El Problema De Cauchy Asociado a La Ecuación No Lineal De Schrödinger Forzada Paramétricamente

Luisa Fernanda Martínez Rojas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá

2009

El Problema De Cauchy Asociado a La Ecuación No Lineal De Schrödinger Forzada Paramétricamente

Luisa Fernanda Martínez Rojas

Trabajo final presentado como requisito parcial para optar al título de

Magister en Matemáticas

Director
Guillermo Rodríguez Blanco

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá
2009

Contenido

Introducción

En este trabajo trataremos el buen planteamiento local y global en los casos periódico y no periódico de la ecuación

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + |u|^2u + (i-a)u - \gamma\bar{u} = 0, \tag{0.1}$$

que es una perturbación de la ecuación de Schrödinger cúbica y modela fenómenos que se presentan en óptica ([1], [5], [6]). Específicamente estudiaremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + |u|^2u + (i-a)u - \gamma\bar{u} = 0 & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ u(0) = \varphi \in H^s(\mathbb{R}), \end{cases} \tag{0.2}$$

donde $a \in \mathbb{R}$ y $\gamma \in \mathbb{R}$.

Con el fin de tratar el buen planteamiento de (0.2) usaremos una ecuación integral equivalente y el teorema del punto fijo de Banach lo cual nos permitirá obtener el buen planteamiento local en $H^s(\mathbb{R})$ (o análogamente $H^s(\mathbb{T})$), para $s > 1/2$, posteriormente probaremos que dicho problema es globalmente bien planteado en $H^1(\mathbb{R})$, este resultado en el caso periódico es similar salvo que la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg cambia levemente. Siguiendo las ideas de Kenig-Ponce-Vega ([4]) probaremos que este problema es localmente bien planteado en $L^2(\mathbb{R})$ y a partir de una estimativa apriori probaremos que este problema es globalmente bien planteado en $L^2(\mathbb{R})$ este tipo de resultado en el caso periódico no fue posible obtenerlo con este tipo de técnica pues no tenemos estimativas del tipo $L_p L_q$.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo esta dedicado a recordar algunos conceptos y resultados básicos que serán de utilidad a lo largo de este trabajo

Definición 1.1. *Si X y Y son espacios de Banach, denotaremos por $B(X,Y)$ el espacio de todas las transformaciones lineales y acotadas $T : X \to Y$*

Definición 1.2. *Sean H_j, $j = 1, 2$ espacios de Hilbert. Un operador $U \in B(H_1, H_2)$ es una isometría si $||Uh||_{H_1} = ||h||_{H_2}$ para todo $h \in H_1$. U es unitario si es una isometría sobreyectiva.*

Definición 1.3. *Sea H un espacio de Hilbert. Un grupo unitario fuertemente continuo a un parámetro en H es una aplicación $t \in \mathbb{R} \to U(t) \in B(H)$ tal que:*

1. *U es unitario para todo $t \in \mathbb{R}$,*

2. *$U(t + t') = U(t)U(t')$ para todo $t, t' \in \mathbb{R}$,*

3. *$\lim\limits_{t \to t'} ||U(t)\phi - U(t')\phi||_H = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y para todo $\phi \in H$*

Definición 1.4. *Sea $s \in \mathbb{R}$. Los espacios de Sobolev de orden s son definidos y notados por*

$$H^s(\mathbb{R}) =: \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) : (1+\xi^2)^{s/2}\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})\},$$

donde, $\hat{f}$ es la transformada de Fourier de f,dotados de la norma:

$$||f||_s^2 = \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi < +\infty.$$

Inducida por el producto interno

$$\langle f, g\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)} \, d\xi.$$

Además $H^s(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^r(\mathbb{R})$ para todo $s \geq r$, donde $\hookrightarrow$ denota, como es usual, contenido densa y continuamente.

Definición 1.5. *Sea $s \in \mathbb{R}$. El espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{T})$ es el conjunto de todas las $f \in P'$ tal que:*

$$||f||_s^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 < \infty$$

En otras palabras, una distribución periódica $f \in H^s$ si y solo si $((1+|k|^2)^{s/2}\widehat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$ en donde ℓ^2 denota el espacio de todas las sucesiones $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ con

$$||\alpha||_{\ell_s^2} = \left[2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{\alpha(k)}|^2\right]$$

esto es $f \in H^s(\mathbb{T})$ si y solo si $(\widehat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$

Definición 1.6. *Sea $(\mathbb{X}, d)$ un espacio métrico. Una contracción en $\mathbb{X}$ es una aplicación $\Psi : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ tal que: $d(\Psi(x), \Psi(y)) \leq \alpha d(x, y)$ para todo $x, y \in \mathbb{X}$ y algún $\alpha \in [0, 1]$. Si $\alpha < 1$ decimos que Ψ es una contracción estricta*

Teorema 1.7. ***Teorema del punto fijo de Banach***

Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico completo y supongamos que $\Psi : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ es una contracción estricta, Ψ tiene un único punto fijo, esto es existe un único $x_0 \in \mathbb{X}$ tal que $\Psi(x_0) = x_0$.

Teorema 1.8. ***Desigualdad de Gronwall***

Sean $k \in L^1([a,b])$ *con* $k \geq 0$ *y* $f, g \in C([a,b], \mathbb{R})$ *tales que*

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(s) f(s) ds.$$

para $a \leq t \leq b$. *Entonces:*

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(s) e^{[\int_s^t k(r) dr]} g(s) ds$$

para $a \leq t \leq b$. *Además si* g *es constante entonces:*

$$f(t) \leq g e^{[\int_a^t k(r) dr]}.$$

Teorema 1.9. ***Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg.***

Si $f \in H^k(\mathbb{R})$ *donde* k *es un entero positivo, entonces existe* $C > 0$ *tal que:*

$$||\partial_x^n f||_{L^p} \leq C ||\partial_x^m f||_{L^q}^{\theta} ||f||_{L^r}^{1-\theta}$$

donde $n < m \leq k, C = C(n, m, p, q, r), \theta \in [\frac{n}{m}, 1]$ *y*

$$\frac{1}{p} - n = \theta \left(\frac{1}{q} - m \right) + (1 - \theta) \frac{1}{r}.$$

Teorema 1.10. ***Desigualdad de Young***

Si $f, g \geq 0, p, q > 1$ *y* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *entonces:*

$$fg \leq \frac{f^p}{p} + \frac{g^q}{q}$$

Teorema 1.11. ***Desigualdad de Hölder***

Sean $f, g \in C[a,b]$ *entonces*

$$\int |f(x) g(x) dx| \leq \left(\int (f(x))^p \right)^{1/p} \left(\int (g(x))^q \right)^{1/q}$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *y* $p > 1$

Capítulo 2

Solución Lineal de la Ecuación en $H^s, s > \frac{1}{2}$

En este capítulo abordaremos el problema de Cauchy asociado a la parte lineal de la ecuación (0.1) tanto en el caso periódico como en el no periódico. Es decir, consideraremos el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{i\partial_x^2 u}{2}, \\ u(0) &= \varphi \in H^s, \end{aligned} \tag{2.1}$$

dónde, $x \in \mathbb{R}$ o $x \in \mathbb{T}$, cuya solución viene dada por

$$u(t) = \mathbb{V}(t)\varphi = (e^{\frac{-i}{2}t\xi^2}\widehat{\varphi})^{\vee} = e^{\frac{i}{2}t\partial_x^2}\varphi. \tag{2.2}$$

En lo que resta de este capítulo nos dedicaremos a tratar con el caso no periódico pues el caso periódico es semejante salvo por pequeñas modificaciones.

