# Sobre el momento de los valores propios del operador $(-\Delta)^m - V$

**Alexis Favian Malpica Vega**

Universidad Nacional De Colombia

Facultad de Ciencias

Maestría en Matemáticas

Santafé de Bogotá

2009

Sobre el momento de los valores propios del operador $(-\Delta)^m - V$

ALEXIS FAVIAN MALPICA VEGA

CÓDIGO: 830258

Trabajo final de maestría para optar el título de

Magister en ciencias Matemáticas

Director

Profesor: Ph. D. Mohammed EL AIDI

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS

MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Bogota, 2010

# Índice general

# Lista de símbolos

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | Números naturales. |
| $\mathbb{C}$ | Números Complejos. |
| $\mathbb{R}$ | Números reales. |
| $\mathbb{R}^n$ | Espacio Euclideo $n-$ dimensional. |
| $\Omega$ | Un abierto de $\mathbb{R}^n$. |
| $Q(x_0,\delta)$ | Cubo,.de centro en $x_0$ y de lado $\delta>0$. $\delta = \lvert Q(x_0,\delta)\rvert^{\frac{1}{n}}$ |
| | $Q(x_0,\delta) := \left\{x=(x_i)_{1\leq i\leq n}\,, \lvert x_i - x_{0i}\rvert < \delta\right\}$ para $x_0 = (x_{0_i})_{1\leq i\leq n}$ |
| $\langle\ ,\ \rangle_{L^2(\Omega)}$ | Producto interno definido en $L^2(\Omega)$, |
| $\lVert\ .\ \rVert$ | Norma euclidiana definida en $\mathbb{R}^n$. |
| $\lvert\ .\ \rvert$ | La métrica euclidiana definida en $\mathbb{R}$. |
| $B(x_0,r)$ | Bola de radio $r>0$ y centro $x_0\in\mathbb{R}^n$ definida como |
| | $\{x\in\mathbb{R}^n, \lVert x-x_0\rVert < r\}$ |
| $C_0^\infty(\Omega)$ | $u:\Omega\to\mathbb{C}$, $u\in C_0^\infty(\Omega),$ soporte de $u$ es compacto en $\Omega$ |
| $sop(f)$ | $sop(f) = \overline{\{x\in\mathbb{R}^n, f(x)\neq 0\}}$ Soporte de la función $f$. |
| | Es decir la adherencia del conjunto $\{x\in\mathbb{R}^n,\ f(x)\neq 0\}$ |
| $L^2(\Omega)$ | $=\left\{f \text{ medible en } \Omega \text{ tal que } \int_\Omega \lvert f(t)\rvert^2\,dt < +\infty\right\}$ |
| $L^p(\Omega,\tau,\mu)$ | $=\left\{f:\Omega\to\mathbb{C} \text{ medible tal que } \int_\Omega \lvert f(x)\rvert^p\,d\mu(x) < +\infty\right\}$ |
| | con $\tau$ una sigma álgebra. |
| $\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ | Gradiente de una función $f,$ definida en $\mathbb{R}^n$ para $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ |

# Introducción

La presente investigación se refiere al estudio sobre el momento de los valores propios del operador $(-\Delta)^m - V$, en especial se hace atención al teorema demostrado por EGOROV. Y. V. y KONDRATIEV. V. A. en [3], el cual consiste en encontrar la cota superior de la sumatoria $S\gamma = \sum_{j=0}^{N_0(V)} |\lambda_j|^\gamma$ para el operador $H = L - V$, $S\gamma$ se llama el momento de los valores propios negativos de $L - V$, además $L$ un operador elíptico, $N_0(V) \in \mathbb{N}$ y $\lambda_j$ corresponde a los valores propios negativos de $N_0(V)$. Los autores EGOROV. Y. V. y EL AIDI M. en [2], encontraron otro resultado mas general de la cota superior del momento correspondiente al operador eliptico definido en un espacio de Sobolev con condición a la frontera de Robin, es decir con condición mixta a la frontera.

Para nuestro caso se debe estimar como son los valores propios negativos del operador $(-\Delta)^m - V$, la demostración se basa en el Lema de Glazman el cual consiste en determinar un subespacio vectorial cuya dimensión coincide con el número de valores propios $N(\lambda)$ que son menores que $\lambda \in \mathbb{R}$, de un operador auto-adjunto.

Entonces el esquema de este trabajo es el siguiente, el primer capitulo correspondiente a los preliminares se dan algunos teoremas y lemas algunos con demostración que permiten el entendimiento del proyecto de investigación. En el segundo capitulo se encuentra el desarrollo del trabajo de investigación, se demuestra un teorma el cual permite encontrar los valores propios del operador $(-\Delta)^m - V$ para así abordar el teorema principal del proyecto. Cabe destacar que este trabajo tiene aplicaciones a la física teoríca o cuántica para el casao $m = 1$, en lo concerniente a la estabilidad de la materia que es una rama siempre en desarrollo por ejemplo ver [1], [9], [11], [12], [13], [14], [17].

# Objetivos

## 0.1. Objetivo general

El objeto de este trabajo es encontrar la cota superior de la siguiente sumatoria finita $S\gamma$ :

$$S\gamma = \sum_{j=0}^{N_0(V)} |\lambda_j|^\gamma ,$$

donde $N_0(V)$ corresponde al número de valores propios $\lambda_j$ del operador $(-\Delta)^m - V$, definido en $L^2(\Omega)$. $V > 0$,

$$V \in L^q(\Omega) \qquad \text{para} \qquad q > \frac{n}{2m},$$
$$V(x) = 0 \text{ en } \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > r\} \text{ con } r > 0,$$

es decir que $V$ es una función con soporte compacto, normalmente se va a trabajar con $V \in C_0^\infty(\Omega)$.

El operador $(-\Delta)^m$ corresponde formalmente a la forma cuadrática $l$ definida como

$$l[u] := \int_\Omega |\nabla_m u(x)|^2 \, dx := \sum_{|\alpha|=m} \frac{\alpha!}{m!} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 \, dx, \qquad \text{para } u \in C_0^\infty(\Omega),$$

con

$$\begin{aligned} D^\alpha &= (-i)^{|\alpha|} \partial_x^\alpha, \qquad \text{con } i \in \mathbb{C}, \text{ tal que } i^2 = -1, \\ \partial_x^\alpha &= \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial_{x_2}^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha n}}{\partial_{x_n}^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}, \partial_{x_2}^{\alpha_2}, \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}, \qquad \text{donde } x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, \qquad |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i,$$

$$\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!...\alpha_n!$$

Precisamente debemos mostrar el siguiente teorema que es una consecuencia del resultado anunciado en [3].

**Teorema 0.1** *Sea* $\gamma > 0, \gamma + \dfrac{n}{2m} > 1$. *Entonces*

$$S\gamma \leq K_{m,n,q} \int_\Omega V(x)^{\frac{n}{2m}+\gamma} dx,$$

*con* $V \geq 0$, *y* $V \in L^{\frac{n}{2m}+\gamma}(\Omega)$ *y además* $K_{m,n,q}$ *es una constante que depende de* $m$ *y* $n$. $S\gamma$ *corresponde al operador* $H_{m,V} = (-\Delta)^m - V$. *Sí* $\gamma + \dfrac{n}{2m} < 1$, *existe un potencial simétrico tal que* $\displaystyle\int_\Omega V(x)^{\frac{n}{2m}+\gamma} dx < \varepsilon$ *y* $S\gamma \to \infty$.

Observación:

Cuando $V < 0$ no hay valores propios negativos, entonces $S\gamma$ se reduce al valor de cero.

# Capítulo 1

# Preliminares

En este primer capítulo se dan conceptos y resultados que son requisitos para una mejor comprensión del cápitulo dos, tales como lemas y teoremas algunos con demostración que son utilizados en el estudio de los operadores elípticos y que tienen por especial facilitar el entendimiento y las conlusiones del tema principal del proyecto de investigación y que además son de uso frecuente en análisis y en ecuaciones en derivadas parciales.

Con respecto a los antecedentes en el trabajo de EGOROV. Y. V. y KONDRATIEV. V. A. estudiaron en [4], la cota superior $S\gamma$ dada en terminos del potencial real $V$, esta es

$$S\gamma = \sum_{j=0}^{N_0(V)} |\lambda_j|^\gamma \,,$$

Donde $N_0(V)$ es el número total de los valores propios negativos de $\lambda_j$ del operador $H = L - V$ definido en $L^2(\Omega)$ con

$$L = \sum_{\substack{|\alpha|\leq m,\\ |\beta|\leq m,}} D^\alpha a_{\alpha\beta}(x) D^\beta,$$

donde los coeficientes $a_{\alpha\beta}$ son funciones medibles.

