SOBRE UNIFORMIDADES DEFINIDAS POR CUBRIMIENTOS Y COMPLETADO FIBRA A FIBRA

HECTOR ANTONIO RICAURTE MONCALEANO
830219

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, 2009

SOBRE UNIFORMIDADES DEFINIDAS POR CUBRIMIENTOS Y COMPLETADO FIBRA A FIBRA

HECTOR ANTONIO RICAURTE MONCALEANO
830219

Trabajo final presentado para optar al título de
MAGISTER EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Dirigido por:
Dra. CLARA MARINA NEIRA URIBE

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, 2009

Dra. Margarita Ospina.

Jurado.

Dra. Clara Marina Neira Uribe

Directora.

Agradecimientos

Expreso mis agradecimientos a toda mi familia, en especial a mis Padres que me han brindado en todo momento su apoyo y valor para salir adelante.
También agradezco a mi directora por su valioso apoyo y tiempo que empeñó para la dirección de este trabajo.

Tabla de Contenido

Introducción.

La teoría de espacios uniformes fibra a fibra fue investigada y desarrollada en gran parte por I. M. James en su libro "Fibrewise Topology "[6], donde el autor presenta los conceptos de la teoría clásica de espacios uniformes aplicados a los espacios uniformes fibra a fibra y a estos espacios los dota de su correspondiente topología uniforme fibra a fibra. La estructura uniforme fibra a fibra que poseen los espacios uniformes fibra a fibra es una versión fibrada de los espacios uniformes definidos en la Topología General, James describe los espacios uniformes fibra a fibra, en términos de entornos que tienen un significado similar al que tienen en la teoría clásica de espacios uniformes.

Otros autores como Willard y Engelking en sus libros de topología general [17] y [2] respectivamente, presentan otra manera de definir estructuras uniformes no solo desde la perspectiva de entornos, sino bajo el concepto de cubrimiento uniforme y aquellas estructuras se conocen como uniformidades definidas por cubrimientos.

En el artículo "Fibrewise covering uniformities and completions" de los autores Y. Konami y T. Miwa [7], se presenta la versión fibrada de uniformidades definidas por cubrimientos algo no visto en [6] para definir una uniformidad por cubrimientos fibra a fibra. Los autores presentan el concepto de par conjugado de cubrimientos y lo adaptan a la teoría de espacios semi-uniformes y espacios uniformes generalizados presentada en el libro de Morita [10]. Konami y Miwa presentan esta nueva adaptación como estructura semi-uniforme fibra a fibra y estructura uniforme generalizada fibra a fibra creando los espacios semi-uniformes fibra a fibra y los espacios generalizados uniformes fibra a fibra. En los espacios generalizados uniformes fibra a fibra se definen conceptos como b-filtro de Cauchy, b-filtro estrictamente de Cauchy, b-filtro estrella, b-filtro estrella débil y este último se utiliza para definir un espacio completo fibra a fibra y el completado fibra a fibra.

El propósito de este trabajo es estudiar el artículo "Fibrewise covering uniformities and completions" [7], para mostrar la equivalencia entre las topologías generadas por una uniformidad definida por cubrimientos fibra a fibra y por la estructura uniforme fibra a fibra Ω_μ que será vista en el capítulo 2 de este trabajo. También mostraremos una manera de construir el completado fibra a fibra de un espacio g-uniforme fibra a fibra.

En el primer capítulo se recopilan conceptos, propiedades y algunos teoremas de la teoría clásica de espacios uniformes, como también algunos ejemplos que servirán de apoyo o de base para continuar con el estudio de los siguientes capítulos. También se recopilan conceptos, propiedades, teoremas y algunos ejemplos de la teoría de espacios fibrados y de espacios uniformes fibra a fibra citados en [6].

En el segundo capítulo, se presenta el concepto de par conjugado de cubrimientos para definir la uniformidad por cubrimientos fibra a fibra y la topología generada por esta uniformidad. En este capítulo mostraremos la equivalencia entre la topología generada por una uniformidad definida por cubrimientos fibra a fibra y la topología generada por una estructura uniforme fibra a fibra.

En el tercer capítulo, se definen semi-uniformidad fibra a fibra, uniformidad generalizada fibra a fibra, la topología asociada a una g-uniformidad fibra a fibra y se describe el interior de un conjunto de un espacio uniforme generalizado fibra a fibra. También mostraremos algunos resultados derivados de estas definiciones.

El cuarto y último capítulo está dedicado a mostrar una construcción del completado fibra a fibra de un espacio g-uniforme fibra a fibra. Para ello definiremos las versiones fibradas de conceptos como b-filtro de Cauchy, b-filtro de Cauchy minimal, b-filtro estrictamente de Cauchy, b-filtro estrella, b-filtro estrella débil, espacio completo fibra a fibra presentados en [10]. También mostraremos algunas consecuencias como lemas y proposiciones derivadas de los anteriores conceptos.

Capítulo 1

Preliminares.

En este capítulo haremos una recopilación de definiciones básicas y de algunos ejemplos que las ilustran.
Comenzaremos por conceptos de la topología general como uniformidad diagonal, espacios uniformes, topología uniforme, funciones uniformemente continuas, cubrimientos uniformes, hasta llegar a los conceptos de la topología fibrada, como conjunto fibrado sobre un conjunto base, topología fibrada, estructura uniforme fibrada, espacios uniformes fibrados, topología uniforme fibrada y función uniformemente continua fibra a fibra. Realizamos esta recopilación con el fin de estudiar en el segundo capítulo la construcción de una uniformidad por cubrimientos fibra a fibra.

1.1. Uniformidad diagonal.

Definición 1.1 (Uniformidad diagonal)**.** Una uniformidad diagonal sobre un conjunto X (o simplemente una uniformidad sobre X) es un filtro $\mathfrak{D}$ sobre $X \times X$ que cumple:

a) Si $D \in \mathfrak{D}$ entonces $\Delta \subset D$, donde Δ es la diagonal sobre $X \times X$.

b) Para cada $D \in \mathfrak{D}$ existe $E \in \mathfrak{D}$ tal que $E \circ E \subset D$.

   Aquí se tiene que $U \circ V = \{(x,y) \in X \times X \mid \exists\, z \in X;\ (x,z) \in V \wedge (z,y) \in U\}$.

c) Si $D \in \mathfrak{D}$, entonces $D^{-1} \in \mathfrak{D}$.

La pareja $(X, \mathfrak{D})$ recibe el nombre de espacio uniforme y los elementos de $\mathfrak{D}$ se llaman entornos.

Proposición 1.1. *Las condiciones b) y c) de la definición 1.1 son equivalentes a la única condición: Si $D \in \mathfrak{D}$ entonces $E \circ E^{-1} \subset D$, para algún $E \in \mathfrak{D}$.*

Demostración. $(\Rightarrow)$

Supóngase que b) y c) son ciertas, entonces dado $D \in \mathfrak{D}$, $E_1 \circ E_1 \subset D$ para algún $E_1 \in \mathfrak{D}$. Tomamos $E = E_1 \cap E_1^{-1}$; ya que $\mathfrak{D}$ es un filtro sobre $X \times X$, $E \in \mathfrak{D}$ y se tiene que $E \circ E^{-1} = E \circ E \subset E_1 \circ E_1 \subset D$.

$(\Leftarrow)$

Para la condición (b). Si $F = E \cap E^{-1}$ con $E \in \mathfrak{D}$, entonces $F \in \mathfrak{D}$ y además $F = F^{-1} \in \mathfrak{D}$. Por hipótesis tenemos que $F \circ F \subset D$ y así se cumple la condición (b) de la Definición 1.1.

Para la condición (c). Sea $F = E \cap E^{-1}$. Se tiene que $F \subset F \circ F \subset E \circ E^{-1} \subset D$, entonces $F = F^{-1} \subset D^{-1}$ así $D^{-1} \in \mathfrak{D}$. □

Definición 1.2 (Sistema fundamental de entornos)**.** Un sistema fundamental de entornos de una uniformidad $\mathfrak{D}$ sobre X, es cualquier subcolección $\mathcal{E}$ de $\mathfrak{D}$ tal que para cada $D \in \mathfrak{D}$ existe $E \in \mathcal{E}$ tal que $E \subset D$.

Ejemplo. Si $\mathfrak{D}$ es una uniformidad sobre X, entonces la colección de los entornos simétricos $(D = D^{-1})$ de $\mathfrak{D}$ es un sistema fundamental de entornos.

Proposición 1.2. *Una colección $\mathcal{E}$ de subconjuntos de $X \times X$ es un sistema fundamental de entornos de una uniformidad sobre X, si y solamente si $\mathcal{E}$ satisface los siguientes axiomas:*

SFE1. Para cada $E_1,\ E_2 \in \mathcal{E}$ *existe* $E_3 \in \mathcal{E}$ *tal que* $E_3 \subset E_1 \cap E_2$.

SFE2. Si $E \in \mathcal{E}$ *entonces* $\Delta \subset E$.

SFE3. Para cada $E \in \mathcal{E}$ *existe* $E' \in \mathcal{E}$ *tal que* $E' \circ E' \subset E$.

SFE4. Para cada $E \in \mathcal{E}$ *existe* $E' \in \mathcal{E}$ *tal que* $E' \subset E^{-1}$.

Demostración. ($\Rightarrow$)

SFE1. Sean $E_1,\ E_2 \in \mathcal{E},\ E_1,\ E_2 \in \mathfrak{D}$, donde $\mathfrak{D}$ es la uniformidad sobre X generada por $\mathcal{E}$. Entonces $E_1 \cap E_2 \in \mathfrak{D}$ y existe $E_3 \in \mathcal{E}$ tal que $E_3 \subset E_1 \cap E_2$.

SFE2. Si $E \in \mathcal{E}$ entonces $E \in \mathfrak{D}$ así $\Delta \subset E$.

SFE3. Sea $E \in \mathcal{E}$ entonces $E \in \mathfrak{D}$, y por la condición b) de la definición 1.1, existe $D \in \mathfrak{D}$ tal que $D \circ D \subset E$, existe además $E' \in \mathcal{E}$ tal que $E' \subset D$ así $E' \circ E' \subset E$.

SFE4. Sea $E \in \mathcal{E}$ luego $E \in \mathfrak{D}$. Por la condición c) de la definición 1.1, $E^{-1} \in \mathfrak{D}$. Ya que $\mathcal{E}$ es un sistema fundamental de entornos de una uniformidad sobre X, existe $E' \in \mathcal{E}$ tal que $E' \subset E^{-1}$.

($\Leftarrow$)

Sea $\mathcal{E}$ una colección de subconjuntos de $X \times X$ que satisface SFE1, SFE2, SFE3 y SFE4. Sea $\mathfrak{D}$ la colección de todos los superconjuntos de elementos de $\mathcal{E}$. Claramente $\mathfrak{D}$ es una uniformidad sobre X y $\mathcal{E}$ es un sistema fundamental de entornos de $\mathfrak{D}$. $\square$

Ejemplos 1. Para ilustrar la proposición anterior tenemos los siguientes ejemplos.

1. Sea X un conjunto no vacío. La colección $\mathfrak{D} = \{U \subset X \times X \mid \Delta \subset U\}$ es una uniformidad sobre X llamada uniformidad discreta y la subcolección $\mathcal{E} = \{\Delta\}$ es un sistema fundamental de entornos de esta uniformidad.

2. Sea $X \neq \emptyset$, la colección $\mathfrak{D} = \{X \times X\}$ es una uniformidad sobre X llamada la uniformidad trivial.

3. Para cada $\epsilon > 0$ sea $D_\epsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - y| < \epsilon\}$. La colección $\mathcal{E}$ de todos los conjuntos D_ϵ, $\epsilon > 0$ es un sistema fundamental de entornos para una uniformidad sobre $\mathbb{R}$, conocida como la uniformidad usual sobre $\mathbb{R}$.

   En efecto $\mathcal{E}$ es un sistema fundamental de entornos para una uniformidad sobre $\mathbb{R}$.

   SFE1. Sean D_ϵ, $D_\delta \in \mathcal{E}$ con $0 < \delta < \epsilon$ y consideremos $\gamma = \frac{\epsilon - \delta}{2}$, entonces $D_\gamma \in \mathcal{E}$ y además $D_\gamma \subset D_\epsilon \cap D_\delta$.

   SFE2. $\Delta \subset D_\epsilon$, para todo $\epsilon > 0$.

   SFE3. Sea $D_\epsilon \in \mathcal{E}$ existe $\delta = \frac{\epsilon}{2} > 0$ tal que $D_\delta \in \mathcal{E}$ y $D_\delta \circ D_\delta \subset D_\epsilon$.

   SFE4. Sea $D_\epsilon \in \mathcal{E}$ existe $D_\epsilon = D_\epsilon^{-1} \in \mathcal{E}$ tal que $D_\epsilon \subset D_\epsilon^{-1}$.

4. En general cualquier métrica ρ sobre un conjunto M genera una uniformidad $\mathfrak{D}_\rho$ sobre M, que tiene como sistema fundamental de entornos la colección de subconjuntos

$$D_\epsilon^\rho = \{(x, y) \in M \times M \mid \rho(x, y) < \epsilon\}, \quad \epsilon > 0.$$

   Aquellas uniformidades $\mathfrak{D}$, generadas por una métrica ρ se llaman uniformidades metrizables.

5. Para cada $a \in \mathbb{R}$, sea $\mathcal{E} = \{D_a \subset \mathbb{R}^2\}$ donde $a \in \mathbb{R}$ y $D_a = \Delta \cup \{(x, y) \mid x > a, y > a\}$. Entonces $\mathcal{E}$ es un sistema fundamental de entornos para una uniformidad sobre $\mathbb{R}$.

   En efecto $\mathcal{E}$ satisface las condiciones de la Proposición 1.2.

   SFE1. Sean D_a, $D_b \in \mathcal{E}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Si $b \leq a$ entonces $D_a \cap D_b = D_a$, si $a \leq b$ entonces $D_a \cap D_b = D_b$. Consideremos $c = \max\{a, b\}$ entonces $D_c \subset D_a \cap D_b$.

   SFE2. $\Delta \subset D_a$, para cada $a \in \mathbb{R}$.