Teorema 2.1. *La aplicación $t \in [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{V}(t) \in B(H^s)$ es un grupo unitario fuertemente continuo a un parámetro.*

Demostración. Este resultado es consecuencia de:

1. Como,

$$||\mathbb{V}(t)\phi||_s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (1+\xi^2)^s |e^{\frac{-i}{2}t\xi^2}\widehat{\phi}|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (1+\xi^2)^s |\widehat{\phi}|^2 d\xi = ||\phi||_s^2$$

para toda $\phi \in H^s$ y toda $t \in \mathbb{R}$, concluimos que $\mathbb{V}(t) \in B(H^s)$ y que $\mathbb{V}$ es una isometría.Además, $\mathbb{V}$ es sobreyectiva para todo $t \in \mathbb{R}$; en efecto, si $\varphi \in H^s$ se tiene que $\phi = e^{\frac{-i}{2}t\partial_x^2}\varphi \in H^s$ por tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\phi &= e^{\frac{i}{2}t\partial_x^2}(e^{\frac{-i}{2}t\partial_x^2}\varphi) \\
&= e^{\frac{i}{2}t\partial_x^2}[(e^{\frac{-i}{2}t\xi^2}\widehat{\varphi})\check{}] \\
&= [e^{\frac{-i}{2}t\xi^2}e^{\frac{i}{2}t\xi^2}\hat{\varphi}]\check{} \\
&= \varphi
\end{aligned}$$

Lo anterior implica que $\mathbb{V}(t)$ es unitario para cada $t \in \mathbb{R}$

2. Es claro que $\mathbb{V}(0) = \phi$ para todo $\phi \in H^s$

3.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(t+w)\varphi &= [e^{((t+w)(\frac{-i}{2}\xi^2))}\hat{\varphi}]\check{} \\
&= [e^{-t\frac{i}{2}\xi^2}e^{-w\frac{i}{2}\xi^2}\hat{\varphi}]\check{} \\
&= \mathbb{V}(t)[\mathbb{V}(w)\varphi]
\end{aligned}$$

para todo t, $w \in \mathbb{R}$, y toda $\varphi \in H^s$

4. Como,

$$\begin{aligned}
||e^{\frac{ti}{2}\partial_x^2}\phi - e^{\frac{iw}{2}\partial_x^2}\phi||_s^2 &= ||(e^{\frac{-it}{2}\xi^2}\hat{\phi})\check{} - (e^{\frac{-iw}{2}\xi^2}\hat{\phi})\check{}||_s^2 \\
&= ||\ [\ e^{\frac{-it}{2}\xi^2}\hat{\phi} - e^{\frac{-iw}{2}\xi^2}\hat{\phi}\ ]\check{}\ ||_s^2 \\
&= ||\ [\ (e^{\frac{-it}{2}\xi^2} - e^{\frac{-iw}{2}\xi^2})\hat{\phi}\ ]\check{}\ ||_s^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (1+\xi^2)^s |(e^{\frac{-it}{2}\xi^2} - e^{\frac{-iw}{2}\xi^2})\hat{\phi}|^2 d\xi \\
&\leq 4||\phi||_s^2,
\end{aligned}$$

para todo t, $w \in \mathbb{R}$, y toda $\phi \in H^s$, y que $\lim\limits_{t \to w} (e^{\frac{-it}{2}\xi^2} - e^{\frac{-iw}{2}\xi^2}) = 0$, el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue nos permite concluir que $||e^{\frac{ti}{2}\partial_x^2}\phi - e^{\frac{wi}{2}\partial_x^2}\phi||_s^2 \to 0$ si $t \to w$.

Así que 1, 2, 3 y 4 implican que $\mathbb{V}$ es un grupo unitario fuertemente continuo a un parámetro. ∎

Teorema 2.2. *u dada por (2.2) es la única solución de (2.1). Es decir, $u \in C([0, T]; H^s)$ es la única que satisface*

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - \frac{i}{2}\partial_x^2 u(t) \right\|_{s-2} = 0. \tag{2.3}$$

Demostración. Sea $t \geq 0$ y $h > 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - \frac{i}{2}\partial_x^2 u(t) \right\|_{s-2}^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1+\xi^2)^{s-2} \left| \frac{e^{\frac{-i}{2}\xi^2(t+h)}\widehat{\varphi} - e^{\frac{-i}{2}\xi^2 t}\widehat{\varphi}}{h} - \left(\frac{-i\xi^2}{2} e^{\frac{-i}{2}\xi^2 t}\widehat{\varphi} \right) \right|^2 d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1+\xi^2)^{s-2} |e^{\frac{-i}{2}\xi^2 t}|^2 \left| \frac{e^{\frac{-i}{2}\xi^2 h} - 1}{h} + \frac{i\xi^2}{2} \right|^2 |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Como,

$$\left| \frac{e^{\frac{-i}{2}\xi^2 h} - 1}{h} \right| \leq \left| \frac{i\xi^2}{2} \right| = \frac{1}{2}\xi^2$$

tenemos que 2.4 es acotado por

$$\left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - \frac{i}{2}\partial_x^2 u(t) \right\|_{s-2}^2 \leq 4 \int_{-\infty}^{+\infty} (1+\xi^2)^{s-2} |\xi^2|^2 |\hat{\varphi}|^2 d\xi$$

Como $\dfrac{|\xi^2|^2}{(1+\xi^2)^2} \leq N$, para alguna $N > 0$ y $\forall \xi \in \mathbb{R}$ la desigualdad anterior se transforma en

$$\left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - \frac{i}{2}\partial_x^2 u(t) \right\|_{s-2}^2 \leq 4N ||\varphi||_s^2 \tag{2.5}$$

La desigualdad (2.5) y $\lim\limits_{h\to 0}\left|\dfrac{e^{\frac{-i}{2}\xi^2 h}-1}{h}+\dfrac{i}{2}\xi^2\right|=0$ nos permite obtener el limite por la derecha gracias al Teorema de la convergencia Dominada de Lebesgue. Para el limite por la izquierda se procede análogamente. La unicidad es consecuencia de observar que si u es solución de (2.1) entonces $\|u\|_s=\|\varphi\|_s$, pues $\partial_t\|u\|_s^2=2Re\left\langle i\partial_x^2 u,u\right\rangle_s=0$ ■

Capítulo 3

El problema local

En este capítulo trataremos el buen planteamiento local del problema (0.1) el cual describiremos en la siguiente forma por comodidad.

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{i}{2}\partial_x^2 u + F(u), \\ u(0) &= \varphi, \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $F(u) = i|u|^2 u - (1 + ia)u - i\gamma\overline{u}$.

El siguiente teorema transforma (3.1) en la ecuación integral

$$u(t) = \mathbb{V}(t)\varphi + \int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)F(u(\tau))d\tau \tag{3.2}$$

en $H^{s-2}(\mathbb{R})$.

Teorema 3.1. *Si $s > 1/2$ entonces el problema (0.1) es equivalente a la ecuación integral (3.2). En el siguiente sentido: si $u \in C([0,T]; H^s)$ es una solución de (0.1) entonces u satisface (3.2). Recíprocamente, si $u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$ es una solución de (3.2) en $H^{s-2}(\mathbb{R})$ entonces $u \in C^1([0,T]; H^{s-2})$ y satisface (0.1).*

Demostración. **1.** Supongamos que $u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$ es una solución de

(0.1) en H^{s-2}, entonces

$$\mathbb{V}(-t)u_t - \mathbb{V}(-t)\frac{i}{2}\partial_x^2 u = \mathbb{V}(-t)F(u),$$

en $H^{s-2}(\mathbb{R})$. Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}(\mathbb{V}(-t)u) = \mathbb{V}(-t)F(u),$$

integrando de 0 a t y observando que $\mathbb{V}(t)$ es un operador acotado en $H^{s-2}(\mathbb{R})$ tenemos,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(-t)u(t) - \mathbb{V}(0)u(0) &= \int_0^t \mathbb{V}(-\tau)F(u(\tau))d\tau \\ \mathbb{V}(-t)u(t) - \varphi &= \int_0^t \mathbb{V}(-\tau)F(u(\tau))d\tau \\ \mathbb{V}(-t)u(t) &= \varphi + \int_0^t \mathbb{V}(-\tau)F(u(\tau))d\tau\end{aligned}$$

luego,

$$u(t) = \mathbb{V}(t)\varphi + \int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)F(u(\tau))d\tau \tag{3.3}$$