Por otra parte $L$ es un operador simétrico positivo de orden $2m$ y cumple,

$$\langle Lu, u\rangle_{L^2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|\leq m, |\beta|\leq m,} a_{\alpha\beta}(x) D^{\beta} u(x) \overline{D^{\beta} u(x)} dx \geq a_0 \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m} |D^{\alpha} u(x)|^2 \, dx,$$

con $a_0 > 0$.

$\Omega$ es un abierto y $\langle Lu, u\rangle_{L^2(\Omega)}$ es el producto escalar definido en el espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$, equipado del siguiente producto escalar,

$$L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{C}$$

$$(u, v) \to \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} u(x)\overline{v(x)} dx$$

Como aplicación en la mecánica cuántica, cuando la sumatoria $S\gamma$ es finita es la etapa esencial para tratar la estabilidad de la materia en un campo eléctrico de potencial $V$, por ejemplo ver [9],[11].

## 1.1. Lema de Rosenblum

El siguiente lema es una variante del Lema de Rosenblum el cual se encuentra en [4] y es crucial en el desarrollo del trabajo.

**Lema 1.1** *Sea $Q$ un cubo en $\mathbb{R}^n$ y $f(x)$ una función medible no negativa en $Q$ tal que $\int_Q f(x)dx = 1$. Entonces para un $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$, el cubo $Q$ puede ser cubierto por la unión de cubos cerrados $Q_j$, $1 \leq j \leq M$ tal que*

$$\int_{Q_j} f(x)dx \leq \left(2^{n-1} - 1\right) \varepsilon, \qquad M \leq \frac{a_n \left(2^n - 1\right)}{\varepsilon},$$

*donde $a_n = \text{máx}(2^n - 2, 1)$ y cada punto de $Q$ es cubierto por a lo más $a_n$ cubos.*

**Prueba.** Sea en primera instancia el caso para $n = 1$. Transladando desde la izquierda y finalizando en $a_0$ del segmento $Q$ se puede encontrar un punto $a_1$ tal que la integral de $f$ sobre $[a_0, a_1]$ es igual a $2\varepsilon$. Es decir

$$\int_{[a_0,a_1]} f(x)dx = 2\varepsilon$$

Por otro lado moviendo hacia la derecha se puede encontrar un punto $a_2$ tal que la integral de $f$ sobre $[a_1, a_2]$ es igual a $2\varepsilon$ y asi sucevivamente. Esto es evidente que el número de intervalos no excede $\dfrac{1}{2\varepsilon} + 1$.

Sea $n > 1$. En pocas palabras dividamos el cubo $Q$ en $2^n$ cubos por planos directamente desde el centro y paralelos a los lados. Aproximadamente, se toma el cubo más pequeño obtenido, la integral de la función $f$ sobre el cuál es mayor que $\varepsilon$, y divide estos en la misma forma.

Si denotamos por $n_0$ el número de cubos, las integrales sobre el cuál son menores o iguales que $\varepsilon$, y por $n_1$ el número de los otros. Se muestra que

$$n_0 \leq n_1(2^n - 2)$$

Esta relación es verdadera en el comienzo, haciendo entonces $n_0 = 0$ y $n_1 = 1$.

Sea $Q_1$ uno de los cubos para el cuál $\displaystyle\int_{Q_1} f(x)dx \geq \varepsilon$ si después dividimos estos en $2^n$ pequeños cubos, la integral sobre cada uno de ellos es menor o igual que $\varepsilon$, eliminamos la partición. Entonces los números $n_0$ y $n_1$ no pueden ser cambiados y $\displaystyle\int_{Q_1} f(x)dx \leq 2^n\varepsilon$.

Si la división del cubo $Q_1$ produce el mínimo de cubos con las integrales sobre ellos mayores o iguales a $\varepsilon$ entonces se aplica el mismo procedimiento a estos cubos. Sea entonces el número $n_0$ incrementandose a $n_3$ entonces $n_3 \leq n_0 + 2^n - 2$ mientras $n_1$ incrementa más rapido para $1 : n_4 \geq n_1 + 1$.
Por consiguiente , se tiene

$$n_3 \leq n_0 + 2^n - 2 \leq (n_1 + 1)(2^n - 2) \leq n_4(2^n - 2),$$

y la relación entre $n_0$ y $n_1$ es verdadera otra vez.

Si después de la partición aparece exactamente un cubo $Q_2$, la integral por encima es $\geq \varepsilon$ entonces se le hace un cambio ligeramente al procedimiento.

Sí $\int_{Q_2} f(x)dx < 2^n\varepsilon$, entonces se puede eliminar la partición y se tiene que

$$\int_{Q_j} f(x)dx < (2^n + 2^n - 1)\varepsilon \leq (2^{n+1} - 1)\varepsilon.$$

Sí $\int_{Q_2} f(x)dx = A \geq 2^n\varepsilon$ se podrá disminuir esto, partiendo de un vertice común fijo con el cubo $Q_1$, hasta que la integral por encima se convierta en $A - (2^n - 2)\varepsilon$, la cual es mayor que $\varepsilon$. Al mismo tiempo mostramos disminuir el cubo opuesto al mismo tamaño y ampliar el otro $2^n - 2$ cubos al tamaño igual a la diferencia de los tamaños de $Q_1$ y $Q_2$.

Conservando fijos sus vertices comunes con los de $Q_1$. Entonces para el mínimo de los cubos mas grandes el valor de la integral es mayor que $\varepsilon$.

Finalmente nosotros obtenemos el sistema superponiendo los cubos $Q_{2_1}, ..., Q_{2_{2^n}}$, cubriendo $Q_1$ y el valor de estas dos integrales sobre ellos es $\geq \varepsilon$. Por consiguiente la relación entre $n_0$ y $n_1$ también será valida. Además, las integrales sobre cada uno de estos cubos excepto uno son $\leq (2^{n+1} - 4)\varepsilon$ y cada punto de $Q_1$ es cubierto por a lo más $2^n - 2$ cubos pequeños. En lo que sigue se subdivide en más de uno de ellos, los cuáles no se intersectan con otros, el número no se incrementa.

Se continúa con el proceso hasta el momento cuando los valores de cada integral del cubrimiento son $\leq (2^{n+1} - 1)\varepsilon$. Entonces el número de cubos en la subdivisión final $M \leq n_0 + n_1 \leq n_1(2^n - 1)$. Sin embargo, $n_1 \leq \dfrac{(2^n - 2)}{\varepsilon}$. Por consiguiente, $M \leq \dfrac{(2^n - 2)(2^n - 1)}{\varepsilon} = \dfrac{C_n}{\varepsilon}$. ■

## 1.2. Lema de Glazman

El siguiente lema es importante para evaluar el número de los valores propios de un operador auto adjunto, la versión original se encuentra en el capítulo uno, Teorema 12, 12bis, [7], en la literatura el Lema de Glazman se conoce tambien como el principio del max-min.

**Lema 1.2** *(Lema de Glazman). Para $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda)$ el número de los valores propios que son menores que $\lambda$, de un operador auto-adjunto $A$. Entonces*

$$N(\lambda) = \min_{L} \{ codimL \;\; tal \; que \;\; L \subset Q(h), \quad h(u,u) \geq \lambda \langle u, u \rangle_{\mathcal{H}} ; \forall u \in L \backslash 0 \}$$

*el minimo se esta tomando en la familia $L$ un subespacio vectorial del dominio de la forma cuadrática $h$ asociada al operador $A$ tal que $h(u,u) \geq \lambda \langle u, u \rangle_{\mathcal{H}}$. $Q(h)$ es el dominio de $h$ y $\langle ., . \rangle_{\mathcal{H}}$ es el producto escalar definido en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.*

Observación: Entonces estimar el número de los valores propios negativos vuelve a buscar un subespacio vectorial y su dimensión será el número de los valores propios.

