SOBRE UNA PERTURBACIÓN DE TIPO DISIPATIVO DE LA ECUACIÓN DE BENJAMÍN-ONO.

Olga Lucía Escobar Medina.
Código:830255

Trabajo de grado presentado como requisito para optar
al título de Magister en Matemáticas

Director
Guillermo Rodríguez Blanco

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Matemáticas
Bogotá, 2010

Índice general

INTRODUCCIÓN

En este trabajo trataremos con el problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x - Hu_{xx} - (Hu_x + u_{xx}) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), \end{aligned} \tag{1}$$

donde $x \in \mathbb{R}$, $t \in (0, +\infty)$, y

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} v.p.\frac{1}{x} * f = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} \frac{f(y)}{x-y}\, dy \tag{2}$$

es la transformada de Hilbert. Más precisamente, estamos interesados en estudiar propiedades de las soluciones reales de (1) tales como el buen planteamiento local y global en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ y en los espacios de Sobolev con pesos $\mathcal{F}_{s,r}$. (Véase **Definición 1**).
La ecuación diferencial parcial (E.D.P.) en (1) es una perturbación esencialmente disipativa de la ecuación de Benjamin-Ono (B-O) y fue propuesta por Qian-Chen-Lee como un modelo para ondas internas en un sistema de dos fluidos de diferente densidad, donde u es la evolución de la interfase originada por la interacción de los dos fluidos (véase [8] o [3] para mayor información sobre este asunto). En (1), el transporte es determinado por los dos primeros términos, la dispersión por el tercer término, la disipación por el quinto y la inestabilidad por el cuarto.
El estudio del buen planteamiento en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ para la B-O ha sido ampliamente tratado. Los principales resultados a este respecto pueden ser encontardos en Iorio [6], Ponce[7] y Tao [10]. El estudio del buen planteamiento en los espacios con peso $\mathcal{F}_{s,r}$ fue realizado por Iorio [5], donde se obtienen resultados sorprendentes tales como: "Si la solución u de la B-O es muy regular y tiene buena decaída en cierto instante t, entonces, u es identicamente cero".

Aquí, obtenemos un resultado semejante para la ecuación (1), en efecto se demuestran los siguientes resultados,

Teorema 0.1. *El problema (1), es globalmente bien planteado en* $H^s(\mathbb{R})$, *para* $s \geq 1$.

Teorema 0.2. *Sea* $T > 0$ *y supongase* $u \in C([0,T];\mathfrak{F}_3)$ *es una solución de (1). Entonces* $u(t) = 0$ *para toda* $t \in [0,T]$.

Ecuaciones de este tipo han sido recientemente estudiadas por ejemplo en Alvarez [1] obteniendo resultados semejantes. Sin embargo, el tratamiento en los espacios de Sobolev H^s de nuestros métodos dan una mejor estimativa de regularización. De esta estimativa obtenemos una forma más simple de hallar las estimativas apriori para las normas $||u||_s$, apartir de una estimativa apriori para $||u||_1$, a diferencia del trabajo de Alvarez en el que se utilizan las ideas de Bona-Scott en [2], que es un resultado engorroso y de díficil aplicación.
La siguiente notación será útil en la lectura del presente trabajo:

Definición 1.

1. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, *notará al espacio de Schwartz*
2. $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, *notará al espacio de las distribuciones temperadas*
3. *Para* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ *notará la transformada de Fourier de* f *y* $\check{f}$ *notará la transformada inversa de Fourier de* f
4. *Para* $s \in \mathbb{R}$, *el espacio* $H^s(\mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \mid (1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})\}$ *es el espacio de Sobolev de orden* s *y és un espacio de Hilbert con el producto interno* $\langle f, g\rangle_s = \int_{-\infty}^{\infty}(1+\xi^2)^s\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi$
5. *Para* $s \in \mathbb{R}$, $r = 1, 2, ...$, *el espacio* $\mathcal{F}_{s,r} := H^s(\mathbb{R}) \cap L^2_r(\mathbb{R})$, *donde* $L^2_r(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid x^r f \in L^2(\mathbb{R})\}$ *es un espacio de Banach con la norma* $\|f\|_{s,r} = \|f\|_s + \|f\|_{L^2_r(\mathbb{R})}$
6. *Si* X, Y *son espacios de Banach,* $\mathcal{B}(X;Y)$ *es el espacio de los operadores lineales continuos de* X *en* Y *dotado de la norma* $\|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{X};\mathcal{Y})} = \sup_{\|x\|=1}\|Tx\|$. *Si* $X = Y$ *escribiremos* $\mathcal{B}(X)$ *en vez de* $\mathcal{B}(X;Y)$.

7. Escribiremos

$$A = H\partial_x^2 + H\partial_x + \partial_x^2 \tag{3}$$
$$b(\xi) = i\xi|\xi| + |\xi| - |\xi|^2 \tag{4}$$
$$E(t)\varphi = e^{tA}\varphi = (e^{b(\xi)t}\widehat{\varphi})\check{}, \tag{5}$$

donde, $\xi \in \mathbb{R}$, $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$ *y* H *es dado por (2)*

8. $\Lambda^s = (1 - \partial_x^2)^{\frac{s}{2}}$

9. $[A, B]$ *notará el conmutador de los operadores* A *y* B

Capítulo 1

La Ecuación Lineal

Este capítulo lo dedicaremos al estudio de la solución de la ecuación lineal asociada a (1), que por comodidad escribiremos:

$$\begin{aligned} u_t - Au &= 0, \\ u(0) &= \varphi, \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde, A es dado por (3) y $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$ o $\varphi \in \mathcal{F}_{s,r}$.

Teorema 1.1. *1. Sea E es definido por (4) y (5), $E : [0, \infty) \longrightarrow \mathcal{B}(H^s(\mathbb{R}))$ es un C^0-semigrupo en $H^s(\mathbb{R})$. Además,*

$$\|E(t)\|_{\mathcal{B}(H^s(\mathbb{R}))} \leq e^t \tag{1.2}$$

2. Sea $\lambda \in [0, \infty)$. Entonces, $E(t) \in \mathcal{B}(H^s(\mathbb{R}); H^{s+\lambda}(\mathbb{R}))$, para todo $t > 0$, $s \in \mathbb{R}$. Además,

$$\|E(t)\varphi\|_{s+\lambda} \leq C_\lambda \left(e^t + \frac{1}{t^{\frac{\lambda}{2}}} \right) \|\varphi\|_s, \tag{1.3}$$

para toda $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$, donde C_λ es una constante que depende sólo de λ.

