SOBRE EL BUEN PLANTEAMIENTO EN ESPACIOS DE SOBOLEV DE UNA PERTURBACIÓN NO LINEAL DE LA ECUACIÓN DE BURGERS

Liz Maribel Cardozo Rojas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá
2009

SOBRE EL BUEN PLANTEAMIENTO EN ESPACIOS DE SOBOLEV DE UNA PERTURBACIÓN NO LINEAL DE LA ECUACIÓN DE BURGERS

Liz Maribel Cardozo Rojas

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de

Magister en Matemáticas

Director
Guillermo Rodríguez Blanco

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogota
2009

Contenido

Introducción

En este documento trataremos con el buen planteamiento en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, y en los espacios de Sobolev $H^{2r,r}$ con pesos del problema de Cauchy asociado a la ecuación diferencial parcial

$$u_t - \alpha^2 u_{xxt} + uu_x - \alpha^2 uu_{xxx} = 0 \tag{0.1}$$

que es una perturbación no lineal de la ecuación de Burgers ($\alpha = 0$) y modela fenómenos que ocurren en teoría de fluidos. Tratareremos con el buen planteamiento local y global en el caso no periódico de la ecuación, es decir, queremos saber si dicho problema tiene solución única y si esta depende continuamente del dato inicial $u(0) = u_0 \in H^s(\mathbb{R})$. Específicamente estudiaremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t - \alpha^2 u_{xxt} + uu_x - \alpha^2 uu_{xxx} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0) = u_0 \in H^s(\mathbb{R}), \end{cases} \tag{0.2}$$

donde $\alpha \geq 0$

Para tratar el buen planteamiento de (0.2) en $H^s(\mathbb{R})$, y $H^{s,r}(\mathbb{R})$ usaremos Teoría de Kato ([2], [3], [4]), que cuando es posible aplicarla, ha mostrado ser una técnica potente y útil en ecuaciones de evolución cuasilineales y nos permite obtener resultados aún en el caso $\alpha = 0$ sin necesidad de usar técnicas de regularización ni de compacidad empleadas en ([1]). Una parte interesante en el estudio del buen planteamiento de (0.2) es que la solución persiste en todo tiempo

La razón de utilizar Teoría de Kato es que observamos que (0.2) puede transformarse en una ecuación del tipo de la ecuación de Camassa-Holm (vea ([7])) y seguimos las ideas de [7], obteniendo resultados semejantes, salvo que en este caso no hay soluciones que explotan en tiempo finito como ocurre con la ecuación de Camassa-Holm.

El trabajo esta organizado como sigue: Un primer capítulo referente a una pequeña revisión de la teoría de Kato, un segundo capítulo donde se establece, via teoría de Kato, el buen planteamiento local de (0.2) en los espacios de Sobolev y en el capítulo cuarto establecemos el buen planteamiento de (0.2) en espacios de Sobolev con pesos. El tercer capítulo es dedicado al buen planteamiento global de dicho problema. Por último, el apéndice recoge una serie de resultados básicos que son útiles en el desarrollo del trabajo.

Notación Utilizada

La siguiente notación será útil en la lectura del presente trabajo:

1. $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, notará al espacio de Schwartz, y se define como el conjunto de todas las $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, de tal manera que $\|f\|_{\alpha\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^{\alpha}\partial^{\beta} f(x)| < \infty$, para todo $\alpha, \beta, \in \mathbb{N}$
2. $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$, notará al espacio de las distribuciones temperadas. Una distribución temperada es un funcional lineal continuo en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Dicho funcional pertenece a $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ si y solo si, existen constantes $C \geq 0$ y $l \in \mathbb{N}$, tales que $|\langle f, \varphi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq l} \|\varphi\|_{\alpha\beta}$, para todo $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$
3. Para $s \in \mathbb{R}$, el espacio $H^s(\mathbb{R}) := \{f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}) | (1+\xi^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})\}$ es el espacio de Sobolev de orden s y es un espacio de Hilbert con el producto interno $< f, g >_s = \int_{-\infty}^{\infty} (1+\xi^2)^s \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)} d\xi$
4. Para $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ notará la transformada de Fourier de f y $\check{f}$ notará la transformada inversa de Fourier de f.
5. Para $s \in \mathbb{R}$, $r = 1, 2, ...$, el espacio $H^{2r,r} := H^s(\mathbb{R}) \bigcap L^2_r(\mathbb{R})$, donde $L^2_r(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) | x^r f \in L^2(\mathbb{R})\}$ es un espacio de Banach con la norma $\|f\|^2_{s,r} = \|f\|^2_s + \|f\|^2_{L^2_r(\mathbb{R})}$.
6. Si X, Y son espacios de Banach, $\mathbb{B}(X, Y)$ es el espacio de los operadores lineales continuos de X en Y dotado de la norma $\|T\|_{\mathbb{B}(X,Y)} = sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$. Si $X = Y$ escribiremos $\mathbb{B}(X)$ en vez de $\mathbb{B}(X, Y)$.
7. $\Lambda^s = (1 - \partial_x^2)^{\frac{s}{2}}$.
8. $[A, B]$ notará el conmutador de los operadores A y B.
9. $G(X, M, \beta)$ es la colección de todos los operadores A tales que -A genera un semigrupo fuertemente continuo $U(t)$, que satisface $\|U(t)\|_{\mathbb{B}(X)} \leq Me^{\beta t}$. Si $A(u) \in G(X, 1, \beta)$, donde β es un número real, entonces $\|U(t)\|_{\mathbb{B}(X)} \leq e^{t\beta}$ para todo $t \in [0, \infty)$.
10. Sea X un espacio de Banach. Un semigrupo fuertemente continuo es una aplicación. $V : [0, \infty) \to \mathbb{B}(X)$, tal que:
(a)$V(0) = 1$ (la identidad en X)

(b)$V(t+t') = V(t)V(t')$ para todo $t, t' \in [0,\infty)$
(c)$\lim_{t'\to t} \|V(t)\phi - V(t')\phi\|_X = 0$ para todo $t \in [0,\infty)$, para todo $\phi \in X$

Capítulo 1

Teoría de Kato

Consideremos el problema de cauchy asociado a la ecuación de evolucion cuasilineal:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + A(u)u = f(u), \quad f(u) \in X, \quad t \geq 0. \\ u(0) = u_0, \quad u_0 \in Y \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde $A(u)$ es un operador lineal que depende unicamente de u y u_0 es el valor inicial.

Para estudiar el buen planteamiento del problema de cauchy (local en el tiempo) asociado a (1.1) necesitaremos de las siguientes hipótesis:

(X)- X y Y son espacios de Banach reflexivos, donde $Y \subset X$, con inclusion continua y densa, y existe un isomorfismo S de Y sobre X , tal que $\|\phi\|_Y = \|S\phi\|_X \forall \phi \in Y$.