2. Supongamos ahora que $u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$ es solución de (3.1), entonces

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - \frac{i}{2}Au(t) - F(u(t)) \right\|_{s-2} = 0.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - \frac{i}{2}Au(t) - F(u(\tau)) \right\|_{s-2} &\leq \left\| \mathbb{V}(t)\left(\frac{\mathbb{V}(h)-1}{h} - \frac{i}{2}A\right)\varphi \right\|_{s-2} \\ &+ \int_0^t \left\| \mathbb{V}(t-\tau)\left(\frac{\mathbb{V}(h)-1}{h} - \frac{i}{2}A\right)F(u(\tau)) \right\|_{s-2} d\tau \\ &+ \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|\mathbb{V}(t+h-\tau)F(u(\tau)) - F(u(t))\|_{s-2} d\tau\end{aligned}$$

Del teorema (2.2) tenemos:

$$\lim_{h\to 0} \left\| \mathbb{V}(t)\left(\frac{\mathbb{V}(h)-1}{h} - \frac{i}{2}A\right)\varphi \right\|_{s-2} = 0.$$

Falta ver que:

$$\lim_{h\to 0} \int_0^t \left\| \mathbb{V}(t-\tau)\left(\frac{\mathbb{V}(h)-1}{h} - \tfrac{i}{2}A\right) F(u(\tau))\right\|_{s-2} d\tau = 0 \tag{3.4}$$

y

$$\lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h}\int_t^{t+h} \|\mathbb{V}(t+h-\tau)F(u(\tau)) - F(u(t))\|_{s-2} d\tau = 0 \tag{3.5}$$

Veamos (3.4)

$$\left\| \mathbb{V}(t-\tau)\left(\frac{\mathbb{V}(h)-1}{h} - \frac{i}{2}A\right) F(u(\tau))\right\|_{s-2}^2 = \left\| \left(\frac{\mathbb{V}(h)-1}{h} - \frac{i}{2}A\right) F(u(\tau))\right\|_{s-2}^2 \tag{3.6}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (1+\xi^2)^{s-2} \underbrace{\left| \frac{e^{\frac{-i}{2}h\xi^2}-1}{h} + \frac{i}{2}\xi^2 \right|^2}_{i} |\widehat{F(u(\tau))}|^2 d\xi$$

Analizando (i) tenemos:

$$\left| \frac{e^{\frac{-i}{2}h\xi^2}-1}{h} + \frac{i}{2}\xi^2 \right| \leq \left| \frac{e^{\frac{-i}{2}h\xi^2}-1}{h} \right| + \left| \frac{i\xi^2}{2} \right|$$

Por el Teorema del valor medio

$$\left| \frac{e^{\frac{-i}{2}h\xi^2}-1}{h} \right| \leq \left| \frac{-i}{2}\xi^2 \right| = \frac{1}{2}\xi^2$$

Entonces

$$\left| \frac{e^{\frac{-i}{2}h\xi^2}-1}{h} + \frac{i}{2}\xi^2 \right|^2 \leq \left(\frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi^2 \right)^2 \leq C(1+\xi^2)^2$$

Luego, (3.6)

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} (1+\xi^2)^{s-2} C (1+\xi^2)^2 |\widehat{F(u(\tau))}|^2 d\xi \\
&= C\int_{-\infty}^{\infty} (1+\xi^2)^{s} |\widehat{F(u(\tau))}|^2 d\xi \\
&= C\|F(u(\tau))\|_s^2
\end{aligned}$$

y como
$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{e^{\frac{-i}{2}\xi^2 h}-1}{h}+\frac{i}{2}\xi^2\right|=0$$
Por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue tenemos que:
$$\left\|\mathbb{V}(t-\tau)\left(\frac{\mathbb{V}(h)-1}{h}-\frac{i}{2}A\right)F(u(\tau))\right\|_{s-2}\longrightarrow 0, \text{si } h\longrightarrow 0$$
Ahora veamos (3.5)
$$\begin{aligned}&\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\mathbb{V}(t+h-\tau)F(u(\tau))-F(u(t))d\tau\right\|_{s-2}\\ &\leq\frac{1}{|h|}\int_t^{t+h}\|\mathbb{V}(t+h-\tau)F(u(\tau))-F(u(t))\|_{s-2}d\tau\end{aligned}$$

para algún $\tau\in[t,t+h]$, la continuidad y el teorema del valor medio para integrales aplicados a la función continua
$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{1}{|h|}\int_t^{t+h}\mathbb{V}(t+h-\tau)F(u(\tau))d\tau-F(u(t))\right\|_{s-2}=0$$

■

A continuación se establece un resultado que es importante en la prueba del buen planteamiento local.

Lema 3.2. *Si u, $v\in C([0,T];H^s(\mathbb{R}))$ con $s>1/2$ entonces*
$$||F(u)-F(v)||_s\leq L(||u||_s,||v||_s)||u-v||_s$$
donde F es dado como en (3.1) y L es un polinomio homogéneo de grado 2.

Demostración. Como,
$$\begin{aligned}F(u)-F(v)&=i|u|^2u-(1+ia)u-i\gamma\overline{u}-(i|v|^2v-(1+ia)v-i\gamma\overline{u})\\&=i(|u|^2u-|v|^2v)-(1+ia)(u-v)-i\gamma(\overline{u}-\overline{v}),\end{aligned}$$

la desigualdad triangular implica que

$$\begin{aligned}\|F(u)-F(v)\|_s &= \left\|i(|u|^2u-|v|^2v)-(1+ia)(u-v)-i\gamma(\overline{u}-\overline{v})\right\|_s\\ &\leq \underbrace{\||u|^2u-|v|^2v\|_s}_{i}+|1+ia|\|u-v\|_s+|\gamma|\|\overline{u}-\overline{v}\|_s. \end{aligned} \tag{3.7}$$

La identidad

$$|f|^2f-|g|^2g=|f|^2(f-g)+\overline{f}g(f-g)+g^2(\overline{f}-\overline{g})$$

y el hecho de ser $H^s(\mathbb{R})$ un álgebra de Banach para $s>\frac{1}{2}$ transforma (i) en:

$$\begin{aligned}\||u|^2u-|v|^2v\|_s &\leq \||u|^2(u-v)\|_s+\|\overline{u}v(u-v)\|_s+\|v^2(\overline{u}-\overline{v})\|_s\\ &\leq \|u\|_s^2\|u-v\|_s+\|\overline{u}\|_s\|v\|_s\|u-v\|_s+\|v\|^2\|\overline{u}-\overline{v}\|_s \qquad (3.8)\\ &\leq \|u\|_s^2\|u-v\|_s+\|u\|_s\|v\|_s\|u-v\|_s+\|v\|_s^2\|u-v\|_s\\ &\leq \|u-v\|_s(\|u\|_s^2+\underbrace{\|u\|_s\|v\|_s}_{ii}+\|v\|_s^2).\end{aligned}$$

Por lo tanto (3.7) y (3.8) implican el resultado con $\left(\frac{3}{2}(\|u\|_s^2+\|v\|_s^2)+|1+ia|+|\gamma|\right)=L(\|u\|_s,\|v\|_s)$.
Luego

$$\|F(u)-F(v)\|_s\leq L(\|u\|_s,\|v\|_s)\|u-v\|_s$$

■

Teorema 3.3. *Sean $\varphi\in H^s$, donde $s>1/2$. Entonces, existen $T_s=T(\|\varphi\|_s)>0$ y $u\in C([0,T_s];H^s(\mathbb{R}))$ satisfaciendo la ecuación integral (3.3).*

Demostración. Sean $M,T>0$. Consideremos el espacio métrico completo definido por

$$\mathfrak{X}_s(T)=\{u\in C([0,T];H^s)\,:\,\left\|u(t)-e^{\frac{it}{2}\partial_x^2}\varphi\right\|_s\leq M,\forall t\in[0,T]\}, \tag{3.9}$$

dotado de la métrica $d(u,v)=\sup\limits_{t\in[0,T]}\|u(t)-v(t)\|_s=||u-v||_{\infty,s}$ y la aplicación

$$\Psi(u(t))=\mathbb{V}(t)\varphi+\int_0^t\mathbb{V}(t-\tau)F(u(\tau))d\tau \tag{3.10}$$