SFE3. Sea $D_a \in \mathcal{E}$, $a \in \mathbb{R}$ existe $D_a \in \mathcal{E}$ tal que $D_a \circ D_a \subset D_a$. En efecto, si tomamos $(x, y) \in D_a \circ D_a$ entonces existe $z \in \mathbb{R}$ tal que $(x, z) \in D_a$ y $(z, y) \in D_a$, es decir $x, z > a$; $z, y > a$ luego $x, y > a$ así tenemos $(x, y) \in D_a$.

SFE4. Sea $D_a \in \mathcal{E}$, $a \in \mathbb{R}$, existe $D_a^{-1} = D_a \in \mathcal{E}$ tal que $D_a \subset D_a^{-1}$.

Definición 1.3. Dados $x \in X$, $D \in \mathfrak{D}$, definimos $D[x] = \{y \in X \mid (x, y) \in D\}$.

Observación 1. $x \in D[x]$ porque $(x, x) \in \Delta \subset D$, $\forall x \in X$.

Observación 2. Si $A \subset X$, $D[A] = \bigcup_{x \in A} D[x] = \{y \in X \mid (x, y) \in D \text{ para algún } x \in A\}$.

1.2. Topología uniforme.

En esta sección definiremos la topología uniforme asociada a entornos o a una uniformidad diagonal, además se darán algunos ejemplos básicos de espacios que poseen dicha estructura.

Teorema 1.1. *Para cada $x \in X$, la colección $\mathcal{V}(x) = \{D[x] \mid D \in \mathfrak{D}\}$ forma un sistema de vencindades en $x \in X$, haciendo de X un espacio topológico. Si $\mathcal{E} \subset \mathfrak{D}$ es un sistema fundamental de entornos, la colección $\mathcal{V}(x) = \{E[x] \mid E \in \mathcal{E}\}$ genera la misma topología para X.*

Demostración. La colección $\mathcal{V}(x)$ debe satisfacer las condiciones de una colección de vencindades. La topología generada por $\mathfrak{D}$ es $\tau_{\mathfrak{D}} = \{A \subset X \mid (\forall a \in A)(A \in \mathcal{V}(x))\}$.

(V1) Sean $x \in X$, $D \in \mathfrak{D}$ y $D[x] \subset M$. Consideremos el conjunto $E = D \cup \{(x, y) \mid y \in M\}$, $E \in \mathfrak{D}$ y veamos que $E[x] = M$.

En efecto, sea $y \in E[x]$ entonces $(x, y) \in E$ luego $(x, y) \in D$ o $y \in M$. Si $(x, y) \in D$, $y \in D[x] \subset M$, entonces $E[x] \subset M$. Si $y \in M$, $(x, y) \in E$, luego $y \in E[x]$, así $M \subset E[x]$.

(V2) Sean $D_1[x]$, $D_2[x] \in \mathcal{V}(x)$, D_1, $D_2 \in \mathfrak{D}$ entonces $D_1 \cap D_2 \in \mathfrak{D}$.

$(D_1 \cap D_2)[x] \in \mathcal{V}(x)$.

$$\begin{aligned}(D_1 \cap D_2)[x] &= \{y \in X \mid (x,y) \in D_1 \cap D_2\} \\ &= \{y \in X \mid (x,y) \in D_1 \wedge (x,y) \in D_2\} \\ &= \{y \in X \mid y \in D_1[x] \wedge y \in D_2[x]\} \\ &= D_1[x] \cap D_2[x].\end{aligned}$$

(V3) Sea $D[x] \in \mathcal{V}(x)$, $x \in D[x]$ por la Observación 1.

(V4) Dado $D[x] \in \mathcal{V}(x)$ con $D \in \mathfrak{D}$, existe $E \in \mathfrak{D}$ tal que $E \circ E \subset D$. Sea $z \in E[x]$, si $y \in E[z]$ se tiene que $E[z] \subset D[x]$.

Si $\mathcal{E}$ es un sistema fundamental de entornos para una uniformidad sobre X es claro que $\mathcal{V}(x) = \{E[x] \mid E \in \mathcal{E}\}$ es un sistema fundamental de vencindades para $x \in X$. $\square$

Definición 1.4 (Topología uniforme)**.** La topología asociada con la uniformidad diagonal $\mathfrak{D}$ es la topología uniforme $\tau_{\mathfrak{D}}$ generada por $\mathfrak{D}$. Si (X, τ) es un espacio topológico y $\tau = \tau_{\mathfrak{D}}$ para alguna uniformidad $\mathfrak{D}$ sobre X, entonces X es un espacio topológico uniforme o uniformizable.

Ejemplos 2. Espacios topológicos uniformes o uniformizables.

1. La topología generada por la colección de elementos $D_\epsilon[x]$, $\epsilon > 0$ coincide con la topología usual sobre $\mathbb{R}$ (intervalos abiertos), luego $\mathbb{R}$ es un espacio topológico uniformizable.

2. En General $D_\epsilon^\rho[x] = \{y \mid (x,y) \in D_\epsilon^\rho\} = \{y \mid \rho(x,y) < \epsilon\}$ con ρ una métrica sobre M. Entonces M es un espacio topológico uniformizable.

3. La uniformidad discreta sobre un conjunto X con base $\mathcal{E} = \{\Delta\}$, genera la topología discreta.

4. La uniformidad trivial sobre un conjunto X genera la topología trivial.

5. $D_a = \Delta \cup \{(x, y) \mid x > a,\ y > a\}$ para $a \in \mathbb{R}$, es un sistema fundamental de entornos para una uniformidad $\mathfrak{D}$ sobre $\mathbb{R}$.
   Dado cualquier $x \in \mathbb{R}$, si $x \leq a$ entonces $D_a[x] = \{x\}$. Entonces $\mathfrak{D}$ también genera la topología discreta sobre $\mathbb{R}$.

Nota 1. Los Ejemplos 2. numerales 3. y 5. con $X = \mathbb{R}$, muestran que uniformidades diferentes pueden generar la misma topología.

Definición 1.5 (Función uniformemente continua)**.** Sean X, Y espacios topológicos uniformes, con uniformidades diagonales $\mathfrak{D}$ y $\mathcal{E}$ respectivamente.
Una función $f : (X, \tau_{\mathfrak{D}}) \to (Y, \tau_{\mathcal{E}})$ es uniformemente continua si y solo si para cada $E \in \mathcal{E}$, existe $D \in \mathfrak{D}$ tal que

$$(x, y) \in D \Rightarrow (f(x), f(y)) \in E, \text{ es decir}$$
$$y \in D[x] \Rightarrow f(y) \in E(f(x)).$$

Si f es biyectiva y f, f^{-1} son uniformemente continuas entonces f es un isomorfismo uniforme, es decir X, Y son isomorfos uniformemente. Se obtienen definiciones equivalentes si se utilizan sistemas fundamentales de entornos para $\mathfrak{D}$ y $\mathcal{E}$.

Teorema 1.2. *Cada función uniformemente continua es continua.*

Demostración. Supongamos que $f : (X, \tau_{\mathfrak{D}}) \to (Y, \tau_{\mathcal{E}})$ es uniformemente continua. Dados $x \in X$ y $E[f(x)] \in \mathcal{V}(f(x))$, entonces existe $D \in \mathfrak{D}$ tal que $y \in D[x]$ implica $f(y) \in E[f(x)]$, entonces $y \in f^{-1}(E[f(x)])$ así se tiene,

$$D[x] \subset f^{-1}(E[f(x)])$$

Luego f es continua en x. Como hemos tomado un $x \in X$ arbitrario, entonces f es continua. □

Ejemplos 3. Función uniformemente continua y no uniformemente continua.

1. Sean (M, ρ) y (N, σ) dos espacios métricos y $f : M \to N$ una función uniformemente continua. Como M y N son espacios topológicos uniformizables, es decir sus topologías métricas coinciden con la topología generada por sus correspondientes uniformidades, la noción de continuidad uniforme de una función $f : M \to N$ se expresa de la siguiente manera: Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\rho(x, y) < \delta$, entonces $\sigma(f(x), f(y)) < \epsilon$.

2. Sea $f : (X, \tau_{\mathfrak{D}}) \to (Y, \tau_{\mathcal{E}})$, donde $\mathfrak{D}$ es la uniformidad discreta sobre X y $\mathcal{E}$ es una uniformidad sobre Y, entonces f es uniformemente continua. Veamos.
   Dado $E \in \mathcal{E}$, tomamos como sistema fundamental de entornos de una uniformidad discreta a $\mathfrak{D} = \{\Delta\} \subset X \times X$, luego $\Delta[x] = \{x\}$, $x \in \Delta[x]$ implica que
   $f(x) \in \Delta[f(x)] \subset E[f(x)]$.

3. La función

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{D}}) &\to (\mathbb{R}, \tau_{\mathfrak{D}}) \\ x &\mapsto f(x) = x^2 \end{aligned}$$

   con $\mathfrak{D}$ la uniformidad usual sobre $\mathbb{R}$, es continua pero no uniformemente continua. Verifiquemos.
   Dado $\epsilon = 1$,

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{(f(x), f(y)) \in \mathbb{R}^2 \mid |f(x) - f(y)| < 1\right\} \\ &= \left\{(f(x), f(y)) \in \mathbb{R}^2 \mid |x^2 - y^2| < 1\right\} \end{aligned}$$

   Para cada $\delta > 0$, sean $x = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$, $y = \frac{1}{\delta}$ entonces $(x, y) \in D_\delta$, pero $(x^2, y^2) \notin E_1$.

1.3. Cubrimientos uniformes.

Introduciremos otra manera de presentar espacios uniformes mediante el concepto de cubrimiento uniforme y algunas de sus propiedades básicas.

Definición 1.6 (Cubrimiento uniforme)**.** Un cubrimiento $\mathcal{U}$ de un espacio uniforme $(X, \mathfrak{D})$ es un cubrimiento uniforme si éste está refinado por el cubrimiento de la forma $\mathcal{U}_D = \{D[x] \mid x \in X\}$, para algún $D \in \mathfrak{D}$. Es decir, para cada $D[x] \in \mathcal{U}_D$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $D[x] \subset U$. Si $\mathcal{U}_D$ refina a $\mathcal{U}$ escribimos $\mathcal{U}_D < \mathcal{U}$.

Definición 1.7 (La estrella de $A \subset X$ con respecto a $\mathcal{U}$)**.** Si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de X y $A \subset X$, la estrella de A con respecto a $\mathcal{U}$ es el conjunto

$$St(A,\mathcal{U}) = \bigcup\{U \in \mathcal{U} \mid A \cap U \neq \emptyset\}.$$

Definición 1.8 (Refinamiento estrella)**.** Decimos que un cubrimiento $\mathcal{U}$ es un refinamiento estrella de un cubrimiento $\mathcal{V}$ si para cada $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $St(U,\mathcal{U}) \subset V$, es decir $\{St(U,\mathcal{U}) \mid U \in \mathcal{U}\} < \mathcal{V}$. Con $\mathcal{U}^* < \mathcal{V}$ indicamos que $\mathcal{U}$ es un refinamiento estrella de $\mathcal{V}$.

Teorema 1.3. *La colección $\mu = \{\mathcal{U} \mid \mathcal{U}$ es un cubrimiento uniforme de $(X, \mathfrak{D})\}$ tiene las propiedades siguientes.*

a) Si $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mu$, entonces $\mathcal{U}_3^* < \mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_3^* < \mathcal{U}_2$ para algún $\mathcal{U}_3 \in \mu$.

b) Si $\mathcal{U} < \mathcal{U}'$ y $\mathcal{U} \in \mu$, entonces $\mathcal{U}' \in \mu$.

Recíprocamente, dada cualquier familia μ de cubrimientos de un conjunto X que satisface las condiciones a) y b), la colecciòn de todos los conjuntos $D_{\mathcal{U}} = \bigcup\{U \times U \mid U \in \mathcal{U}\}$ donde $\mathcal{U} \in \mu$ es un sistema fundamental de entornos para una uniformidad sobre X, cuyos cubrimientos uniformes son precisamente los elementos de μ.

Demostración. $(\Rightarrow)$

a) Sea $\mathcal{U}_3 = \mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_2 = \{U_1 \cap U_2 \mid U_1 \in \mathcal{U}_1,\, U_2 \in \mathcal{U}_2\}$. Se probará que $\mathcal{U}_3 \in \mu$ y $\mathcal{U}_3^* < \mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_3^* < \mathcal{U}_2$.

Por nuestra hipótesis $\mathcal{U}_{D_1} < \mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_{D_2} < \mathcal{U}_2$, para algunos D_1, $D_2 \in \mathfrak{D}$, entonces existe $D_3 = D_1 \cap D_2$ tal que $D_3[x] \subset D_1[x]$ y $D_3[x] \subset D_2[x]$. Como $D_1[x] \subset U_1$ y $D_2[x] \subset U_2$, entonces $D_3[x] \subset U_1$ y $D_3[x] \subset U_2$, así $D_3[x] \subset U_1 \cap U_2 = U_3$. Tenemos que $\mathcal{U}_3 = \mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_2 < \mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_3 = \mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_2 < \mathcal{U}_2$, además $St\,(U_3, \mathcal{U}_3) \subset U_1$, $St\,(U_3, \mathcal{U}_3) \subset U_2$ luego $\mathcal{U}_3^* < \mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_3^* < \mathcal{U}_2$.

b) Si $\mathcal{U} < \mathcal{U}'$ y $\mathcal{U} \in \mu$, existe $D \in \mathfrak{D}$ tal que $\mathcal{U}_D < \mathcal{U}$ entonces $\mathcal{U}_D < \mathcal{U}'$ luego $\mathcal{U}' \in \mu$.

($\Leftarrow$)

Sea μ una colección de cubrimientos de un conjunto X que satisface las propiedades a) y b). La colección $\mathcal{E} = \{D_{\mathcal{U}} \mid \mathcal{U} \in \mu\}$ debe satisfacer las condiciones de la Proposición 1.2.

SFE1. Dados $D_{\mathcal{U}_1}$, $D_{\mathcal{U}_2} \in \mathcal{E}$ con $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2 \in \mu$, por hipótesis existe $\mathcal{U}_3 \in \mu$ tal que $\mathcal{U}_3^* < \mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_3^* < \mathcal{U}_2$, es decir $St\,(U_3, \mathcal{U}_3) \subset U_1$ y $St\,(U_3, \mathcal{U}_3) \subset U_2$ para $U_1 \in \mathcal{U}_1$, $U_2 \in \mathcal{U}_2$ y $U_3 \in \mathcal{U}_3$, entonces $St\,(U_3, \mathcal{U}_3) \subset U_1 \cap U_2$.