(A_1)- Sea W una bola abierta centrada en cero y contenida en Y. el operador lineal $A(u) \in G(X, 1, \beta)$, donde β es un número real, es decir, $-A(u)$

genera un C_o-semigrupo tal que:

$$\|e^{-sA(u)}\|_{\mathscr{B}(X)} \leq e^{\beta} \tag{1.2}$$

Note que si X es un espacio de Hilbert, entonces $A \in G(X, 1, \beta)$ sí y sólo si:

(a) $\langle A\phi, \phi\rangle_X \geq -\beta(\|\phi\|^2)_X, \forall\phi \in D(A)$

(b) $(A + \lambda)$ es sobre para algun o todo $\lambda > \beta$.

Bajo estas condiciones, $A(u)$ es llamado cuasi-m-acretive

(A_2)- La aplicación

$$w \in W \to B(w) = [S, A(w)]S^{-1} \in \mathscr{B}(X) \tag{1.3}$$

es uniformemente acotada y lipchitz continua, esto es, existen constantes $\lambda_1, \mu_1 > 0$ tales que:

$$\begin{aligned} &\|B(w)\|_{\mathscr{B}(X)} \leq \lambda_1, \\ &\|B(w) - B(y)\|_{\mathscr{B}(X)} \leq \mu_1\|w - y\|_Y, \forall w, y \in W. \end{aligned} \tag{1.4}$$

(A_3)- $Y \subseteq D(A(w))$ para cada $w \in W$ (o que $A(w) \mid Y \in \mathscr{B}(Y, X)$ cumple con el teorema del gráfico cerrado). Además, la aplicación $w \in W \to A(w) \in \mathscr{B}(Y, X)$, satisface la siguiente condición de Lipschitz:

$$\|A(w) - A(y)\|_{\mathscr{B}(Y,X)} \leq \mu_2\|w - y\|_X \tag{1.5}$$

para todo $w, y \in W$, donde μ_2 es una constante no negativa.

(f_1)- La función $f : W \to Y$ es acotada, es decir, existe una constante $\lambda_2 > 0$ tal que

$$\|f(w)\|_Y \leq \lambda_2 \tag{1.6}$$

para todo $w \in W$, y la función $w \in X \to f(w)$ es Lipschitz en X (respectivamente en Y), es decir

$$\|f(w) - f(y)\|_X \leq \mu_3\|w - y\|_X, \forall w, y \in W, \tag{1.7}$$

$$(\text{respectivamente}, \|f(w)-f(y)\|_Y \leq \mu_4 \|w-y\|_Y, \forall w, y \in W), \quad (1.8)$$

donde μ_3 y μ_4 son constantes no negativas.

Observación 1.1. En la practica, podemos ver que los valores de $\beta, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, son funciones de r el radio de la bola W.

Ahora estudiamos un resultado útil para el buen planteamiento local.

Teorema 1.1. *(Kato) Supongamos que las condiciones* $(X), (A_1) - (A_3)$ *y* (f_1) *se satisfacen. Entonces, dado* $u_0 \in Y$*, existen* $T > 0$ *y una única solucion* $u \in C(I, Y) \cap C^1(I, X)$ *para* (1.1)*, con* $u(0) = u_0$*, donde* $I = [0, T]$*. Además, la aplicación* $u_0 \in Y \to u \in C([0, T], Y)$ *es continua en el siguiente sentido: suponga que* $s - \lim_{n\to\infty} A_n(w) = A_\infty(w)$ *en* $\mathscr{B}(Y, X)$*,* $s - \lim_{n\to\infty} B_n(w) = B_\infty(w)$ *en* $B(X)$*,* $\lim_{n\to\infty} f_n(w) = f_\infty(w)$ *en* Y*,* $\lim_{n\to\infty} u_{0,n} = u_{0,\infty}$ *en* Y*, donde* $s - \lim$ *representa el límite fuerte.*
Considere la sucesión de los problemas de Cauchy

$$\begin{aligned} &\partial_t u_n + A_n(u_n)u_n = f_n(u_n), \\ &u_n(0) = u_{0,n}, \qquad n \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Supongamos ahora que $(X), (A_1) - (A_3), (f_1)$ *se satisface para toda ecuación en* (1.9)*, con los mismos* X*,* Y*,* S *y* W*, y las constantes* $\beta, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ *pueden ser elegidas independientemente de* n*. Sea* T_n *el tiempo de existencia de la solucion* u_n*. Entonces todas las* u_n*'s, con* $n < \infty$ *suficientemente grande, pueden ser extendidas (si es necesario) a* $[0, T_\infty]$*, y*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,T_\infty]} \|u_n(t) - u_\infty(t)\|_Y = 0$$

Observación 1.2. Las condiciones (1.4) y (1.8) no son necesarias para probar la existencia y unicidad de soluciones. Estas son sólo usadas para probar la dependencia continua.

Capítulo 2

Teoría Local

En este capítulo aplicaremos la Teoría de Kato para establecer la buena colocación local, del problema de Cauchy asociado a la ecuación (0.2).
La notación a utilizar es $\Lambda_\alpha^s = (1-\alpha^2\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}$, $V = \Lambda_\alpha^2 u$.
Dicha ecuación, puede transformarse en dos formas diferentes, las cuales utilizaremos para nuestro proposito. El procedimiento para ello es:

$$
\begin{aligned}
u_t - \alpha^2 u_{xxt} + uu_x - \alpha^2 uu_{xxx} &= 0 \\
\partial_t(u - \alpha^2 u_{xx}) + u(u_x - \alpha^2 u_{xxx}) &= 0 \\
\partial_t(u - \alpha^2 u_{xx}) + u\partial_x(u - \alpha^2 u_{xx}) &= 0 \\
\textit{hacemos} \;\; V &= u - \alpha^2 u_{xx} \\
&= (1-\alpha^2\partial_x^2)u \\
&= \Lambda_\alpha^2 u \\
\textit{porque} \;\; \Lambda_\alpha^s &= (1-\alpha^2\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}, \\
u &= \Lambda_\alpha^{-2} V \\
\textit{entonces} \;\; \partial_t V + u\partial_x V &= 0 \\
V_t + \Lambda_\alpha^{-2} V \partial_x V &= 0 \\
V_t &= -\Lambda_\alpha^{-2} V \partial_x V
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} = -(\Lambda_{\alpha}^{-2} V) V_x}$$