## 1.3. Desigualdad de Hölder

Esta desigualdad se encuentra en diversos textos de análisis de ecuaciones diferenciales parciales de nivel avanzado por ejemplo ver Teorema 4.2.1, [5]. Esta se enuncia de la siguiente manera:

Sean $p, q$ exponentes conjugados, es decir : $p > 1$, $q > 1$,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

entonces

$$fg \in L^1(\Omega, \tau, \mu)$$

y

$$\int_{\Omega} |f(x) \, g(x)| \, d\mu(x) \leq \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\Omega} |g(x)|^q \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}}$$

## 1.4. Desigualdad de Sobolev

Igualmente en [4], página 60, tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 1.3** *Existe una constante positiva $C_0$ tal que para toda $u \in C_0^\infty(\Omega)$,*

$$\left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_0 \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.1}$$

*donde $C_0$ es una constante que depende de $n$ para $1 \leq p \leq \dfrac{n}{n-2m}$.*

# Capítulo 2

# Sobre el momento de los valores propios del operador $(-\Delta)^m - V$

Sea $\Omega$ un abierto de $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$ y $n > 2m$, sea

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m, |\beta| \leq m,} D^\alpha a_{\alpha\beta}(x) D^\beta, \text{ de orden } 2m$$

un operador simétrico es decir $\langle Lu, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \overline{\langle u, Lv\rangle}_{L^2(\Omega)}$ donde $\overline{\langle u, Lv\rangle}_{L^2(\Omega)}$ es el conjugado de $\langle u, Lv\rangle_{L^2(\Omega)}$, para $(u, v) \in C_0^\infty(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega)$ y positivo es decir $\langle Lu, u\rangle_{L^2(\Omega)} \geq 0$ donde $\langle \ , \ \rangle_{L^2(\Omega)}$ es el producto escalar definido de $L^2(\Omega)$, y $a_{\alpha\beta}$ son funciones medibles definidas en $\Omega$.

Se dice que $L$ es elíptico si

$$\langle Lu, u\rangle_{L^2(\Omega)} \geq a_0 \int_\Omega \sum_{|\alpha| = m} |D^\alpha u(x)|^2 \, dx,$$

donde $a_0 > 0$.

Por ejemplo el operador

$$\begin{aligned}
\langle -\Delta u, u\rangle_{L^2(\Omega)} : \ &= \int_\Omega - \Delta u(x) \overline{u(x)} dx \\
&= \int_\Omega \nabla u(x) \overline{\nabla u(x)} dx - \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} d\sigma(x)
\end{aligned}$$

donde se ha aplicado la fórmula de Green

$$\int_{\Omega} v(x)\Delta u(x)dx = \int_{\partial\Omega} v(x)\frac{\partial u(x)}{\partial n}d\sigma(x) - \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v\rangle \, dx$$

con $u \in C^2\left(\bar{\Omega}\right)$ y $v \in C^1\left(\bar{\Omega}\right)$ donde $\partial\Omega$ es la frontera de $\Omega$, $n$ es la normal exterior y $d\sigma$ el elemento de área sobre $\partial\Omega$, ver página 241, [15].

Pero $\displaystyle\int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial u(x)}{\partial n}d\sigma(x) = 0$ pues $u\,|_{\partial\Omega} = 0$, $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$, por tanto se obtiene

$$\langle -\Delta u, u\rangle_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} \nabla u(x)\overline{\nabla u(x)}dx = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \, dx \geq 0$$

donde $\nabla$ es el gradiente definido como antes y así $a_0 = 1$ luego

$$\langle -\Delta u, u\rangle \geq \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \, dx$$

De manera general se tiene el siguiente ejemplo, el operador $(-\Delta)^m$ también es elíptico: es decir,

$$\langle (-\Delta)^m u, u\rangle_{L^2(\Omega)} \geq a_0 \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u(x)|^2 \, dx,$$

pues formalmente

$$\langle (-\Delta)^m u, u\rangle_{L^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} \frac{\alpha!}{m!} |D^{\alpha}u(x)|^2 \, dx \geq \frac{1}{m!} \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u(x)|^2 \, dx$$

donde $a_0 = \dfrac{1}{m!}$, además $|\alpha| \geq 1$ entonces existe $\alpha_{i_0}$ donde $i_0 \in [1, m]$ tal que $\alpha_{i_0} \neq 0$ por tanto $\alpha! \geq 1$. En este trabajo nuestro operador será $H_{m,V} = (-\Delta)^m - V$.

En los trabajos de los autores EGOROV. Y. V. y KONDRATIEV. V. A. [3], LIEB. E. H. y THIRRING. W. E. [11], ponen condiciones en $V$ y obtienen un número finito de los valores propios negativos del operador $H = L - V$. Por otro lado EGOROV. Y. V. y EL AIDI. M. [2], ponen condiciones más generales en la frontera para encontrar la cota superior de $S\gamma$.

Entonces los autores evaluan la siguiente suma finita

$$S\gamma = \sum_{\substack{1\leq j\leq N,\\ \lambda_j<0}} |\lambda_j|^{\gamma},$$

en terminos de $V$, donde $\lambda_j$ son los valores propios negativos del operador $H = L-V$.

En particular en el trabajo de LIEB. E. H. y THIRRING. W. E. [11], se tiene que la siguiente desigualdad

$$S\gamma \leq C_{m,\gamma}\int_{\Omega} V(x)^{\gamma+\frac{n}{2}}\,dx,$$

es verdadera, para los siguientes casos:

$$\begin{cases} \text{Sí } n=1,\ \gamma>\frac{1}{2}\\ \text{Sí } n=2,\ \gamma>0\\ \text{Sí } n\geq 3,\ \gamma\geq 0\end{cases}$$

para el caso del operador de *Schrödinger* en $H=-\Delta-V$ cuando $m=1,\ \gamma+\frac{n}{2}>1$ y $V\in L^{\gamma+\frac{n}{2}}(\Omega)$ donde $C$ es una constante que es dada de manera explícita, la estimación de $S\gamma$ se traduce en la física cuántica como la etapa esencial para mostrar la estabilidad de la materia, [10].

Por otro lado el caso $n=1,\ \gamma=\frac{1}{2}$ esta mostrado en [8].

Ahora bien se va a estudiar un caso general el cual consiste en mostrar el siguiente teorema que es una consecuencia del trabajo de los autores EGOROV. Y. V. y KONDRATIEV. V. A., ver [3].

## 2.1. Teorema Principal

**Teorema 2.1** *Sea* $\gamma>0, \gamma+\dfrac{n}{2m}>1,$ *entonces*

$$S\gamma \leq K_{m,n,q}\int_{\Omega} V(x)^{\frac{n}{2m}+\gamma}dx,$$

con $0<V\in L^{\frac{n}{2m}+\gamma}(\Omega)$, $S\gamma$ corresponde al operador $H_{m,V}=(-\Delta)^m-V$ y $K_{m,n,q}$ es una constante que depende de $m,\ n,\ q$. Sí $\gamma+\dfrac{n}{2m}<1$, existe un potencial de Coulomb tal que $\displaystyle\int_{\Omega} V(x)^{\frac{n}{2m}+\gamma}dx<\varepsilon$ y $S\gamma\to\infty$.

Por lo tanto para mostrar el teorema anterior como en el trabajo de EGOROV. Y. V. y KONDRATIEV. V. A. [3], se necesita evaluar $N_a$ que corresponde al número de valores propios que son menores a $-a > 0$, entonces la demostración del teorema 2.1 se basa en el siguiente teorema.

**Teorema 2.2** *Sea $a > 0$, $N_a$ es el número de valores propios de $H$ menores que $-a$. Entonces*

$$N_a \leq A_{m,n,q} a^{-q+\frac{n}{2m}} \int_\Omega V_a^q(x)dx, \quad \text{con } q > \frac{n}{2m} > 1,$$

*donde $A_{m,n,q}$ es una constante que depende de $m, n$ y $q$.*

$$V_a(x) = \begin{cases} V(x), & \text{si } V(x) > a, \\ 0 & \text{si } V(x) \leq a. \end{cases}$$

*y $V$ con soporte compacto, $V \in L^q(\Omega)$.*

**Prueba.** Como aplicación del Lema de Glazman se toma $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$,

$$Q(h) = C_0^\infty(\Omega)$$

y queda buscar el espacio vectorial $G$ de $L^2(\Omega)$.

Evaluar $N_a$ significa buscar un subespacio vectorial de codimensión finita de un espacio de Hilbert.

$N_a$ coincide con la dimensión del subespacio de funciones $u \in C_0^\infty(\Omega)$, para el cuál la desigualdad

$$\langle (-\Delta)^m u, u \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle V_a u, u \rangle_{L^2(\Omega)} \geq -a \langle u, u \rangle_{L^2(\Omega)}$$

o

$$\int_\Omega V(x)u(x)^2 dx \leq \langle (-\Delta)^m u, u \rangle + a \int u(x)^2 dx$$

es valida. La desigualdad anterior es equivalente a

$$\int_{\Omega} V_a(x)u(x)^2dx \leq \langle(-\Delta)^m u, u\rangle + a\int u(x)^2dx \tag{2.1}$$

porque si $V(x) > a$ ocurre que $V_a(x) = V(x)$, por otra parte si $V(x) \leq a$ se tiene que $V_a(x) = 0$ y así la desigualdad es obvia. Entonces buscamos el subespacio de $L^2(\Omega)$ tal que (2.1) sea verdad.