Luego $St\,(U_3, \mathcal{U}_3) \times St\,(U_3, \mathcal{U}_3) \subset U_1 \cap U_2 \times U_1 \cap U_2$, como $U_3 \times U_3 \subset St\,(U_3, \mathcal{U}_3) \times St\,(U_3, \mathcal{U}_3) \subset U_1 \times U_1 \cap U_2 \times U_2$, entonces $D_{\mathcal{U}_3} \subset D_{\mathcal{U}_1} \cap D_{\mathcal{U}_2}$.

SFE2. Sean $D_{\mathcal{U}} \in \mathcal{E}$, $(x,x) \in \Delta$. Como $\mathcal{U} \in \mu$, para cada $x \in X$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$, luego $(x,x) \in U \times U$ así $(x,x) \in D_{\mu}$.

SFE3. Sea $D_{\mathcal{U}} \in \mathcal{E}, \mathcal{U} \in \mu$. Existe $D = \{U \times U\}$, $U \in \mathcal{U}$, tal que $D \circ D \subset D_{\mu}$.

SFE4. Sea $D_{\mathcal{U}} \in \mathcal{E}, \mathcal{U} \in \mu$. Existe $D_{\mu} = D_{\mu}^{-1} \in \mathcal{E}$ tal que $D_{\mu} \subset D_{\mu}^{-1}$.

Así $\mathcal{E} = \{D_{\mu} \mid \mathcal{U} \in \mu\}$ es un sistema fundamental de entornos para una uniformidad sobre X, los cubrimientos uniformes de X son precisamente los elementos de μ. $\square$

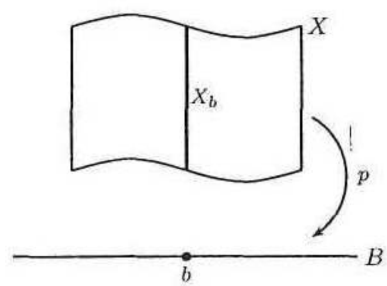
Teorema 1.4 (Función Uniformemente Continua)**.** *Sean X e Y espacios uniformes. Una función $f : X \to Y$ es uniformemente continua si y solo si para cada cubrimiento uniforme $\mathcal{U}_1$ de Y, existe un cubrimiento uniforme $\mathcal{U}_0$ de X tal que $f(\mathcal{U}_0) < \mathcal{U}_1$, donde $f(\mathcal{U}_0) = \{f(U) \mid U \in \mathcal{U}_0\}$.*
(Es decir f es uniformemente continua si y solo si para cada cubrimiento uniforme $\mathcal{U}$ de Y, $f^{-1}(\mathcal{U})$ es un cubrimiento uniforme de X. Funciones uniformemente continuas preservan cubrimientos uniformes).

Demostración. ($\Rightarrow$)
Sea $\mathcal{U}_1$ un cubrimiento uniforme de $(Y, \mathcal{E})$, existe $E \in \mathcal{E}$ tal que $\mathcal{U}_E < \mathcal{U}_1$. Como f es uniformemente continua, para $E \in \mathcal{E}$ existe $D \in \mathfrak{D}$ tal que si $y \in D[x]$ entonces $f(y) \in E[f(x)]$. Luego existe el cubrimiento uniforme $\mathcal{U}_D$ de $(X, \mathfrak{D})$ tal que $f(\mathcal{U}_D) < \mathcal{U}_E < \mathcal{U}_1$.
($\Leftarrow$)
Sea $E \in \mathcal{E}$, entonces $\mathcal{U}_E$ es un cubrimiento uniforme de $(Y, \mathcal{E})$, por el Teorema 1.3 $D_{\mathcal{U}_E} \subset E$. Por hipótesis existe un cubrimiento uniforme $\mathcal{U}_0$ de $(X, \mathfrak{D})$ tal que $f(\mathcal{U}_0) < \mathcal{U}_E$. Por el Teorema 1.3., existe $D_{\mathcal{U}_0} \in \mathfrak{D}$ tal que si $(x, y) \in D_{\mathcal{U}_0}$, existe $U_0 \in \mathcal{U}_0$ que cumple que $(x, y) \in U_0 \times U_0$, $(f(x), f(y)) \in f(U_0) \times f(U_0)$, $(f(x), f(y)) \in E[z] \times E[z]$ para algún $z \in Y$, entonces $(f(x), f(y)) \in E$. □

1.4. Espacio topológico fibrado.

En esta sección se enunciarán algunas de las principales definiciones como también algunos resultados de la topología fibrada o topología fibra a fibra, para entrar en contexto con el estudio de los espacios uniformes fibrados. Estos resultados se pueden consultar en James [6].

Definición 1.9 (Conjunto fibrado X sobre un conjunto base B)**.** Un conjunto fibrado sobre un conjunto base B (resp. espacio topológico) es un par (X, p) donde X es un conjunto (resp. Espacio topológico) y $p : X \to B$ una función (resp. continua) llamada proyeccción que no es necesariamente sobreyectiva.



Conjunto fibrado

Definición 1.10 (Fibra sobre b)**.** Dado $b \in B$, la fibra sobre b es el subconjunto $X_b = p^{-1}(b) \subset X$. X_b puede ser vacía, porque p no necesariamente es sobreyectiva.

Si $W \subset B$ entonces se define $X_W = p^{-1}(W) \subset X$.

Ejemplos 4. Conjuntos fibrados.

1. B es un conjunto fibrado sobre sí mismo, con la función identica como proyección y dado $b \in B$ la fibra sobre B es $B_b = \{b\}$.

2. $B \times T$ con $T \neq \emptyset$ es un conjunto fibrado sobre B, con la primera proyeccción $\pi_1 : B \times T \to B$ y $(B \times T)_b = \{(b, t) \mid t \in T\}$.

3. Si (X, p) es un conjunto fibrado sobre B y si $B' \subset B$, $X_{B'} = p^{-1}(B')$ es un conjunto fibrado sobre B' con la proyección restringida a $p^{-1}(B')$.

Definición 1.11. Sean X un conjunto fibrado sobre B y X' cualquier conjunto, si $\alpha : X' \to X$ es una función, entonces la función $p \circ \alpha : X' \to B$ es una proyección que hace de X' un espacio fibrado sobre B.
En particular si $X' \subset X$ entonces la restricción $p \mid_{X'}: X' \to B$ es una proyección, que hace de X' un conjunto fibrado sobre B.

Definición 1.12 (Función fibrada)**.** Sean (X, p) y (Y, q) dos conjuntos fibrados sobre B, con p y q proyecciones de X e Y respectivamente, una funcion $\phi : X \to Y$ es fibrada si satisface que $p = q \circ \phi$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p=q\circ\phi"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Definición 1.13 (Topología fibrada)**.** Sea B un espacio topológico, X un conjunto fibrado sobre B, una topología fibrada sobre un conjunto fibrado X, es cualquier topología sobre X tal que la proyección $p : X \to B$ es continua.

Definición 1.14 (Espacio topológico fibrado o ETF)**.** Un espacio topológico fibrado sobre un espacio topológico B es un conjunto fibrado X con una topología fibrada.

Ejemplos 5. Espacios topológicos fibrados.

1. Si X es un espacio topológico discreto, B un espacio topológico cualquiera y $p : X \to B$ una función, entonces p es continua. Luego X es un espacio topológico fibrado o ETF.

2. En general cualquier función continua p entre los espacios topológicos X y B convierte automáticamente a X en un ETF.

3. B es un espacio topológico fibrado sobre el mismo, con la identidad como proyección.

4. El producto $B \times T$ con T espacio topológico, es un espacio topológico fibrado con la primera proyección π_1.

1.5. Espacios uniformes fibrados.

En esta sección se definirán algunos conceptos y características fundamentales de los espacios uniformes que son conjuntos fibrados. De forma análoga a la Definición de uniformidad diagonal obtenemos.

Definición 1.15 (Estructura Uniforme Fibrada)**.** Sea B un espacio topológico y sea X un conjunto fibrado sobre B, una estructura uniforme fibrada es un filtro Ω sobre $X \times X$ que cumple las siguientes condiciones.

(C1) Si $D \in \Omega$ entonces $\Delta \subset D$.

Al conjunto D se le llama entorno.

(C2) Si $D \in \Omega$ entonces para cada $b \in B$, existen $W \in \mathcal{V}(b)$ y un entorno $E \in \Omega$ tal que $X_W^2 \cap E \subset D^{-1}$, donde $X_W^2 = X_W \times X_W$.

(C3) Si $D \in \Omega$ entonces para cada $b \in B$, existen $W \in \mathcal{V}(b)$ y un entorno $E \in \Omega$ tal que $(X_W^2 \cap E) \circ (X_W^2 \cap E) \subset D$.

Nota 2. El entorno E depende del entorno D escogido y del elemento $b \in B$.

Definición 1.16 (Espacio Uniforme Fibrado)**.** Un conjunto fibrado X sobre un espacio topológico B que posea una estructura uniforme fibrada es un espacio uniforme fibrado que se denota por (X, p, Ω) o simplemente (X, Ω).

Las siguientes observaciones relacionan un espacio uniforme fibrado (X, Ω) con un espacio uniforme $(X, \mathfrak{D})$ y viceversa.

Observación 3. Un espacio uniforme fibrado (X, Ω) sobre un punto $B = \{b\}$ es un espacio uniforme.

Ω es un filtro sobre $X \times X$, solo resta verificar condiciones a),b) y c) de la definición 1.1.

a) Se cumple por (C1).

b) Sea $D \in \Omega$ y sea $b \in B = \{b\}$, existen $W = B \in \mathcal{V}(b)$ y $E \in \Omega$ tales que

$$(X_B^2 \cap E) \circ (X_B^2 \cap E) \subset D.$$
$$(X^2 \cap E) \circ (X^2 \cap E) \subset D.$$
$$E \circ E \subset D.$$

c) Sea $D \in \Omega$ y sea $b \in B = \{b\}$, luego existen $W = B \in \mathcal{V}(b)$ y $E \in \Omega$ tales que

$$X_B^2 \cap E \subset D^{-1}.$$
$$E \subset D^{-1} \Rightarrow D^{-1} \in \Omega.$$

Observación 4. Cada estructura uniforme $\mathfrak{D}$ sobre $X \times X$ es también una estructura uniforme fibrada.

$\mathfrak{D}$ es un filtro por la Definición 1.1. Ahora verificaremos que $\mathfrak{D}$ satisface las condiciones de la Definición 1.16.

(C1) Se cumple por condición a).

(C2) Sea $D \in \mathcal{D}$ y sea $b \in B$ por hipótesis de la proposición 1.1 se tiene que $E \circ E^{-1} \subset D$ para algún $E \in \mathcal{D}$ y existe $W = B$ tal que $X_B^2 \cap E \subset D$.

(C3) Sea $D \in \mathcal{D}$ y sea $b \in B$, entonces existen $W = B \in \mathcal{V}(b)$, $E \in \mathcal{D}$ tal que

$$E \circ E \subset D.$$
$$(X_B^2 \cap E) \circ (X_B^2 \cap E) \subset D.$$

Ejemplos 6. A continuación veremos ejemplos sencillos de esta última observación.

1. Si $\mathfrak{D} = \{X \times X\}$, $D = X \times X$, $X \neq \emptyset$ es la estructura uniforme indiscreta es tambien una estructura uniforme fibrada, conocida como estructura uniforme indiscreta fibrada.

2. B es un espacio uniforme fibrado sobre él mismo con $\Omega = \{B \times B\}$ estructura uniforme indiscreta fibrada.

3. El producto $B \times T$ con (T, Υ) un espacio uniforme, es tambien un espacio uniforme fibrado. La estructura $\{B \times B\} \times \Upsilon$ sobre $B \times T$, es una estructura uniforme fibrada.

4. Si X es un espacio uniforme fibrado sobre B, entonces $X_{B'}$ es uniforme fibrado sobre B', para B' subespacio de B.

Definición 1.17 (Función uniformemente continua fibra a fibra)**.** Sea $\phi : X \to Y$ una función fibrada, X, Y espacios uniformes fibrados sobre B. Entonces ϕ es uniformemente continua fibra a fibra si para cada entorno E de Y y cada punto $b \in B$, existen $W \in \mathcal{V}(b)$ y un entorno D de X tal que $X_W^2 \cap D \subset \phi^{-2}(E)$, donde $X_W^2 = X_W \times X_W$ y $\phi^{-2}(E) = (\phi \times \phi)^{-1}(E)$.

Observación 5. Una función fibrada $\phi : X \to Y$ es uniformemente continua fibra a fibra, si Y posee la estructura uniforme indiscreta fibrada $\Omega_Y = \{Y \times Y\}$.

En efecto. Sea Ω_X estructura uniforme fibrada sobre $X \times X$ y sea Ω_Y estructura uniforme indiscreta fibrada. Dados $E \in \Omega_Y$, $E = Y \times Y$ y $b \in B$, $\phi^{-2}(E) = (\phi \times \phi)^{-1}(Y \times Y) = X \times X$, luego para cada $W \in \mathcal{V}(b)$ y cada $D \in \Omega_X$ se cumple $X_W^2 \cap D \subset X \times X$.

Observación 6. Los espacios uniformes fibrados forman una categoría.
Objetos: Espacios uniformes fibrados.
Morfismos: Funciones fibradas uniformemente continuas fibra a fibra.
Composición: Usual.

1.6. Topología uniforme fibra a fibra.

Hemos visto que una estructura uniforme fibrada genera un espacio uniforme fibrado sin que el espacio uniforme fibrado este dotado de una topología en particular. Ahora veremos como cada estructura uniforme fibrada determina una topología fibrada sobre el mismo conjunto fibrado. Es decir.

Definición 1.18. Sea (X, Ω_X) un espacio uniforme fibrado, considérese para cada $x \in X_b$ y cada $b \in B$ la colección $\mathcal{V}(x) = \{D[x] \subset X \mid D \in \Omega_X\}$, donde $D[x] = \{y \in X \mid (x, y) \in D\}$, $D[x] \in \mathcal{V}(x)$ es una vencindad de x uniforme fibrada.