$$x, t \in \mathbb{R} V(x,0) = \Phi(x) = \Lambda_{\alpha}^{2} u_0(x) \tag{2.1}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
u_t - \alpha^2 u_{xxt} + u u_x - \alpha^2 u u_{xxx} &= 0 \\
u_t + u u_x &= \alpha^2 u_{xxt} + \alpha^2 u u_{xxx} \\
u_t + u u_x &= \alpha^2 (u_{xxt} + u u_{xxx}) \\
Como \;\; \partial_x (u u_x) &= u_x^2 + u u_{xx} \\
derivando \;\; \partial_x^2 (u u_x) &= 2 u_x u_{xx} + u u_{xxx} + u_x u_{xx} \\
\partial_x^2 (u u_x) &= 3 u_x u_{xx} + u u_{xxx} \\
\partial_x^2 (u u_x) - 3 u_x u_{xx} &= u u_{xxx} \\
Entonces \;\; u_t + u u_x &= \alpha^2 (u_{xxt} + u u_{xxx}) \\
u_t + u u_x &= \alpha^2 (\partial_x^2 (u_t) + \partial_x^2 (u u_x) - 3 u_x u_{xx}) \\
u_t + u u_x &= \alpha^2 \partial_x^2 (u_t + u u_x) - (u u_x) - \alpha^2 \partial_x (\frac{3}{2} u_x^2) \\
u_t + u u_x - \alpha^2 \partial_x^2 (u_t + u u_x) &= -\frac{3}{2} \alpha^2 \partial_x (u_x^2) \\
(u_t + u u_x)(1 - \alpha^2 \partial_x^2) &= -\frac{3}{2} \alpha^2 \partial_x (u_x^2) \\
entonces \;\; \Lambda_{\alpha}^2 (u_t + u u_x) &= -\frac{3}{2} \alpha^2 \partial_x (u_x^2) \\
u_t + u u_x &= -\frac{3}{2} \alpha^2 \partial_x \Lambda_{\alpha}^{-2} (u_x^2)
\end{aligned}$$

$$\boxed{u_t = -uu_x - \frac{3}{2}\alpha^2\partial_x(1-\alpha^2\partial_x^2)^{-1}(u_x^2)}$$

$$u(0) = \phi. \tag{2.2}$$

Teorema 2.1. *Sea $u_0 \in H^s, s > \frac{3}{2}$. Existe $T > 0$ que depende de $\|u_0\|_s$, y una única solución u de* (1.1) *(o de* (**??**)*). tal que:*

$$u \in C([0,T], H^s) \cap C^1([0,T], H^{\frac{1}{2}})$$

Además, la aplicación $u_0 \in H^s \to u \in C([0,T], H^s)$ es continua en la forma descrita en el Teorema 1.1.

Note que $u \in C([0,T], H^s) \cap C^1([0,T], H^{s-1})$ porque la ecuación diferencial en (**??**) implica que $\frac{du}{dt} \in H^{s-1}$.
Para probar este resultado, aplicamos el Teorema 1.1, con $X = H^{\frac{1}{2}}$, $Y = H^s$, $S = \Lambda^{s-\frac{1}{2}} = (1-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}-\frac{1}{4}}$, $A(u) = u\partial_x$, $f(u) = -\frac{3}{2}\partial_x(1-\alpha^2\partial_x^2)^{-1}(u_x^2)$ y $W = \{\varphi \in H^s : \|\varphi\|_s \leq R\} = \overline{B}(0,R)$ y comenzamos con el siguiente lema:

Lema 2.1. *(hipótesis A_1) El operador $A(u) = u\partial_x$, con $u \in H^s, s > \frac{3}{2}$, pertenece a $G(H^{\frac{1}{2}}, 1, \beta)$.*

Demostración. Primero mostramos que

$$\langle u\partial_x\phi, \phi\rangle_{\frac{1}{2}} \geq -\beta\|\phi\|_{\frac{1}{2}}^2 \tag{2.3}$$

Para ver esto, escribimos el lado izquierdo de (2.3) como sigue:

$$\langle u\partial_x\phi, \phi\rangle_{\frac{1}{2}} = \langle \Lambda^{\frac{1}{2}}(u\partial_x\phi), \Lambda^{\frac{1}{2}}\phi\rangle_0$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle [\Lambda^{\frac{1}{2}}, u]\partial_x\phi + u\partial_x\Lambda^{\frac{1}{2}}\phi, \Lambda^{\frac{1}{2}}\phi\rangle_0 \\
&= \langle [\Lambda^{\frac{1}{2}}, u]\partial_x\phi, \Lambda^{\frac{1}{2}}\phi\rangle_0 + \langle u\partial_x\Lambda^{\frac{1}{2}}\phi, \Lambda^{\frac{1}{2}}\phi\rangle_0 \\
&= \langle [\Lambda^{\frac{1}{2}}, u]\partial_x\phi, \Lambda^{\frac{1}{2}}\phi\rangle_0 - \langle \partial_x u, (\Lambda^{\frac{1}{2}}\phi)^2\rangle_0 \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

Podemos mostrar que cada uno de los términos de la derecha de (2.4) puede ser acotado por $c\|u\|_s\|\phi\|^2_{\frac{1}{2}}$, donde c es una constante positiva. Entonces tenemos:

$$
\begin{aligned}
|\langle [\Lambda^{\frac{1}{2}}, u]\partial_x\phi, \Lambda^{\frac{1}{2}}\rangle_0| &\leq \|[\Lambda^{\frac{1}{2}}, u]\partial_x\phi\|_0\|\Lambda^{\frac{1}{2}}\phi\|_0 \\
&= \|[\Lambda^{\frac{1}{2}}, u]\Lambda^{\frac{1}{2}}\Lambda^{-\frac{1}{2}}\partial_x\phi\|_0\|\Lambda^{\frac{1}{2}}\phi\|_0 \\
&\leq \|u\|_s\|\Lambda^{\frac{1}{2}}\phi\|^2_0 = \|u\|_s\|\phi\|^2_{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Donde aplicamos el lema A.2 con $\widetilde{s} = 0$ y $\widetilde{t} = -\frac{1}{2}$.
Puesto que $\|u_x\|_{L^\infty} \leq \|u\|_s$ si $s > \frac{3}{2}$, el segundo término es acotado por:

$$
|\langle \partial_x u, (\Lambda^{\frac{1}{2}}\phi)^2\rangle_0| \leq \|u_x\|_{L^\infty}\|\Lambda^{\frac{1}{2}}\phi\|^2 \leq \|u\|_s\|\phi\|^2_{\frac{1}{2}}
$$