Una parte esencial de la prueba es probar que existe $T > 0$ tal que Ψ aplica $\mathfrak{X}_s(T)$ en si mismo y es una contracción. Por tal razón hemos dividido la prueba en varias etapas, a saber:

i. $\Psi u \in C([0,T]; H^s)$ si $u \in \mathfrak{X}_s(T)$. En efecto, esto es consecuencia de aplicar la norma de H^s a $\Psi(u(t+h)) - \Psi(u(t))$, usar (3.10), posteriormente aplicar la desigualdad triangular teniendo en cuenta que $\mathbb{V}$ es un grupo unitario y que F aplica H^s en si mismo. Finalmente, el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue prueba este hecho. En efecto,

$$\begin{aligned}
\|\Psi u(t+h) - \Psi u(t)\|_s &= \left\| \mathbb{V}(t+h)\varphi + \int_0^{t+h} \mathbb{V}(t+h-\tau)F(u(\tau))d\tau \right. \\
&\left. -\mathbb{V}(t)\varphi - \int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)F(u(\tau))d\tau \right\|_s \\
&= \left\| (\mathbb{V}(t+h) - \mathbb{V}(t))\varphi + \int_0^t (\mathbb{V}(t+h-\tau) - \mathbb{V}(t-\tau))F(u(\tau))d\tau \right. \\
&\left. + \int_t^{t+h} \mathbb{V}(t+h-\tau)F(u(\tau))d\tau \right\|_s \\
&\leq \|\mathbb{V}(t+h)\varphi - \mathbb{V}(t)\varphi\|_s + \left\| \int_0^t [\mathbb{V}(t+h-\tau) - \mathbb{V}(t-\tau)]F(u(\tau))d\tau \right. \\
&\left. + \int_t^{t+h} \mathbb{V}(t+h-\tau)F(u(\tau))d\tau \right\|_s
\end{aligned}$$

El primer termino de la desigualdad va a cero cuando h va a 0 porque $\mathbb{V}(t)$ es un grupo. Analizando el segundo termino de la desigualdad.

$$\left\| \underbrace{\int_0^t [\mathbb{V}(t+h-\tau) - \mathbb{V}(t-\tau)]\, F(u(\tau))d\tau}_{A} + \underbrace{\int_t^{t+h} \mathbb{V}(t+h-\tau)F(u(\tau))d\tau}_{B} \right\|_s$$

Tomando la parte A.

$$\begin{aligned}
\|[\mathbb{V}(t+h-\tau) - \mathbb{V}(t-\tau)]\, F(u(\tau))\|_s &\leq \|\mathbb{V}(t+h-\tau)F(u(\tau))\|_s \\
&\quad + \|\mathbb{V}(t-\tau)F(u(\tau))\|_s \\
&\leq 2\,\|F(u(\tau))\|_s\,, s > 1/2
\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{h\to 0} \left\| \left[\mathbb{V}(t+h-\tau) - \mathbb{V}(t-\tau) \right] F(u(\tau)) \right\|_s = 0$$

concluimos que

$$\lim_{h\to 0} \int_0^t \left\| \left[\mathbb{V}(t+h-\tau) - \mathbb{V}(t-\tau) \right] F(u(\tau)) d\tau \right\|_s = 0$$

Para la parte B, como $\mathbb{V}$ es un grupo unitario tenemos:

$$\left\| \mathbb{V}(t+h-\tau) F(u(\tau)) \right\|_s \leq \left\| F(u(\tau)) \right\|_s$$

como $u \in \mathfrak{X}_s(T)$ entonces

$$\begin{aligned} \left\| u(\tau) \right\|_s &= \left\| u(\tau) - \mathbb{V}(t)\varphi + \mathbb{V}(t)\varphi \right\|_s \leq \left\| u(\tau) - \mathbb{V}(t)\varphi \right\|_s + \left\| \mathbb{V}(t)\varphi \right\|_s \\ &\leq M + \left\| \varphi \right\|_s, \end{aligned} \tag{3.11}$$

así,

$$\left\| \mathbb{V}(t+h-\tau) F(u(\tau)) \right\|_s \leq \left\| F(M + \|\varphi\|_s) \right\|_s$$

y por lo tanto

$$\lim_{h\to 0} \int_t^{t+h} \left\| \mathbb{V}(t+h-\tau) F(u(\tau)) d\tau \right\|_s d\tau = 0$$

ii. Veamos que existe $T_1 > 0$ tal que si $0 < T \leq T_1$ y $u \in \mathfrak{X}_s(T)$ entonces $\Psi(u(t)) \in \mathfrak{X}_s(T)$. En efecto, de la definición de $\mathfrak{X}_s(T)$ en (3.9) y la desigualdad triangular implican que

$$\begin{aligned} \left\| \Psi(u(t)) - \mathbb{V}(t)\varphi \right\|_s &= \left\| \int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)\varphi F(u(\tau)) d\tau \right\|_s \\ &\leq \int_0^t \left\| F(u(\tau)) \right\|_s d\tau \\ &\leq \int_0^t L(\left\| u(t) \right\|_s, 0) \left\| u(t) \right\|_s, d\tau \end{aligned} \tag{3.12}$$

si $u \in \mathfrak{X}_s(T)$ tenemos (3.11) y (3.12) se transforma en

$$\left\| \Psi(u(\tau)) - \mathbb{V}(\tau)\varphi \right\|_s \leq \int_0^t L(M + ||\varphi||_s, 0)(M + ||\varphi||_s) d\tau$$

$$= L(M + \|\varphi\|_s, 0)(M + \|\varphi\|_s)t$$
$$\leq L(M + \|\varphi\|_s, 0)(M + \|\varphi\|_s)T$$

Eligiendo $T_1 = \frac{M}{L(M+\|\varphi\|_s,0)(M+\|\varphi\|_s)}$, tenemos lo requerido.

iii. Existe $T_2 > 0$ tal que si $0 < T \leq T_2$, Ψ es una contracción en $\mathfrak{X}_s(T)$. En efecto, aplicamos la norma de H^s a $\Psi(u(t)) - \Psi(v(t))$, posteriormente la desigualdad triangular, el lema 3.2, la definición de $\mathfrak{X}_s(T)$ en (3.9) y usamos que $\mathbb{V}$ es grupo para obtener:

$$\begin{aligned}
||\Psi(u(t)) - \Psi(v(t))||_s &\leq \int_0^t \|F(u(t)) - F(v(t))\|_s \, d\tau \\
&\leq \int_0^t L(\|u(\tau)\|_s, ||v(\tau)||_s)||u(\tau) - v(\tau)||_s d\tau \\
&\leq \int_0^t L(M + ||\varphi||_s, M + ||\varphi||_s)||u(\tau) - v(\tau)||_s d\tau \\
&\leq L(M + ||\varphi||_s, M + ||\varphi||_s) \int_0^t ||u(\tau) - v(\tau)||_s d\tau \\
&\leq L(M + ||\varphi||_s, M + ||\varphi||_s)Td(u, v). \forall t \in [0, T]
\end{aligned}$$

y escogiendo,

$$T_2 < \frac{1}{L(M + ||\varphi||_s, M + ||\varphi||_s)},$$

se obtiene que Ψ es una contracción en $\mathfrak{X}_s$ si $0 < T \leq \text{mín}\{T_1, T_2\}$, de este modo i, ii, y iii implican el resultado. ■

Teorema 3.4. *La solución obtenida en el Teorema (3.3) es única y depende continuamente del dato inicial φ.*