Para cada $x \in X_b$ y cada $b \in B$ definimos:

$$\Gamma(x) = \{X_W \cap D[x] \mid W \in \mathcal{V}(b), D[x] \in \mathcal{V}(x)\}.$$

La colección $\Gamma(x)$ es un sistema de vencindades fibradas en X, dotando al conjunto fibrado X de una topología llamada topología uniforme fibrada o fibra a fibra la que se describe así:

$$\tau_\Gamma = \{A \subset X_W \mid (\forall y \in A),\ A \in \Gamma(y)\}.$$

Proposición 1.3. *Si $\phi : X \to Y$ es una función uniformemente continua fibra a fibra sobre B, entonces ϕ es continua en la topología uniforme fibrada.*

Demostración. Sea $E[\phi(x)] \in \digamma[\phi(x)]$ una vencindad de $\phi(x)$ en Y porque $Y_W \cap E[\phi(x)] \subset E[\phi(x)]$, debido que $x \in X_b$ y $b \in B$, entonces $\phi(x) \in Y_b$ y dado que ϕ es uniformemente continua fibra a fibra, existen $W \in \mathcal{V}(b)$ y $D \in \Omega_X$ tal que $X_W^2 \cap D \subset \phi^{-2}(E)$. Luego si $(x, z) \in X_W^2 \cap D$ entonces $(x, z) \in (\phi \times \phi)^{-1}(E)$, es decir $(\phi(x), \phi(z)) \in E$.

Ahora si $z \in X_W \cap D[x] \in \Gamma[x]$, $\phi(z) \in Y_W \cap E[\phi(x)] \in \digamma[\phi(x)]$ entonces $\phi(z) \in E[\phi(x)]$ luego $z \in \phi^{-1}(E[\phi(x)])$.

Por tanto $X_W \cap D[x] \subset \phi^{-1}(E[\phi(x)])$ luego ϕ es continua en la topología uniforme fibrada. $\square$

Capítulo 2

Topología por cubrimientos fibra a fibra Vs Topología uniforme fibra a fibra.

Introduciremos conceptos fundamentales para la construcción de una uniformidad por cubrimientos fibra a fibra a partir de un espacio uniforme fibrado o una estructura uniforme fibra a fibra. También daremos una construcción de una estructura uniforme fibra a fibra (espacio uniforme fibrado) a partir de una uniformidad por cubrimientos fibra a fibra (espacio uniforme por cubrimientos fibra a fibra).

Lo anterior con la finalidad de producir topologías equivalentes entre una estructura y otra, es decir que las topologías entre un espacio uniforme fibrado y un espacio uniforme por cubrimientos fibra a fibra, construido éste a partir de una estructura uniforme fibrada, son equivalentes. Como también serán equivalentes la topología de un espacio uniforme por cubrimientos fibra a fibra y la topología de un espacio uniforme fibrado, construido éste a partir de una uniformidad por cubrimientos fibra a fibra.

2.1. Uniformidad por cubrimientos fibra a fibra.

En esta sección se construirá un sistema de pares conjugados en un espacio uniforme fibrado, dicho sistema será una uniformidad por cubrimientos fibra a fibra.

Definición 2.1 (Par conjugado de cubrimientos). Sea X un conjunto, $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$, $\mathcal{U}' = \{U'_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ dos cubrimientos de X con igual conjunto de índices Λ, entonces el par $(\mathcal{U},\mathcal{U}')$ es un par conjugado de cubrimientos de un conjunto X, si $(\mathcal{U},\mathcal{U}')$ satisface: Para cada $x \in X$ existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $x \in U_\alpha \cap U'_\alpha$.

Nota 3. $(U, U') \in (\mathcal{U},\mathcal{U}')$ pertenece a un par conjugado de cubrimientos si y solamente si existen $\alpha \in \Lambda$ tal que $(U, U') = (U_\alpha, U'_\alpha)$.

Ejemplos 7. Presentamos algunos pares conjugados de cubrimientos.

1. Sea el conjunto $X = (0, 1)$ y sean los cubrimientos del conjunto X $\mathcal{U} = \{(0, 1 - \frac{1}{n})\}_{n\geq 2}$ y $\mathcal{U}' = \{(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, 1)\}_{n\geq 2}$, $n \in \mathbb{N} - \{1\}$. No es difícil ver que $(\mathcal{U},\mathcal{U}')$ es un par conjugado de cubrimientos de X.

2. $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{U} = \{(-n, n)\}$, $\mathcal{U}' = \{(-n + 2, n + 1)\}$ entonces $(\mathcal{U},\mathcal{U}')$ es un par conjugado de cubrimientos de $\mathbb{R}$

Definición 2.2 (Refinamiento de pares conjugados de cubrimientos). Sean X, Y dos conjuntos, $Y \subset X$ y sean $(\mathcal{U},\mathcal{U}')$ y $(\mathrm{V}, \mathrm{V}')$ pares conjugados de cubrimientos de X e Y respectivamente, con $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$, $\mathcal{U}' = \{U'_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$, $\mathrm{V} = \{V_\beta \mid \beta \in \Upsilon\}$, $\mathrm{V}' = \{V'_\beta \mid \beta \in \Upsilon\}$. Se dice que $(\mathrm{V}, \mathrm{V}')$ es un refinamiento de $(\mathcal{U},\mathcal{U}')$ (notamos $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') < (\mathcal{U},\mathcal{U}')$), si para cada $\beta \in \Upsilon$ existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $V_\beta \subset U_\alpha$ y $V'_\beta \subset U'_\alpha$.

Ejemplo. Consideremos el espacio X y los cubrimientos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$ de X de los ejemplos 7 item 1, sea $Y = (0, \frac{1}{2}] \subset X$ y sean los cubrimientos de Y $\mathrm{V} = \big\{(0, \frac{3}{4} - \frac{1}{n+1})\big\}_{n\geq 2}$ y $\mathrm{V}' = \big\{(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}, \frac{1}{2}]\big\}_{n\geq 2}$, observamos que para cada $n \geq 2$, existe $m(n) = n + 1$ tal que $V_n \subset U_m$ y $V'_n \subset U'_m$.

Definición 2.3 (Refinamiento estrella de pares conjugados de cubrimientos)**.** Sean los conjuntos X, Y, A con $A \subset Y \subset X$ y sean $(\mathcal{U},\mathcal{U}')$, (V,V') pares conjugados de cubrimientos de X e Y respectivamente y sean las colecciones de conjuntos

$$St(A,\mathrm{V}) = \bigcup\{V_\beta \in \mathrm{V} \mid V'_\beta \cap A \neq \emptyset\} \text{ y}$$

$$St(A,\mathrm{V}') = \bigcup\{V'_\beta \in \mathrm{V}' \mid V_\beta \cap A \neq \emptyset\}.$$

Entonces (V,V') es un refinamiento estrella de $(\mathcal{U},\mathcal{U}')$ (notación $(\mathrm{V},\mathrm{V}')^* < (\mathcal{U},\mathcal{U}')$) si para cada $(V,V') \in (\mathrm{V},\mathrm{V}')$ existe $(U,U') \in (\mathcal{U},\mathcal{U}')$ tal que $St(V,\mathrm{V}) \cup St(V',\mathrm{V}') \subset U \cap U'$.

Definición 2.4 (Restricción de $(\mathcal{U},\mathcal{U}')$ a $A \subset X$)**.** Dados $(\mathcal{U},\mathcal{U}')$ un par conjugado de cubrimientos de X y $A \subset X$, la restricción de $(\mathcal{U},\mathcal{U}')$ a A es el par conjugado de cubrimientos de A

$$(\mathcal{U},\mathcal{U}')_{|A} = (\{U_\alpha \cap A \mid \alpha \in \Lambda\}, \{U'_\alpha \cap A \mid \alpha \in \Lambda\}).$$

Definición 2.5. Para cada $(\mathcal{U},\mathcal{U}')$ par conjugado de cubrimientos de X, definimos el cubrimiento de X

$$\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}' = \{U \cap U' \mid (U,U') \in (\mathcal{U},\mathcal{U}')\}.$$

Antes de definir una uniformidad por cubrimientos fibra a fibra definimos lo siguiente.
$\mu_W \doteq$ Familia no vacía de pares conjugados de cubrimientos de X_W, donde $W \in \tau_B$ abierto en B.
$\{\mu_W\}_{W\in\tau_B} \doteq$ Sistema de pares conjugados de cubrimientos de $\{X_W\}_{W\in\tau_B}$.

Definición 2.6 (Uniformidad por cubrimientos fibra a fibra o espacio uniforme por cubrimientos fibra a fibra)**.** Sea X un conjunto fibrado sobre B, $\mu = \{\mu_W\}$ un sistema de pares conjugados de cubrimientos de $\{X_W\}$. Se dice que el sistema $\mu = \{\mu_W\}$ es una uniformidad por cubrimientos fibra a fibra o que el par (X,μ) es un espacio uniforme por cubrimientos fibra a fibra, si se satisfacen las siguientes condiciones:

(1) Si $(\mathcal{U},\mathcal{U}')$ es un par conjugado de cubrimientos de X_W y si existe $(\mathrm{V},\mathrm{V}') \in \mu_W$ tal que $(\mathrm{V},\mathrm{V}') < (\mathcal{U},\mathcal{U}')$, entonces $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$.

(2) Para cada $(\mathcal{U}_i,\mathcal{U}_i') \in \mu_W$, $i = 1,2$, existe $(\mathcal{U}_3,\mathcal{U}_3') \in \mu_W$ tal que $(\mathcal{U}_3,\mathcal{U}_3') < (\mathcal{U}_i,\mathcal{U}_i')$, $i = 1,2$.

(3) Para cada $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$ y $b \in W$, existen $W' \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathrm{V},\mathrm{V}') \in \mu_{W'}$ tales que $W' \subset W$ y (V,V') es un refinamiento estrella de $(\mathcal{U},\mathcal{U}')$.

(4) Para cada $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$ y $b \in W$, existen $W' \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathrm{V},\mathrm{V}') \in \mu_{W'}$ tales que $W' \subset W$ y $(\mathrm{V}',\mathrm{V}) < (\mathcal{U},\mathcal{U}')$.

(5) Para $W' \subset W$ se tiene que $\mu_{W'} \supset \mu_W \mid_{X_{W'}}$ donde $\mu_W \mid_{X_{W'}} = \{(\mathcal{U},\mathcal{U}') \mid_{X_{W'}} \mid (\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W\}$.

A partir de la definición anterior, se construirá un sistema de pares conjugados de cubrimientos de $\{X_W\}_{W\in\tau_B}$ notado por $\mu(\Omega)$ en el espacio uniforme fibrado (X,Ω) de tal manera que $\mu(\Omega)$ sea una uniformidad por cubrimientos fibra a fibra.

Dado (X,Ω) un espacio uniforme fibrado, construiremos un sistema de pares conjugados de cubrimientos de $\{X_W\}_{W\in\tau_B}$, $\mu(\Omega) = \{\mu(\Omega)_W\}$.

Para cada $D \in \Omega$ y cada $W \in \tau_B$ definimos

$$\mathcal{U}(D,W) = \{D^{-1}[x] \cap X_W \mid x \in X_W\} \text{ y}$$
$$\mathcal{U}'(D,W) = \{D[x] \cap X_W \mid x \in X_W\}.$$

Entonces el par $(\mathcal{U}(D,W),\mathcal{U}'(D,W))$ es un par conjugado por cubrimientos de X_W, veámoslo.

Sea $x \in X_W$, $p(x) \in W$, como $D \in \Omega$ se tiene que $D \supset \Delta$, es decir $x \in D[x] \cap X_W$ y $x \in D^{-1}[x] \cap X_W$, luego $x \in (D[x] \cap X_W) \cap (D^{-1}[x] \cap X_W)$.

Nota 4. Sea $\mu(\Omega)_W$ la familia de todos los pares conjugados $(\mathcal{U},\mathcal{U}')$ de cubrimientos de X_W tal que existe $D \in \Omega$, que cumple $(\mathcal{U}(D,W),\mathcal{U}'(D,W)) < (\mathcal{U},\mathcal{U}')$.

Proposición 2.1. *Sea (X,Ω) un espacio uniforme fibra a fibra entonces el sistema $\mu(\Omega) = \{\mu(\Omega)_W\}$ construido en la página anterior es una uniformidad por cubrimientos fibra a fibra.*

Demostración. Se probarán las condiciones de la Definición 2.6.

(1) Sea $(\mathcal{U},\mathcal{U}')$ un par conjugado de cubrimientos de X_W, por nota 4 existe $D \in \Omega$ tal que $(\mathcal{U}(D,W),\mathcal{U}'(D,W)) < (\mathcal{U},\mathcal{U}')$, luego $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu(\Omega)_W$.

(2) Sean $(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_1')$, $(\mathcal{U}_2,\mathcal{U}_2') \in \mu(\Omega)_W$ tal que existen $D_1, D_2 \in \Omega$ tales que

$$(\mathcal{U}(D_1,W),\mathcal{U}'(D_1,W)) < (\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_1') \text{ y}$$
$$(\mathcal{U}(D_2,W),\mathcal{U}'(D_2,W)) < (\mathcal{U}_2,\mathcal{U}_2').$$

Como Ω es un filtro, existe $D_3 = D_1 \cap D_2 \in \Omega$, $W \in \tau_B$

$$(\mathcal{U}(D_3,W),\mathcal{U}'(D_3,W)) < (\mathcal{U}(D_1,W),\mathcal{U}'(D_1,W)) \text{ y}$$
$$(\mathcal{U}(D_3,W),\mathcal{U}'(D_3,W)) < (\mathcal{U}(D_2,W),\mathcal{U}'(D_2,W)).$$

(3) Sean $(\mathcal{U}(D,W),\mathcal{U}'(D,W)) \in \mu(\Omega)_W$, $b \in W$ y $W \in \tau_B$, ya que $D \in \Omega$ existe $W' \in \mathcal{V}(b)$ vencindad abierta de b tal que $W' \subset W$ y un entorno $E \in \Omega$ tal que

$$X^2_{W'} \cap E \subset D^{-1} \text{ y además}$$
$$(X^2_{W'} \cap E) \circ (X^2_{W'} \cap E) \subset D \text{ luego,}$$
$$(X^2_{W'} \cap E) \circ (X^2_{W'} \cap E) \circ (X^2_{W'} \cap E) \subset D^{-1} \cap D$$
$$(X^2_{W'} \cap E)^3 \subset D^{-1} \cap D \quad [1]$$

Definimos para cada $E \in \Omega$ y cada vencindad abierta $W' \in \mathcal{V}(b)$

$$\mathcal{U}(E,W') = \{E^{-1}[x] \cap X_{W'} \mid x \in X_{W'}\} \text{ y}$$
$$\mathcal{U}'(E,W') = \{E[x] \cap X_{W'} \mid x \in X_{W'}\}.$$

Luego $(\mathcal{U}(E,W'),\mathcal{U}'(E,W'))$ es un par conjugado de cubrimientos de $X_{W'} \subset X_W$, se probará que $(\mathcal{U}(E,W'),\mathcal{U}'(E,W'))^* < (\mathcal{U}(D,W),\mathcal{U}'(D,W))$.
Sea $(E^{-1}[x] \cap X_{W'}, E[x] \cap X_{W'}) \in (\mathcal{U}(E,W'),\mathcal{U}'(E,W'))$ con $x \in X_{W'}$, existe $(D^{-1}[x] \cap X_W, D[x] \cap X_W) \in (\mathcal{U}(D,W),\mathcal{U}'(D,W))$ tal que si $z \in St(E^{-1}[x] \cap X_{W'},\mathcal{U}(E,W')) \cup St(E[x] \cap X_{W'},\mathcal{U}'(E,W'))$ entonces $z \in (D^{-1}[x] \cap X_W) \cap (D[x] \cap X_W)$. Veamos esta última implicación.