Al aplicar la desiguald de Hölder a

$$\int_{\Omega} V_a(x)u(x)^2dx,$$

con $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $p > 1, q > 1$,
se tiene

$$\int_{\Omega} V_a(x)u(x)^2dx \leq \left(\int_{\Omega} u(x)^{2p}dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} V_a^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

En este estudio se va a trabajar bajo la condición $n > 2m$. Para el cubo $Q_0$ de lado $1 = |Q_0|^{\frac{1}{n}}$, mostramos la siguiente desigualdad,

$$\left(\int_{Q_0} |u(x)|^{2p}\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_0 \int_{Q_0} \left(\sum_{|\beta|=m} \left|D^{\beta}u(x)\right|^2 + |u(x)|^2\right) dx, \qquad u \in C^{\infty}(Q_0) \tag{2.2}$$

que es valida para

$$1 \leq p < \frac{n}{n-2m}. \tag{2.3}$$

Para demostrar esta desigualdad se trabaja con funciones a valores reales pues para $u(x) = \operatorname{Re} u(x) + i \operatorname{Im} u(x)$ se tiene

$$\int_{Q_0} |u(x)|^{2p}\, dx \leq 2\int_{Q_0} |\operatorname{Re} u(x)|^{2p}\, dx + 2\int_{Q_0} |\operatorname{Im} u(x)|^{2p}\, dx.$$

Porque se puede escribir $u(x)$ como:

$$u(x) = |u(x)|\, e^{i\theta},$$

donde

$$\theta \in [0, 2\pi] \;\text{ y }\; |u(x)| \;\text{ es el módulo de } u(x).$$

Luego

$$u^p(x) = |u(x)|^p \, e^{ip\theta},$$

por tanto

$$u^{2p}(x) = |u(x)|^{2p} \, e^{2ip\theta},$$

así

$$\left|u^{2p}(x)\right| = |u(x)|^{2p}$$

como $u^p(x) \in \mathbb{C}$ luego

$$|u(x)|^{2p} = |u^{2p}(x)| = |u^p(x)| \, |u^p(x)| = |u^p(x)|^2$$

por consiguiente,

$$\begin{aligned}
|u^p(x)|^2 &= |\operatorname{Re} u^p(x) + i \operatorname{Im} u^p(x)|^2 \\
&= |\operatorname{Re} u^p(x)|^2 + |\operatorname{Im} u^p(x)|^2 + |2i \operatorname{Re} u^p(x) \operatorname{Im} u^p(x)| \\
&\leq 2\,|\operatorname{Re} u^p(x)|^2 + 2\,|\operatorname{Im} u^p(x)|^2 \\
&= 2\,|\operatorname{Re} u(x)|^{2p} + 2\,|\operatorname{Im} u(x)|^{2p}.
\end{aligned}$$

Así para

$$\int_\Omega V_a(x) u(x)^2 dx \leq \left(\int_\Omega u(x)^{2p} dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega V_a^q(x) dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

Aplicando nuevamente la desigualdad de Hölder a

$$\left(\int_\Omega u(x)^{2p} dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

haciendo $f(x) = u^{2p}(x)$ y $g(x) = 1$, donde $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{q_1} = 1$ se tiene, para $p_1 \geq 1$

$$\int_{Q_0} |u(x)|^{2p} \, dx \leq \left(\int_{Q_0} u(x)^{2pp_1} dx\right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\int_{Q_0} dx\right)^{\frac{1}{q_1}},$$

pero como $\left(\int_{Q_0} dx\right)^{\frac{1}{q_1}} = |Q_0|^{\frac{1}{q_1}}$.
por tanto se obtiene

$$\int_{Q_0} |u(x)|^{2p}\, dx \leq \left(\int_{Q_0} u(x)^{2pp_1} dx\right)^{\frac{1}{p_1}} |Q_0|^{\frac{1}{q_1}}.$$

Ahora aplicando la desigualdad de Sobolev (1.1) ver página 5, se tiene,

$$\begin{aligned}\left(\int_{Q_0} |u(x)|^{2pp_1}\, dx\right)^{\frac{1}{pp_1}} &\leq C_0 \int_{Q_0} \left(\sum_{|\beta|=m} \left|D^\beta u(x)\right|^2\right) dx \\ &\leq C_0 \int_{Q_0} \left(\sum_{|\beta|=m} \left|D^\beta u(x)\right|^2 + |u(x)|^2\right) dx\end{aligned}$$

y es verdadera para $2pp_1 \leq \dfrac{2n}{n-2m}$, por lo tanto se tiene (2.2), pues $1 \leq p \leq pp_1$.
Por consiguiente, el estimado para un cubo $Q_b$ de lado $b > 0$.
Mostramos que:

$$\left(\int_{Q_b} |u(x)|^{2p}\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_0 b^{2m-n/q} \int_{Q_b} \left(\sum_{|\beta|=m} \left|D^\beta u(x)\right|^2 + b^{-2m} |u(x)|^2\right) dx, \quad (2.4)$$

donde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Apoyado bajo la condición (2.3).
Para la desigualdad anterior se realiza un ejemplo a continuación en $\mathbb{R}$ para después generalizar.
Entonces si $m = 1$ y $n = 3$, el cual satisface $n > 2m$, entonces

$$\begin{aligned}\left(\int_{[0,1]^3} |f(x)|^{2p}\, dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq c_0 \int_{[0,1]^3} \textstyle\sum_{|\beta|=1} \left|D^\beta f(x)\right|^2 dx, \qquad \forall\ f \in C^\infty([0,1]) \\ &\leq c_0 \int_{[0,1]^3} \left(\left|\tfrac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right|^2 + \left|\tfrac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right|^2 + \left|\tfrac{\partial f(x)}{\partial x_3}\right|^2\right) dx, \\ &\leq c_0 \int_{[0,1]^3} |\nabla f(x)|^2\, dx\end{aligned}$$

Sea $Q_b = bQ_0$ entonces $Q_0 = b\,[0,1]^3$.

Por tanto para $y = bx$ donde $(y_1, y_2, y_3) = (bx_1, bx_2, bx_3)$ y $dy = b^3 dx$ luego,

$$\left(\int_{Q_b} |f(y)|^{2p} \, dy\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_0 b^{2-\frac{3}{q}} \int_{Q_b} |\nabla f(y)|^2 \, dy$$

por que:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{Q_b} |f(y)|^{2p} \, dy\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{Q_0} |f(bx)|^{2p} \, b^3 dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= b^{\frac{3}{p}} \left(\int_{Q_0} |f \circ \varphi(x)|^{2p} \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq c_0 b^{\frac{3}{p}} \int_{Q_0} |\nabla (f \circ \varphi)(x)|^2 \, dx \\
&\leq c_0 b^{\frac{3}{p}} \int_{Q_b} b^2 |\nabla f(y)|^2 \, \frac{dy}{b^3} \\
&= c_0 b^{\frac{3}{p}-1} \int_{Q_b} |\nabla f(y)|^2 \, dy,
\end{aligned}$$

con $\varphi(x) = bx$ y como $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ luego $b^{\frac{3}{p}-1} = b^{3-\frac{3}{q}-1} = b^{2-\frac{3}{q}}$, por tanto se llega a:

$$\left(\int_{Q} |f(y)|^{2p} \, dy\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_0 b^{2-\frac{3}{q}} \int_{Q} |\nabla f(y)|^2 \, dy \qquad \square.$$

Ahora se demostrará la desigualdad (2.4), es decir:

$$\left(\int_{Q_b} |u(x)|^{2p} \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_0 b^{2m-n/q} \int_{Q_b} \left(\sum_{|\beta|=m} \left|D^\beta u(x)\right|^2 + b^{-2m} |u(x)|^2\right) dx,$$