Demostración. Como $|\xi| - \xi^2 < \frac{1}{2}$, si $0 < \xi < 1$, entonces $e^{2t(|\xi| - \xi^2)} \leq e^t$ y,

$$\begin{aligned} \|E(t)\varphi\|_s^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \xi^2)^s |\widehat{E(t)\varphi}\,(\xi)\,|^2 d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \xi^2)^s e^{2t(|\xi| - |\xi|^2)} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \leq e^t \|\varphi\|_s^2, \end{aligned}$$

para cada $\xi \in \mathbb{R}$.
Para la segunda parte, sea $\lambda > 0$ entonces,

$$\begin{aligned}\|E(t)\varphi\|_{s+\lambda}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1+\xi^2)^{s+\lambda} |\widehat{E(t)\varphi(\xi)}|^2 d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1+\xi^2)^{s+\lambda} e^{2(i\xi|\xi|+|\xi|-\xi^2)} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1+\xi^2)^{s+\lambda} e^{2t(|\xi|-\xi^2)} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \sup_{\xi} \left\{ (1+\xi^2)^{\lambda} e^{2t(|\xi|-\xi^2)} \right\} \|\varphi\|_s^2.\end{aligned}$$

Para estudiar el sup, veamos que,

$$\begin{aligned}(1+\xi^2)^{\lambda} e^{2t(|\xi|-\xi^2)} &\leq C_\lambda (1+\xi^{2\lambda}) e^{2t(|\xi|-\xi^2)} \\ &\leq C_\lambda (e^{2t(|\xi|-\xi^2)} + \xi^{2\lambda} e^{2t(|\xi|-\xi^2)}) \\ &\leq C_\lambda (e^t + \xi^{2\lambda} e^{2t(|\xi|-\xi^2)}) \\ &\leq C_\lambda (e^t + \sup_{\xi} \xi^{2\lambda} e^{2t(|\xi|-\xi^2)}),\end{aligned}$$

ahora definamos

$$f(\xi) = \xi^{2\lambda} e^{2t(|\xi|-\xi^2)} = \xi^{2\lambda} e^{-2t\xi^2(1-\frac{1}{\xi})}, \quad para \quad \xi \geq 0.$$

Si $\xi > 2$ entonces $1 - \frac{1}{\xi} > \frac{1}{2}$ y se tiene que,

$$\begin{aligned}-2t\xi^2 \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) &< -t\xi^2 \\ \xi^{2\lambda} e^{-2t\xi^2\left(1-\frac{1}{\xi}\right)} &\leq \xi^{2\lambda} e^{-t\xi^2}\end{aligned}$$

y si $0 \leq \xi < 2$ entonces

$$\begin{aligned}\xi^{2\lambda} e^{-2t\xi^2\left(1-\frac{1}{\xi}\right)} &= \xi^{2\lambda} e^{2t(\xi-\xi^2)} \\ &\leq 2^{2\lambda} e^{2t(\xi-\xi^2)} \leq 4^{\lambda} e^t.\end{aligned}$$

El razonamiento anterior implica que

$$\begin{aligned}\xi^{2\lambda} e^{2t(|\xi|-\xi^2)} &= C_\lambda \left(e^t + \sup_{|\xi|\geq 2} \xi^{2\lambda} e^{-t\xi^2} \right) \\ &= C_\lambda \left(e^t + \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \xi^{2\lambda} e^{-t\xi^2} \right).\end{aligned}$$

Como

$$\xi^{2\lambda} e^{2t(\xi-\xi^2)} \leq C_\lambda \left(e^t + \frac{1}{t^\lambda} \right)$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
\|E(t)\varphi\|_{s+\lambda}^2 &\leq \sup_\xi (1+\xi^2)^\lambda e^{2t(|\xi|-\xi^2)} \|\varphi\|_s^2 \\
&\leq C_\lambda \left(e^t + \frac{1}{t^\lambda} \right) \|\varphi\|_s^2
\end{aligned}$$

probando asi (1.3). □

Proposición 1.2. *La única solución de (1.1) es*

$$u(t) = E(t)\varphi. \tag{1.4}$$

Es decir, la aplicación $t \in (0, +\infty) \longmapsto u(t) = E(t)\varphi \in H^s(\mathbb{R})$ es la única que satisface:

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - Au(t) \right\|_{s-2} = 0. \tag{1.5}$$

Demostración. Observe que,

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - Au(t) \right\|_{s-2}^2 \\
= \ & \int_{-\infty}^{+\infty} (1+\xi^2)^{s-2} \left| e^{tb(\xi)} \left(\frac{e^{hb(\xi)} - 1}{h} - (i\xi|\xi| + |\xi| - \xi^2) \right) \right|^2 |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\
= \ & \int_{-\infty}^{+\infty} (1+\xi^2)^{s-2} e^{2t(|\xi|-\xi^2)} \left| \frac{e^{hb(\xi)} - 1}{h} - (i\xi|\xi| + |\xi| - \xi^2) \right|^2 |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\
\leq \ & \int_{-\infty}^{+\infty} (1+\xi^2)^{s-2} e^{2t(|\xi|-\xi^2)} (|i\xi|\xi| + |\xi| - \xi^2| + |i\xi|\xi| + |\xi| - \xi^2|)^2 |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\
\leq \ & \int_{-\infty}^{+\infty} (1+\xi^2)^{s-2} e^{2t(|\xi|-\xi^2)} 4(|i\xi|\xi| + |\xi| - \xi^2|)^2 |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\
\leq \ & \int_{-\infty}^{+\infty} (1+\xi^2)^{s-2} e^t (1+\xi^2)^2 |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\
\leq \ & \int_{-\infty}^{+\infty} (1+\xi^2)^s e^t |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\
\leq \ & C\|\varphi\|_s^2.
\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^{hb(\xi)}-1}{h}-(i\xi|\xi|+|\xi|-\xi^2)\right)=0,$$

el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue implica (1.5).

Para la unicidad, sean u, $v\in C([0,T];H^s(\mathbb{R}))$ soluciones del problema (1.1) con respectivos datos iniciales φ y $\psi\in H^s(\mathbb{R})$. Entonces, $w(t)=u(t)-v(t)$ satisface (1.1) con dato inicial $w(0)=\varphi-\psi$, como $H\partial_{xx}$ es un operador antisimétrico y $|\xi|-\xi^2\leq\frac{1}{4}<1$ tenemos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_{s-2}^2 &= \langle w, Hw_x+Hw_{xx}+w_{xx}\rangle_{s-2}\\
&= \langle w, Hw_x\rangle_{s-2}+\langle w, Hw_{xx}\rangle_{s-2}+\langle w, w_{xx}\rangle_{s-2}\\
&= \langle \Lambda^{s-2}w, \Lambda^{s-2}Hw_x\rangle_0+\langle \Lambda^{s-2}w, \Lambda^{s-2}w_{xx}\rangle_0\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}(1+\xi^2)^{s-2}[\widehat{w}\overline{|\xi|\widehat{w}}+\widehat{w}\overline{(-\xi^2)\widehat{w}}]d\xi\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}(1+\xi^2)^{s-2}[|\xi|-\xi^2]|\widehat{w}|^2d\xi\\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty}(1+\xi^2)^{s-2}|\widehat{w}|^2d\xi\\
&= \|w\|_{s-2}^2.
\end{aligned}$$

Asi,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_{s-2}^2\leq\|w\|_{s-2}^2,$$

que junto con la desigualdad de Gronwall implica la unicidad. $\square$

Nuestra intuición nos llevaría a pensar que $u(t)=E(t)\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, si $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, desafortunadamente esto no ocurre. Para ver esto, estudiaremos el problema (1.1) en los espacios de Sobolev con peso $\mathcal{F}_{s,r}=H^s(\mathbb{R})\cap L_r^2(\mathbb{R})$, pues las normas de estos espacios forman un sistema fundamental de seminormas para $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (véase Reed-Simon vol I [9]). Comenzaremos esta labor con:

