En la sexta sección se realiza un análisis de complejidad de los métodos más apropiados. Finalmente en la última sección se presentan las conclusiones.

4.2. Antecedentes

Los métodos de reducción de dimensionalidad son aplicados para proyectar los datos originales a subespacios con menor dimensión a la del espacio original, con el propósito de simplificar los cálculos, mejorar la representación de los datos para una futura clasificación y/o posterior toma de decisiones o ejecución de alguna tarea. Sin embargo, la naturaleza de los datos no tiene que pertenecer a subespacios euclídeos o, explícitamente hablando, los datos no tienen que ser vectores n -dimensionales; pueden ser familias de imágenes, o colecciones de procesos estocásticos en general. Por esta razón, en esta sección se extiende el método de reducción PCA a un método de reducción por bloques que se notará por *PCA3D*, y se muestra que dicho método resulta ser eficiente. Se busca disminuir el tamaño de bloques de datos o información, a bloques con menores dimensiones, sin perder propiedades topológicas, que posean píxeles con intensidades similares y vecinos en colecciones de imágenes del mismo tipo.

En [87] se dividen los métodos de reducción en tres tipos: **Reducción dura**, que pretende disminuir el volumen de datos originales a subespacios de dimensión menor y eliminar los datos repetidos o quizás «*outliers*». **Reducción blanda** que transforma los datos a espacios de dimensión similar o menor a la dimensión del espacio original. Su principal objetivo es interpretar los datos en espacios diferentes, buscando resaltar nuevas características, donde la información relevante está presente y las nuevas variables sean independientes.

Reducción por visualización, que consiste en proyectar los datos a dimensiones no superiores a 4, con el fin de poder apreciar posibles conglomerados de datos o de características. Pero como se puede observar, no se tiene en cuenta el tiempo como una variable adicional; es decir, no es posible ver los datos moviéndose en el tiempo, o los datos que se registran son de naturaleza n -tuplas y no matrices o procesos estocásticos.

En [88], se reducen las dimensiones de la resolución de la bases de imágenes; es decir, consideran cada imagen como si fuera un vector, luego aplican los métodos de reducción analizados, teniendo en cuenta la imagen promedio de la base de imágenes y sobre ella se aplican PCA o LDA por filas y columnas, obteniendo matrices Z y X , que reducen la dimensión de cada imagen en cuanto a filas y columnas. No necesariamente estas matrices Z , X son las mejores proyecciones, pues cada imagen posee diferentes características relevantes en cuanto a filas y columnas.

Una generalización de PCA es un método denominado “Eigenfaces”. Suponga que A es un bloque de tamaño $m \times n \times r$, del cual se extraen r tajadas de tamaño $m \times n$ las cuales se convierten en r vectores de tamaño $m * n$, al concatenar cada fila de la tajada. Posteriormente se aplica PCA sobre la matriz de varianzas y covarianzas C de tamaño $m * n \times m * n$, obteniendo una matriz D de tamaño $m * n \times t$ donde $t < m * n$.

En [89], se generalizan los métodos que se propusieron usando tensores y aplicando sobre ellos PCA. Sin embargo, el proceso de reducción se ve limitado de nuevo a determinar Z y X arreglos multidimensionales estáticos, sin tener en cuenta la variabilidad de los datos en cada fila y columna. En este documento, se determinan Z y X tridimensionales que justifiquen el comportamiento de las características, más relevantes en cada fila y en cada columna, para lograr la reducción del bloque total de imágenes, alcanzando una adecuada reducción, sin que se comprometa la distribución de los píxeles de las imágenes originales como ocurre con el método «eigenfaces».

4.3. Notación y planteamiento del problema

Se caracterizan en esta sección los arreglos 3D dimensionales, que son usados para almacenar información relacionada con varios individuos a los que en diferentes tiempos se les han tomado muchas características a través de sensores. Estos arreglos 3D también pueden verse como bloques de imágenes del mismo tamaño, registrando diferentes situaciones almacenadas una después de la otra.

Lo anterior se formaliza de la siguiente forma: supongamos que se tiene un conjunto de tiempos $t_1, \dots, t_i, \dots, t_s$, un conjunto de características $\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_p$, un conjunto de individuos $\theta_1, \dots, \theta_k, \dots, \theta_m$ y una aplicación $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, que relacionan los conjuntos mencionados anteriormente de la siguiente forma $f(t_i, \xi_j, \theta_k) \in \mathbb{R}$. Para simplificar la representación de f usaremos una matriz 3D dimensional X_f de tamaño $s \times p \times m$ donde $X_f(i, j, k) = f(t_i, \xi_j, \theta_k)$.