Sea $Q_b = bQ_0 = \{bx, \text{ con } x \in Q_0\}$, sea $y = \dfrac{x}{b}$, donde $y \in Q_0$, y $x \in \mathbb{R}^n$, $b > 0$, es decir

$$y = (y_1, y_2, ..., y_n) = \left(\frac{x_1}{b}, \frac{x_2}{b}, ..., \frac{x_n}{b}\right) \in Q_0$$

por tanto $dy = \dfrac{dx}{b^n}$ ya que $x = by$. Así pues

$$\begin{aligned}\left(\int_{Q_b} |u(x)|^{2p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(b^n \int_{Q_0} |u(by)|^{2p}\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= b^{\frac{n}{p}} \left(\int_{Q_0} |u(by)|^{2p}\,dy\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

pero se sabe que a partir de la relación (2.2) se tiene

$$\begin{aligned} b^{\frac{n}{p}} \left(\int_{Q_0} |u(by)|^{2p}\,dy\right)^{\frac{1}{p}} &\leq C_0 b^{\frac{n}{p}} \left[\int_{Q_0} \sum_{|\beta|=m} \left|D^\beta (by)\right|^2 dy + \int_{Q_0} |u\,(by)|^2\,dy\right], \\ &= C_0 b^{\frac{n}{p}} \left[\int_{Q_0} b^{2m} \sum_{|\beta|=m} \left|D^\beta u(x)\right|^2 \frac{dx}{b^n} + \int_{Q_0} |u\,(x)|^2\,\frac{dx}{b^n}\right], \end{aligned}$$

pues

$$\left|D^\beta (u \circ \varphi(y))\right|^2 = \left|D^\beta (u(by))\right|^2 b^{2m}, \text{ con } \varphi(y) = by \quad \text{y} \quad |\beta| = m.$$

Luego

$$\begin{aligned} \left(\int_{Q_b} |u(x)|^{2p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq C_0 b^{\frac{n}{p}} b^{-n} b^{2m} \left(\int_{Q_b} \sum_{|\beta|=m} \left|D^\beta u(x)\right|^2 dx + \int_{Q_b} b^{-2m} |u(x)|^2\,dx\right) \\ &= C_0 b^{\frac{n}{p}-n} b^{2m} \left(\int_{Q_b} \sum_{|\beta|=m} \left|D^\beta u(x)\right|^2 dx + b^{-2m} \int_{Q_b} |u(x)|^2\,dx\right) \\ &= C_0 b^{n(\frac{1}{p}-1)} b^{2m} \left(\int_{Q_b} \sum_{|\beta|=m} \left|D^\beta u(x)\right|^2 dx + b^{-2m} \int_{Q_b} |u(x)|^2\,dx\right) \end{aligned}$$

y como $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ por tanto $\dfrac{1}{p} - 1 = -\dfrac{1}{q}$ así pues

$$\left(\int_{Q_b} |u(x)|^{2p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_0 b^{2m-n/q} \left(\int_{Q_b} \sum_{|\beta|=m} \left|D^\beta u(x)\right|^2 dx + b^{-2m} \int_{Q_b} |u(x)|^2\,dx\right). \ \square. \tag{2.5}$$

Ahora lo que se quiere es encontrar una cota superior para $\displaystyle\int_{\Omega} V_a^q(x)dx$ entonces como en el trabajo de [3], se usa el lema de Rosenblum.

Sea $\varepsilon > 0$ un número positivo pequeño, el cuál será indicado después. Por el Lema de Rosenblum [4], hay un cubrimiento para el soporte $K$ de $V$ (se puede asumir compacto) por un número finito $N$ de cubos, tal que para cada punto de $K$ sea cubierto por a lo más $C_n$ cubos de tal manera que $N \leq \dfrac{C_n}{\varepsilon}$.

Se tiene

$$sop(V) = K = \bigcup_{j=1}^{N} Q_j = Q \subset \Omega,$$

Por tanto al aplicar el Lema de Rosemblum con $Q = K$ y

$$f(x) = \frac{V_a^q(x)}{\displaystyle\int_Q V_a^q(x)dx},$$

pues

$$\int_Q f(x)dx = 1,$$

se tiene que

$$\int_{Q_j} f(x)dx = \frac{1}{\displaystyle\int_Q V_a^q(x)dx}\int_{Q_j} V_a^q(x)dx \leq \left(2^{n+1} - 1\right)\varepsilon \leq 2^{n+1}\varepsilon$$

donde $N \leq \dfrac{2^{n+1}}{\varepsilon}$ así,

$$\frac{1}{\displaystyle\int_Q V_a^q(x)dx}\int_{Q_j} V_a^q(x)dx \leq C_m\varepsilon$$

ó

$$\int_{Q_j} V_a^q(x)dx \leq 2^{n+1}\varepsilon\int_Q V_a^q(x)dx$$

Por tanto al aplicar la desigualdad de Hölder con respecto a $Q_j$,

$$\int_{Q_j} V_a(x)u^2(x)dx \leq \left(\int_{Q_j} \left(u^2(x)\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{Q_j} V_a^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

se tiene que

$$\int_{Q_j} V_a^q(x)dx \leq 2^{n+1}\varepsilon a^{q-\frac{n}{2m}} \left( a^{-q+\frac{n}{2m}} \int_\Omega V_a(x)dx \right),$$

es decir

$$\int_{Q_j} V_a^q(x)dx \leq 2^{n+1}\varepsilon a^{q-n/2m} I, \tag{2.6}$$

donde

$$I = a^{-q+n/2m} \int_\Omega V_a^q(x)dx.$$

Recordando la desigualdad (2.5),

$$\left( \int_{Q_b} |u(x)|^{2p} \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_0 b^{2m-n/q} \int_{Q_b} \left( \sum_{|\beta|=m} \left| D^\beta u(x) \right|^2 + b^{-2m} |u(x)|^2 \right) dx,$$

para $|Q_b|^{\frac{1}{n}} = b$.

Sea $b_j$ el valor de $|Q_j|^{\frac{1}{n}}$. El hecho de no saber la posición de $b_j$ con respecto a $a$ se debe estudiar diferentes casos pues

$$b_j \in \left(-\infty, a^{-1/2m}\right) \cup \left[a^{-1/2m}, 2a^{-1/2m}\right) \cup \left[2a^{-1/2m}, +\infty\right)$$

1.) Sí $2a^{-1/2m} > b_j \geqslant a^{-1/2m}$ entonces $b_j^{-2m} \leq a$ y por (2.5) se tiene

$$\left( \int_{Q_j} |u(x)|^{2p} \, dx \right)^{1/p} \leq 2^m C_0 a^{-1+\frac{n}{2mq}} \int_{Q_j} \left( \sum_{|\beta|=m} \left| D^\beta u(x) \right|^2 + a\, |u(x)|^2 \right) dx. \tag{2.7}$$

2.) Si $b_j \geqslant 2a^{-1/2m}$, se puede dividir el cubo $Q_j$ varias veces y representarlo como una unión de cubos $Q_{j_k}$ con tamaño $b_{j_k}$ tal que

$$2a^{-1/2m} > b_{j_k} \geqslant a^{-1/2m}$$

porque:

Sea $Q_j = \bigcup_{k \in A} Q_{j_k}$ donde $A$ es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$, pero $b_{j_k} < 2a^{\frac{-1}{2m}}$, por tanto

$b_{j_k}^{-2m} < a$, así

$$\begin{aligned}
\left(\int_{Q_j} |u(x)|^{2p}\,dx\right)^{1/p} &= \left(\int_{\bigcup\limits_{k\in A} Q_{j_k}} |u(x)|^{2p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{k\in A}\int_{Q_{j_k}} |u(x)|^{2p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sum_{k\in A} 2^m C_0 a^{-1+\frac{n}{2mq}} \int_{Q_j}\left(\sum_{|\beta|=m}\left|D^\beta u(x)\right|^2 + a\,|u(x)|^2\right)dx,
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\left(\int_{Q_j} |u(x)|^{2p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \sum_{k\in A} 2^m C_0 a^{-1+\frac{n}{2mq}} \int_{Q_{j_k}}\left(\left|D^\beta u(x)\right|^2 + a\,|u(x)|^2\right)dx \\
&\leq 2^m card(A) C_0 a^{-1+\frac{n}{2mq}} \int_{Q_j}\left(\left|D^\beta u(x)\right|^2 + a\,|u(x)|^2\right)dx,
\end{aligned}$$

donde $card(A)$ es el cardinal del conjunto $A$. Se puede escribir el estimado anterior (2.7) para cada cubo $Q_{j_k}$ y la suma por encima de todos ellos. Esto suministra (2.7) para el cubo $Q_j$.