Lema 1.3. *Sea* $F(t,\xi) = e^{tb(\xi)}$ *donde* $b(\xi) = i\xi|\xi| + |\xi| - |\xi|^2$. *Entonces,*

$$\partial_\xi F(t,\xi) = t(2i|\xi| + sgn(\xi) - 2\xi)F(t,\xi) \tag{1.6}$$

$$\partial_\xi^2 F(t,\xi) = 2t\delta + [2t(isgn(\xi) - 2) + t^2(2i|\xi| + sgn(\xi) - 2|\xi|)^2]F(t,\xi) \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned}\partial_\xi^3 F(t,\xi) &= 2t\delta' + 4it\delta + [t^2(4\xi + 6i) + t^2 sgn(\xi)(-28i\xi - 8) + t^3(2i|\xi| \\ &+ sgn(\xi) - 2|\xi|)^3]F(t,\xi)\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}\partial_\xi^4 F(t,\xi) &= 2t\delta'' + 4it\delta' + (2t^3 - 16t^2)\delta + [t^2(4 - 28isgn(\xi)) + t^3[((40 + 50i)\xi^2 \\ &- 104i\xi - 14)sgn(\xi)(112i(\xi)^2 + 8\xi + 12i)] + t^4(2i|\xi| \\ &+ sgn(\xi) - 2|\xi|)^4]F(t,\xi).\end{aligned} \tag{1.9}$$

Además, para $j \geq 4$ *la* j*-ésima derivada de* $F(t,\xi)$ *tiene la forma:*

$$\begin{aligned}\partial_\xi^j F(t,\xi) &= 2t\delta^{(j-2)} + 4ti\delta^{(j-3)} + \sum_{k=0}^{j-4} p_k(t)\delta^{(k)} \\ &+ \sum_{k=0}^{j-1} t^k[q_k(\xi) + sgn(\xi)s_k(\xi)]F(t,\xi) + t^j[2i|\xi| + sgn(\xi) - 2\xi]^j F(t,\xi)\end{aligned} \tag{1.10}$$

donde δ *es la función delta de Dirac,* $p_k(t)$, $q_k(\xi)$ *y* $s_k(\xi)$ *son polinomios tales que* $grad(p_k(t)) \leq j-1$, $grad(q_k(\xi)) \leq k-1$ *y* $grad(s_k(\xi)) \leq k-1$.

Demostración. Un cálculo directo prueba (1.6) - (1.9). El principio de inducción nos permite obtener (1.10). ☐

Teorema 1.4. ***a.*** *Sea* E *es definido por (4) y (5),* $E : [0,\infty) \to \mathcal{B}(\mathcal{F}_r)$ *es un* C^0*-semigrupo, si* $r = 0, 1$, *y satisface que*

$$\|E(t)\varphi\|_{\mathcal{F}_r} \leq e^t P_r(|t|)\|\varphi\|_{\mathcal{F}_r}, \tag{1.11}$$

donde P_r *es un polinomio de grado* r *con coeficientes positivos.*

b. *Si* $r \geq 2$ *y* $\varphi \in \mathcal{F}_r$, $E \in C([0,\infty); \mathcal{F}_r)$, *si y sólo si,*

$$(\partial_\xi^j \widehat{\varphi})(0) = 0, \qquad j = 0, 1, 2, ..., r-1. \tag{1.12}$$

En este caso, también se tiene una estimación como la de (1.11).

Demostración. La parte **a.** del teorema es consecuencia de

$$\begin{aligned}\|E(t)\varphi\|_0^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{(i\xi|\xi|+|\xi|-\xi^2)t}\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\ &\le \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-2t(\xi^2-|\xi|)}||\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\ &\le e^t\|\varphi\|_0^2,\end{aligned}$$

y de,

$$\begin{aligned}
& \|E(t)\varphi\|_1^2 + \|E(t)\varphi\|_{L_1^2}^2 \\
\le\ & e^{2t}\|\varphi\|_1^2 + \int_{-\infty}^{+\infty}(1+x^2)|E(t)\varphi(x)|^2 dx \\
\le\ & e^{2t}\|\varphi\|_1^2 + \int_{-\infty}^{+\infty}|E(t)\varphi(x)|^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty}|xE(t)\varphi(x)|^2 dx \\
\le\ & e^{2t}\|\varphi\|_1^2 + e^{2t}\|\varphi\|_0^2 + \int_{-\infty}^{+\infty}|\partial_\xi \widehat{E(t)\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\
\le\ & e^{2t}\|\varphi\|_1^2 + e^{2t}\|\varphi\|_0^2 + \int_{-\infty}^{+\infty}|\partial_\xi e^{t(i\xi|\xi|+|\xi|-\xi^2)}\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\
\le\ & e^{2t}\|\varphi\|_1^2 + e^{2t}\|\varphi\|_0^2 + \int_{-\infty}^{+\infty}|\partial_\xi F(t,\xi)\widehat{\varphi}(\xi) + F(t,\xi)\partial_\xi\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\
\le\ & e^{2t}\|\varphi\|_1^2 + e^{2t}\|\varphi\|_0^2 + \int_{-\infty}^{+\infty}|\partial_\xi F(t,\xi)\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty}|F(t,\xi)\partial_\xi\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\
\le\ & e^{2t}\|\varphi\|_1^2 + e^{2t}\|\varphi\|_0^2 \\
+\ & \int_{-\infty}^{+\infty}|(t(2i|\xi| + sgn(\xi) - 2\xi))F(t,\xi)\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty}|F(t,\xi)\partial_\xi\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\
\le\ & e^{2t}\|\varphi\|_1^2 + e^{2t}\|\varphi\|_0^2 + \\
+\ & \int_{-\infty}^{+\infty}|(t(2i|\xi| + sgn(\xi) - 2\xi)F(t,\xi))\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi + \|E(t)(x\varphi)\|_0^2 \\
\le\ & e^{2t}\|\varphi\|_1^2 + e^{2t}\|\varphi\|_0^2 + t^2\int_{-\infty}^{+\infty}|(sgn(\xi)-2\xi) + 2i|\xi||^2|\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi + e^{2t}\|x\varphi\|_0^2 \\
\le\ & e^{2t}\|\varphi\|_1^2 + e^{2t}(\|\varphi\|_0^2 + \|x\varphi\|_0^2) + t^2\int_{-\infty}^{+\infty}((4\xi^2 + (sgn(\xi)-2\xi)^2))|\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\
\le\ & e^{2t}\|\varphi\|_1^2 + e^{2t}\|\varphi\|_{L_2^1} + t^2\int_{-\infty}^{+\infty}(8\xi^2 - 4|\xi| + 1)|\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \; e^{2t}\|\varphi\|_{\mathcal{F}_1}^2 + t^2 \int_{-\infty}^{+\infty} C(\xi^2+1)|\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi = e^{2t}\|\varphi\|_{\mathcal{F}_1}^2 + Ct^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2+1)|\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \; e^{2t}\|\varphi\|_{\mathcal{F}_1}^2 + Ct^2\|E(t)\varphi\|_{H^1}^2 \leq e^{2t}\|\varphi\|_{\mathcal{F}_1}^2 + Ct^2 e^{2t}\|\varphi\|_{H^1}^2 \\
&\leq \; Ce^{2t}(1+t^2)\|\varphi\|_{\mathcal{F}_1}^2 \leq Ce^{2t}p_1^2(|t|)\|\varphi\|_{\mathcal{F}_1}^2.
\end{aligned}
$$

Luego,

$$\|E(t)\varphi\|_{\mathcal{F}_1} \;\; \leq \;\; Ce^t p_1(|t|)\|\varphi\|_{\mathcal{F}_1}$$

que prueba (1.11).
La parte **b.** del teorema, es análoga a la anterior junto con el **Lema 1.3**. $\square$

Nótese que la unicidad del problema (1.1) en $\mathcal{F}_r$ es una consecuencia de la teoría en $H^s(\mathbb{R})$.