Demostración. Supongamos que $u, v \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$ son soluciones de (3.1) con datos iniciales ψ, ϕ respectivamente. Aplicando la norma H^s a

$$u(t) - v(t) = \mathbb{V}(t)(\psi - \phi) + \int_0^t \mathbb{V}(t - \tau)[F(u(\tau)) - F(v(\tau))]d\tau,$$

usamos, la desigualdad triangular, el hecho de ser $\mathbb{V}(t)$ un grupo unitario en H^s y el lema 3.2, para obtener:

$$\begin{aligned}
||u(t)-v(t)||_s &\leq ||\mathbb{V}(t)(\psi-\phi)||_s + \int_0^t ||\mathbb{V}(t-\tau)[F(u(\tau))-F(v(\tau))]||_s d\tau \\
&\leq ||\psi-\phi||_s + \int_0^t ||F(u(\tau))-F(v(\tau))||_s d\tau \\
&\leq ||\psi-\phi||_s + \int_0^t L(||u||_s, ||v||_s)||u(\tau)-v(\tau)||_s d\tau \\
&\leq ||\psi-\phi||_s + L\underbrace{(||u||_{\infty,s}, ||v||_{\infty,s})}_{K}\int_0^t ||u(\tau)-v(\tau)||_s d\tau \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

La desigualdad de Gronwall aplicada a (3.13) implica la unicidad, pues

$$||u(t)-v(t)||_s \leq ||\psi-\phi||_s e^{Kt} \tag{3.14}$$

La dependencia continua es consecuencia de la continuidad del tiempo de existencia de la solución de $||\varphi||_s$, de (3.9) y de (3.13) pero con $K = L(||\varphi||_s + M, ||\varphi_n||_s + M)$, donde $\varphi_n \to \varphi$ en H^s y u_n en vez de v, donde u_n es la solución de (3.1) con dato inicial φ_n. Además de observar que para n suficientemente grande $K < L(||\varphi||_s + M, 1 + ||\varphi||_s + M)$. ■

Teorema 3.5. *El problema de valor inicial (3.1) es localmente bien planteado en H^s para $s > 1/2$*

Demostración. Este resultado es consecuencia inmediata de los teoremas (3.3), (3.4) y el lema (3.2). ■

Nota:

En el caso periódico, el teorema 3.5 es el mismo y su prueba es esencialmente la misma.

Capítulo 4

Problema Global

Para tratar el buen planteamiento global de (0.1) en $H^1(\mathbb{R})$ necesitamos obtener estimativas de $\|u\|_1$. Con esto en mente, tenemos:

Lema 4.1.

$$\|u\|_0 \leq c\|\varphi\|_0$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\partial_t\|u\|_0^2 &= \partial_t \int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t)|^2 dx \\
&= \partial_t \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\overline{u(x,t)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t)\overline{u(x,t)} + u(x,t)\overline{u_t(x,t)} dx \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty} Re(u_t(x,t)\overline{u(x,t)}) dx \\
&= 2Re \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t)\overline{u(x,t)} dx \\
&= 2Re \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{i}{2}u_{xx} + i|u|^2 u - (1+ia)u - i\gamma\overline{u}\right) \overline{u} dx \\
&= 2Re \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{2}u_{xx}\overline{u} + i|u|^2|u|^2 - (1+ia)|u|^2 - i\gamma\overline{u}^2 dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2Re\left[\frac{-i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|u_x|^2dx + i\int_{-\infty}^{\infty}|u|^4dx - \int_{-\infty}^{\infty}|u|^2dx\right.\\
&\left.-ia\int_{-\infty}^{\infty}|u|^2dx - i\gamma\int_{-\infty}^{\infty}(\overline{u})^2dx\right]\\
&= 2Re\left[-\int_{-\infty}^{\infty}|u|^2dx - i\gamma\int_{-\infty}^{\infty}(\overline{u})^2dx\right]\\
&= -2\int_{-\infty}^{\infty}|u|^2dx - 2Re\left[i\gamma\int_{-\infty}^{\infty}(\overline{u})^2dx\right]\\
&\leq -2\|u\|_0^2 + 2Re\left[i\gamma\int_{-\infty}^{\infty}(\overline{u})^2dx\right]\\
&\leq -2\|u\|_0^2 + 2\left|\gamma\int_{-\infty}^{\infty}(\overline{u})^2dx\right|\\
&\leq -2\|u\|_0^2 + 2|\gamma|\int_{-\infty}^{\infty}|\overline{u}|^2dx\\
&\leq -2\|u\|_0^2 + 2|\gamma|\|u\|_0^2\\
&\leq 2(|\gamma|-1)\|u\|_0^2
\end{aligned}
$$

Luego si $|\gamma| \leq 1$ se tiene que:

$$\|u\|_0^2 \leq \|\varphi\|_0^2$$

Pues si $\partial_t\|u\|_0^2 \leq 0$ entonces $\|u\|_0^2 \leq \|\varphi\|_0^2$.

Si $|\gamma| > 1$ entonces

$$\partial_t\|u\|_0^2 \leq 2(|\gamma|-1)\|u\|_0^2$$

Integrando de 0 a t

$$\|u\|_0^2 - \|\varphi\|_0^2 \leq 2(|\gamma|-1)\int_0^t \|u(\tau)\|_0^2 d\tau$$

$$\|u\|_0^2 \leq \|\varphi\|_0^2 + 2(|\gamma|-1)\int_0^t \|u(\tau)\|_0^2 d\tau$$

Por la desigualdad de Gronwall podemos concluir

$$\|u\|_0^2 \leq \|\varphi\|_0^2 e^{2t(|\gamma|-1)}$$

$\blacksquare$

Teorema 4.2. *Si $a \in \mathbb{R}$ el problema es globalmente bien puesto en $H^1(\mathbb{R})$*

Demostración. Sea

$$E(t) = \frac{1}{2}\int [|u_x|^2 + (1-|u|^2)|u|^2 + \gamma Re(u^2)]dx$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} + 2aE &= a\|u\|_{L^4}^4 \\
(e^{2at}E)' &= ae^{2at}\|u\|_{L^4}^4 \\
e^{2at}E(t) - E(0) &= a\int_0^t e^{2a\tau}\|u(\tau)\|_{L^4}^4 d\tau \\
e^{2at}E(t) &= E(0) + a\int_0^t e^{2a\tau}\|u(\tau)\|_{L^4}^4 d\tau \\
E(t) &= E(0)e^{-2at} + a\int_0^t e^{-2a(t-\tau)}(\|u(\tau)\|_{L^4}^4)d\tau
\end{aligned}$$

Si $a = 0$ entonces $E(t) = E(0)$, acotando la derivada tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|u_x\|_0^2 &= \frac{1}{2}\int \{|u_x|^2 + (1-|u|^2)|u|^2 + \gamma Re(u^2)\}dx - \frac{1}{2}\int \{(1-|u|^2)|u|^2 + \gamma Re(u^2)\}dx \\
&= E(0) + \int \frac{|u|^4}{2}dx - \int \frac{|u|^2}{2}dx - \frac{\gamma}{2}\int Re(u^2)dx \\
&\leq E(0) + \int \frac{|u|^4}{2}dx + \int \frac{|u|^2}{2}dx + \frac{|\gamma|}{2}\int |Re(u^2)|dx \\
&\leq E(0) + \frac{1}{2}\int |u|^4 dx + \frac{1}{2}\|u\|_0^2 + \frac{|\gamma|}{2}\|u\|_0^2 \\
&\leq E(0) + \frac{|\gamma|+1}{2}\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\|u\|_{L^4}^4 \\
&\leq E(0) + \frac{|\gamma|+1}{2}C_T\|\varphi\|_0^2 + \frac{1}{2}\|u\|_{L^4}^4 \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