3.) Si $b_j < a^{-1/2m}$ y se cumple que $p \in \left[1, \dfrac{n}{n-2m}\right)$, entonces la siguiente desigualdad

$$\left(\int_{Q_j} |u(x)|^{2p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_0 a^{-1+n/2mq} \int_{Q_j} \sum_{|\beta|=m} \left|D^\beta u(x)\right|^2 dx., \tag{2.8}$$

es verdadera bajo la clase de funciones $u \in C^\infty(Q_j)$ tal que

$$\int_{Q_j} D^\beta u(x)dx = 0, \qquad 0 \leq |\beta| \leq m-1. \tag{2.9}$$

para la demostración ver [4], (página 291).

Finalmente como $\bigcup_{j=1}^{N} Q_j = K \subseteq \Omega$ , donde $K$ es el soporte de $V_a$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} V_a(x) \left|u(x)\right|^2 dx &= \int_{\bigcup_{j=1}^{N} Q_j} V_a(x) \left|u(x)\right|^2 dx \\
&\leq \sum_{j=1}^{N} \int_{Q_j} V_a(x) \left|u(x)\right|^2 dx.
\end{aligned}$$

Ahora nuevamente aplicando la desigualdad de Hölder en la última expresión, haciendo $f(x) = \left|u(x)\right|^2$ , y $g(x) = V_a(x)$ se obtiene,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} V_a(x) \left|u(x)\right|^2 dx &\leq \sum_{j=1}^{N} \int_{Q_j} V_a(x) \left|u(x)\right|^2 dx \qquad (2.10)\\
&\leq \sum_{j=1}^{N} \left( \int_{Q_j} \left|u(x)\right|^2 dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{Q_j} V_a(x)^q dx \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Por último recordando que, ver (2.7)

$$\int_{Q_j} V_a^q(x) dx \leq \varepsilon \left(2^{n+1}\right) a^{q-n/2m} I,$$

entonces

$$\left( \int_{Q_j} V_a^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{\frac{n+1}{q}} \varepsilon^{\frac{1}{q}} a^{1-\frac{n}{2mq}} I^{\frac{1}{q}},$$

y

$$\left( \int_{Q_j} \left|u(x)\right|^2 dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq L_{m,n,q} a^{-1+\frac{n}{2mq}} \int_{Q_j} \left( \left|D^{\beta} u(x)\right|^2 + a \left|u(x)\right|^2 \right) dx.$$

con $L_{m,n,q}$ una constante que depende de $m, n$ y $q$ tal que satisface:

$$L_{m,n,q} \geq 2^m card(A) C_0 a^{-1+\frac{n}{2mq}} \geq 2^m C_0 a^{-1+\frac{n}{2mq}}.$$

En la anterior suma se encuentra todos los casos que se estudiaron anteriormente es decir la posición de $\left|Q_j\right|^{\frac{1}{n}}$ con respecto a $a$.

Entonces (2.10) se vuelve a:

$$\int_\Omega V_a(x)\left|u(x)\right|^2 dx \le C_{m,n,q}(\varepsilon I)^{1/q}\sum_{j=1}^{N}\int_{Q_j}\left(\sum_{|\beta|=m}\left|D^\beta u(x)\right|^2 + a\left|u(x)\right|^2\right)dx,$$

con $C_{m,n,q} = 2^{\frac{n+1}{q}} L_{m,n,q}$.

Recordando que $(-\Delta)^m$ es elíptico, es decir

$$\begin{aligned}\left\langle(-\Delta)^m u, u\right\rangle_{L^2(\Omega)} &= \sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega \frac{\alpha!}{m!}\left|D^\alpha u(x)\right|^2 dx\\ &\ge a_0\sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega \left|D^\alpha u(x)\right|^2 dx, \qquad \text{para } a_0>0\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\int_\Omega V_a(x)\left|u(x)\right|^2 dx &= \int_{\bigcup Q_j} V_a(x)\left|u(x)\right|^2 dx\\ &\le \sum_{j=1}^{N}\int_{Q_j} V_a(x)\left|u(x)\right|^2 dx,\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}\int_\Omega V_a(x)\left|u(x)\right|^2 dx &\le C_{m,n,q}(\varepsilon I)^{1/q}\sum_{j=1}^{N}\int_{Q_j}\left(\sum_{|\beta|=m}\left|D^\beta u(x)\right|^2 + a\left|u(x)\right|^2\right)dx\\ &\le \frac{C_{m,n,q}}{a_0}\varepsilon^{1/q}I^{1/q}\left(\left\langle(-\Delta)^m u, u\right\rangle_{L^2(\Omega)} + a\left\langle u, u\right\rangle_{L^2(\Omega)}\right).\\ &\le \left\langle(-\Delta)^m u, u\right\rangle_{L^2(\Omega)} + a\left\langle u, u\right\rangle_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Como $\varepsilon$ es cualquier número positivo pequeño tomamos

$$1 = C_{m,n,q}a_0^{-1}(\varepsilon I)^{1/q}$$

por tanto se tiene

$$\varepsilon^{-1} = C_{m,n,q}^q a_0^{-q} I = R_{m,n,q} I \qquad \text{con} \quad R_{m,n,q} = C_{m,n,q}^q a_0^{-q}, \tag{2.11}$$

Asi

$$\int_{\Omega} V_a(x)\,|u(x)|^2\,dx - \langle(-\Delta)^m u, u\rangle_{L^2(\Omega)} \geq -a\,\langle u, u\rangle_{L^2(\Omega)}$$

es decir

$$\langle(-\Delta)^m u - V_a u, u\rangle_{L^2(\Omega)} \geq -a\,\langle u, u\rangle_{L^2(\Omega)}$$

Entonces gracias al Lema de Glazman, $N_a$ es acotado por el número de condiciones (2.9),

$$\int_{Q_j} D^{\beta} u(x)dx = 0, \qquad\qquad 0 \leq |\beta| \leq m-1$$

es decir

$$N_a \leq B_n N \leq B_n 2^{n+1} R_{m,n,q} I \leq A_{m,n,q} a^{-q+\frac{n}{2m}} \int_{\Omega} V_a^q(x)dx$$

con $A_{m,n,q} = B_n 2^{n+1} R_{m,n,q}$ y $B_n$ es la cota superior del número de condiciones (2.9).

■

Ahora la demostración del Teorema 2.1 es una consecuencia del Teorema 2.2 pues al aplicar el resultado de LIEB. E. H. y THIRRING. W. E. en [9], el cuál dice que

$$S\gamma = \gamma \int_0^{\infty} |E|^{\gamma-1} N_{-|E|}(V) d\,|E|\,,$$

con $E \leq 0$ y $N_{-|E|}(V)$ es el número de valores propios de $-\Delta + V$ que son menores que $E$.

Se tiene

$$S\gamma = \sum_{\lambda_j<0} |\lambda_j|^{\gamma} = +\gamma \int_0^{\infty} a^{\gamma-1} N_a da.$$

Por hipótesis $\gamma + \dfrac{n}{2m} > 1$ luego a partir de la propiedad Arquimediana existe $q > 1$ tal que

$$\gamma + \frac{n}{2m} > q > 1$$

Sí $\gamma - q + n/2m > 0$, entonces aplicando el Teorema 2.2, se tiene

$$\begin{aligned} S\gamma \ &\leq A_{m,n,q} \int_0^{\infty} a^{\gamma-1-q+n/2m} \int_{\Omega} V_a^q(x)dxda \\ &= A_{m,n,q} \int_0^{\infty} a^{\gamma-1-q+n/2m} \int_{sop(V_a)} V_a^q(x)dxda, \end{aligned}$$

y por definición de $V_a$ se tiene,

$$\begin{aligned}
S\gamma &\leq A_{m,n,q}\int_{sop(V_a)} V^q(x)dx\int_0^{V(x)} a^{\gamma-1-q+n/2m}da \\
&\leq A_{m,n,q}\int_\Omega V^q(x)dx\left[\frac{a^{\gamma-q+n/2m}}{\gamma-q+n/2m}\right]_0^{V(x)} \\
&\leq \frac{A_{m,n,q}}{\gamma-q+n/2m}\int_\Omega V^q(x)V(x)^{\gamma-q+n/2m}dx \\
&\leq K_{m,n,q}\int_\Omega V(x)^{\gamma+n/2m}dx
\end{aligned}$$

donde

$$K_{m,n,q}=\frac{A_{m,n,q}}{\gamma-q+\frac{n}{2m}} \text{ está bien definida pues } \gamma-q+\frac{n}{2m}>0.$$

Para los casos $0<\dfrac{n}{2m}+\gamma<1$, es decir $n\leq 2m$ hay contraejemplos a donde $S\gamma=+\infty$. Por tanto el siguiente potencial de Coulomb es decir $V(x)=V(|x|)$, definido como:

$$V(x)=\begin{cases}
\delta^{-2n-2k} & si \quad |x-x_0|\leq\delta^2, \\
|x-x_0|^{-n-k} & si \quad \delta^2\leq|x-x_0|<\delta, \\
0 & si \quad |x-x_0|>\delta.
\end{cases}$$

donde $x_0\in\mathbb{R}^n$ y $V$ es una función con soporte compacto.