Al realizar trazas o cortes o hallar tajadas del bloque X_f se obtiene:

Definición 4 (tajada horizontal.) *Fijando t_i y variando los otros dos parámetros se obtiene una transformación definida por $f_{t_i, \bullet, \bullet} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Asociada a la anterior transformación, se propone una representación matricial que se notará por $X_f(t_i)$, con tamaño $m \times p$. La transformación se define así: $X_f(t_i)(k, j) = f_{t_i}(\xi_j, \theta_k)$ (ver Figura 4.1), la cual se puede interpretar como trazas o tajadas horizontales del eje t , que son paralelas al plano (ξ, θ) .*

Definición 5 (tajada frontal.) *Fijando ξ_j y variando los otros dos parámetros se obtiene una transformación definida por $f_{\bullet, \xi_j, \bullet} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Asociada a la anterior transformación, se tiene una representación matricial que se notará por $X_f(\xi_j)$, con tamaño $m \times s$. La transformación se define así: $X_f(\xi_j)(k, i) = f_{\xi_j}(t_i, \theta_k)$ (ver Figura 4.1) dicha forma se puede interpretar como trazas o tajadas frontales de el eje ξ , que son paralelas al plano (t, θ) .*

Definición 6 (tajada lateral.) *Fijando θ_k y variando los otros dos parámetros se obtiene una transformación definida por $f_{\bullet, \bullet, \theta_k} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Asociada a la anterior transformación, se tiene una representación matricial que se notará por $X_f(\theta_k)$, con tamaño $s \times p$. La transformación se define así: $X_f(\theta_k)(i, j) = f_{\theta_k}(t_i, \xi_j)$ (ver Figura 4.1). La cual se puede interpretar como trazas o tajadas laterales del eje θ , que son paralelas al plano (t, ξ) .*

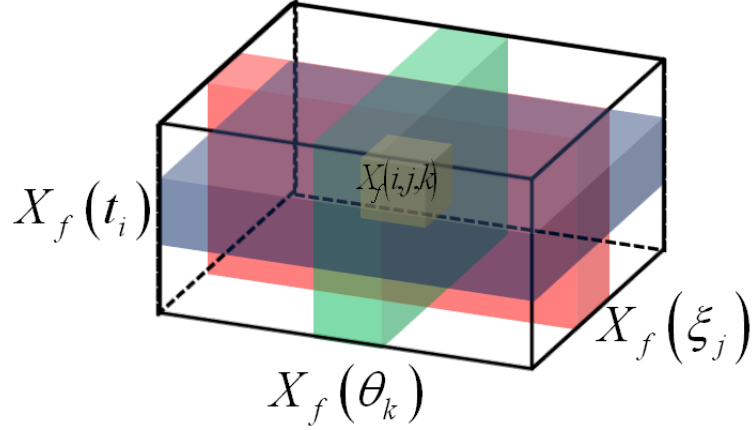


Figura 4.1: Tipos de tajadas

Buscando simplificar la complejidad computacional que posee el método propuesto en [90] para calcular la descomposición espectral, se proponen las siguientes operaciones entre bloques 3D.

Definición 7 (producto horizontal.) Sean A, B bloques 3D. Se definen a continuación un producto entre A y B : $A \odot_t B(i, :, :) = A_{t_i} B_{t_i}$, siempre que el producto matricial exista, para todo i , con $1 \leq i \leq s$, y se definirá producto horizontal.

Definición 8 (producto lateral.) Sean A, B bloques 3D, se define un producto entre A y B : $A \odot_\theta B(:, :, k) = A_{\theta_k} B_{\theta_k}$, siempre que el producto matricial exista, para todo k donde $1 \leq k \leq m$, y se llamará producto lateral.

Se indica un tercer producto que no se usa en esta tesis pero que puede ser útil en otras investigaciones.

Definición 9 (producto frontal.) Sean A, B bloques 3D, se define un producto entre A y B : $A \odot_\xi B(:, j, :) = A_{\xi_j} B_{\xi_j}$, siempre que el producto matricial exista, para todo j donde $1 \leq j \leq p$, y se denominará producto frontal.

Para lograr una adecuada reducción, se propone una definición similar a la propuesta en [50], usando el producto por tajadas previamente descrito. Sea $\langle X, ||| \rangle$ el espacio normado de bloques 3D, donde $|||$ será interpretado como la eficiencia de la reducción. $|||$ está aplicado por ejemplo al error de clasificación o al desempeño de la clasificación.