Teorema 1.5. *Sea $\varphi \in \mathcal{F}_r$ con $r \in \mathbb{N}$. Si $r = 0, 1$ la solución única de (1.1) en $\mathcal{F}_r$ está dada por $u(t) = E(t)\varphi$. Si $r \geq 2$, (1.1) tiene una solución en $\mathcal{F}_r$ si y sólo si (1.12) se cumple. En este caso la solución es única y está dada por $u(t) = E(t)\varphi$.*

Capítulo 2

Teoria Local en $H^s(\mathbb{R})$

En este capítulo estudiaremos la teoría local $H^s(\mathbb{R})$ del problema (1). Es decir, demostraremos que el problema (1) es localmente bien puesto en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ y $\mathcal{F}_{1,1}(\mathbb{R})$.

Teorema 2.1. *Si $s > \frac{1}{2}$, el problema (1) es equivalente a la ecuación integral:*

$$u(t) = E(t)\varphi - \frac{1}{2}\int_0^t E(t-t^{'})\partial_x u^2(t^{'})dt^{'} \tag{2.1}$$

donde $E(t)$ es definida por (4) y (5). Es decir, si $u \in C([0,T_s]; H^s(\mathbb{R}))$ para $s > \frac{1}{2}$, es una solución de (1) en $H^{s-2}(\mathbb{R})$ entonces u satisface (2.1). De manera reciproca, si $u \in C([0,T_s]; H^s(\mathbb{R}))$, para $s > \frac{1}{2}$, es una solución de (2.1) entonces $u \in C^1([0,T_s]; H^{s-2}(\mathbb{R}))$ y satisface (1) con la derivada dada por:

$$\lim_{h\to 0}\left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - Au(t) + \frac{1}{2}(\partial_x u^2)(t)\right\|_{s-2} = 0. \tag{2.2}$$

Demostración. La primera parte de la prueba es consecuencia del método de variación de párametros y de observar que el término no lineal ∂_x^2 tiene sentido, pues puede considerarse como una distribución temperada, ya que u^2 es continua y se anula en el infinito para $s > \frac{1}{2}$, en virtud del lema de Sobolev. La segunda parte se obtiene al reemplazar la u de la ecuación integral (2.1) en la parte derecha de (2.2) y luego usar las propiedades del semigrupo junto con el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, para más detalles vea [5]. $\square$

Teorema 2.2. *Sea $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$, $s > \frac{1}{2}$. Entonces, existen $T_s = T(\|\varphi\|_s) > 0$ y $u \in C([0,T_s]; H^s(\mathbb{R}))$ solución de (1).*

Demostración. La idea es aplicar el principio de contracción de Banach a la función definida por la parte derecha de (2.1) es un espacio adecuado. Con esto en mente, sean $M > 0$ y

$$(Af)(t) = E(t)\varphi - \frac{1}{2}\int_0^t E(t-t^{'})\partial_x f^2(t^{'})dt^{'} \tag{2.3}$$

definida en el espacio métrico completo

$$\mathfrak{X} = \{f \in C([0,T_s]; H^s(\mathbb{R})) \ \mid \ \|Af(t) - E(t)\varphi\|_s \leq M, \quad t \in [0,T]\} \tag{2.4}$$

con la métrica dada por:

$$d(f,g) = \|f-g\|_{s,\infty} = \sup_{t\in[0,T_s]} \|f(t)-g(t)\|_s.$$

La prueba es consecuencia de observar que:

1. Si $f \in \mathfrak{X}(T)$ entonces $Af \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$. Esto es consecuencia de las propiedades de semigrupo E y del teorema de convergencia dominada de Lebesgue.

2. Existe $T > 0$ tal que $A(\mathfrak{X}_s(T)) \subset \mathfrak{X}_s(T)$. Para $u \in \mathfrak{X}_s(T)$ de (1.3) junto la desigualdad del valor medio se tiene:

$$\begin{aligned} \|(Au)(t) - E(t)\varphi\|_s &\leq \frac{1}{2}\int_0^t \left\|E(t-\tau)\partial_x u^2(\tau)\right\|_s d\tau \\ &\leq C\left(M^2 + e^{2T}\|\varphi\|_s^2\right)\left(e^T - 1 + T^{\frac{1}{2}}\right). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Escogiendo $T > 0$ de tal manera que el lado derecho de (2.5) sea menor que M se obtiene lo buscado.

3. Veamos que existe $T > 0$ tal que A es una contracción en $\mathfrak{X}(T)$. En efecto,

$$\begin{aligned} \|(Au)(t) - (Av)(t)\|_s &\leq \frac{1}{2}\int_0^t \left\|E(t-\tau)(u^2)_x - (v^2)_x(\tau)\right\|_s d\tau \\ &\leq C\left(M + e^T\|\varphi\|_s\right)\left(e^T - 1 + T^{\frac{1}{2}}\right)\|u(t)-v(t)\|_{s,\infty} \\ &\leq C\left(M + e^T\|\varphi\|_s\right)\left(Te^T + T^{\frac{1}{2}}\right)\|u(t)-v(t)\|_{s,\infty}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Eligiendo $T > 0$ tal que $C(M + e^T\|\varphi\|_s)(Te^T + T^{\frac{1}{2}}) < 1$, resulta asi que A es una contracción sobre $\mathfrak{X}(T)$.

De **1. - 3.** se sigue el resultado. $\square$

Teorema 2.3. *El problema (1) es* ***localmente bien puesto*** *en* $H^s(\mathbb{R})$*, para* $s > \frac{1}{2}$*. Es decir, para* $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$ *existen* $T > 0$ *y una única* $u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0,T]; H^{s-2}(\mathbb{R}))$ *que satisface (1). Además, la aplicación* $\varphi \in H^s(\mathbb{R}) \mapsto u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$ *es continua en el siguiente sentido: Sean* $\varphi_n \in H^s(\mathbb{R}),\ \ n = 1, 2, 3, ...,$ *tales que* $\varphi_n \to \varphi$ *en* H^s *y* $u_n \in C([0,T_n]; H^s(\mathbb{R}))$ *soluciones de (1) con* $u_n(0) = \varphi_n$*. Entonces, las soluciones* u_n *pueden ser extendidas si es necesario al intevalo* $[0,T]$ *para* n *suficientemente grande y*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,T]} \|(u(t) - u_n(t))\|_s = 0.$$