Así $k>0$ es tal que $\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(\dfrac{n}{2m}+\gamma\right)<1$.

Entonces $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}V(x)dx\to\infty$ cuando $\delta\to 0$, ya que

$$\begin{aligned}
0\leq\int_{\mathbb{R}^n}V(x)dx &= \int_{|x-x_0|<\delta^2}V(x)dx+\int_{\delta^2<|x-x_0|<\delta}V(x)dx+\int_{|x-x_0|>\delta}V(x)dx \\
&= \int_{|x-x_0|<\delta^2}\delta^{-2n-2k}dx+\int_{\delta^2<|x-x_0|<\delta}|x-x_0|^{-n-k}\ dx+0
\end{aligned}$$

pero para la primera integral del termino de la derecha se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{|x-x_0|<\delta^2} \delta^{-2n-2k} dx &= Vol(|x-x_0| < \delta^2)\delta^{-2n-2k} \\
&= \delta^{2n}\delta^{-2n-2k} \\
&= \delta^{-2k}
\end{aligned}$$

donde $Vol(A)$ es la medida de Lebesgue del conjunto medible $A$.

Para la segunda integral trabajando en coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$ y conociendo que para $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $(r, \theta_1, \theta_2, ...\theta_{n-2}, \varphi) \in (0, \infty) \times (0, \pi]^{n-2} [0, 2\pi)$, por las formulas

$$\begin{aligned}
&x_1 = r \cos \theta_1 \\
&x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\
&x_{n-1} = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 ... \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} \\
&x_n = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 ... \sin \theta_{n-2} \sin \varphi
\end{aligned}$$

Entonces tenemos que $dx = r^{n-1}(\sin \theta_1)^{n-2}(\sin \theta_2)^{n-3} ... (\sin \theta_{n-2})\, dr d\theta$.

Escribiremos abreviadamente $x = r.\omega, \omega = (\omega_1, \omega_2, ...\omega_n)$, y se tiene que $|\omega| = 1$, que significa que $\omega$ pertenece a la esfera unitaria $\mathbb{S}^{n-1}$. Entonces $dx = r^{n-1} dr d\omega$ donde $d\omega$ es la medida sobre $\mathbb{S}^{n-1}$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(r.\omega) r^{n-1} d\sigma(\omega)\, dr d\sigma(\omega),$$

para cada punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $d\sigma(\omega)$ es el elemento de area de la esfera unidad $\mathbb{S}^{n-1}$.

Luego

$$\begin{aligned}
\int_{\delta^2<|x-x_0|<\delta} |x-x_0|^{-n-k}\ dx &= \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(r,\omega) r^{n-1} dr d\sigma(\omega) \\
&= C_n \int_{\delta^2<|x-x_0|<\delta} |x-x_0|^{-n-k}\, r^{n-1} dr \\
&= C_n \int_{\delta^2<r<\delta} r^{-n-k} r^{n-1} dr \\
&= C_n \int_{\delta^2<r<\delta} r^{-1-k} dr
\end{aligned}$$

pues $f(r,\omega) = |x-x_0|^{-n-k} = r^{-n-k}$ y $r \in \left(\delta^2, \delta\right)$, por consiguiente

$$\begin{aligned}
\int_{\delta^2<|x-x_0|<\delta} |x-x_0|^{-n-k}\ dx &= C_n \left.\frac{r^{-k}}{-k}\right|_{\delta^2}^{\delta} \\
&= C_n \frac{\delta^{-k}}{-k} + C_n \frac{\delta^{-2k}}{k}.
\end{aligned}$$

donde $C_n$ es la medida de Lebesgue de la esfera euclidiana.

En resumén

$$\int_{|x-x_0|<\delta^2} \delta^{-2n-2k} dx + \int_{\delta^2<|x-x_0|<\delta} |x-x_0|^{-n-k}\ dx = \delta^{-2k} - C_n \frac{\delta^{-k}}{k} + C_n \frac{\delta^{-2k}}{k}$$

por tanto si $\delta \to 0$ entonces

$$\begin{aligned}
\delta^{-2k} - C_n \frac{\delta^{-k}}{k} + C_n \frac{\delta^{-2k}}{k} &= \delta^{-2k}\left(1 + \frac{C_n}{k}\right) - C_n \frac{\delta^{-k}}{k} \\
&= \frac{1}{\delta^{2k}} \left(1 + \frac{C_n}{k} - \frac{\delta^k}{k}\right) \to +\infty
\end{aligned}$$

es decir

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} V(x) dx = +\infty,$$

lo que se quería concluir.

Por otro lado

$$\int_{\mathbb{R}^n} V(x)^{\gamma + \frac{n}{2m}} dx < \varepsilon, \quad \text{pues}$$

si $\delta$ es suficientemente pequeño es decir $\delta << 1$, ya que siguiendo un procedimiento análogo al caso anterior se tiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
0 \leq \int_{\mathbb{R}^n} V(x)^{\gamma+\frac{n}{2m}} dx &= \int_{|x-x_0|<\delta^2} V(x)^{\gamma+\frac{n}{2m}} dx + \int_{\delta^2<|x-x_0|<\delta} V(x)^{\gamma+\frac{n}{2m}} dx \\
&+ \int_{|x-x_0|>\delta} V(x)^{\gamma+\frac{n}{2m}} dx \\
&= \int_{|x-x_0|<\delta^2} \left(\delta^{-2n-2k}\right)^{\gamma+\frac{n}{2m}} dx \\
&+ \int_{\delta^2<|x-x_0|<\delta} \left(|x-x_0|^{-n-k}\right)^{\gamma+\frac{n}{2m}} dx + 0,
\end{aligned}
$$

para $\int_{|x-x_0|<\delta^2} \left(\delta^{-2n-2k}\right)^{\gamma+\frac{n}{2m}} dx$ se cumple que

$$
\begin{aligned}
\int_{|x-x_0|<\delta^2} \left(\delta^{-2n-2k}\right)^{\gamma+\frac{n}{2m}} dx &= \int_{|x-x_0|<\delta^2} \delta^{(-2n-2k)\left(\gamma+\frac{n}{2m}\right)} dx \\
&= \int_{|x-x_0|<\delta^2} \delta^{-2n\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\gamma+\frac{n}{2m}\right)} dx \\
&= \delta^{2n}\delta^{-2n\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\gamma+\frac{n}{2m}\right)} \\
&= \delta^{2n\left[1-\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\gamma+\frac{n}{2m}\right)\right]},
\end{aligned}
$$

pero $\delta^{2n\left[1-\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\gamma+\frac{n}{2m}\right)\right]} \to 0$ cuando $\delta \to 0$, pues $k$ es elegida de tal manera que $\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\gamma+\frac{n}{2m}\right) < 1$.

Además por cordenadas hiper-esféricas, con

$$
f(r,\omega) = |x-x_0|^{(-n-k\ )\left(\gamma+\frac{n}{2m}\right)} = r^{(-n-k\ )\left(\gamma+\frac{n}{2m}\right)}
$$

se tiene,

$$\begin{aligned}
\int_{\delta^2<|x-x_0|<\delta}\left(|x-x_0|^{-n-k}\right)^{\gamma+\frac{n}{2m}}dx &= \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(r,\omega)r^{n-1}drd\sigma(\omega)\\
&= \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} r^{(-n-k)\left(\gamma+\frac{n}{2m}\right)}r^{n-1}drd\sigma(\omega)\\
&= \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} r^{-n\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\gamma+\frac{n}{2m}\right)}r^{n-1}drd\sigma(\omega)\\
&= C_n\int_{\delta^2<|x-x_0|<\delta} r^{-n\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\gamma+\frac{n}{2m}\right)}r^{n-1}dr\\
&= C_n\delta^{1-\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\gamma+\frac{n}{2m}\right)} - C_n\delta^{2\left[1-\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\gamma+\frac{n}{2m}\right)\right]}
\end{aligned}$$

donde $C_n$ corresponde a la medida de Lebesgue de la esfera euclidiana $\mathbb{S}^{n-1}$.