Estimando $\|u\|_{L^4}$

$$\|u\|_{L^4} \leq \|u_x\|_0^{\theta}\|u\|_0^{1-\theta}$$

$$\frac{1}{4} = \theta\left(\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{1-\theta}{2}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\theta + \frac{1}{2} \\
\theta &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{L^4}^4 &\leq \|u_x\|_0 \|u\|_0^3 \\
&\leq (\epsilon \|u_x\|_0) \left(\frac{1}{2} \|\varphi\|_0^3 \right) \\
&\leq \frac{\epsilon^2 \|u_x\|_0^2}{2} + \frac{1}{2\epsilon^2} \|\varphi\|_0^6
\end{aligned}
$$

continuando

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|u_x\|_0^2 &\leq E(0) + \frac{|\gamma|+1}{2} C_T \|\varphi\|_0^2 + \frac{\epsilon^2}{2}\|u_x\|_0^2 + \frac{1}{2\epsilon^2}\|\varphi\|_0^6 \\
\left(\frac{1-\epsilon^2}{2} \right) \|u_x\|_0^2 &\leq E(0) + \frac{|\gamma|+1}{2} C_T \|\varphi\|_0^2 + \frac{1}{2\epsilon^2}\|\varphi\|_0^6
\end{aligned}
$$

escogemos ϵ suficientemente pequeño

$$
\frac{1}{2} - \frac{\epsilon^2}{2} = \frac{1}{4}
$$

por lo tanto

$$
\frac{1}{4}\|u_x\|_0^2 \leq E(0) + \frac{|\gamma|+1}{2} C_T \|\varphi\|_0^2 + \frac{1}{2\epsilon^2}\|\varphi\|_0^6.
$$

Veamos cuando $a > 0$, sabemos que

$$
E(t) = E(0)e^{-2at} + a \int_0^t e^{-2a(t-\tau)} (\|u(\tau)\|_{L^4}^4) d\tau
$$

como $a > 0$ sabemos que $e^{-2at} \leq 1$ entonces

$$
\begin{aligned}
E(t) &\leq E(0) + a \int_0^t \|u(\tau)\|_{L^4}^4 d\tau \\
E(t) &\leq E(0) + a \int_0^t \left(\frac{\epsilon}{2}\|u_x\|_0^2 + \frac{1}{2\epsilon^2}\|\varphi\|_0^6 \right) d\tau \\
E(t) &\leq E(0) + \frac{ta}{2\epsilon^2}\|\varphi\|_0^6 + \frac{a\epsilon}{2}\int_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau
\end{aligned}
$$

como la derivada esta acotada en L^2 por (4.1) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u_x\|_0^2 &\leq E(u(t)) + \frac{|\gamma|+1}{2}C_T\|\varphi\|_0^2 + \frac{1}{2}\|u\|_{L^4}^4 \\ &\leq E(0) + \frac{ta}{2\epsilon^2}\|\varphi\|_0^6 + \frac{a\epsilon}{2}\int_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau + \frac{|\gamma|+1}{2}C_T\|\varphi\|_0^2 + \frac{1}{2}\|u\|_{L^4}^4\end{aligned}$$

sea $E(0) + \frac{ta}{2\epsilon^2}\|\varphi\|_0^6 + \frac{|\gamma|+1}{2}C_T\|\varphi\|_0^2 = C(\varphi)$ se tiene

$$\frac{1}{2}\|u_x\|_0^2 \leq C(\varphi) + \frac{1}{2}\|u\|_{L^4}^4 + \frac{a\epsilon}{2}\int_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau$$

escogemos η suficientemente pequeño y haciendo un razonamiento análogo observamos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u_x\|_0^2 &\leq C(\varphi) + \frac{\eta^2\|u_x\|_0^2}{4} + \frac{1}{2\eta^2}\|\varphi\|_0^6 + \frac{a\epsilon}{2}\int_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{\eta^2}{4}\right)\|u_x\|_0^2 &\leq C(\varphi) + \frac{1}{2\eta^2}\|\varphi\|_0^6 + \frac{a\epsilon}{2}\int_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau\end{aligned}$$

eligiendo η tal que $\frac{1}{2} - \frac{\eta^2}{4} = \frac{1}{2}$ y sea $C(\varphi) + \frac{1}{2\eta^2}\|\varphi\|_0^6 = F(\varphi)$,

por lo tanto

$$\|u_x\|_0^2 \leq F(\varphi) + \frac{a\epsilon}{2}\int_0^t \|u_x(\tau)\|_0^2 d\tau$$

Aplicando Gronwall tenemos

$$\|u_x\|_0^2 \leq F(\varphi)e^{\frac{a\epsilon t}{2}}.$$

Si $a < 0$ entonces

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} + 2aE &\leq 0 \\ \frac{dE}{dt} &\leq -2aE(t) \\ E(t) &\leq E(0) + (-2a)\int_0^t E(\tau)d\tau\end{aligned}$$

Aplicando Gronwall tenemos:

$$E(t) \leq E(0)e^{-2at}.$$

■

Capítulo 5

Teoría en $L^2(\mathbb{R})$

Lema 5.1. *Si* $t \neq 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *y* $q \in [1,2]$ *entonces tenemos*

$$\mathbb{V}(t) = e^{it\Delta} : L^q(\mathbb{R}) \mapsto L^p(\mathbb{R})$$

es continua y

$$\|e^{it\Delta} f\|_p \leq C|t|^{\frac{-1}{2(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}} \|f\|_q$$

Demostración. Ver [7] ■

Teorema 5.2. *El grupo* $\{\mathbb{V}(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$ *satisface:*

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \|\mathbb{V}(t)f\|_p^q dt\right)^{1/q} \leq c\|f\|_2, \tag{5.1}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left\|\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{V}(t-\tau)g(\cdot,\tau)d\tau\right\|_p^q dt\right)^{1/q} \leq c\left(\int_{-\infty}^{\infty} \|g(\cdot,t)\|_{p\prime}^{q\prime} dt\right)^{1/q\prime}, \tag{5.2}$$

y

$$\left\|\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{V}(t)g(\cdot,\tau)dt\right\|_2 \leq c\left(\int_{-\infty}^{\infty} \|g(\cdot,t)\|_{p\prime}^{q\prime} dt\right)^{1/q\prime}, \tag{5.3}$$

con $2 \leq p \leq \infty$ *y* $\dfrac{2}{q} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p}$ *donde* $c = c(p)$ *es una constante que depende sólo de* p*. Usaremos la notación*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p\prime} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q\prime} = 1$$

Demostración. Ver [7]. ■

Teorema 5.3. *Si* $u \in L^2(\mathbb{R})$ *existe* $T = T(\|\varphi\|_0) > 0$ *y una única solución* u *de la ecuación integral (3.3) en* $[-T, T]$ *con*

$$u \in C([-T, T]; L^2(\mathbb{R})) \cap L^8([-T, T]; L^4(\mathbb{R})) \tag{5.4}$$

Además, para todo $T' < T$ *existe una vecindad* V *de* φ *en* $L^2(\mathbb{R})$ *tal que*

$$\mathbb{F} : V \longmapsto C([-T', T']; L^2(\mathbb{R})) \cap L^8([-T, T]; L^4(\mathbb{R})),$$

$$\widetilde{\varphi} \longmapsto \widetilde{u(t)},$$

es Lipschitz.

Demostración. Consideremos el espacio métrico completo

$$E(T, b) = \left\{ u \in C([-T, T], L^2(\mathbb{R})) \cap L^8([-T, T], L^4(\mathbb{R})) \right.$$
$$\left. |||u|||_T = \sup_{[-T,T]} \|v(t)\|_0 + \left(\int_{-T}^{T} \|v(t)\|_{L^4}^8 dt \right)^{1/8} \leq b \right\}$$

dotado de la métrica

$$d(u, v) = |||u - v|||_T.$$

Veamos que si elegimos $T > 0$ adecuadamente tenemos que

$$\Psi : E(T, b) \longrightarrow E(T, b)$$

es una contracción; donde Ψ esta dada por

$$\Psi(u) = e^{\frac{it\partial_x^2}{2}} \varphi + \int_0^t e^{\frac{i(t-\tau)\partial_x^2}{2}} (i|u|^2 u + (1 + ia)u + i\gamma \overline{u}) d\tau \tag{5.5}$$

En efecto,

$$\left(\int_0^T \|\Psi(u)\|_{L^4}^8\right)^{1/8} \leq \left(\int_0^T \|e^{\frac{it\partial_x^2}{2}}\varphi\|_{L^4}^8\right)^{1/8} + \left(\int_0^T \left\|\int_0^t e^{\frac{i(t-\tau)\partial_x^2}{2}} F(u(\tau))d\tau\right\|_{L^4}^8 dt\right)^{1/8}$$