Demostración. Del **Teorema 2.2** vemos que falta probar la unicidad y la dependencia continua. La prueba de la unicidad es similar a la de la dependencia continua, por lo tanto nos concentraremos en probar la dependencia continua. De la manera como se eligió el T en las partes **2.** y **3.** de la demostración del **Teorema 2.2** se obtiene que $T = T(\|\varphi\|_s) > 0$ es una función continua de $\|\varphi\|_s$. Las desigualdades (1.2) y (1.3), junto con el hecho de ser H^s un algebra de Banach, para $s > \frac{1}{2}$, implican que:

$$\begin{aligned}
\|u_n(t) - u(t)\|_s &\leq e^T\|\varphi_n - \varphi\|_s + \frac{1}{2}\int_0^t \left\|E(t-\tau)\partial_x(u_n^2 - u^2)(\tau)\right\|_s d\tau \\
&\leq e^T\|\varphi_n - \varphi\|_s + C\int_0^t \left(e^{t-\tau} + (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\right)\|(u_n^2 - u^2)(\tau)\|_s d\tau \\
&\leq e^T\|\varphi_n - \varphi\|_s \\
&+ C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\|(u_n - u)(\tau)(u_n + u)(\tau)\|_s d\tau \\
&\leq e^T\|\varphi_n - \varphi\|_s + K\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\|(u_n - u)(\tau)\|_s d\tau,
\end{aligned}$$

donde, $K = K(\|\varphi\|_s)$, pues, $u, u_n \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{s}}(T)$. Por lo tanto, la desigualdad tipo Gronwall del lema (7.1.2) de [7] implica que,

$$\|u_n - u\|_{s,\infty} \leq e^T\|\varphi_n - \varphi\|_s \mathbf{E}\left(\left(K\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} T\right) \tag{2.7}$$

donde $\mathbf{E}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^{\frac{k}{2}}$, con $C_0 = 1$, $\frac{C_{m+1}}{C_m} = \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}$ y Γ es la función gamma. $\square$

Teorema 2.4. *Sea $\varphi \in \mathcal{F}_{1,1}(\mathbb{R})$. Entonces, existe $T(\|\varphi\|_{\mathcal{F}_{1,1}}) > 0$ y una única $u \in C([0,T];\mathcal{F}_{1,1}(\mathbb{R}))$ que satisface la ecuación integral (2.1).*

Demostración. Esta prueba sigue los pasos de la demostración del **Teorema 2.2**, salvo que se modifica el espacio métrico completo considerado por $\mathfrak{X}_{1,1} = \{f \in C([0,T_s],\mathcal{F}_{1,1}(\mathbb{R})) \ \mid \ \|f(t) - E(t)\varphi\|_{\mathcal{F}_{1,1}} \leq M\}$ cuya métrica viene dada por

$$d(f,g) = \|f(t) - g(t)\|_{\mathcal{F}_{1,1,\infty}} = \sup_{t\in[0,T_s]} \|f(t) - g(t)\|_{\mathcal{F}_{1,1}}.$$

Los detalles con ligeras modificaciones, son similares a la prueba del **Teorema 2.2**, por tal razón no los hacemos. $\square$

La prueba de que $\partial_t u \in C((0,T];L^2_1(\mathbb{R}))$ es consecuencia de los siguientes resultados cuyas pruebas son las mismas, salvo leves modificaciones que las presentadas en [6] para el **Lema 5.3**, página 41 y el **Corolario 5.1** página 44, por tanto se omitiran.

Lema 2.5. *Sea $\varphi \in \mathcal{F}_{1,1}(\mathbb{R})$ la solución de la ecuación integral (2.1). Entonces $\partial_x^k u \in C((0,T];L^2_1(\mathbb{R}))$, para $k = 0,1$. Además, $H\partial_x^k u \in C((0,T];L^2_1(\mathbb{R}))$, para $k = 0,1$.*

Corolario 2.6. *Sea $u \in C((0,T];\mathcal{F}_{1,1}(\mathbb{R}))$ la solución de la ecuación (1). Entonces $\partial_t u \in C((0,T];L^2_1(\mathbb{R}))$.*

Capítulo 3

Solución Global en $H^s(\mathbb{R})$

En este capítulo obtendremos cotas a priori para las normas $\|u\|_s$, con $s \geq 1$, donde u es la solución de (1) obtenida en el **Teorema 2.1**, lo que implica que la solución puede extenderse a cualquier intervalo de tiempo $[0, T]$. Este resultado global se obtendrá a partir de una estimativa a priori para la norma $\|u\|_1$, y de la desigualdad (1.3).

Teorema 3.1. *Sean $\varphi \in H^1(\mathbb{R})$ y $u \in C([0;T]; H^1(\mathbb{R}))$ la solución de (1) con $u(0) = \varphi$ entonces,*

$$\|u\|_0 \leq \|\varphi\|_0 e^T \tag{3.1}$$

$$\|u_x\|_0 \leq \|\varphi'\|_0 e^{T(\|\varphi\|^4 e^{4T}+5)} \tag{3.2}$$

Demostración. Para probar (3.1), multipliquemos la ecuación (1) por u, integrando por partes tenemos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_0^2 &= -\langle u, uu_x\rangle_0 + \langle u, Hu_{xx}\rangle_0 + \langle u, Hu_x\rangle_0 + \langle u, u_{xx}\rangle_0 \\ &\leq \langle u, Hu_x\rangle_0 + \langle u, u_{xx}\rangle_0 \leq \int_{|\xi|\leq 1} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \|u(t)\|_0^2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Integrando esta desigualdad en 0 y t y aplicando la desigualdad de Gronwall se obtiene (3.1).

Para probar (3.2) derivamos (1) respecto a x y haciendo $w := u_x$, se tiene:

$$\begin{aligned} w_t + uw_x + w^2 - Hw_{xx} - (Hw_x + w_{xx}) &= 0 \\ w(\cdot, 0) &= \varphi^{'}(\cdot). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\partial_t \|w(t)\|_0^2 &= -\langle uw_x, w\rangle_0 - \langle w^2, w\rangle_0 + \langle Hw_{xx}, w\rangle_0 \\ &+ \langle Hw_x, w\rangle_0 + \langle w_{xx}, w\rangle_0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Los primeros dos términos de (3.5) son escencialmente el mismo, son estimados apartir de la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg y la desigualdad de Young por

$$\begin{aligned} |\langle uw_x, w\rangle_0| &= \|u\|_0 (C_\varepsilon \|w\|_0^2 + \varepsilon \|w_x\|_0^2) \\ &\leq C_\varepsilon \|\varphi\|_0 e^T \|w\|_0^2 + \varepsilon \|\varphi\|_0 e^T \|w_x\|_0^2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Como $\langle Hw_{xx}, w\rangle_0 = 0$, (3.5) se transforma en:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\partial_t \|w(t)\|_0^2 &\leq C(\varepsilon, \|w\|_0, T)\|w\|_0^2 + \varepsilon C(\|\varphi\|_0, T)\|w_x\|_0^2 \\ &- \|w_x\|_0^2 + \|D^{\frac{1}{2}} w\|_0^2, \end{aligned} \tag{3.7}$$

eligiendo $\epsilon = \frac{1}{2C(\|\varphi\|, T)}$, tenemos:

$$\frac{1}{2}\partial_t \|w(t)\|_0^2 \leq C\|w\|_0^2 - \frac{1}{2}\|w_x\|_0^2 + \|D^{\frac{1}{2}} w\|_0^2. \tag{3.8}$$