Si $z \in St(E^{-1}[x] \cap X_{W'},\mathcal{U}(E,W'))$ con $x \in X_W$, existe $y \in X_W$ tal que $z \in E^{-1}[y] \cap X_{W'}$ y

$$\begin{aligned}(E[y] \cap X_{W'}) \cap (E^{-1}[x] \cap X_{W'}) &\neq \emptyset,\\ E[y] \cap E^{-1}[x] \cap X_{W'} &\neq \emptyset.\end{aligned}$$

Sea $w \in E[y] \cap E^{-1}[x] \cap X_{W'}$ entonces $(w,x) \in E \cap X^2_{W'}$, $(y,w) \in E \cap X^2_{W'}$ y $(z,y) \in E \cap X^2_{W'}$ de donde $(z,x) \in (E \cap X^2_{W'}) \circ (E \cap X^2_{W'}) \circ (E \cap X^2_{W'})$, de la contenencia [1] tenemos que $(z,x) \in (E \cap X^2_{W'})^3 \subset D^{-1} \cap D$ es decir $(z,x) = (x,z)$, luego $z \in D[x] \cap D^{-1}[x] \cap X_{W'}$ y por tanto $z \in D[x] \cap D^{-1}[x] \cap X_W$, es decir $z \in (D[x] \cap X_W) \cap (D^{-1}[x] \cap X_W)$.

Ahora si $z \in St(E[x] \cap X_{W'},\mathcal{U}'(E,W'))$ con $x \in X_W$, en forma dual tenemos que $(E \cap X^2_{W'})^3 \subset D^{-1} \cap D$, es decir $(z,x) \in D \cap D^{-1}$ o equivalentemente $(z,x) = (x,z)$, luego $z \in D[x] \cap D^{-1}[x] \cap X_{W'} \subset D[x] \cap D^{-1}[x] \cap X_W$ es decir $z \in (D[x] \cap X_W) \cap (D^{-1}[x] \cap X_W)$. Así tenemos que $(\mathcal{U}(E,W'),\mathcal{U}'(E,W'))^* < (\mathcal{U}(D,W),\mathcal{U}'(D,W))$.

(4) Sean $(\mathcal{U}(D,W),\mathcal{U}'(D,W)) \in \mu(\Omega)_W$, $b \in W$ y $W \in \tau_B$, existe $W' \in \mathcal{V}(b)$ tal que $W' \subset W$, tambien existe un entorno $E \in \Omega$ tal que $X^2_{W'} \cap E^{-1} \subset D$ con $x \in X_{W'}$, luego

$$X_{W'} \cap E^{-1}[x] = (X^2_{W'} \cap E^{-1})[x] \subset D[x] \cap X_W \in \mathcal{U}'(D,W) \text{ y}$$

$$X_{W'} \cap E[x] = (X^2_{W'} \cap E)[x] \subset D^{-1}[x] \cap X_W \in \mathcal{U}(D,W).$$

Así $(\mathcal{U}'(E,W'),\mathcal{U}(E,W')) \in \mu(\Omega)_{W'}$ y se tiene que $(\mathcal{U}'(E,W'),\mathcal{U}(E,W')) < (\mathcal{U}(D,W),\mathcal{U}'(D,W))$.

(5) Sean $W' \subset W$, $W \in \tau_B$, $X_{W'} \subset X_W$ y sean $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu(\Omega)_W$, $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \mid_{X_{W'}} = (\{U_\alpha \cap X_{W'} \mid \alpha \in \Lambda\}, \{U'_\alpha \cap X_{W'} \mid \alpha \in \Lambda\}) \in \mu(\Omega)_W \mid_{X_{W'}}$ existe $D \in \Omega$ tal que $(\mathcal{U}(D,W),\mathcal{U}'(D,W)) < (\mathcal{U},\mathcal{U}')$ y

$$\begin{aligned}(\mathcal{U}(D,W),\mathcal{U}'(D,W)) \mid_{X_{W'}} &= (\{D^{-1}[x] \cap X_{W'}\}, \{D[x] \cap X_{W'}\}) \\ &= (\mathcal{U}(D,W'),\mathcal{U}'(D,W')).\end{aligned}$$

De $(\mathcal{U}(D,W),\mathcal{U}'(D,W)) < (\mathcal{U},\mathcal{U}')$, obtenemos

$$D^{-1}[x] \cap X_W \subset U_\alpha \quad x \in X_W, \tag{2.1}$$

$$D[x] \cap X_W \subset U'_\alpha \quad x \in X_W. \tag{2.2}$$

Al intersectar (2.1) y (2.2) con $X_{W'}$

$$D^{-1}[x] \cap X_{W'} \subset U_\alpha \cap X_{W'},$$

$$D[x] \cap X_{W'} \subset U'_\alpha \cap X_{W'}.$$

Es decir $(\mathcal{U}(D,W'),\mathcal{U}'(D,W')) < (\mathcal{U},\mathcal{U}') \mid_{X_{W'}}$ por tanto $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \mid_{X_{W'}} \in \mu(\Omega)_{W'}$.

$\square$

2.2. Ω_μ Estructura uniforme fibrada.

Recíprocamente, nosotros podemos construir una estructura uniforme fibra a fibra Ω_μ a partir de una uniformidad por cubrimientos fibra a fibra $\mu = \{\mu_W\}$ y de suponer que el espacio base B es un espacio topológico regular.

Tomamos una uniformidad por cubrimientos fibra a fibra $\mu = \{\mu_W\}$ de un espacio uniforme por cubrimientos fibra a fibra (X, μ). Dado $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$, definimos

$D(\mathcal{U},\mathcal{U}') = \bigcup\{U_\alpha \times U'_\alpha \mid (U_\alpha, U'_\alpha) \in (\mathcal{U},\mathcal{U}')\}$ y $\Omega_\mu = \Big\{D \subset X \times X \mid$ para $\{W_1, \cdots W_n\}$ un cubrimiento abierto finito de B existen $(\mathcal{U}_i,\mathcal{U}'_i) \in \mu_{W_i}$, $i = 1, \ldots, n$ tales que $D(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}'_1)\cup \ldots \cup D(\mathcal{U}_n,\mathcal{U}'_n) \subset D\Big\}$.

Proposición 2.2. *Sea B un espacio topológico regular y sea (X, μ) un espacio uniforme por cubrimientos fibra a fibra. Entonces la colección Ω_μ es una estructura uniforme fibrada.*

Demostración. Se probará primero que Ω_μ es un filtro en $X \times X$.

- $\emptyset \notin \Omega_\mu$ porque si pertenece, existirían $(\mathcal{U}_i,\mathcal{U}'_i) \in \mu_{W_i}$, $i = 1, \ldots, n$ tal que $D(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}'_1), \ldots, D(\mathcal{U}_n,\mathcal{U}'_n) \subset \emptyset$ y sabemos que cada $D(\mathcal{U}_i,\mathcal{U}'_i) \neq \emptyset$.

- $\Omega_\mu \neq \emptyset$ por definición.

- Sean $D_1, D_2 \in \Omega_\mu$ veamos que $D_1 \cap D_2 \in \Omega_\mu$.
  Sea $\{W_1, \ldots, W_n\}$ un cubrimiento abierto de B, entonces para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existen $(\mathcal{U}_i,\mathcal{U}'_i) \in \mu_{W_i}$ y $(\mathcal{W}_i, \mathcal{W}'_i) \in \mu_{W_i}$ tales que $D_1(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}'_1) \cup \ldots \cup D_1(\mathcal{U}_n,\mathcal{U}'_n) \subset D_1$ y $D_2(\mathcal{W}_1, \mathcal{W}'_1) \cup \ldots \cup D_2(\mathcal{W}_n, \mathcal{W}'_n) \subset D_2$.
  Tomamos un $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $(\mathcal{U}_i,\mathcal{U}'_i) \in \mu_{W_i})$ y $(\mathcal{W}_i, \mathcal{W}'_i) \in \mu_{W_i}$ por la condición (2) de la Definición 2.6., existe $(\mathrm{V}_i, \mathrm{V}'_i) \in \mu_{W_i}$ tal que $(\mathrm{V}_i, \mathrm{V}'_i) < (\mathcal{U}_i,\mathcal{U}'_i)$ y $(\mathrm{V}_i, \mathrm{V}'_i) < (\mathcal{W}_i, \mathcal{W}'_i)$. Sea $D = D_1 \cap D_2$, veamos que $D(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}'_1) \cup \ldots \cup D(\mathrm{V}_n, \mathrm{V}'_n) \subset D$.
  Sea $(x, y) \in D(\mathrm{V}_i, \mathrm{V}'_i)$ para algún i, entonces existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $(x, y) \in V_\alpha \times V'_\alpha$ y $(V_\alpha, V'_\alpha) \in (\mathrm{V}_i, \mathrm{V}'_i)$, como $(\mathrm{V}_i, \mathrm{V}'_i) < (\mathcal{U}_i,\mathcal{U}'_i)$ y $(\mathrm{V}_i, \mathrm{V}'_i) < (\mathcal{W}_i, \mathcal{W}'_i)$ entonces existen $\beta, \gamma \in \Lambda$ tales que $V_\alpha \subset U_\beta$,$V'_\alpha \subset U'_\beta$ y $V_\alpha \subset W_\gamma$, $V'_\alpha \subset W'_\gamma$; así tenemos que $(x, y) \in U_\beta \times U'_\beta$ y $(x, y) \in W_\gamma \times W'_\gamma$, luego $(x, y) \in D_j(\mathcal{U}_j,\mathcal{U}'_j)$ para algún j y $(x, y) \in D_j(\mathcal{W}_j, \mathcal{W}'_j)$ para algún j, entonces $(x, y) \in D_1$ y $(x, y) \in D_2$ por tanto $(x, y) \in D_1 \cap D_2 = D$.

- Sea $E \in \Omega_\mu$ tal que $E \subset D$, luego para un cubrimiento finito $\{C_1, \ldots, C_n\}$ de B por abiertos C_i de B existen $(\mathcal{U}_i,\mathcal{U}'_i) \in \mu_{C_i}$ con $i = 1, \ldots, n$ tal que

$E(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_1') \cup \ldots \cup E(\mathcal{U}_n,\mathcal{U}_n') \subset E$, como $E \subset D$ entonces $E(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_1') \cup \ldots \cup E(\mathcal{U}_n,\mathcal{U}_n') \subset D$, así $D \in \Omega_\mu$.

En seguida se probarán las tres condiciones que debe satisfacer el filtro Ω_μ para que este sea una estructura uniforme fibrada.

(C1) Sea $x \in X_b$ $(b \in B)$ y sea $D \in \Omega_\mu$, luego para un cubrimiento por abiertos finitos $\{W_1, \ldots, W_n\}$ de B existen $(\mathcal{U}_i,\mathcal{U}_i') \in \mu_{W_i}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $D(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_1') \cup \ldots \cup D(\mathcal{U}_n,\mathcal{U}_n') \subset D$.

Si $b \in W_i$ para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$ luego $x \in X_{W_i}$, como $(\mathcal{U}_i,\mathcal{U}_i') \in \mu_{W_i}$ entonces $x \in U \cap U'$, luego $x \in U$ y $x \in U'$, de aquí $(x, x) \in U \times U' \subset D(\mathcal{U}_i,\mathcal{U}_i')$ para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$, es decir

$$\Delta \subset D(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_1') \cup \ldots \cup D(\mathcal{U}_n,\mathcal{U}_n') \subset D.$$

(C2) Para cada $D \in \Omega_\mu$ y cada $b \in B$ entonces existe $W \in \{W_i\}$ $i \in \{1, \ldots, n\}$, $W \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathcal{U},\mathcal{U}')$ tal que $D(\mathcal{U},\mathcal{U}') \subset D$, ya que (X, μ) es un espacio por cubrimientos fibra a fibra, de la condición (4) existen $W' \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') \in \mu_{W'}$ tal que $W' \subset W$ y $(\mathrm{V}', \mathrm{V}) < (\mathcal{U},\mathcal{U}')$, se tiene que $D(\mathrm{V}, \mathrm{V}') \subset D(\mathcal{U}',\mathcal{U}) \subset D^{-1}$.

Como B es regular, $W' \in \mathcal{V}(b)$ es una vencindad abierta de b en $X_{W'}$, luego existe una vencindad abierta $W'' \in \mathcal{V}(b)$ tal que $b \in W'' \subset \overline{W''} \subset W'$, si hacemos $W_1 = W'$, $W_2 = B - \overline{W''}$, entonces el par $\{W_1, W_2\}$ es un cubrimiento abierto finito de B. Sea $(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_1') = (\mathrm{V}, \mathrm{V}') \in \mu_{W_1}$ y sea $(\mathcal{U}_2,\mathcal{U}_2') \in \mu_{W_2}$ pares conjugados de cubrimientos de X_{W_1} y X_{W_2} respectivamente.