Esto prueba (2.3)
Para completar la prueba, debemos mostrar que $(A(u) + \lambda)$ es sobre $H^{\frac{1}{2}}$ para algún (equivalentemente para todo) $\lambda > \beta$. El hecho de que $A(u)$ es un operador cerrado, junto con (2.3), prueba que $(A(u) + \lambda)$ tiene rango cerrado para $\lambda > \beta$. Así, es suficiente probar que $(A(u) + \lambda)$ tiene rango denso para $\lambda > \beta$. Sea $\psi \in H^{\frac{1}{2}}$ tal que: $\langle (A(u) + \lambda)\phi, \psi\rangle_{\frac{1}{2}} = 0$ para todo $\phi \in D(A(u)) = D(u\partial_x) = \{\phi \in H^{\frac{1}{2}} \mid u\partial_x\phi \in H^{\frac{1}{2}}\}$.
Entonces $\psi \in D((u\partial_x)^*) = \{g \in H^{\frac{1}{2}} : u\Lambda g \in H^{\frac{1}{2}}\} \subseteq D(A(u))$ y satisface la ecuación:

$$
-\Lambda^{-1}\partial_x(u\Lambda\psi + \lambda\psi) = 0
$$

Aplicando Λ, multiplicando por $\Lambda^{\frac{1}{2}}\psi$, integrando por partes y recurriendo a (2.3), obtenemos:
$0 = \langle \Lambda^{\frac{1}{2}}(u\partial_x\psi) + \lambda\Lambda^{\frac{1}{2}}\psi, \Lambda^{\frac{1}{2}}\psi\rangle_0 \geq (\lambda - \beta)\|\psi\|^2_{\frac{1}{2}}$, con $\lambda > \beta$. Como $(\lambda - \beta) > 0$, por tanto se concluye que $\psi = 0$
■

Lema 2.2. *(hipótesis A_2)* $B(u) = [\Lambda^{s-\frac{1}{2}}, u\partial_x]\Lambda^{\frac{1}{2}-s} \in \mathscr{B}(H^{\frac{1}{2}})$ *para* $u \in H^s, s > \frac{3}{2}$.

Demostración. Note que:$[\Lambda^{s-\frac{1}{2}}, u\partial_x]\Lambda^{\frac{1}{2}-s}w = [\Lambda^{s-\frac{1}{2}}, u]\Lambda^{\frac{1}{2}-s}\partial_x w$, por tanto

$$\begin{aligned}
\|B(u)w\|_{\frac{1}{2}} &= \|\Lambda^{\frac{1}{2}}[\Lambda^{s-\frac{1}{2}}, u]\Lambda^{\frac{1}{2}-s}\partial_x u\|_0 \\
&= \|\Lambda^{\frac{1}{2}}[\Lambda^{s-\frac{1}{2}}, u]\Lambda^{1-s}\Lambda^{-\frac{1}{2}}\partial_x w\|_0 \\
&\leq \|u\|_s\|\Lambda^{-\frac{1}{2}}\partial_x w\|_0 \\
&\leq \|u\|_s\|\Lambda^{-\frac{1}{2}}w\|_0 \\
&= \|u\|_s\|w\|_{\frac{1}{2}} \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Nuevamente usamos el lema A.2 (con $\widetilde{s} = -\frac{1}{2}$, $\widetilde{t} = s-1$).
■

Observación 2.1. Note que reemplazando u por $u - v$ en la desigualdad (2.5), se obtiene $\|(B(u) - B(v))w\|_{\frac{1}{2}} \leq \|w\|_{\frac{1}{2}}\|u - v\|_s, s > \frac{3}{2}$.

Lema 2.3. *(hipótesis A_3)*

(i) $H^s \subseteq \mathscr{D}(u\partial_x) = \{f \in H^{\frac{1}{2}} : u\partial_x f \in H^{\frac{1}{2}}\}, s > \frac{3}{2}$.

(ii) $u\partial_x \in \mathscr{B}(H^s, H^{\frac{1}{2}}), s > \frac{3}{2}$

(iii) $\|u\partial_x - v\partial_x\|_{\mathscr{B}(H^s, H^{\frac{1}{2}})} \leq \mu\|u - v\|_{\frac{1}{2}}$

Demostración. Sea $w \in H^s, s > \frac{3}{2}$. Entonces

$$\|u\partial_x w\|_{\frac{1}{2}} \leq \|u\|_{\frac{1}{2}}\|\partial_x w\|_{s-1} \leq \|u\|_{\frac{1}{2}}\|w\|_s,$$

usando el lema A.1 probamos (i) y (ii). la parte (iii) se prueba con la desigualdad anterior, reemplazando u por $u - v$.
■

Lema 2.4. *(hipótesis f_1) Sea* $f(u) = -\frac{3}{2}\alpha^2\partial_x(1 - \alpha^2\partial_x^2)^{-1}u_x^2$. *entonces:*

(i) $\|f(u)\|_s \leq c\|u\|_s^2, s > \frac{3}{2}$.

(ii) $\|f(u) - f(v)\|_{\frac{1}{2}} \leq c\|u - v\|_{\frac{1}{2}}, s > \frac{3}{2}$

(iii) $\|f(u) - f(v)\|_s \leq c\|u - v\|_s, s > \frac{3}{2}$

Demostración. Empezando con (ii) tenemos

$$\begin{aligned}
\|f(u) - f(v)\|_{\frac{1}{2}} &\leq c\|\Lambda^{-\frac{1}{2}}(\partial_x(u - v)\partial_x(u + v))\|_0 \\
&\leq c\|\partial_x(u - v)\partial_x(u + v))\|_{-\frac{1}{2}} \\
&\leq c\|\partial_x(u - v)|_{-\frac{1}{2}}\|\partial_x(u + v))\|_{s-1} \\
&\leq c\|u + v\|_s\|u - v\|_{\frac{1}{2}0} \\
&\leq c(\|u\|_s + \|v\|_s)\|u - v\|_{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

donde se uso el lema A.1, la desigualdad de Cauchy-Schwartz y el teorema de inmersión de Sobolev. Ahora note que (iii) es una consecuencia del hecho que H^s es un algebra de Banach para $s > \frac{1}{2}$. en efecto:

$$\begin{aligned}
\|\partial_x(1 - \alpha^2\partial_x^2)^{-1}(u_x^2 - v_x^2)\|_s &\leq \|u_x^2 - v_x^2\|_{s-1} \\
&\leq \|(u_x + v_x)(u_x - v_x)\|_{s-1} \\
&\leq \|\partial_x(u + v)\|_{s-1}\|\partial_x(u - v)\|_{s-1} \\
&\leq c(\|u\|_s + \|v\|_s)\|u - v\|_s, s > \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, observe que (i) es una consecuencia inmediata de (iii) cuando elegimos $v = 0$

■

Demostración del teorema 2.1. El resultado se sigue del Teorema 1.1, los Lemas 2.1 a 2.4 y de la Observación 2.1.

■

Teorema 2.2. *La existencia de tiempo para* (1.1) *(o de* (**??**)*) puede ser elegido independiente de s en el siguiente sentido: si $u \in C([0, T], H^s) \cap$*

$C^1([0,T],H^{s-1})$ es la solución de (2), con $u(0)=u_0\in H^r$, para algun $r\neq s, r>\frac{3}{2}$, entonces $u\in C([0,T],H^r)\cap C^1([0,T],H^{r-1})$, para el mismo tiempo T. En particular, si $u_0\in H^\infty$ entonces $u\in C([0,T],H^\infty)$.