Observe que,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\|w_x\|_0^2 + \|D^{\frac{1}{2}} w\|_0^2 &= \int_{\mathbb{R}} (-\frac{1}{2}\xi^2 + |\xi|)|\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (\xi^2 - 2|\xi|)|\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq -\frac{1}{2}\left\{\int_{|\xi|>2} + \int_{|\xi|\leq 2}\right\}(\xi^2 - 2|\xi|)|\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq -\frac{1}{2}\int_{|\xi|\leq 2} (\xi^2 - 2|\xi|)|\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

y (3.8) se convierte en:

$$
\begin{aligned}
\partial_t \|w(t)\|_0^2 &\leq C\|w\|_0^2 - \frac{1}{2}\int_{|\xi|\leq 2} (\xi^2 - 2|\xi|)|\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq C\|w\|_0^2 + \frac{1}{2}\int_{|\xi|\leq 2} (2|\xi| - \xi^2)|\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq C\|w\|_0^2 + \frac{1}{2}\int_{|\xi|\leq 2} |\xi|(2 - |\xi|)|\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq C\|w\|_0^2 + \int_{|\xi|\leq 2} |\xi||\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq C\|w\|_0^2 + 2\int_{|\xi|\leq 2} |\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq C\|w\|_0^2 + 2\|w\|_0^2 \\
&= (C+2)\|w\|_0^2 \\
&\leq C\|w\|_0^2 \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

integrando la anterior desigualdad, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\|w(t)\|_0^2 &\leq \|w(0)\|_0^2 + c\int_0^t \|w(\tau)\|_0^2 d\tau \\
&= \|\varphi'\|_0^2 + c\int_0^t \|w(\tau)\|_0^2 d\tau
\end{aligned}
$$

que en virtud de la desigualdad de Gronwall implica que,

$$\|w(t)\|_0^2 \leq \|w(0)\|_0^2 e^{Ct}$$

es decir que,

$$\|u_x(t)\|_0^2 \leq \|u_x(0)\|_0^2 e^{CT}$$

□

El **Teorema 3.1** implica,

Teorema 3.2. *El problema (1), es globalmente bien planteado en $H^1(\mathbb{R})$.*

Nota 3.3. *Observese que sí*

$$\varphi \in H^{1+\theta}(\mathbb{R}) \quad y \quad 0 < \theta < 2, \qquad (3.10)$$

*el lema de regularización y el **Teorema 3.1**, implican,*

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\|_{1+\theta} &\leq \|e^{tA}\varphi\|_{1+\theta} - \frac{1}{2}\int_0^t \left\|e^{(t-\tau)tA}(\partial_x u^2)\right\|_{1+\theta} d\tau \\
&\leq \|\varphi\|_{1+\theta} + C\int_0^t \|\partial_x u^2\|_0 \left(e^{(t-\tau)} + \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{\theta}{2}}}\right) d\tau \\
&\leq \|\varphi\|_{1+\theta} + C\int_0^t \|u^2\|_1 \left(e^{(t-\tau)} + \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{\theta}{2}}}\right) d\tau \\
&\leq \|\varphi\|_{1+\theta} + C\int_0^t \|u(\tau)\|_1^2 \left(e^{(t-\tau)} + \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{\theta}{2}}}\right) d\tau \\
&\leq \|\varphi\|_{1+\theta} + C(\|\varphi\|_1)\int_0^t \left(e^{(t-\tau)} + \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{\theta}{2}}}\right) d\tau \\
&\leq \|\varphi\|_{1+\theta} + C(\|\varphi\|_1, T)\left(te^t + \left(-\frac{(t-\tau)^{1-\frac{\theta}{2}}}{1-\frac{\theta}{2}}|_0^t\right)\right) \\
&\leq \|\varphi\|_{1+\theta} + C(\|\varphi\|_1, T)\left(Te^T + \frac{2t^{\frac{2-\theta}{2}}}{2-\theta}\right) \\
&\leq \|\varphi\|_{1+\theta} + C(\|\varphi\|_1, T)\left(Te^T + \frac{2T^{\frac{2-\theta}{2}}}{2-\theta}\right).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto u se puede extender a todo tiempo, es decir el problema (1) es globalmente bien planteado en $H^{1+\theta}(\mathbb{R})$, $0 < \theta < 2$.

Una iteración de este argumento y el teorema anterior implican:

Teorema 3.4. *El problema (1), es globalmente bien planteado en $H^s(\mathbb{R})$, para $s \geq 1$.*

Capítulo 4

Propiedades de decaida de la solución

En este capítulo obtendremos resultados sobre las soluciones de (1) en los espacios $\mathcal{F}_r(\mathbb{R})$, con $r = 1, 2, 3$. En las demostraciones de los resultados en este cápitulo se siguen las ideas expuestas en los trabajos de Iorio [5], quién obtuvo resultados semejantes a los nuestros para la ecuación de Benjamin-Ono.

Teorema 4.1. *Sea $\varphi \in \mathcal{F}_1$. Existe una única $u \in C([0,\infty);\mathcal{F}_1)$ solución del problema (1) tal que $\partial_t u \in C([0,\infty)); L^2(\mathbb{R}))$.*

Demostración. La unicidad es dada, porque $\mathcal{F}_1 \subset H^1(\mathbb{R})$. Ahora, usando la transformada de Fourier, en la parte lineal de (1), la regla de Leibniz,(1.3) para $\lambda = 1$ y el **Teorema A.2** de [4] (si $\varphi \in \mathcal{F}_r$, entonces $x^\alpha \partial_x^\beta \varphi \in L^2(\mathbb{R})$, para todo entero α y β tales que $0 \leq \alpha + \beta \leq r$ y además, $||x^\alpha \partial_x^\beta \varphi||_0 \leq C_{\alpha,\beta}||\varphi||_{\mathcal{F}_r}$) se muestra que $E(t)\partial_x\varphi$ es Bochner integrable sobre $[0,T]$, si $\varphi \in \mathcal{F}_1$.
De la parte **a.** del **Teorema 1.4** y del hecho que $\mathcal{F}_1$ es álgebra de Banach sigue que la aplicación (2.1) es una contracción en el espacio métrico completo:

$$\mathfrak{X} = \{f \in C([0,\infty);\mathcal{F}_1) \ \mid \ \|f(t) - E(t)\varphi\|_{\mathcal{F}_1} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{F}_1}, \quad t \in [0,T]\} \quad (4.1)$$

si $T > 0$ es suficientemente pequeño, estableciendo de esta manera la existencia local. Para la unicidad se procede de forma similar que en el caso de H^1.
El próximo paso es obtener una estimación global para la norma de u en $\mathcal{F}_1$.