Tomamos entonces $E = D(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_1') \cup D(\mathcal{U}_2,\mathcal{U}_2') \subset X \times X$, $E \in \Omega_\mu$ y $W'' \in \mathcal{V}(b)$ vencindad abierta de b, $E \cap X^2_{W''} \subset D(\mathrm{V}, \mathrm{V}') \cap X^2_{W'} \subset D(\mathcal{U}',\mathcal{U}) \cap X^2_W$ como $D(\mathcal{U}',\mathcal{U}) \cap X^2_W \subset D(\mathcal{U}',\mathcal{U}) \subset D^{-1}$ luego $E \cap X^2_{W''} \subset D^{-1}$.

(C3) Para cada $D \in \Omega_\mu$ y cada $b \in B$ entonces existe $W \in \{W_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, $W \in \mathcal{V}(b)$ una vencindad abierta de b y $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$ tal que $D(\mathcal{U},\mathcal{U}') \subset D$, por hipótesis (X, μ) es un espacio uniforme por cubrimientos fibra a fibra y de la condiciòn (3), existen $W' \in \mathcal{V}(b)$ vencindad abierta de b y $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') \in \mu_W$ tales que $(\mathrm{V}, \mathrm{V}')^* < (\mathcal{U}, \mathcal{U}')$.

Como B es regular, existe una vencindad abierta $W'' \in \mathcal{V}(b)$ tal que $b \in W'' \subset \overline{W''} \subset W'$, ahora hacemos $W_1 = W'$ y $W_2 = B - \overline{W''}$. Entonces $\{W_1, W_2\}$ es un cubrimiento abierto finito de B. Sea $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_1') = (\mathrm{V}, \mathrm{V}') \in \mu_{W_1}$ y sea $(\mathcal{U}_2, \mathcal{U}_2') \in \mu_{W_2}$ pares conjugados de cubrimientos de X_{W_1} y X_{W_2} respectivamente. Tomamos $E = D(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_1') \cup D(\mathcal{U}_2, \mathcal{U}_2') \subset X \times X$, luego $E \in \Omega_\mu$, se mostrará que para $W'' \in \mathcal{V}(b)$, $(X^2_{W''} \cap E) \circ (X^2_{W''} \cap E) \subset D$.

Sea $(x, y) \in (X^2_{W''} \cap E) \circ (X^2_{W''} \cap E)$ entonces existe $z \in X$ tal que $(x, z) \in X^2_{W''} \cap E$ y $(z, y) \in X^2_{W''} \cap E$, desde luego $x, y, z \in X_{W''} \subset X_{W'}$ y (x, z),$(z, y) \in D(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_1') = D(\mathrm{V}, \mathrm{V}')$, entonces $(x, z) \in V_\alpha \times V'_\alpha$, $(z, y) \in V_\beta \times V'_\beta$ para algunos $(V_\alpha, V'_\alpha) \in (\mathrm{V}, \mathrm{V}')$, $(V_\beta, V'_\beta) \in (\mathrm{V}, \mathrm{V}')$, como $z \in X_{W'}$ y $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') \in \mu_{W'}$ entonces existe $(V_\gamma, V'_\gamma) \in (\mathrm{V}, \mathrm{V}')$ tal que $z \in V_\gamma \cap V'_\gamma$ y también $z \in V'_\alpha \cap V_\beta$, recordando que $St`(V_\gamma, \mathrm{V}) = \bigcup\{V_\delta \mid V_\gamma \cap V'_\delta \neq \emptyset\}$ y $St`(V'_\gamma, \mathrm{V}') = \bigcup\{V'_\delta \mid V_\gamma \cap V_\delta \neq \emptyset\}$ tenemos también que $x \in V_\alpha \subset St`(V_\gamma, \mathrm{V})$ y $y \in V'_\beta \subset St`(V'_\gamma, \mathrm{V}')$ y como $(\mathrm{V}, \mathrm{V}')^* < (\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ para el par $(V_\gamma, V'_\gamma) \in (\mathrm{V}, \mathrm{V}')$, existe otro par $(U, U') \in (\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ tal que $St`(V_\gamma, \mathrm{V}) \cup St`(V'_\gamma, \mathrm{V}') \subset U \cap U'$, de aquí $x, y \in U \cap U'$, es decir $(x, y) \in U \times U' \subset D(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \subset D$ por tanto $(x, y) \in D$.

$\square$

2.3. Topología de un espacio uniforme fibra a fibra y topología de un espacio uniforme por cubrimientos fibra a fibra.

De la sección 1.6., conocemos que para (X, Ω) un espacio uniforme fibra a fibra y para cada $x \in X_b$ en la fibra de b, la colección $\Gamma_x(\Omega) = \{X_W \cap D[x] \mid W \in \mathcal{V}(b),\, D \in \Omega\}$ satisface las condiciones de vencindad en un punto ver James [6], entonces su topología es descrita como $\tau(\Omega) = \{N \subset X \mid \forall x \in N,\ N \in \Gamma_x(\Omega)\}$.
De otro lado para un espacio uniforme por cubrimientos fibra a fibra (X, μ) y para cada $x \in X$, la colección $N_x(\mu) = \{C \supset St(x, \mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \mid (\mathcal{U}, \mathcal{U}') \in \mu_W,\ W \in \mathcal{V}(b)\}$, cumple las condiciones de vencindad en un punto, asi la topología para el espacio (X, μ) se describe como $\tau(\mu) = \{G \subset X \mid \forall x \in G,\ G \in N_x(\mu)\}$.

Proposición 2.3. *Para un espacio uniforme por cubrimientos fibra a fibra (X, μ), $N_x(\mu)$ forma un sistema de vencindades de x en (X, μ).*

Demostración. Se demostrarán las condiciones de vencindad en un punto.

(V1) Sean $C \in N_x(\mu)$ y $Z \supset C$ entonces $Z \supset St(x, \mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}')$ para algún $(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \in \mu_W$, $W \in \mathcal{V}(b)$, luego $Z \in N_x(\mu)$.

(V2) Sean C_1, $C_2 \in N_x(\mu)$, entonces

$$C_1 \supset St(x, \mathcal{U}_2 \curlywedge \mathcal{U}_2') \text{ para algún } (\mathcal{U}_2, \mathcal{U}_2') \in \mu_W, W \in \mathcal{V}(b), \text{ y}$$
$$C_2 \supset St(x, \mathcal{U}_1 \curlywedge \mathcal{U}_1') \text{ para algún } (\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_1') \in \mu_W, W \in \mathcal{V}(b).$$

Por hipótesis de (X, μ), existe $(\mathcal{U}_3, \mathcal{U}_3') \in \mu_W$ tal que

$$(\mathcal{U}_3, \mathcal{U}_3') < (\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_1') \text{ y}$$
$$(\mathcal{U}_3, \mathcal{U}_3') < (\mathcal{U}_2, \mathcal{U}_2').$$

Es decir $U_3 \subset U_1$, $U_3' \subset U_1'$ y $U_3 \subset U_2$, $U_3' \subset U_2'$ así $x \in U_3 \cap U_3' \subset U_1 \cap U_1'$ y $x \in U_3 \cap U_3' \subset U_2 \cap U_2'$. En consecuencia se tiene que

$$St(x,\mathcal{U}_3 \curlywedge \mathcal{U}_3') \subset St(x,\mathcal{U}_1 \curlywedge \mathcal{U}_1') \subset C_1 \text{ y.}$$

$$St(x,\mathcal{U}_3 \curlywedge \mathcal{U}_3') \subset St(x,\mathcal{U}_2 \curlywedge \mathcal{U}_2') \subset C_2.$$

Así $St(x,\mathcal{U}_3 \curlywedge \mathcal{U}_3') \subset C_1 \cap C_2$ para algún $(\mathcal{U}_3,\mathcal{U}_3') \in \mu_W$ y alguna $W \in \mathcal{V}(b)$, luego $C_1 \cap C_2 \in N_x(\mu)$.

(V3) Sea $C \in N_x(\mu)$, es claro que $x \in C$.

(V4) Es obvio que $St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \in N_x(\mu)$ para algún $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$ y alguna $W \in \mathcal{V}(b)$, por hipótesis de (X,μ) de la Definición 2.6 existen $W' \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathrm{V},\mathrm{V}') \in \mu_{W'}$ tales que $W' \subset W$ y $(\mathrm{V},\mathrm{V}')^* < (\mathcal{U},\mathcal{U}')$. Nosotros probaremos que existe $St(x,\mathrm{V} \curlywedge \mathrm{V}') \in N_x(\mu)$ tal que si $y \in St(x,\mathrm{V} \curlywedge \mathrm{V}')$ entonces $St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \in N_y(\mu)$.
Sea $z \in St(y,\mathrm{V} \curlywedge \mathrm{V}')$ un punto arbitrario, entonces existe $(V_1,V_1') \in (\mathrm{V},\mathrm{V}')$ tal que $z,y \in V_1 \cap V_1'$. Por hipótesis $y \in St(x,\mathrm{V} \curlywedge \mathrm{V}')$ implica que existe $(V,V') \in (\mathrm{V},\mathrm{V}')$ tal que $x,y \in V \cap V'$, como $(\mathrm{V},\mathrm{V}')^* < (\mathcal{U},\mathcal{U}')$ entonces para $(V,V') \in (\mathrm{V},\mathrm{V}')$ existe $(U,U') \in (\mathcal{U},\mathcal{U}')$ tal que $St`(V,\mathrm{V}) \cup St`(V',\mathrm{V}') \subset U \cap U'$. Además $y \in V$ y $y \in V_1'$ entonces $y \in V \cap V_1'$ y también $y \in V'$ y $y \in V_1$ entonces $y \in V' \cap V_1$, es decir $V_1' \subset St`(V',\mathrm{V}')$ y $V_1 \subset St`(V,\mathrm{V})$. Luego se tiene que $z \in V_1' \cup V_1 \subset St`(V',\mathrm{V}') \cup St`(V,\mathrm{V}) \subset U \cap U'$ y por lo tanto $z \in St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}')$.
Así obtenemos que $St(y,V \curlywedge \mathrm{V}') \subset St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}')$ y $St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \in N_y(\mu)$.

□

2.4. Equivalencias topológicas.

En esta sección se establece la finalidad de este capítulo 2 y por ende un objetivo esencial de este trabajo, que es mostrar la equivalencia entre la topología de un espacio uniforme fibra a fibra $\tau(\Omega)$ y la topología $\tau(\mu(\Omega))$ generada por $\mu(\Omega)$ que es la uniformidad por cubrimientos fibra a fibra definida en la Proposición 2.1. Bajo la condición de regularidad sobre el espacio base B se muestra tambien la equivalencia entre la topología de un espacio uniforme por cubrimientos fibra a fibra y la topología generada por la estrucura uniforme fibrada Ω_μ.

Proposición 2.4. *(1) Para un espacio uniforme fibra a fibra (X, Ω), se tiene que $\tau(\Omega) = \tau(\mu(\Omega))$.*

(2) Si B es un espacio topológico regular. Para un espacio uniforme definido por cubrimientos fibra a fibra (X, μ) se cumple que $\tau(\mu) = \tau(\Omega_\mu)$.

Demostración.

(1) $\tau(\Omega) \subset \tau(\mu(\Omega))$.

Sea $N \in \tau(\Omega)$, entonces dado $x \in N$, $N \in \Gamma_x(\Omega)$ es decir $N \supset X_W \cap D[x]$ para algún $D \in \Omega$ y alguna $W \in \mathcal{V}(b)$. Existen $W' \subset W$, $W' \in \mathcal{V}(b)$ y $E \in \Omega$ tal que $(X^2_{W'} \cap E) \circ (X^2_{W'} \cap E) \subset D$. Consideramos los cubrimientos de $X_{W'}$

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(E, W') =& \{E^{-1}[x] \cap X_{W'} \mid x \in X_{W'}\},\\ \mathcal{U}'(E, W') =& \{E[x] \cap X_{W'} \mid x \in X_{W'}\}\end{aligned}$$

y el par conjugado de cubrimientos $(\mathcal{U}(E, W'), \mathcal{U}'(E, W')) \in \mu(\Omega)_{W'}$ de $X_{W'}$ tal que $St(x, \mathcal{U}(E, W') \curlywedge \mathcal{U}'(E, W')) \in N_x(\mu(\Omega))$, se probará que $X_W \cap D[x] \supset St(x, \mathcal{U}(E, W') \curlywedge \mathcal{U}'(E, W'))$.

Sea $y \in St(x, \mathcal{U}(E, W') \curlywedge \mathcal{U}'(E, W'))$, luego existen $z \in X_{W'}$, $(U, U) \in (\mathcal{U}(E, W'), \mathcal{U}'(E, W'))$ tales que $y \in U \cap U'$ con $U = E^{-1}[z] \cap X_{W'}$, $U' = E[z] \cap X_{W'}$ y $x \in U \cap U'$. Luego se tiene que $x, y, z \in X_{W'}$, $(x, z) \in E$ y $(z, y) \in E$ así $(x, y) \in (X^2_{W'} \cap E) \circ (X^2_{W'} \cap E)$. Por hipótesis $(X^2_{W'} \cap E) \circ (X^2_{W'} \cap E) \subset D$, luego $(x, y) \in D$, $y \in D[x]$ y como $W' \subset W$ entonces $X_{W'} \subset X_W$, así $y \in X_W$. Luego $y \in X_W \cap D[x] \subset N$, por lo tanto $N \in \tau(\mu(\Omega))$.

$\tau(\mu(\Omega)) \subset \tau(\Omega)$.

Sea $N \in \tau(\mu(\Omega))$, para cada $x \in N$, $N \in N_x(\mu)$, es decir $N \supset St(x, \mathcal{U}(D,W) \curlywedge \mathcal{U}'(D,W))$ para $(\mathcal{U}(D,W), \mathcal{U}'(D,W)) \in \mu(\Omega)_W$, $D \in \Omega$, $W \in \mathcal{V}(b)$, de las condiciones (C2) y (C3) enunciadas en la definición 1.15 de una estructura uniforme fibrada, existen $W' \subset W$, $W' \in \mathcal{V}(b)$ y un entorno $E \in \Omega$ tales que $X^2_{W'} \cap E \subset D^{-1}$ y $(X^2_{W'} \cap E)^2 \subset D$. Luego $X_{W'} \cap E[x] \in \Gamma_x(\Omega)$ para $x \in X_{W'}$, se probará que $X_{W'} \cap E[x] \subset N$.