La prueba de este resultado, es esencialmente la misma de la parte (c) del Teorema 1 en [3], por esta razón, solo haremos un breve esbozo.

Observación 2.2. Observe que es suficiente probar el caso $r>s$ ya que el otro caso es consecuencia de la unicidad. También, podemos suponer que $s<r\leq s+1$, puesto que si $r>s+1$ el resultado se obtiene por iteración de este argumento.
Si aplicamos el operador Λ^2 a (**??**), obtenemos la siguiente ecuación de evolución para $w(t)=\Lambda^2 u(t)$:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-u\partial_x w=-\partial_x(uw)+u_x w \qquad (2,2')$$

Donde $u\in C([0,T],H^s)$ es vista como una función conocida . Observemos que la expresión anterior, tiene la forma:

$$\frac{dw}{dt}+A(t)w+B(t)w=0 \qquad (2,3')$$

donde $A(t)w=-\partial_x(u(t)w)$ y $B(t)w=u_x(t)w$, además $w\in C([0,T],H^{s-2})$ y $w(0)=(1-\alpha^2\partial_x^2)u_0\in H^{r-2}$, nuestro objetivo es probar que $w\in C([0,T],H^{r-2})$, lo cual implica que $u\in C([0,T],H^r)$. Para llevar a cabo esto, debemos probar que problema de cauchy para la ecuación lineal $(2,2')$ es bien puesto en H^k con $1-s\leq k\leq s-1$.

Lema 2.5. *Existe un único propagador $\{U(t,s)\}$ asociado a la familia $\{A(t)\}$ con el correspondiente espacio $X=H^h$, $Y=H^k$ en el sentido de [4], donde*

$$-s\leq h\leq s-2, 1-s\leq k\leq s-1 \quad y \quad k\geq h+1.$$

En particular, $U(t,s)$ es una aplicación de H^r en sí mismo, para $-s\leq r\leq s-1$

Demostración. Necesitamos probar lo siguiente:

(i) $A(t) \in G(X,1,\beta)$, para esto debemos probar que $\langle A(t)w, w\rangle_h \geq -\beta\|w\|_h^2$. Pero esto es:

$$\langle \Lambda^h \partial_x(u(t)w), \Lambda^h w\rangle_0 \geq -\beta\|w\|_h^2 \tag{2.6}$$

Iniciamos por escribir el término de la izquierda de esta desigualdad de la siguiente manera:

$$-\langle \Lambda^h(uw), \partial_x \Lambda^h w\rangle_0 \tag{2.7}$$

pero

$$\begin{aligned}
\Lambda^h(uw) &= \Lambda^h(u\Lambda^{-h}(\Lambda^h w)) \\
&= \Lambda^h(\Lambda^{-h}(u\Lambda^h w) - [\Lambda^{-h}, u]\Lambda^h w) \\
&= u\Lambda^h w - \Lambda^h[\Lambda^{-h}, u]\Lambda^h w
\end{aligned}$$

usando esta identidad en (2.7), obtenemos:

$$\begin{aligned}
-\langle \Lambda^h(uw), \partial_x\Lambda^h w\rangle_0 &= \langle \Lambda^h[\Lambda^{-h}, u]\Lambda^h w, \partial_x\Lambda^h w\rangle_0 - \langle u\Lambda^h w, \partial_x \Lambda^h w\rangle_0 \\
&= \langle \Lambda^{h+1}[\Lambda^{-h}, u]\Lambda^h w, \partial_x\Lambda^{h-1} w\rangle_0 - \langle u\Lambda^h w, \partial_x \Lambda^h w\rangle_0
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Estimar el segundo término de la derecha de (2.8) es fácil ya que es una consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwartz e integración por partes. Para el otro lado se aplica la desigualdad de Cauchy-Schwartz y el lema A.2. (con $r = s > \frac{3}{2}$, $\widetilde{s} = -h-1$, $\widetilde{t} = 0$), asi (2.6) queda demostrado.

(ii) $\Lambda^h\partial_x[\Lambda^{k-h}, u(t)]\Lambda^{-k}$ es uniformemente L^2-acotado, pero esto nuevamente es una consecuencia del lema A.2. Aquí usamos el hecho que Λ^{k-h} es un isomorfismo de Y sobre X.

(iii) $A(t) \in B(Y, X)$ es fuertemente continuo en t, pero esto es una consecuencia de la continuidad de u y de la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}\|\partial_x((u(t+h)-u(t))w)\|_h &\leq \|(u(t+h)-u(t))w\|_{h+1} \\ &\leq \|u(t+h)-u(t)\|_{s-1}\|w\|_{h+1} \\ &\leq \|u(t+h)-u(t)\|_s\|w\|_k\end{aligned}$$

donde usamos el lema A.1 en la segunda desigualdad.

Entonces, (i)$-$(iii) prueban la existencia y unicidad del propagador $\{U(t,s)\}$ para la familia $\{A(t)\}$.

■

Observación 2.3. Escogiendo $h = s-3$, $k = s-2$ y usando que $w \in C([0,T], H^{s-2}) \cap C^1([0,T], H^{s-3})$, tenemos

$$w(t) = U(t,0)w(0) + \int_0^t U(t,\tau)B(\tau)w(\tau)d\tau \tag{2.9}$$

Lema 2.6. $w \in C([0,T], H^{r-2})$.

Demostración. Observe que $w(0) \in H^{r-2}$ y que $B(t) = u_x(t) \in \mathscr{B}(H^{r-2})$ es fuertemente continua en $[0,T)$ si $r \leq s+1$ ya que $u \in C([0,T], H^s)$ y $H^{s-1}, H^{r-2} \subset H^{r-2}$ para $s-1 > \frac{1}{2}$ (esto es consecuencia del lema A.1). Puesto que la familia $\{U(t,s)\}$ es fuertemente continua en H^{r-2} en si mismo (Lema 2.5.), el resultado se obtiene de (2.9); simplemente observamos que (2.9) es una ecuación integral de tipo Volterra la cual puede ser resuelta para w por aproximaciones sucesivas.

■

Capítulo 3

Problema Global

En esta sección vamos a mostrar que el problema (2) es globalmente bien puesto en H^s, $s > \frac{3}{2}$, siempre que u_0 satisface ciertas condiciones de positividad.

Teorema 3.1. *Suponga que* $u_0 \in H^s$, $s > \frac{3}{2}$. *Entonces la ecuación* (2) *es globalmente bien planteada en* $H^s(\mathbb{R})$.