Tomando en el teorema (5.2) $p = 4$ y $q = 8$ entonces $p' = \frac{4}{3}$ y $q' = \frac{8}{7}$ y por las desigualdades (5.1) y (5.3) tenemos:

$$\begin{aligned}\left(\int_0^T \|\Psi(u)\|_{L^4}^8\right)^{1/8} &\leq \|\varphi\|_0 + \underbrace{\left\|\int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)i|u|^2 u d\tau\right\|_{L_x^4 L_T^8}}_{1} \\ &\quad + \underbrace{\left\|\int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)(1+ia)u + i\gamma\overline{u} d\tau\right\|_{L_x^4 L_t^8}}_{2}\end{aligned}$$

Analizando 1 tenemos que:

$$\begin{aligned}\||u|^2 u\|_{L^{4/3}} &= \left(\int ||u|^2 u|^{4/3}\right)^{3/4} \\ &= \left(\int |u|^4\right)^{3/4} \\ &= \|u\|_{L_x^4}^3 \qquad (5.6)\end{aligned}$$

Analizando 2, sea $g(x,\tau) = (1+ia)u + i\gamma\overline{u}$ entonces:

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)(1+ia)u + i\gamma\overline{u} d\tau\right\|_{L_x^4 L_t^8} &= \left\|\int_0^T \mathbb{V}(t-\tau)g(\cdot,\tau)\chi_{[0,t]} d\tau\right\|_{L_x^4 L_t^8} \\ &\leq \left\|\int_0^T \chi_{[0,t]}\|\mathbb{V}(t-\tau)g(\cdot,\tau)\|_{L_x^4} d\tau\right\|_{L_T^8} \\ &\leq \int_0^T \left\|\chi_{[0,t]}\|\mathbb{V}(t-\tau)g(\cdot,\tau)\|_{L_x^4}\right\|_{L_T^8} d\tau \\ &\leq \int_0^T \|\mathbb{V}(t-\tau)g(\cdot,\tau)\|_{L_x^4 L_T^8} d\tau \\ &\leq \int_0^T \|\mathbb{V}(t)\mathbb{V}(-\tau)g(\cdot,\tau)\|_{L_x^4 L_T^8} d\tau \\ &\leq C(a,\lambda)\int_0^T \underbrace{\|g(\cdot,\tau)\|_0}_{\|u\|_0} d\tau\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left(\int_0^T \|\Psi(u)\|_{L^4}^8\right)^{1/8} = \|\Psi(u)\|_{L_x^4L_T^8} \leq \|\varphi\|_0 + \underbrace{\left(\int_0^T (\|u(t)\|_{L_x^4}^3)^{8/7}\right)^{7/8}}_{3} + \int_0^T \|u(\tau)\|_0 d\tau$$

Aplicando Holder a 3 tenemos:

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^T \|u(t)\|_{L_x^4}^{24/7} dt\right)^{7/8} &\leq \left[\left(\int_0^T 1^{7/4} dt\right)^{4/7}\left(\int_0^T \|u(\tau)\|_{L_x^4}^8 d\tau\right)^{3/7}\right]^{7/8} \\
&\leq \left(\int_0^T dt\right)^{1/2}\left(\int_0^T \|u(\tau)\|_{L_x^4}^8 d\tau\right)^{3/8} \\
&\leq T^{1/2}\left(\int_0^T \|u(\tau)\|_{L_x^4}^8 d\tau\right)^{3/8}
\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\|\Psi(u)\|_{L_x^4L_T^8} &\leq \|\varphi\|_0 + T^{1/2}\left(\int_0^T \|u(\tau)\|_{L_x^4}^8 d\tau\right)^{3/8} + \int_0^T \|u(\tau)\|_0 d\tau \\
&\leq \|\varphi\|_0 + T^{1/2}\|u(\tau)\|_{L_x^4L_T^8}^3 + \int_0^T \|u(\tau)\|_0 d\tau
\end{aligned}$$

Entonces, si $u \in E(T, b)$ tenemos:

$$\|\Psi(u)\|_{L_x^4L_T^8} \leq \|\varphi\|_0 + T^{1/2}b^3 + Tb \tag{5.7}$$

Usando (5.3) y las propiedades del grupo unitario en la expresión (5.5) tenemos:

$$\begin{aligned}
\|\Psi(u)\|_0 &\leq \|\varphi\|_0 + \left\|\int_0^T \mathbb{V}(t-\tau)i|u|^2 u d\tau\right\|_0 \\
&\quad + \left\|\int_0^T \mathbb{V}(t-\tau)(1+ia)u + \gamma\overline{u} d\tau\right\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_0 + \left(\int_0^T \||u|^2u\|_{L^{4/3}}^{8/7} d\tau\right)^{7/8} + \int_0^T \|u(\tau)\|_0 d\tau \\
&\leq \|\varphi\|_0 + \left(\int_0^T \|u\|_{L^4}^{24/7} d\tau\right)^{7/8} + \int_0^T \|u(\tau)\|_0 d\tau \\
&\leq \|\varphi\|_0 + T^{1/2}\|u\|_{L_x^4L_T^8}^3 + \int_0^T \|u(\tau)\|_0 d\tau \\
\sup_{[-T,T]} \|u(t)\|_0 &\leq \|\varphi\|_0 + \sqrt{T}\|u\|_{L_x^4L_T^8}^3 + T\sup_{[-T,T]} \|u(t)\|_0
\end{aligned}$$

$$\sup_{[-T,T]} \|u(t)\|_0 \leq \|\varphi\|_0 + \sqrt{T}b^3 + Tb$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\|\Psi(u)\|_{L_x^4 L_T^8} + \sup_{[-T,T]} \|u(t)\|_0 &\leq 2\|\varphi\|_0 + 2\sqrt{T}\|u\|_{L_x^4 L_T^8}^3 + 2T \sup_{[-T,T]} \|u(t)\|_0 \\ &\leq 2\|\varphi\|_0 + 2\sqrt{T}b^3 + 2Tb \leq b\end{aligned}$$

Así,

$$|||\Psi(u)|||_T \leq 2\|\varphi\|_0 + 2\sqrt{T}b^3 + 2Tb \leq b$$

Si $b = 3\|\varphi\|_0$ y tomando $T > 0$ tal que

$$\begin{aligned}|||\Psi(u)|||_T \leq 2\|\varphi\|_0 + 2\sqrt{T}(3\|\varphi\|_0)^3 + 2T(3\|\varphi\|_0) &\leq 3\|\varphi\|_0 \\ 2\|\varphi\|_0 + 2\sqrt{T}(3\|\varphi\|_0)^3 + 2T(3\|\varphi\|_0) &\leq 3\|\varphi\|_0 \\ 2\|\varphi\|_0 + 54\sqrt{T}\|\varphi\|_0^3 + 6T\|\varphi\|_0 &\leq 3\|\varphi\|_0 \\ 54\sqrt{T}\|\varphi\|_0^3 + 6T\|\varphi\|_0 &\leq \|\varphi\|_0 \\ 54\sqrt{T}\|\varphi\|_0^2 + 6T &\leq 1 \qquad (5.8) \\ 54\sqrt{T}\|\varphi\|_0^2 + 6T - 1 &\leq 0 \\ \sqrt{T} &\leq \frac{-54\|\varphi\|_0^2 + \sqrt{(54)^2\|\varphi\|_0^4 + 24}}{12} \\ T &\leq \left(\frac{-54\|\varphi\|_0^2 + \sqrt{(54)^2\|\varphi\|_0^4 + 24}}{12}\right)^2\end{aligned}$$

entonces $\Psi(u) \in E(T,b)$; por lo tanto la aplicación Ψ está bien definido sobre $E(T,b)$.