Por el **Teorema 3.1**, es suficiente controlar la norma L^2_1. Usando la transformada de Fourier verificamos que $x^1\partial_x E(t)\varphi \in L^2$ para todo $t > 0$.
Asi,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2_1} = \int_{\mathbb{R}}(1+x^2)u(Hu_{xx} + Hu_x + u_{xx} - uu_x)dx. \tag{4.2}$$

La parte derecha de esta última identidad, se transforma en:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} uHu_{xx}dx + \int_{\mathbb{R}} uHu_x dx + \int_{\mathbb{R}} uu_{xx}dx - \int_{\mathbb{R}} uuu_x dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}} x^2uHu_{xx}dx + \int_{\mathbb{R}} x^2uHu_x dx + \int_{\mathbb{R}} x^2uu_{xx}dx - \int_{\mathbb{R}} x^2uuu_{xx}dx \\
&= \langle u, Hu_{xx}\rangle_0 + \langle u, Hu_x\rangle_0 + \langle u, u_{xx}\rangle_0 - \langle u, uu_x\rangle_0 + \langle xu, xHu_{xx}\rangle_0 \\
&+ \langle xu, xHu_x\rangle_0 + \langle xu, xu_{xx}\rangle_0 - \langle xu, xuu_x\rangle_0.
\end{aligned}$$

Los primeros cuatro términos se estiman como en la primera parte del **Teorema 3.1** y son acotados por $||u||^2_0$ para los términos restantes tenemos:

$$\begin{aligned}
\langle xu, xH\partial^2_{xx}u\rangle_0 &= \langle xu, [x, H\partial^2_x]u + H\partial^2_x(xu)\rangle_0 \\
&= \langle xu, [x, H]\partial^2_x u + H[x, \partial^2_x]u + H\partial^2_x(ux)\rangle_0 \\
&= \langle xu, [x, H]\partial^2_x u\rangle_0 + \langle xu, H[x, \partial^2_x]u\rangle_0 \\
&= \langle xu, H[x, \partial^2_x]u\rangle_0 = -2\langle xu, H\partial_x u\rangle_0 \\
&\le 2\|xu\|_0\|u_x\|_0 \le C(\|xu\|^2_0 + \|u_x\|^2_0) \\
&\le C(\|xu\|^2_{L^2_1} + \|u_x\|^2_1) \le C(\|u\|^2_{L^2_1} + K)
\end{aligned}$$

donde hemos usado que: $[x, H\partial^2_x]\psi = [x, H]\partial^2_x\psi + H[x, \partial^2_x]\psi$ y, $[x, H]\partial^2_x\psi = 0$.

- $$\begin{aligned}
\langle xu, xH\partial_x u\rangle_0 &= \langle xu, [x, H\partial_x]u + H\partial_x(xu)\rangle_0 \\
&= \langle xu, [x, H\partial_x]u\rangle_0 + \langle xu, H\partial_x(xu)\rangle_0 \\
&= \langle xu, [x, H]\partial_x u + H[x, \partial_x]u\rangle_0 + \langle xu, H\partial_x(xu)\rangle_0 \\
&= \langle xu, H[x, \partial_x]u\rangle_0 + \langle xu, H\partial_x(xu)\rangle_0 \\
&= \langle xu, Hu\rangle_0 + \langle xu, H\partial_x(xu)\rangle_0 \\
&\le \|xu\|_0\|u\|_0 + \langle xu, H\partial_x(xu)\rangle_0 \\
&\le (\|xu\|^2_0 + \|u\|^2_0) + \langle xu, H\partial_x(xu)\rangle_0 \\
&\le (\|u\|^2_{L^2_1} + K) + \langle xu, H\partial_x(xu)\rangle_0.
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\langle xu, x\partial_{xx}^2 u\rangle_0 &= \langle xu, \partial_x^2(xu) - 2u_x\rangle_0 = \langle xu, \partial_x^2(xu)\rangle_0 - \langle xu, 2u_x\rangle_0 \\ &= -\langle \partial_x(xu), \partial_x(xu)\rangle_0 - \langle xu, 2u_x\rangle_0 \leq \|xu\|_0\|u_x\|_0 - \|\partial_x(xu)\|_0^2 \\ &\leq \|xu\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 - \|\partial_x(xu)\|_0^2 \leq (\|xu\|_0^2 + K) - \|\partial_x(xu)\|_0^2.\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\langle xu, x\partial_x u^2\rangle_0 &= -\frac{4}{3}\int xu^3 \leq \|u\|_\infty \|\sqrt{|x|}u\|_0^2 \leq C\|u\|_1(\|u\|_{L_1^2}^2 + K) \\ &\leq C(\|u\|_{L_1^2}^2 + 1).\end{aligned}$$

Lo anterior implica que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L_1^2}^2 &\leq C + \|u\|_{L_1^2}^2 + \langle xu, H\partial_x(xu)\rangle_0 - \|\partial_x(xu)\|_0^2 \\ &= C + \|u\|_{L_1^2}^2 + \int (|\xi| - |\xi|^2)|\widehat{v}(\xi,t)|^2 d\xi \\ &= C + \|u\|_{L_1^2}^2 + \left\{\int_{|\xi|<1} + \int_{|\xi|\geq 1}\right\}(|\xi| - |\xi|^2)|\widehat{v}(\xi,t)|^2 d\xi \\ &\leq C + \|u\|_{L_1^2}^2 + \int_{|\xi|<1}(|\xi| - |\xi|^2)|\widehat{v}(\xi,t)|^2 d\xi \\ &\leq C + \|u\|_{L_1^2}^2 + \int_{\mathbb{R}} |\widehat{v}(\xi,t)|^2 d\xi \\ &\leq C + \|u\|_{L_1^2}^2\end{aligned}$$

donde $v = xu$. Luego,

$$\partial_t \|u\|_{L_1^2}^2 \leq C + K\|u\|_{L_1^2}^2 \tag{4.3}$$

donde C, K son constantes que se obtienen de las cotas para las normas $\|u\|_0$ y $\|u\|_1$. La desigualdad de Gronwall y (4.3) implican el resultado.

□

Teorema 4.2. *Sea $T > 0$ y supongase que $u \in C([0,T];\mathcal{F}_2)$ es solución de (1). Entonces $\widehat{u}(t,0) = 0$ para toda $t \in [0,T]$.*

Demostración. Multiplicando (1) por x^2 obtenemos

$$\partial_t(x^2u) = x^2Hu_{xx} + x^2Hu_x + x^2u_{xx} - x^2uu_x. \tag{4.4}$$

Por hipotésis $x^2u(t) \in L^2(\mathbb{R})$ para todo $t \in [0,T]$. Asi, tenemos que:

$$\|x^2uu_x\|_0 \leq \|u_x\|_{L^\infty}\|x^2u\|_0 \leq \|u\|_2\|x^2u\|_0 \leq \|u\|^2_{\mathcal{F}_2} \qquad (4.5)$$

Por lo tanto, $\gamma(t) = x^2uu_x \in L^2\mathbb{R})$ para toda $t \in [0,T]$. De esto se sigue que $\gamma \in C([0,T]; L^2\mathbb{R})$, pues,

$$\begin{aligned}
&\|\gamma(t) - \gamma(t_1)\|_o \leq \\
\leq\ & \|x^2u\|_0\|\partial_x(u(t) - u(t_1))\|_{L^\infty} + \|\partial_x u(t_1)\|_{L^\infty}\|x^2(u(t) - u(t_1))\|_0 \\
\leq\ & \|u\|_{L^2_2}\|u(t) - u(t_1)\|_2 + \|u(t_1)\|_2\|u(t) - u(t_1)\|_{L^2_2}
\end{aligned}$$