La prueba de este teorema es consecuencia de los siguientes lemas:

Lema 3.1. *Sea* $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ *con* $s > \frac{3}{2}$, *entonces,* $\|V\|_{L^\infty(R)} = \|V_0\|_{L^\infty}$, *donde* $V = (1 - \alpha^2\partial_x^2)u$

Demostración. Sea $S(t) = V(t, \varphi(t, y))$ donde $\varphi(t, y)$ satisface la ecuación:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, y) = u(t, \varphi(t, y)), \\ &\varphi(0, y) = y \end{aligned} \tag{3.1}$$

De (2) obtenemos:

$$\frac{dS}{dt} = 0$$

$$S(0) = V_0(y)$$

Entonces $S(t) = V_0(y)$. Para completar la prueba, necesitamos mostrar que la función $y \in \mathbb{R} \to \varphi(t, y) \in \mathbb{R}$ es sobre, pero esto es consecuencia de la continuidad de φ y de la desigualdad:

$$|\varphi(t, y) - y| \leq \int_0^t |u(\tau, \varphi(\tau, y))| d\tau \leq Mt$$

que se obtiene al integrar (3.1), con $M = sup_{[0,T]} \|U(t)\|_s$
■

Observe también que la aplicación

$$y \in \mathbb{R} \to \varphi(t, y) \in \mathbb{R}$$

es un difeomorfismo, para cada $t \in [0, T]$ fijo, pues derivando (3.1) respecto a x tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = u_y(\varphi(t, y), t) \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, 0) = 1,$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, t) = e^{\int_0^+ u_y(\varphi(\tau, y), \tau) d\tau} > 0,$$

luego

$$y \to \varphi(t, y)$$

es inyectiva.

Lema 3.2. *Sea* $u_0 \in H^s$, $s > \frac{3}{2}$, *entonces existe* M *tal que* $\|\partial_x u\|_{L^\infty(R)} \leq M$

Demostración. Observe que $u = (1-\alpha^2\partial_x^2)^{-1}V$, entonces

$$u_x = \partial_x(1-\alpha^2\partial_x^2)^{-1}V = \partial_x K_\alpha * V$$

y

$$\partial_x K_\alpha \in L^1(\mathbb{R})$$

donde

$$\widehat{K}_\alpha(\zeta) = \frac{1}{1+\alpha^2\zeta^2}$$

del lema anterior con $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $s > \frac{3}{2}$, tenemos que

$$\|u_x\|_{L^\infty} \leq \|\partial_x K_\alpha\|_{L^1}\|V\|_{L^\infty} \leq \|K_\alpha\|_{L^1}\|V\|_{L^\infty} = M$$

■

A continuación obtenemos una cota para $\| \quad \|_s$, con $s > \frac{3}{2}$. Primero escribimos (**??**) de la siguiente forma

$$u_t = -uu_x + f(u) \tag{3.2}$$

donde $f(u) = -\frac{3}{2}\alpha^2\partial_x(1-\alpha^2\partial_x^2)^{-1}(u_x^2)$. Aplicando el operador Λ^s a (3.2) y multiplicando por $\Lambda^s u$ e integrando sobre $\mathbb{R}$, se obtiene

$$\frac{d}{dt}\|u\|_s^2 = -2\langle u, uu_x\rangle_s + \langle u, f(u)\rangle_s \tag{3.3}$$

En vista del Teorema A.2, tenemos

$$|\langle u, uu_x\rangle_s| \leq c_s\|u_x\|_{L^\infty}\|u\|_s^2 \tag{3.4}$$

Ahora acotamos el segundo término de la derecha de (3.3). La desigualdad de Cauchy-Schwartz implica

$$|\langle u, f(u)\rangle_s| \leq \|u\|_s\|f(u)\|_s \tag{3.5}$$

Nuestro siguiente paso es estimar $\|f(u)\|_s$

$$\begin{aligned}\|f(u)\|_s &\leq \|\frac{3}{2}u_x^2\|_{s-1} \leq c\|u_x^2\|_{s-1} \\ &\leq c\|u_x\|_{L^\infty}\|u_x\|_{s-1} \leq c\|u_x\|_{L^\infty}\|u\|_s, \qquad s > \frac{3}{2}\end{aligned} \tag{3.6}$$

donde usamos el lema de Kato-Ponce (Teorema A.3).
De esta forma en (3.2) se obtiene

$$\frac{d}{dt}\|u\|_s^2 \leq c\|u_x\|_{L^\infty}\|u\|_s^2, \quad s > \frac{3}{2} \tag{3.7}$$

Integrando (3.7) y utilizando el Lema 3.2, obtenemos

$$\|u\|_s^2 \leq \|u_0\|_s^2 + K\int_0^t \|u(\tau)\|_s^2 d\tau, \quad s > \frac{3}{2} \tag{3.8}$$

El teorema se sigue al combinar la desigualdad de Growall y el Teorema 2.2.

Capítulo 4

Teoría en $H^{2r,r}$ y en $\mathscr{S}$

En esta sección probamos el buen planteamiento en espacios de Sobolev con pesos $H^{2r,r} = H^{2r} \cap L^2(pdx)$ donde $p(x) = (1+x^2)^r$, $r = 1, 2, \ldots$. Utilizando Teoría de Kato, consideramos la ecuación (2) y escojemos $X = L^2$, $Y = H^{2r,r}$, $r = 1, 2, \ldots$, $S = (-D^2)^r + (1+x^2)^{\frac{r}{2}}$, $A(y) = -(\Lambda_\alpha^{-2} y)\partial_x$ y $f(y) = 0$.
En [2] Kato muestra que S es un operador autoadjunto positivo en L^2 con dominio $D(S) = H^{2r,r}$ y que satisface (X). Ahora verificaremos las otras condiciones (A_1)−(A_3), (f_1) del Teorema 1.1. Las condiciones (A_1)−(A_3) son consecuencia inmediata de los siguientes Lemas

Lema 4.1. *El operador $A(u) = (\Lambda_\alpha^{-2} u)\partial_x$, con $u \in H^s$, $s \geq 1$, pertenece a $G(L^2, 1, \beta)$.*