Sea $y \in X_{W'} \cap E[x]$ luego $y \in X_{W'}$, $(x,y) \in E$, así $(x,y) \in X^2_{W'} \cap E \subset D^{-1}$ y $(x,y) \in (X^2_{W'} \cap E)^2 \subset D$, es decir $(x,y) \in D^{-1} \cap D$, $(y,x) \in D$, $x \in D[y]$ y $(y,x) \in D^{-1}$, $x \in D^{-1}[y]$ luego $x \in D^{-1}[y] \cap D[y] \cap X_{W'}$. En particular $y \in D^{-1}[y] \cap D[y] \cap X_{W'} \subset St(x, \mathcal{U}(D,W') \curlywedge \mathcal{U}'(D,W'))$ y como $W' \subset W$ entonces $X_{W'} \subset X_W$, así $St(x, \mathcal{U}(D,W') \curlywedge \mathcal{U}'(D,W')) \subset St(x, \mathcal{U}(D,W) \curlywedge \mathcal{U}'(D,W))$. Por hipótesis $St(x, \mathcal{U}(D,W) \curlywedge \mathcal{U}'(D,W)) \subset N$, luego $y \in N$.

(2) $\tau(\mu) \subset \tau(\Omega_\mu)$

Sea $N \in \tau(\mu)$, $N \supset St(x, \mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}')$ para algún $(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \in \mu_W$ y alguna $W \in \mathcal{V}(b)$, de la condición (3) de la Definición 2.6., existen una vencindad abierta W' de b y $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') \in \mu_{W'}$ tales que $W' \subset W$ y $(\mathrm{V}, \mathrm{V}')$ es un refinamiento estrella de $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$.

Como B es regular, existe una vencindad abierta W'' de b tal que $b \in W'' \subset \overline{W''} \subset W'$. Luego consideramos $W_1 = W'$ y $W_2 = B - \overline{W''}$, el par $\{W_1, W_2\}$ es un cubrimiento abierto finito de B tal que existen $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}'_1) = (\mathrm{V}, \mathrm{V}') \in \mu_{W_1}$, $(\mathcal{U}_2, \mathcal{U}'_2) = (\mathcal{U}, \mathcal{U}') |_{X_{W_2}} \in \mu_{W_2}$ que satisfacen $D(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}'_1) \cup D(\mathcal{U}_2, \mathcal{U}'_2) \subset E$, donde $E = D(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}'_1) \cup D(\mathcal{U}_2, \mathcal{U}'_2)$. Luego $E \in \Omega_\mu$ y $X_{W''} \cap E[x] \in \Gamma_x(\Omega_\mu)$.

Probaremos que $N \supset X_{W''} \cap E[x]$, para ello es suficiente mostrar que $St(x, \mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \supset X_{W''} \cap E[x]$.

Sea $y \in X_{W''} \cap E[x]$, entonces la pareja $(x,y) \in X^2_{W''} \cap E$. Existe $(V_\alpha, V'_\alpha) \in (\mathcal{U}_1, \mathcal{U}'_1) = (\mathrm{V}, \mathrm{V}')$ tal que $(x,y) \in X^2_{W''} \cap (V_\alpha \times V'_\alpha)$, como $(\mathrm{V}, \mathrm{V}')$ es un refinamiento estrella de $(\mathcal{U},\mathcal{U}')$, entonces para $(V_\alpha, V'_\alpha) \in (\mathrm{V}, \mathrm{V}')$ existe $(U, U') \in (\mathcal{U},\mathcal{U}')$, tal que $St`(V_\alpha, \mathrm{V}) \cup St`(V'_\alpha, \mathrm{V}') \subset U \cap U'$. Sabemos que $V_\alpha \cup V'_\alpha \subset St`(V_\alpha, \mathrm{V}) \cup St`(V'_\alpha, \mathrm{V}')$ luego $V_\alpha \cup V'_\alpha \subset U \cap U'$, así $x, y \in U \cap U'$, $y \in U \cap U' \subset St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}')$, entonces $N \in \tau(\Omega_\mu)$.

$\tau(\Omega_\mu) \subset \tau(\mu)$.

Sea $N \in \tau(\Omega_\mu)$, existen $W \in \mathcal{V}(b)$, $D \in \Omega_\mu$ tales que $N \supset X_W \cap D[x]$. Probaremos que $X_W \cap D[x] \supset St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}')$ [2], para algún $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu(\Omega_\mu)_{W'}$ y alguna $W' \in \mathcal{V}(b)$.

Como $D \in \Omega_\mu$, $D(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}'_1) \cup D(\mathcal{U}_2,\mathcal{U}'_2) \cup \ldots \cup D(\mathcal{U}_n,\mathcal{U}'_n) \subset D$ para $\{W_1, W_2, \ldots W_n\}$ un cubrimiento abierto finito de B, con $(\mathcal{U}_i,\mathcal{U}'_i) \in \mu_{W_i}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Existe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $b = p(x) \in W_j \subset B$, de las condiciones (C2) y (C3) de la definición de una estructura uniforme fibrada, existen $W' \in \mathcal{V}(b)$ y $E \in \Omega_\mu$ tales que $W' \subset W$, $X^2_{W'} \cap E \subset D^{-1}$ y $(X^2_{W'} \cap E)^2 \subset D$. Así se tiene el par conjugado de cubrimientos $(\mathcal{U},\mathcal{U}') = (\mathcal{U}(E, W'),\mathcal{U}'(E, W')) \in \mu(\Omega_\mu)_{W'}$ y también se tiene que $St(x,\mathcal{U}(E, W') \curlywedge \mathcal{U}'(E, W')) \in N_x(\mu(\Omega_\mu))$. Ahora si probará la contenencia [2]. Sea $y \in St(x,\mathcal{U}(E, W') \curlywedge \mathcal{U}'(E, W'))$, existe $z \in X_{W'}$ tal que $(E^{-1}[z] \cap X_{W'}, E[z] \cap X_{W'}) \in (\mathcal{U}(E, W'),\mathcal{U}'(E, W'))$ y $y \in (E^{-1}[z] \cap X_{W'}) \cap (E[z] \cap X_{W'})$. Luego $x, y, z \in X_{W'}$, $(z, y) \in E$ y $(x, z) \in E$ entonces $(x, y) \in (X^2_{W'} \cap E) \circ (X^2_{W'} \cap E) \subset D$, $(x, y) \in D$, $y \in D[x]$. Como $W' \subset W$, $X_{W'} \subset X_W$, entonces $y \in X_W$, así $y \in X_W \cap D[x]$, por tanto $N \in \tau(\mu)$.

$\square$

Capítulo 3

Topología g-uniforme fibrada de un espacio g-uniforme fibrado $(X, \{\mu_W\})$ y su operador interior Int_{μ_B}.

En este capítulo se presentan los conceptos de semiuniformidad fibrada y uniformidad generalizad fibrada, estos conceptos son las versiones fibradas de espacios semiuniformes y espacios uniformes generalizados, dados en el texto de Morita-Nagata [10]. Se muestra que una uniformidad definida por cubrimientos fibra a fibra es una semiuniformidad fibrada y que toda semiuniformidad fibrada es una g-uniformidad fibrada, es decir que una uniformidad definida por cubrimientos fibra a fibra es una uniformidad generalizada fibrada, este resultado es importante porque nos permite estudiar el completado de un espacio uniforme definido por cubrimientos fibra a fibra en términos de una uniformidad generalizada fibrada.

También se muestran y estudian algunas consecuencias de los espacios g-uniformes fibrados, como la existencia de una topologia g-uniforme fibra a fibra y el interior de un conjunto con esta topología existente.

3.1. Semiuniformidad y Uniformidad generalizada fibradas.

Definición 3.1 (Refinamiento estrella local fibrado)**.** Dados $b \in B$, $W, W' \in \mathcal{V}(b)$ con $W' \subset W$, $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$ y $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') \in \mu_{W'}$, decimos que $(\mathrm{V}, \mathrm{V}')$ es un refinamiento estrella local fibrado de $(\mathcal{U},\mathcal{U}')$ en b, si para cada $(V, V') \in (\mathrm{V}, \mathrm{V}')$ existen $(\mathcal{W}, \mathcal{W}') \in \mu_{W'}$ y $(U, U') \in (\mathcal{U},\mathcal{U}')$, tales que $St`(V, \mathcal{W}) \cup St`(V', \mathcal{W}') \subset U \cap U'$.

Definición 3.2 (Semiuniformidad fibrada)**.** Sea $\mu = \{\mu_W\}$ un sistema de pares conjugados de cubrimientos de $\{X_W\}$ entonces $\mu = \{\mu_W\}$ es una semiuniformidad fibrada si ésta satisface condiciones (1),(2),(4) y (5) de la Definición 2.6 y además cumple lo siguiente:
(FSU) Dados $b \in B$, $W \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$, existen $W' \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') \in \mu_{W'}$ tales que $W' \subset W$ y $(\mathrm{V}, \mathrm{V}')$ es un refinamiento estrella local fibrado de $(\mathcal{U},\mathcal{U}')$ en b.
El par (X, μ) o $(X, \{\mu_W\})$ es un espacio semiuniforme fibrado.

Definición 3.3. Sea $\mu = \{\mu_W\}$ un sistema de pares conjugados de cubrimientos de $\{X_W\}$ y sean $W \in \tau_B$, $Y \subset X$. Definimos

$$Int_{\mu_W} Y = \{x \in X_W \mid (\exists W' \in \mathcal{V}(p(x)))(\exists (\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_{W'}) \text{ con } (W' \subset W), (St(x, \mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \subset Y)\}.$$

Definición 3.4. Para una familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X, definimos

$$Int_{\mu_W} \mathcal{U} = \{Int_{\mu_W} U \mid U \in \mathcal{U}\}.$$

Definición 3.5 (Uniformidad generalizada fibrada o g-uniformidad fibrada)**.** Sea $\mu = \{\mu_W\}$ un sistema de pares conjugados de cubrimientos de $\{X_W\}$. Entonces $\mu = \{\mu_W\}$ es una uniformidad generalizada fibrada (g-uniformidad fibrada) si satisface las condiciones (1),(2),(4) y (5) de la Definición 2.6 y además cumple:

(FGU) Dados $b \in B$, $W \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$, existen $W' \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathrm{V},\mathrm{V}') \in \mu_{W'}$ tales que $W' \subset W$ y $(Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U}, Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U}')$ es un par conjugado de cubrimientos de $X_{W'}$ y $(\mathrm{V},\mathrm{V}') < (Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U}, Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U}')$.

El par (X,μ) o $(X,\{\mu_W\})$ se llama un espacio uniforme generalizado fibrado o espacio g-uniforme fibrado.

Observación 7. $(Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U}, Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U}') \in \mu_{W'}$, porque $(\mathrm{V},\mathrm{V}') < (Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U}, Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U}')$, $(\mathrm{V},\mathrm{V}') \in \mu_{W'}$ y de la condición (1) de la Definición de uniformidad por cubrimientos fibra a fibra.

Observación 8. $(Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U}, Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U}') < (\mathcal{U},\mathcal{U}')$.

En efecto, sea $(Int_{\mu_{W'}}U, Int_{\mu_{W'}}U') \in (Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U}, Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U}')$.

$$Int_{\mu_{W'}}U = \{x \in X_{W'} \mid (\exists W'' \in \mathcal{V}(p(x)))(W'' \subset W'), (\exists(\mathcal{W},\mathcal{W}') \in \mu_{W''})(St(x, \mathcal{W} \curlywedge \mathcal{W}') \subset U)\},$$

$$Int_{\mu_{W'}}U' = \{x \in X_{W'} \mid (\exists W^2 \in \mathcal{V}(p(x)))(W^2 \subset W'), (\exists(\mathcal{W}_1,\mathcal{W}_1') \in \mu_{W^2})(St(x, \mathcal{W}_1 \curlywedge \mathcal{W}_1') \subset U')\}.$$

Luego existe $(U,U') \in (\mathcal{U},\mathcal{U}')$ tal que $Int_{\mu_{W'}}U \subset U$ y $Int_{\mu_{W'}}U' \subset U'$.

Proposición 3.1. *a) Una Uniformidad por cubrimientos fibra a fibra es una Semiuniformidad fibrada.*

b) Una Semiuniformidad fibrada es una g-uniformidad fibrada.

Demostración. a) Una uniformidad por cubrimientos μ fibra a fibra satisface las condiciones (1)-(5) de la Definición 2.6. Sólo resta probar la condición (FSU).

Sean $b \in B$, $W \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$. Por la condición (3), existen $W' \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathrm{V},\mathrm{V}') \in \mu_{W'}$ tales que $W' \subset W$ y $(\mathrm{V},\mathrm{V}')^* < (\mathcal{U},\mathcal{U}')$, es decir para cada $(V,V') \in (\mathrm{V},\mathrm{V}')$ existen $(U,U') \in (\mathcal{U},\mathcal{U}')$ y $(\mathrm{V},\mathrm{V}') \in \mu_{W'}$ tales que $St`(V,\mathrm{V}) \cup St`(V',\mathrm{V}') \subset U \cap U'$.

b) Es suficiente mostrar la condición (FGU).

Sean $b \in B$, $W \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$. Por la condición (FSU), existen $W' \in \mathcal{V}(b)$ y

$(\mathrm{V}, \mathrm{V}') \in \mu_{W'}$ tales que $W' \subset W$ y $(\mathrm{V}, \mathrm{V}')$ es un refinamiento estrella local de $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ en b, es decir para cada $(V, V') \in (\mathrm{V}, \mathrm{V}')$, existen $(\mathcal{W}, \mathcal{W}') \in \mu_{W'}$ y $(U, U') \in (\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ tales que $St`(V, \mathcal{W}) \cup St`(V', \mathcal{W}') \subset U \cap U'$.

$St(V, \mathcal{W} \curlywedge \mathcal{W}') \subset St`(V, \mathcal{W}) \cup St`(V', \mathcal{W}') \subset U \cap U'$, entonces $St(x, \mathcal{W} \curlywedge \mathcal{W}') \subset U \cap U' \subset U$ para $x \in V$, luego $V \subset Int_{\mu_{W'}} U$. De manera similar $St(V', \mathcal{W} \curlywedge \mathcal{W}') \subset St`(V, \mathcal{W}) \cup St`(V', \mathcal{W}') \subset U \cap U'$ para $x \in V'$ $St(x, \mathcal{W} \curlywedge \mathcal{W}') \subset U \cap U' \subset U'$, luego $V' \subset Int_{\mu_{W'}} U'$.