Por lo tanto se concluye que

$$C_n\delta^{1-\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\gamma+\frac{n}{2m}\right)} - C_n\delta^{2\left[1-\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\gamma+\frac{n}{2m}\right)\right]} \to 0 \text{ cuando } \delta \to 0.$$

Finalmente

$$\int_{\mathbb{R}^n} V(x)^{\gamma+\frac{n}{2m}}dx = \delta^{2n\left[1-\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\gamma+\frac{n}{2m}\right)\right]} + C_n\delta^{1-\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\gamma+\frac{n}{2m}\right)} - C_n\delta^{2\left[1-\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\gamma+\frac{n}{2m}\right)\right]}$$

es decir

$$\int_{\mathbb{R}^n} V(x)^{\gamma+\frac{n}{2m}}dx < \varepsilon \text{ cuando } \delta << 1.$$

como $H_{m,V} = (-\Delta)^m - V$, luego

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_0}\left\langle H_{m,V}u,u\right\rangle_{L^2(\Omega)} &\geq \left\langle Pu,u\right\rangle_{L^2(\Omega)}\\
&:= \sum_{|\beta|=m}\int_\Omega \left|D^\beta u(x)\right|^2 dx - \int_\Omega V(x)\left|u(x)\right|^2 dx
\end{aligned}$$

un valor propio de $P$ cumple

$$\sum_{|\beta|=m}\int_\Omega \left|D^\beta u(x)\right|^2 dx - \int_\Omega V(x)\left|u(x)\right|^2 dx = \lambda\int_\Omega u^2(x)dx.$$

trabajando en el caso $m = 1, \ n = 1$.

Así el primer valor propio negativo $\lambda_1$ se define como,

$$\lambda_1 = \inf_{u \in C_0^\infty(\Omega)\setminus\{0\}} \int_\Omega \left( \sum_{|\beta|=m} \left| D^\beta u(x) \right|^2 - V(x)u^2(x) \right) dx \left( \int_\Omega u^2(x)dx \right)^{-1}$$

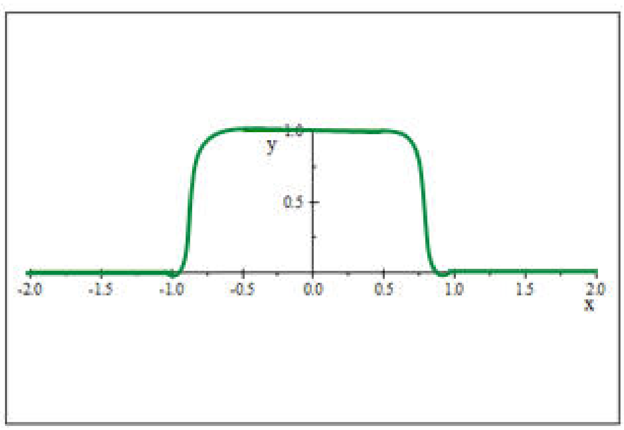
donde se puede escribir

$$\lambda_1 \leq \int_\Omega \left( \sum_{|\beta|=m} \left| D^\beta u_0(x) \right|^2 - V(x)u_0^2(x) \right) dx \left( \int_\Omega u_0^2(x)\, dx \right)^{-1} \leq \int_{\mathbb{R}} u_0'^2(x)dx - \int_{\mathbb{R}} V(x)dx$$

si $u_0$ es una función de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ que se define como: ( Ver gráfica ),

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{Sí } |x - x_0| > 1, \\ 1 & \text{Sí } |x - x_0| \leq \frac{1}{2}, \\ \varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}) & \text{Sí } \frac{1}{2} < |x - x_0| < 1, \end{cases}$$

y tal que $\int_{\mathbb{R}} u_0^2(x)dx = 1$.




Por consiguiente , $\lambda_1 \to -\infty$ y $S\gamma \to +\infty$ cuando $\delta \to 0$, ya que

$$\begin{aligned} S\gamma &= \sum_{j=1}^{N} |\lambda_j|^\gamma \\ &= |\lambda_1|^\gamma + \sum_{j=2}^{N} |\lambda_j|^\gamma \end{aligned}$$

Por tanto $S\gamma \to +\infty$ cuando $\delta \to 0$.

Así la prueba está completa.

## 2.2. Caso cuando el abierto $\Omega$ se intersecta con una esfera

El siguiente teorema es un caso concreto del teorema 2.1 donde la versión general se ubica en [4].

**Teorema 2.3** *Sea $\Omega$ un dominio en $\mathbb{R}^n$ tal que la intersección con la esfera*

$$|x - x_0| = R \qquad \textit{para} \qquad R > 1$$

*tiene un diámetro que no excede $AR^\sigma$ con $\sigma < 1$.*
*Sea $r \geq 0$, $\gamma > 0$, $\gamma + \dfrac{n+r}{2m} > 1 + \dfrac{r}{n}$. Entonces*

$$S\gamma \leq C_{m,n,\gamma,s} \int_\Omega V(x)^{\gamma+(n+r)/2m} \left|x - x_0\right|^{\sigma r} dx$$

*para $x_0 \in \mathbb{R}^n$.*

La prueba para este teorema se realiza analogamente a la prueba del teorema 2.1, se muestra inicialmente que

$$N_a \leq C_{m,n} I, \text{ donde } I = a^{-q+n/2m} \int_\Omega V_a^q(x) dx.$$

y después se repite la prueba del teorema 2.1.

Se recuerda que si el punto $x_0$ está fuera de la adherencia del dominio $\Omega$, entonces el estimado en el teorema 2.1 es válido para $\gamma + \dfrac{n}{2m} > 1$.

# Bibliografía


[1] CWIKEL, M. Ann. of Math. 106 (1977) 93.

[2] EGOROV, Y. V. EL AIDI, M. *Spectre negatif d'*un *opérateur elliptique avec des conditions au bords de Robin.* Publ. Mat. **45** (2001), 125-148.

[3] EGOROV, Y. V. KONDRATIEV, V. A.. *On moments of negative eigenvalues of an elliptic operator. Operator theory: Advances and Applications, Vol **78**, Birkhauser Verlag Basel. Seitzarland, 1995. Pág 119-126.*

[4] EGOROV, Y. V. KONDRATIEV, V. A.. *On spectral theory of elliptic operator. Oper. Theory Adv. Appl. **89**, Birkhauser, Basel.1996.*

[5] FERNANDEZ, P. J. *Medida e integracao. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNP, 1976.*

[6] GLASSER, V. GROSSE, H. MARTIN, A. *Bounds of the number of einvalues of the Schrödinger operator,* CERN prepint TH2432 (1977).

[7] GLAZMAN, I. M. *Direct methods of qualitative spectral analysis of singular differential operators ( in Russian ),* Gosudarstv, Izdat. Fiz - Matlit, Moscow, 1963. English translation: Daniel Davey and Co, New York, 1966.

[8] HUNDERTMART, D. THOMAS, L. E, LIEB, E. H. *A sharp bound for an eigenvalue moment of the one - dimensional Schrödinger operator.* Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 719 -731.

[9] LIEB, E. H. Kinetic Energy bounds and their applications to the stability of matter is *Schrödinger operators*, Lectures notes in Physics, **345** (1989), 371 - 382.

[10] LIEB, E. H. *On characteristic exponents in turbulence,* Comn. Math. Phys., **92** (1984), 473-480.

[11] LIEB, E. H. THIRRING. W., *Bounds for the kinetic energy of ferminous which proves the stability of matter.* Phys. Rev. Lett **35**,1975.

[12] LIEB, E. H. THIRRING. W., Phys. REv. Lett. **35** (1975) 687. See Phys. REv. Lett. **35** (1975) 1116 for errata. Also E. H. Lieb, Rev. Mod. Phys. **48** (1976) 553.

[13] LIEB, E. H. THIRRING. W. E. *Studies in mathematical physics, Essays in honor of V.* Bargmann ( Princeton Univ. Press, Princeton, N. J.,1976.

[14] LIEB, E. H. Bull. Amer. Mathc soc, **82**. (1976) 751.

[15] PERAL ALONSO, Ireneo. *Primer curso de ecuaciones en derivadas parciales.* Addison-Wesley, Universidad Autónoma de Madrid, Wilmington, Delaware, E.U.A.1995.

[16] REED, M. BARRY, S. *Methods of modern mathematical physics, Functional analysis.* Academic press, inc. San Diego, California. 1980.

[17] ROSENBLUM, G. V. *The distribution of the discrete spectrum for singular differential operators.* Isvestia Math. **164** No 1 (1976) 75.

[18] RUELLE, D. *Large volume limit of the distribution of characteristic exponentes in trubulence*, Comm. Math.,**87**(1982), 287 - 302.