Demostración. Note que $\|\partial_x \Lambda_\alpha^{-2} u\|_\infty \leq c_s \|u\|_s$ para $u \in H^s$. Además

$$\begin{aligned} \langle A(u)\phi, \phi\rangle_0 &= \frac{1}{2}\langle \Lambda_\alpha^{-2} u, \partial_x \phi^2\rangle_0 = -\frac{1}{2}\langle \partial_x \Lambda_\alpha^{-2} u, \phi^2\rangle_0 \\ &\geq -\frac{1}{2}\|\partial_x \Lambda_\alpha^{-2} u\|_\infty \|\phi\|_0^2 \\ &\geq -c_s \|u\|_s \|\phi\|_0^2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Para finalizar la demostración, necesitamos mostrar $(A(u)+\lambda)$ es sobre $L^2(\mathbb{R})$ para algún (todos) $\lambda > \beta$. Puesto que $A(u)$ es un operador cerrado, y la desigualdad (4.1) muestra que $(A(u)+\lambda)$ es de rango cerrado para $\lambda > \beta$. Ahora, es suficiente mostrar que $(A(u)+\lambda)$ tiene rango denso para $\lambda > \beta$. Sea $\psi \in L^2$ tal que $\langle (A(u)+\lambda)\phi, \psi\rangle_0 = 0$, para todo $\phi \in D(A(u))$. Entonces, $\psi \in D(\partial_x((\Lambda_\alpha^{-2}u)\cdot)) \subseteq D((\Lambda_\alpha^{-2}u)\partial_x)$ y satisface la ecuación $-\partial_x((\Lambda_\alpha^{-2}u)\psi) + \lambda\psi = 0$. Multiplicando esta ecuación por ψ, integrando por partes y aplicando la desigualdad (4.1) se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \langle -\partial_x((\Lambda_\alpha^{-2}u)\psi) + \lambda\psi, \psi\rangle_0 \\ &= \langle \psi, A(u)\psi\rangle_0 + \lambda\langle\psi,\psi\rangle_0 \\ &\geq (\lambda-\beta)\|\psi\|_0^2, \qquad \lambda > \beta. \end{aligned}$$

Puesto que $(\lambda-\beta) > 0$ concluimos que $\psi = 0$. ∎

Lema 4.2. *(i)* $H^s \subseteq D((\Lambda_\alpha^{-2}y)\partial_x) := \{f \in L^2 : (\Lambda_\alpha^{-2}y)\partial_x f \in L^2\}, s \geq 1.$

(ii) $(\Lambda_\alpha^{-2}y)\partial_x \in \mathscr{B}(H^s, L^2), s \geq 1.$

(iii) $\|(\Lambda_\alpha^{-2}y)\partial_x - (\Lambda_\alpha^{-2}z)\partial_x\|_{\mathscr{B}(H^s,L^2)} \leq \mu\|y-z\|_0, s \geq 1.$

Demostración. Sea $f \in H^s$. Entonces

$$\begin{aligned} \|(\Lambda_\alpha^{-2}y)\partial_x f\|_0 &\leq \|\Lambda_\alpha^{-2}y\|_{s+2}\|\partial_x f\|_0 \\ &\leq c\|y\|_s\|f\|_1 \\ &\leq c\|y\|_s\|f\|_s, \qquad s \geq 1, \end{aligned}$$

aqui usamos el Lema A.1, para la primera desigualdad. Esto implica (i) y (ii).

Para probar (iii) note que

$$\begin{aligned} \|\Lambda_\alpha^{-2}y\partial_x f - \Lambda_\alpha^{-2}z\partial_x f\|_0 &= \|\Lambda_\alpha^{-2}(y-z)\partial_x f\|_0 \\ &\leq \|\Lambda_\alpha^{-2}(y-z)\|_{L^\infty}\|\partial_x f\|_0 \\ &\leq \|y-z\|_0\|f\|_1 \end{aligned}$$

$$\leq \|f\|_s \|y-z\|_0, \qquad s \geq 1.$$

■

Las condiciones (A_2) y (f_1) son consecuencia de los siguientes lemas.

Lema 4.3. **(i)** *$B(y) = [S, (\Lambda_\alpha^{-2} y)\partial_x] S^{-1} \in \mathscr{B}(L^2)$, $r = 1, 2, \ldots$ y $S = (-D^2)^r + (1+x^2)^{\frac{r}{2}}$.*

(ii) *$\|B(w) - B(y)\|_{\mathscr{B}(L^2)} \leq \mu \|w-y\|_{2r,r}$, $r = 1, 2, \ldots$.*

Demostración. Reescribiendo $B(y)$ como

$$B(y) = [(-D^2)^r, \Lambda_\alpha^{-2} y]\partial_x S^{-1} + (\Lambda_\alpha^{-2} y)[(1+x^2)^{\frac{r}{2}}, \partial_x] S^{-1} \tag{4.2}$$

Ahora debemos probar que cada término en esta expresión pertenece a L^2. Consideremos primero $[(-D^2)^r, \Lambda_\alpha^{-2} y]\partial_x S^{-1}$. Puesto que $\partial_x S^{-1} \in \mathscr{B}(L^2, H^{2r-1})$, es suficiente mostrar que $[(-D^2)^r, \Lambda_\alpha^{-2} y] \in \mathscr{B}(H^{2r-1}, L^2)$. Esto es consecuencia del Lema A.3, en efecto

$$\begin{aligned}
\|[(-D^2)^r, \Lambda_\alpha^{-2} y] w\|_0 &\leq \|\Lambda_\alpha^{-2} y\|_{2r} \|w\|_{L^\infty} + \|\partial_x \Lambda_\alpha^{-2} y\|_{L^\infty} \|w\|_{2r-1} \\
&\leq \|y\|_{2r} \|w\|_{r-1} + \|y\|_{2r} \|w\|_{2r-1} \\
&\leq \|y\|_{2r} \|w\|_{2r-1} \\
&\leq \|y\|_{2r,r} \|w\|_{2r-1}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Para el otro término de (4.2), observe que $[q, \partial_x] = -q' = O(|x|^{r-1})$ y que $D(S) \subseteq D(q')$, donde $q = (1+x^2)^{\frac{r}{2}}$ y que $\Lambda_\alpha^{-2} y[(1+x^2)^{\frac{r}{2}}, \partial_x] S^{-1}$ es acotado. La condición (ii) es una consecuencia de (i). En efecto,

$$\begin{aligned}
\|(B(y) - B(z))w\|_0 &\leq \|[(-D^2)^r, \Lambda_\alpha^{-2}(y-z)]\partial_x S^{-1} w\|_0 + \|\Lambda_\alpha^{-2}(y-z)[q, \partial_x] S^{-1} w\|_0 \\
&\leq c(\|y-z\|_{2r} \|w\|_0 + \|y-z\|_{2r} \|w\|_0) \\
&\leq c\|y-z\|_{2r} \|w\|_0
\end{aligned}$$

■

Lema 4.4. *Sea* $f(y) = 0$. *Entonces*

(i) $\|f(y)\|_{2r,r} \leq \lambda_3$, $r = 1, 2, \dots$,

(ii) $\|f(y) - f(z)\|_0 \leq \mu_2 \|y - z\|_0$,

(iii) $\|f(y) - f(z)\|_{2r,r} \leq \mu_4 \|y - z\|_{2r,r}$, $r = 1, 2, \dots$.