Aplicando transformada de Fourier a (4.4) se tiene:

$$\partial_t\partial_\xi^2\widehat{u} = \partial_\xi^2(-isgn(\xi)(-\xi^2)\widehat{u}) + \partial_\xi^2(-isgn(\xi)(i\xi)\widehat{u}) + \partial_\xi^2(-\xi^2\widehat{u}) + \widehat{\gamma}(\xi). \quad (4.6)$$

Como $u \in \mathcal{F}_2$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta}(\xi,t) &= (-2isgn(\xi) - 2)\widehat{u}(\xi,t) \in C([0,T]; L^2_{-2}), \\
\widehat{\Gamma}(\xi,t) &= 2(-2i|\xi| + sgn(\xi) - 2\xi)\partial_\xi\widehat{u}(\xi,t) \in C([0,T]; L^2_{-2}), \\
\widehat{\alpha}(\xi,t) &= (-i\xi|\xi| + |\xi| - \xi^2)\partial_\xi^2\widehat{u}(\xi,t) \in C([0,T]; L^2_{-2}).
\end{aligned}$$

Con esta notación (4.6) se transforma en

$$\partial_t\partial_\xi^2\widehat{u} = \widehat{\gamma}(\xi,t) + \widehat{\beta}(\xi,t) + \widehat{\Gamma}(\xi,t) + \widehat{\alpha}(\xi,t) + 2\delta\widehat{u}(0,t). \qquad (4.7)$$

Integrando (4.7) entre 0 y t tenemos que

$$2\delta\int_0^t \widehat{u}(0,\tau)d\tau \in C([0,T]; L^2_{-2}),$$

es decir,

$$\int_0^t \widehat{u}(0,\tau)d\tau = 0,$$

para todo $t \in [0,T]$, y por lo tanto, $\widehat{u}(0,t) = 0$, para todo $t \in [0,T]$. $\square$

El anterior resultado implica que, $\widehat{u}(t,0)$ es una cantidad conservada para el problema (1).
El siguiente teorema es consecuencia del teorema anterior y de una aplicación estandar del teorema del punto fijo de Banach.

Teorema 4.3. *Sea* $\varphi \in \widetilde{\mathcal{F}_2} = \{\varphi \in \mathcal{F}_2 | \widehat{\varphi}(0) = 0\}$*. Existe una única* $u \in C([0,\infty); \widetilde{\mathcal{F}_2})$ *que satisface (1).*

Teorema 4.4. *Sea* $T > 0$ *y supongase* $u \in C([0,T]; \mathcal{F}_3)$ *es una solución de (1). Entonces* $u(t) = 0$ *para toda* $t \in [0,T]$*.*

Demostración. Sabemos que u satisface la ecuación integral:

$$u(t,\cdot) = E(t)\varphi(\cdot) - \frac{1}{2}\int_0^t E(t-\tau)\partial_x u^2(\tau)d\tau \tag{4.8}$$

para $t \in [0,T]$. Sean $v = u^2$ y $w = \partial_x v$. Tomando la transformada de Fourier de u en (4.8) obtenemos

$$\widehat{u}(t,\xi) = F(t,\xi)\widehat{\varphi}(\xi) - \frac{1}{2}\int_0^t F(t-\tau,\xi)\widehat{w}(\tau,\xi)d\tau,$$

donde $F(t,\xi) = e^{t(i\xi|\xi|+|\xi|-\xi^2)}$. Derivando, tres veces esta ecuación con respecto a ξ se obtiene:

$$\begin{aligned} \partial_\xi^3 \widehat{u}(t,\xi) &= 4\left[t\partial_\xi\widehat{\varphi}(0) - \int_0^t (t-\tau)\partial_\xi\widehat{w}(0,\tau)d\tau\right]\delta \\ &+ 2\left[t\widehat{\varphi}(0) - \int_0^t (t-\tau)\widehat{w}(0,\tau)d\tau\right]\delta' + g(\xi,t), \end{aligned}$$

donde, $g \in C([0,T]; L^2)$. De esta identidad se sigue que,

$$t\partial_\xi\widehat{\varphi}(0) - \int_0^t (t-\tau)\partial_\xi\widehat{w}(0,\tau)d\tau = 0 \tag{4.9}$$

$$t\widehat{\varphi}(0) - \int_0^t (t-\tau)\widehat{w}(0,\tau)d\tau = 0, \tag{4.10}$$

Como, $\widehat{w}(0,\tau) = \widehat{\partial_x v(\tau)}(0) = 0$, (4.10) implica que, $\widehat{\varphi}(0) = 0$, de lo cual se deduce que $\widehat{u}(0,t) = 0$, para todo $t \in [0,T]$. Ahora, observe que,

$$\partial_\xi\widehat{w}(t,0) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x(\partial_x u^2)(t,\xi)dx = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\|u\|_0^2,$$

transforma (4.9) en

$$t\partial_\xi\widehat{\varphi}(0) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t (t-\tau)\|u(\tau)\|_0^2 d\tau. \tag{4.11}$$

El **Teorema 3.1** y (4.11), implican que,

$$t|\partial_\xi \widehat{\varphi}(0)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \|\varphi\|_0^2 t^2, \tag{4.12}$$

para cada $t \in [0, T]$, asi que, $\partial_\xi \widehat{\varphi}(0) = 0$. Pero entonces la integral del lado derecho de (4.11) debe ser cero, lo que implica que, $\|u(t)\|_0^2 = 0$, para cada $t \in [0, T]$.

$\square$

Bibliografía

[1] Alvarez B., *On the for a nonlocal pertubation of the KdV equation*, Tesis Doctoral, IMPA, 2002.

[2] Bona J., Scott R., *Solutions of the Korteweg-de Vries equation in fractional order Sobolev spaces*, Duke Math. J 43(1976), pp.87-99.

[3] Feng B., Kawahara T., *Temporal evolution and stationary waves for disipative Benjamin-Ono equation*, Physica D 139, (2000), pp. 301-318-

[4] Íorio R. J., *On the Cauchy problem for the Benjamin-Ono equation*, Communications in P.D.E. 11(10), (1986), pp.1031-1081

[5] Íorio R. J., *Unique continuation for the Benjamin-Ono equation, Differential and Integral equations*, v.11, (2003), pp.1281-1291

[6] Iório R. J., Jr., De Magalhães V., *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*, Cambridge studies in avanced mathematics, (2001), pp. 70.

[7] Ponce G., *On the global well-posedness of Benjamin-Ono equation, Differential Integral Eqs.*, 4, (1991), pp. 527-542

[8] Qian S., Chen H. H., Lee Y. C., *A turbulence model with stochastic soliton motion*, J. Math. Phys. 31 (1990), pp.506-516.

[9] Reed M., Simon B., *Methods of Modern Mathematical Physics. Functional analysis*, vol.1, Academic press,1980

[10] T. Tao, *Global well-posedness of Benjamin-Ono equation in* $H^1(\mathbb{R})$, J.Hyperbolic Differ. Equ. 1, No.1,(2004), pp. 27-49