Definición 10 (reducción horizontal.) *Dados un bloque 3D X_f y un $\epsilon > 0$, se obtiene una reducción horizontal, si existe U un bloque 3D de tamaño $s \times q \times p$ con $q < p$ tal que $\|X_f - X_f \odot_t U\| < \epsilon$.*

Definición 11 (reducción frontal.) *Dados un bloque 3D X_f y un $\epsilon > 0$, se obtiene una reducción frontal, si existe V bloque 3D de tamaño $r \times s \times p$ con $r < s$ tal que $\|X_f - X_f \odot_\xi V\| < \epsilon$.*

Definición 12 (reducción lateral.) *Dados un bloque 3D X_f y un $\epsilon > 0$, se obtiene una reducción lateral si existe W bloque 3D de tamaño $s \times n \times m$ con $n < m$ tal que $\|X_f - W \odot_t X_f\| < \epsilon$.*

El propósito de toda reducción es aproximar la matriz original X_f por una matriz B , con dimensión menor que la dimensión original. De manera general se puede definir la reducción de la siguiente forma.

Definición 13 *Dados un bloque 3D X_f y $\epsilon > 0$, si existe B bloque 3D con tamaño $r \times q \times n$ con $r \leq s, q \leq p$ y $n \leq m$ tal que $\|X_f - B\| < \epsilon$, entonces*

$$|\delta_{X_f}(X_f) - \delta_B(B)| < \epsilon$$

donde δ_Z se interpreta como una medida de (Z)

ϵ se interpreta como el error permitido y B el bloque reducido el cual se puede descomponer usando los productos definidos anteriormente, por ejemplo de la siguiente forma $B = W \odot_t (X_f \odot_t U) \odot_\xi V$.

4.4. Algoritmos PCA3D

De acuerdo con lo anterior, y relacionado con el método de reducción PCA clásico, se pueden integrar los procesos de reducción para generar los métodos de reducción por bloques 3D U, V, W sintetizados en el siguiente algoritmo.

Algoritmo 1 *Considere $\epsilon > 0$.*

A. *Por cada tajada horizontal $X_f(t_i)$ y para $1 \leq i \leq s$.*

1. *Calcule la matriz de varianzas y covarianza $S(t_i) = X_f(t_i)^T X_f(t_i)$.*

2. Con $S(t_i)$, calcule PCA tal que en la matriz de vectores propios T sea asociada a $S(t_i)$ de tamaño $p \times p$. Se toman el mayor número de columnas q con $q < p$ construyendo una matriz T_1 de tamaño $p \times q$ tal que $\|X_f(t_i) - T_1^T X_f(t_i)\| < \frac{\epsilon}{sp}$.
3. Construya U un bloque 3D tal que en la tajada horizontal t_i guarde $U_{t_i} = T_1$.

B. Por cada tajada frontal $X_f(\xi_j)$ para $1 \leq j \leq p$ repita los pasos del literal [A] para construir V un bloque 3D con tajadas frontales.

Teorema 5 Dados X_f un bloques 3D, $\epsilon > 0$, existen U, V bloques 3D obtenidos al aplicar el algoritmo anterior que reducen la dimensión de X_f en filas y columnas de la siguiente manera: $\|X_f - X_f \odot_t U \odot_\xi V\| < \epsilon$.

Prueba 5 De acuerdo con la construcción, las tajadas que se obtienen pueden variar en tamaño de una a otra; por ello se consideran las dimensiones de la tajada con menor tamaño s , así cada una de las tajadas al cortarse con esta dimensión sigue cumpliendo la desigualdad $\frac{\epsilon}{sp}$.

El Algoritmo se puede generalizar de tal forma que al cambiar el método de reducción PCA por otros métodos, por ejemplo reducciones sopesadas, el desempeño de la reducción puede ser mayor.

Algoritmo 2 (Algoritmo generalizado.) Considere $\epsilon > 0$.

A. Por cada tajada horizontal $X_f(t_i)$ para $1 \leq i \leq s$.

1. Calcule la matriz de varianzas y covarianza $S(t_i) = X_f(t_i)^T X_f(t_i)$.
2. Con $S(t_i)$ aplique el método de reducción bidimensional para obtener la matriz proyección T_1 asociada a la reducción de $S(t_i)$ de tamaño $p \times q$ con $q < p$ tal que $\|X_f(t_i) - T_1^T X_f(t_i)\| < \frac{\epsilon}{sp}$.
3. Construya U un bloque 3D tal que en la tajada horizontal t_i almacene $U_{t_i} = T_1$.

B. Por cada tajada frontal $X_f(\xi_j)$ para $1 \leq j \leq p$ repita los pasos del literal [A] para construir V un bloque 3D con tajadas frontales.

Teorema 6 Dados X_f un bloques 3D, $\epsilon > 0$, existen U, V 3D bloques obtenidos al aplicar el algoritmo generalizado anterior, que reducen la dimensión de X_f en filas y columnas de la siguiente manera $\|X_f - X_f \odot_t U \odot_\xi V\| < \epsilon$.