Estos Lemas implican el siguiente resultado:

Teorema 4.1. *Sea* $\Phi \in H^{2r,r}$, *con* $r = 1, 2, \dots$. *Entonces, existen* $T > 0$, *que depende solo de la* $H^{2r,r}-$*norma de* Φ, *y una única solución de* (2) *tal que*

$$V \in C([0,T]; H^{2r,r})$$

Además, la aplicación $\Phi \in H^{2r,r} \to V \in C([0,T]; H^{2r,r})$ *es continua.*

Teorema 4.2. *Si* $\Phi \in H^{2r,r}$, *con* $r = 1, 2, \dots$, *entonces podemos escoger* $T = \infty$.

Demostración. Necesitamos estimar $\|V\|_{2r,r}$. Puesto que conocemos de la Teoría en H^s (ver Capitulo 3) que $\|V\|_{2r} = \|u\|_{2r+2}$ es globalmente estimado para $r \geq 0$, solo resta analizar $\|V\|_{L^2_r}$. Multiplicando (2) por $V(1 + x^2)^r$ e integrando, de (2) obtenemos la siguiente expresión

$$\frac{d}{dt}\|V\|^2_{L^2_r} = -\frac{1}{2}\int u(\partial_x V^2)(1 + x^2)^r dx,$$

donde $u = \Lambda_\alpha^{-2} V = (1 - \partial_x^2)^{-1} V$. Integrando por partes esta expresión, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|V\|^2_{L^2_r} &= \frac{1}{2}\int u_x V^2 (1 + x^2)^r dx + r\int u V^2 x (1 + x^2)^{r-1} dx \\ &\leq K(\|u_x\|_{L^\infty}\|V\|^2_{L^2_r} + \|u\|_{L^\infty}\|V\|^2_{L^2_r}) \\ &\leq K\|V\|^2_{L^2_r} \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\|u_x\|_{L^\infty} \leq K$, y que $\|u\|_{L^\infty} \leq K$,las cuales son consecuencia del teorema (3.1).Así concluimos con la demostración del Teorema.
■

Note que $H^{2r,r}-$normas para $r = 1, 2, \dots$ son un sistema fundamental de seminormas en $\mathscr{S}$ (vea [2]), de lo cual consideramos el siguiente resultado

Teorema 4.3. *Sea $u_0 \in \mathscr{S}$. Entonces existe una única solución u de* (0.1) *tal que*

$$u \in C([0, \infty); \mathscr{S})$$

Además, la aplicación $u_0 \in \mathscr{S} \to u \in C([0, \infty); \mathscr{S})$ es continua. Realmente $u \in C^\infty((0, \infty); \mathscr{S})$.

A

Apéndice

Lema A.1. *Sean s, t números reales tales que $-s < t \leq s$. Entonces*

$$\begin{aligned} \|fg\|_t &\leq c\|f\|_s\|g\|_t, \quad si \quad s > \frac{1}{2}, \\ \|fg\|_{s+t-m/2} &\leq c\|f\|_s\|g\|_t, \quad si \quad s > \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{A.1}$$

donde c es una constante positiva que depende solo de s, t.

Demostración. Ver [4] ∎

Lema A.2. *(Kato [2]) Sea $f \in H^r$, $r > \frac{3}{2}$ y M_f el operador de multiplicación por f. Entonces $\Lambda^{-\widetilde{s}}[\Lambda^{\widetilde{s}+\widetilde{t}+1}, M_f]\Lambda^{-\widetilde{t}} \in \mathscr{B}(L^2(\mathbb{R}))$ si $|\widetilde{t}|, |\widetilde{t}| \leq r-1$. Además,*

$$\|\Lambda^{-\widetilde{s}}[\Lambda^{\widetilde{s}+\widetilde{t}+1}, M_f]\Lambda^{-\widetilde{t}}w\|_0 \leq c\|f'\|_{r-1}\|w\|_0 \tag{A.2}$$

que es,

$$\|\Lambda^{-\widetilde{s}}[\Lambda^{\widetilde{s}+\widetilde{t}+1}, M_f]\Lambda^{-\widetilde{t}}\|_{\mathscr{B}(L^2(\mathbb{R}))} \leq c\|f'\|_{r-1}$$

Demostración. Ver [3]. ∎

Teorema A.1. *Si $s > 0$ y $1 < p < \infty$, entonces $L^p_s \cap L^\infty$ es un algebra. Además,*

$$|fg|_{s,p} \leq c(\|f\|_{L^\infty}|g|_{s,p} + |f|_{s,p}\|g\|_{L^\infty})$$

Teorema A.2. *(Kato-Ponce) Sean $s > 0$ y $1 < p < \infty$. Entonces*

$$\|[\Lambda^s, f]g\|_{L^p} \leq c(\|\partial_x f\|_{L^\infty}\|\Lambda^{s-1}g\|_{L^p} + \|\Lambda^s f\|_{L^p}\|g\|_{L^\infty})$$

donde c es una constante que depende solo de p y s.

Teorema A.3. *El operador*

$$S = (-D^2)^N + (1+x^2)^N$$

satisface las siguientes propiedades:

(i) *S con dominio $H^{2N,N}$ es autoadjunto en L^2,*

(ii) *C_0^∞ es un centro (dominio minimal) para S,*

(iii) *$\|(1+x^2)^{1-N/2}D^k u\|_{L^2} \leq c\|Su\|_{L^2}$, $u \in D(S)$, $k = 0, 1, \ldots, 2N$; $0 \leq h \leq 1 - K/2N$,*

(iv) *SD^nS^{-1}, $D^{2N+n}S^{-1}$, $D^n(1+x^2)^{N/2}S^{-1} \in \mathscr{B}(H^n, H^0)$, $n = 1, 2, \ldots, 2N$.*

Demostración. Ver [2] ■

Lema A.3.

$$\|[D^\alpha, f]g\|_0 \leq c(\|f\|_K\|g\|_{L^\infty} + \|f'\|_{L^\infty}\|g\|_{K-1})$$

para todo $\alpha \leq K$, con K entero positivo.

Bibliografía

[1] Bhat H. S., Fetecau R. C. *A Hamiltonian Regularization of the Burgers equation*. Nonlinear Science 16 (2006), pp.615-638.

[2] Kato T. *On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equations* Adv. in Math. Suppl. Studies, Studies in Appl. Math, 1983

[3] Kato T. *On the Korteweg-de Vries equation*, Manuscripta Mathematica, 28, (1979), pp.89-99

[4] Kato T. *Quasi-linear equations of evolution with applications to partial differential equations*, Lecture notes in Mahematics, vol. 448, pp. 27-50. Springer Verlag, Berlin and New York 1975

[5] R. J. Iório, Jr., Valèria de Magalhães Iório, *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*, Cambridge studies in avanced mathematics, 70, (2001)

[6] A. constantin, *On the Cauchy problem for the periodic Camassa-Holm ecuation, J. Differential Equations* (2) (1997) 218-235.

[7] G. Rodriguez Blanco, *Sobre el problema de Cauchy para la ecuación de Camassa Holm* 46 (2001) 309-327