Ahora si $u,\ v\ \in E(T,b)$

$$(\Psi(u)-\Psi(v))(t) = \int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)[(i|u|^2u+(1+ia)u+i\gamma\overline{u})-(i|v|^2v+(1+ia)v+i\gamma\overline{v})]d\tau$$

entonces

$$\left(\int_0^T \|(\Psi(u)-\Psi(v))(t)\|_4^8\right)^{1/8} \leq \left(\int_0^T \left\|\int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)(i|u|^2u + (1+ia)u + i\gamma\overline{u})\right.\right. \qquad (5.9)$$

$$
\begin{aligned}
&- \ (i|v|^2v+(1+ia)v+i\gamma\overline{v})d\tau\big\|_{L_x^4}^8 \, dt\Big)^{1/8}\\
&\leq \left\| \int_0^t \mathbb{V}(t-\tau) i(|u|^2u-|v|^2v) \right.\\
&\left. +(1+ia)(u-v)+i\gamma(\overline{u}-\overline{v})d\tau \right\|_{L_x^4L_T^8}\\
&\leq \underbrace{\left\| \int_0^T \mathbb{V}(t-\tau)(i|u|^2u-i|v|^2v)d\tau \right\|_{L_x^4L_T^8}}_{1}\\
&+\underbrace{\left\| \int_0^T \mathbb{V}(t-\tau)(1+ia)(u-v)+i\gamma(\overline{u}-\overline{v})d\tau \right\|_{L_x^4L_t^8}}_{2}
\end{aligned}
$$

Analizando 1 tenemos:

$$
\begin{aligned}
\||u|^2u-|v|^2v\|_4 &\leq \|u-v\|_4\left(\|u\|_4^2+\frac{\|u\|_4^2}{2}+\frac{\|v\|_4^2}{2}+\|v\|_4^2\right)\\
&\leq \|u-v\|_4\left(\frac{3}{2}\|u\|_4^2+\frac{3}{2}\|v\|_4^2\right)\\
&=\frac{3}{2}\left(\|u\|_{L^4}^2+\|v\|_{L^4}^2\right)\|u-v\|_{L^4}
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\left\| \int_0^T \mathbb{V}(t-\tau)(i|u|^2u-i|v|^2v)d\tau \right\|_{L_x^4L_T^8} \leq \left(\frac{3}{2}\int_0^T \left(\|u\|_{L^4}^2+\|v\|_{L^4}^2\right)^{8/7}\|u-v\|_{L^4}^{8/7}\right)^{7/8}
$$

Aplicando Holder tenemos

$$
\begin{aligned}
&\leq C\left\{\int_0^T (\|u\|_{L^4}^8dt)^{1/4}+\int_0^T (\|v\|_{L^4}^8dt)^{1/4}\right\}\int_0^T \left(\|u-v\|_{L^4}^8dt\right)^{1/8}\\
&\leq C\sqrt{T}b^2\int_0^T \left(\|u-v\|_{L^4}^8dt\right)^{1/8}
\end{aligned}
$$

Analizando 2, Sea $h(x,t)=(1+ia)(u-v)+i\gamma(\overline{u}-\overline{v})$ entonces:

$$
\begin{aligned}
&\left\| \int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)[(1+ia)(u-v)+i\gamma(\overline{u}-\overline{v})]d\tau \right\|_{L_x^4L_t^8}\\
&= \left\| \int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)h(\cdot,\tau)\chi_{[0,t]}d\tau \right\|_{L_x^4L_t^8}\\
&\leq \left\| \int_0^T \chi_{[0,t]}\|\mathbb{V}(t-\tau)h(\cdot,\tau)\|_{L_x^4}d\tau \right\|_{L_T^8}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_0^T \left\| \chi_{[0,t]} \|\mathbb{V}(t-\tau)h(\cdot,\tau)\|_{L_x^4} \right\|_{L_T^8} d\tau \\
&\leq \int_0^T \|\mathbb{V}(t-\tau)h(\cdot,\tau)\|_{L_x^4 L_T^8} \, d\tau \\
&\leq \int_0^T \|\mathbb{V}(t)\mathbb{V}(-\tau)h(\cdot,\tau)\|_{L_x^4 L_T^8} \, d\tau \\
&\leq \int_0^T \|h(\cdot,\tau)\|_0 \, d\tau \\
&= \int_0^T \|(1+ia)(u-v) + i\gamma(\overline{u}-\overline{v})\|_0 d\tau \\
&\leq \int_0^T \|(1+ia)(u-v)\|_0 d\tau + \int_0^T \|i\gamma(\overline{u}-\overline{v})\|_0 d\tau \\
&\leq (|1+ia| + |\gamma|) \int_0^T \|u-v\|_0 d\tau
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_0^T \|\Psi(u) - \Psi(v)\|_{L^4}^8 \right)^{1/8} = \|\Psi(u) - \Psi(v)\|_{L_x^4 L_T^8} \\
&\leq C\sqrt{T} b^2 \int_0^T \left(\|u-v\|_{L^4}^8 dt \right)^{1/8} + (|1+ia| + |\gamma|) \int_0^T \|u-v\|_0 d\tau \\
&\leq C\sqrt{T} |||u-v||| + CT |||u-v|||
\end{aligned}
$$

Combinando 5.3 y las propiedades de un grupo unitario vemos

$$
\sup_{[0,T]} \|(\Psi(u) - \Psi(v))(t)\|_0 \leq (C\sqrt{T} + CT) |||u-v|||
$$

Finalmente, por medio de la escogencia de b, de la desigualdad (5.8) obtenemos:

$$
C\sqrt{T} b^2 \leq C\sqrt{T} \|\varphi\|_0^2 < 1
$$

Así,

$$
T \simeq \|\varphi\|_0^{-4}
$$

Hemos probado la existencia y unicidad de la solución de la ecuación (3.2). Para probar la continuidad de $\Psi(u)$ con respecto a φ, observamos que si u, v son las soluciones de (3.2) correspondientes a los datos φ, ϕ entonces

$$
u(t) - v(t) = e^{\frac{it\partial_x^2}{2}} (\varphi - \phi) + \int_0^t e^{\frac{i(t-\tau)\partial_x^2}{2}} (i|u|^2 u + (1+ia)u + i\gamma\overline{u}) d\tau
$$

y así con el mismo argumento usando en (5.9) obtenemos que

$$\left(\int_0^T \|u(t)-v(t)\|_{L_4}^8 dt\right)^{1/8} \leq C\|\varphi-\phi\|_0+K\sqrt{T}(\|\varphi\|_0^2+\|\phi\|_0^2)\left(\int_0^T \|u(t)-v(t)\|_{L^4}^8\right)^{1/8}$$

En consecuencia, si $\|\varphi-\phi\|_0$ es suficientemente pequeño, entonces

$$\left(\int_0^T \|u(t)-v(t)\|_{L_4}^8 dt\right)^{1/8} \leq K\|\varphi-\phi\|_0$$

En forma análoga podemos probar que

$$\sup_{[0,T]} \|u(t)-v(t)\|_0 \leq K\|\varphi-\phi\|_0$$

lo cual completa la prueba del teorema. ■

Teorema 5.4. *Si $\varphi \in L^2$ entonces (0.1) es globalmente bien planteado.*

Demostración. Es consecuencia del teorema anterior y de $\|u\|_0 \leq \|\varphi\|_0$. ■

Bibliografía

[1] Promislow K., Kutz J. N. *Bifurcation and asymptotic stability in the large detuning limit of the optival parametric oscillator*, Nonlinearity 13, (2000), pp.675-698.

[2] Javier Duoandikoetxea, *Análisis de Fourier*, Ediciones de la Universidad Autonoma de Madrid, 1991.

[3] Rafael. J. Iório, Jr., Valèria de Magalhães Iório, *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*, Cambridge studies in avanced mathematics, 70, (2001).

[4] Gustavo Ponce, *Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales de evolución* Universidad del Valle, Escuela de verano en ecuaciones diferenciales, geometría diferencial y análisis numérico, 1993.

[5] Wang X. *Parametrically excited nonlinear waves and their localizations*, Phys. D 154, (2001), 337-359

[6] Chang P. A. C. , Promislow K. *Nonlinear stability of oscilatoty pulses in the parametric nonlinear Schrödinger equation*, Nonlinearity, 20, (2007), pp. 743-763.

[7] Linares F., Ponce G. *Introducion to nonlinear dispersive equations*, Springer, Universitext, 2009.