La prueba del Teorema 6 es análoga a la prueba del Teorema 5 anterior. En lo que resta de esta sección se presentan algunos resultados relacionados con métodos de reducción por bloques que llamaremos $PCA3D1$, $PCA3D2$, $PCA3D3$, $PCA3D4$, $PCA3D5$; otros métodos tales como: *Eigenfaces*, $PCA2PCA$ y $PCA3$ fueron también implementados para compararlos con los métodos propuestos.

- El método “*Eigenfaces*”: Es descrito minuciosamente en [90]; pretende convertir cada tajada frontal del bloque en un vector de tamaño $m \times n$ que corresponde al tamaño de la tajada, yuxtaponiendo cada fila o columna una después de la otra. Luego sobre estos mega-vectores de tamaño $m \times n$ se aplica PCA .
- El método $PCA2PCA$: En [90], se toma cada tajada horizontal yuxtaponiendo tajadas una después de la otra, ya sea en sentido horizontal como en sentido vertical, obteniendo mega-matrices. Posteriormente se aplica PCA a las mega-matrices horizontales y verticales. De esta forma se consigue dos matrices W , Z de vectores propios asociadas a las mega matrices horizontal y vertical, de tal manera que sobre estas matrices se escogen las dimensiones que concentren el porcentaje de variabilidad deseada. La reducción se consigue multiplicando cada tajada horizontal por las matrices W , Z .
- El método $PCA3$: Propuesto en [90], es análogo al método $PCA2PCA$. La diferencia radica en la función objetivo a maximizar, que es similar al coeficiente de Fisher, y maximiza la variabilidad entre clases y reduce la variabilidad intra clase, obteniendo similarmente matrices W , Z reducción horizontal y verticalmente. Al multiplicar cada tajada horizontal por estas matrices se alcanza la reducción del bloque.
- Los métodos propuestos en esta tesis son los denotados por $PCA3D1$ - $PCA3D5$. A diferencia de los métodos previamente descritos para cada tajada se obtienen por PCA matrices W_t , Z_j , que generan bloques \mathbb{W} y \mathbb{Z} resultado de aplicar las reducciones: laterales o frontales u horizontales previamente, explicadas en esta sección. Así, por ejemplo, $PCA3D1$ toma el bloque reducido \mathbb{W} y promedia cada tajada para conseguir una matriz horizontal, la cual al multiplicar cada tajada horizontal reduce la dimensión del bloque. De manera similar se procede con el bloque \mathbb{Z} .
- El método $PCA3D2$: después de hallar los bloques Z y W , se reduce el bloque de datos inicialmente por columnas, al efectuar la siguiente opera-

ción $X \odot_j Z$. Posteriormente se reduce por filas, al realizar la operación $W \odot_t X \odot_j Z$.

- El método *PCA3D3*: después de hallar los bloques Z y W , se reduce el bloque de datos inicialmente por filas, al efectuar la siguiente operación: $W \odot_t X$. Posteriormente se reduce por columnas al realizar la operación $W \odot_t X \odot_j Z$.
- El método *PCA3D4*: cambia respecto a las dos últimas reducciones. Al realizar la reducción sobre tajadas horizontales, luego de hallar los bloques Z y W . Se reduce el bloque de datos inicialmente por características al efectuar la siguiente operación: $W \odot_t X$. Posteriormente se reducen las características al calcular la operación $W \odot_t X \odot_j Z$.
- El método *PCA3D5*: ya no se hace la reducción sobre tajadas horizontales, sino sobre tajada frontales. Entonces se hallan los bloques Z y W . A continuación se reduce el bloque de datos inicialmente por tiempos al efectuar la siguiente operación $X \odot_j Z$. Posteriormente se reducen las características al realizar la operación $W \odot_t X \odot_j Z$.

4.5. Aplicaciones de los métodos de reducción por bloques

En esta sección se presentan los resultados de la reducción por bloques 3D o PCA3D relacionadas con bloques de imágenes de dos diferentes personas y señales de voz de personas con disfonía y personas sin disfonía. La aplicación de los métodos con imágenes capilares se presenta en el próximo capítulo. En cada una de las aplicaciones se muestra: el rendimiento promedio de la clasificación, error de clasificación promedio, la desviación estándar promedio y las dimensiones de la reducción al cambiar el porcentaje de varianza total de los bloques de datos.

Un elemento destacable fue que al cambiar el clasificador Bayesiano como herramienta de clasificación para evaluar el desempeño de la reducción, por una máquina de vectores soporte, el método “*Eigenfaces*” no alcanza el mejor desempeño; por el contrario, los métodos propuestos alcanzan los mejores desempeños mostrando que éstos son más rápidos. Se conjetura que la información topológica