Así tenemos $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') < (Int_{\mu_{W'}} \mathcal{U}, Int_{\mu_{W'}} \mathcal{U}')$.

□

3.2. Base para una g-uniformidad fibra a fibra $\{\mu_W\}$ y base de g-uniformidad fibra a fibra.

Los conceptos de base para una g-uniformidad fibra a fibra $\{\mu_W\}$ y de base de g-uniformidad fibra a fibra son distintos aunque ambos están relacionados en la Proposición 3.2 y serán fundamentales en el estudio de la completación fibra a fibra de espacios g-uniformes fibrados que será vista en el siguiente capítulo.

Definición 3.6 (Base para una g-uniformidad fibrada o fibra a fibra $\{\mu_W\}$)**.** Sea $\{\mu_W\}$ una g-uniformidad fibra a fibra y sea $\{\mu_W^0\}$ un sistema de pares conjugados de cubrimientos de $\{X_W\}$ tal que $\mu_W^0 \subset \mu_W$ para todo $W \in \tau_B$ y $\mu_{W'}^0 \supset \mu_W^0 |_{X_{W'}}$ para cada $W' \subset W$. Es decir μ_W^0 satisface la condición (5) de la Definición 2.6.

Entonces $\{\mu_W^0\}$ es una base para $\{\mu_W\}$ si para cada W y cada $(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \in \mu_W$ existe $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') \in \mu_W^0$ tal que $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') < (\mathcal{U}, \mathcal{U}')$.

Definición 3.7 (Base de g-uniformidad fibrada)**.** Sea $\{\mu_W^0\}$ un sistema de pares conjugados de cubrimientos de $\{X_W\}$. Entonces $\{\mu_W^0\}$ es una base de g-uniformidad fibrada si $\{\mu_W^0\}$ satisface las condiciones $(2), (4), (5)$ y (FGU) de la Definición 3.5.

Proposición 3.2. *a) Una base para una g-uniformidad fibra a fibra $\{\mu_W\}$ es una base de g-uniformidad fibrada.*

b) Dada $\{\mu_W^0\}$ una base de g-uniformidad fibrada y dados $W \in \tau_B$ y μ_W una familia de pares conjugados de cubrimientos de X_W, tales que para cada $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$, existe $(\mathrm{V},\mathrm{V}') \in \mu_W^0$ que cumple $(\mathrm{V},\mathrm{V}') < (\mathcal{U},\mathcal{U}')$. Entonces $\{\mu_W\}$ es una g-uniformidad fibrada tal que $\{\mu_W^0\}$ es una base para $\{\mu_W\}$.

Demostración.

a) Sea $\{\mu_W^0\}$ una base para una g-uniformidad fibra a fibra $\{\mu_W\}$. Entonces para cada $W \in \tau_B$ y cada $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$, existe $(\mathrm{V},\mathrm{V}') \in \mu_W^0$, tal que $(\mathrm{V},\mathrm{V}') < (\mathcal{U},\mathcal{U}')$. $\{\mu_W^0\}$ satisface la condición (5) por definición.

Resta probar que $\{\mu_W^0\}$ satisface las condiciones (2),(4) y (FGU).

(2) Sean $(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_1')$, $(\mathcal{U}_2,\mathcal{U}_2') \in \mu_W^0 \subset \mu_W$. Existen $(\mathcal{W}_1,\mathcal{W}_1')$, $(\mathcal{W}_2,\mathcal{W}_2') \in \mu_W^0$ tales que $(\mathcal{W}_1,\mathcal{W}_1') < (\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_1')$ y $(\mathcal{W}_2,\mathcal{W}_2') < (\mathcal{U}_2,\mathcal{U}_2')$. Como $\{\mu_W\}$ es una g-uniformidad, existe $(\mathcal{U}_3,\mathcal{U}_3') \in \mu_W$ tal que $(\mathcal{U}_3,\mathcal{U}_3') < (\mathcal{U}_i,\mathcal{U}_i')$ $i = 1,2$; también existe $(\mathcal{W}_3,\mathcal{W}_3') \in \mu_W^0$ tal que $(\mathcal{W}_3,\mathcal{W}_3') < (\mathcal{U}_3,\mathcal{U}_3')$, luego $(\mathcal{W}_3,\mathcal{W}_3') < (\mathcal{U}_i,\mathcal{U}_i')$ para $i = 1,2$.

(4) Sean $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W^0$ y $b \in W$. Como $\mu_W^0 \subset \mu_W$, entonces $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$, luego existen $W' \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathrm{V},\mathrm{V}') \in \mu_{W'}$ tales que $W' \subset W$ y $(\mathrm{V}',\mathrm{V}) < (\mathcal{U},\mathcal{U}')$. Como $(\mathrm{V},\mathrm{V}') \in \mu_{W'}$ para $W' \subset W$, por hipótesis existe $(\mathcal{W},\mathcal{W}') \in \mu_W^0$ tal que $(\mathcal{W},\mathcal{W}') < (\mathrm{V},\mathrm{V}')$, es decir $(\mathcal{W}',\mathcal{W}) < (\mathrm{V}',\mathrm{V})$, luego $(\mathcal{W}',\mathcal{W}) < (\mathcal{U},\mathcal{U}')$.

(FGU) Sean $b \in B$, $W \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W^0 \subset \mu_W$. Existen $W' \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathrm{V},\mathrm{V}') \in \mu_{W'}$ tales que $W' \subset W$ y $(\mathrm{V},\mathrm{V}') < (Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U}, Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U}')$. Como $(\mathrm{V},\mathrm{V}') \in \mu_{W'}$, $W' \in \mathcal{V}(b)$, existe $(\mathcal{W},\mathcal{W}') \in \mu_{W'}^0$, tal que $(\mathcal{W},\mathcal{W}') < (\mathrm{V},\mathrm{V}')$, luego $(\mathcal{W},\mathcal{W}') < (Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U}, Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U}')$.

b) Para que $\{\mu_W\}$ sea una g-uniformidad fibra a fibra esta tiene que cumplir las condiciones $(1),(2),(4),(5)$ y (FGU).

(1) Se cumple por hipótesis.

(2) Sean $(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_1')$, $(\mathcal{U}_2,\mathcal{U}_2') \in \mu_W$. Existen $(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_1')$, $(\mathrm{V}_2, \mathrm{V}_2') \in \mu_W^0$ tales que $(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_1') < (\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_1')$ y $(\mathrm{V}_2, \mathrm{V}_2') < (\mathcal{U}_2,\mathcal{U}_2')$. Como $\{\mu_W^0\}$ es una base de g-uniformidad fibra a fibra, entonces existe $(\mathrm{V}_3, \mathrm{V}_3') \in \mu_W^0 \subset \mu_W$ tal que $(\mathrm{V}_3, \mathrm{V}_3') < (\mathrm{V}_i, \mathrm{V}_i')$ para $i = 1, 2$, luego $(\mathrm{V}_3, \mathrm{V}_3') < (\mathcal{U}_i,\mathcal{U}_i')$, $i = 1, 2$.

(4) Sean $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$ y $b \in W$. Existe $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') \in \mu_W^0$ tal que $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') < (\mathcal{U},\mathcal{U}')$. Existe $(\mathcal{W}, \mathcal{W}') \in \mu_W^0$ tal que $W' \subset W$ y $(\mathcal{W}', \mathcal{W}) < (\mathcal{U},\mathcal{U}')$.

(5) Sea $W' \subset W$ entonces $\mu_W^0 \mid_{X_{W'}} \subset \mu_{W'}^0$, $\mu_{W'}^0 \subset \mu_{W'}$ $\mu_W \mid_{X_{W'}} \subset \mu_W^0 \mid_{X_{W'}}$, entonces $\mu_W \mid_{X_{W'}} \subset \mu_{W'}$.

(FGU) Dados $b \in B$, $W \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$, existe $(\mathcal{W}, \mathcal{W}') \in \mu_W^0$ tal que $(\mathcal{W}, \mathcal{W}') < (\mathcal{U},\mathcal{U}')$. Como $\{\mu_W^0\}$ es una base de g-uniformidad fibra a fibra, existen $W' \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') \in \mu_{W'}^0$ tales que $W' \subset W$ y $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') < (Int_{\mu_{W'}}\mathcal{W}, Int_{\mu_{W'}}\mathcal{W}')$. Como $(\mathcal{W}, \mathcal{W}') < (\mathcal{U},\mathcal{U}')$, entonces $(Int_{\mu_{W'}}\mathcal{W}, Int_{\mu_{W'}}\mathcal{W}') < (Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U}, Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U}')$, así $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') < (Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U}, Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U}')$.

$\square$

3.3. Topología g-uniforme fibra a fibra y el operador Int_{μ_B}.

En esta sección se observará que un sistema de vencindades $\mathcal{V}(x)$ sobre un espacio g-uniforme fibra a fibra (X, μ), lo dota de una topología g-uniforme fibra a fibra la que denotaremos $\tau(\{\mu_W\})$. Además sobre este nuevo espacio topológico el interior de un conjunto viene dado por el operador Int_{μ_B}.

Proposición 3.3. *Para cada $x \in X$ con (X, μ) espacio g-uniforme fibrado , sea $\mathcal{V}(x) = \{O \subset X \mid (\exists W \in \mathcal{V}(p(x)))$, $(\exists(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W)$ tal que $St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \subset O\}$. Entonces $\{\mathcal{V}(x)\}$ es un sistema de vencindades de $x \in X$ y su topología viene dada por*

$\tau(\{\mu_W\}) = \{O \subset X \mid (\forall x \in O), (O \in \mathcal{V}(x))\}$. *Además* Int_{μ_B} *es el operador interior de* $\tau(\{\mu_W\})$.

Demostración. Para cada $x \in X$, $\mathcal{V}(x)$ debe satisfacer las condiciones de vencindad en un punto.
Sea $\mathcal{B}(x) = \{St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \mid (\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W, W \in \mathcal{V}(p(x))\}$, vemos que $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ para $x \in X$ y $\mathcal{B}(x)$ forma un sistema fundamental o básico de vencindades para $(X, \tau(\{\mu_W\})$.

(V1) Sea $O \in \mathcal{V}(x)$ tal que $O \subset S$. Entonces existen $W \in \mathcal{V}(p(x))$, $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$ tales que $St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \subset O$, luego $St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \subset S$, así $S \in \mathcal{V}(x)$.

(V2) Sean $O_1, O_2 \in \mathcal{V}(x)$. Existen $W_1 \in \mathcal{V}(p(x))$, $W_2 \in \mathcal{V}(p(x))$, $(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_1') \in \mu_{W_1}$, $(\mathcal{U}_2,\mathcal{U}_2') \in \mu_{W_2}$ tales que $St(x,\mathcal{U}_1 \curlywedge \mathcal{U}_1') \subset O_1$ y $St(x,\mathcal{U}_2 \curlywedge \mathcal{U}_2') \subset O_2$. Entonces existen $W = W_1 \cap W_2 \in \mathcal{V}(x)$, $(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_1') \mid_{X_W} \in \mu_W$, $(\mathcal{U}_2,\mathcal{U}_2') \mid_{X_W} \in \mu_W$. Ya que $\{\mu_W\}$ es una g-uniformidad fibrada existe $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$ tal que $(\mathcal{U},\mathcal{U}') < (\mathcal{U}_i,\mathcal{U}_i') \mid_{X_W}$, para $i = 1, 2$. De aquí $(\mathcal{U},\mathcal{U}') < (\mathcal{U}_i,\mathcal{U}_i')$, $i = 1, 2$, luego $St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \subset St(x,\mathcal{U}_i \curlywedge \mathcal{U}_i') \subset O_1 \cap O_2$, así $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{V}(x)$.

(V3) Sea $O \in \mathcal{V}(x)$. Existen $W \in \mathcal{V}(p(x))$ y $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$ tales que $St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \subset O$, luego $x \in O$.

(V4) Sea $O \in \mathcal{V}(x)$. Existen $W \in \mathcal{V}(p(x))$ y $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$ tales que $St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \subset O$. Por la condición (FGU), existen $W' \in \mathcal{V}(p(x))$ y $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') \in \mu_{W'}$ tales que $W' \subset W$ y $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') < (Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U}, Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U}')$ así $(Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U}, Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U}') \in \mu_{W'}$. Por la condición (1) de uniformidad generalizada fibrada, existe $St(x, Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U} \curlywedge Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U}') \in \mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ tal que para cada $y \in St(x, Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U} \curlywedge Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U}')$, existe $(U, U') \in (\mathcal{U},\mathcal{U}')$ tal que $x, y \in Int_{\mu_{W'}}U \cap Int_{\mu_{W'}}U'$, luego existen $W'' \in \mathcal{V}(x)$, $(\mathcal{W}, \mathcal{W}') \in \mu_{W''}$ tales que $W'' \subset W'$ y $St(y, \mathcal{W} \curlywedge \mathcal{W}') \subset U \cap U'$. Sabemos que $U \cap U' \subset St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \subset O$, luego $St(y, \mathcal{W} \curlywedge \mathcal{W}') \subset O$ y por lo tanto $O \in \mathcal{V}(y)$.

$\square$

Proposición 3.4. *Para* A, A_1, $A_2 \subset X$ *y* $\{\mu_W\}$ *una g-uniformidad fibra a fibra se cumple:*

1. $Int_{\mu_B} A \subset A$.

2. $Int_{\mu_B} X = X$.

3. $Int_{\mu_B}(A_1 \cap A_2) = Int_{\mu_B} A_1 \cap Int_{\mu_B} A_2$.

4. $Int_{\mu_B}(Int_{\mu_B} A) = Int_{\mu_B} A$.

Demostración.

1. Sea $x \in Int_{\mu_B} A$. Existen $W \in \mathcal{V}(p(x))$ y $(\mathcal{U},\mathcal{U}')$ tales que $W \subset B$ y $St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \subset A$. De aquí $x \in A$.

2. $(\subseteq)$ Si $A = X$, del item anterior $Int_{\mu_B} X \subset X$.
   $(\supseteq)$ Sea $x \in X$. Para $W \in \mathcal{V}(p(x))$ y $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$ $x \in U \cap U'$, se tiene que $St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \subset X$, así $x \in Int_{\mu_B} X$.

3. $(\subseteq)$
   Sea $x \in Int_{\mu_B}(A_1 \cap A_2)$. Existen $W \in \mathcal{V}(p(x))$ y $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$ tales que $W \subset B$ y $St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \subset A_1 \cap A_2$. Como $A_1 \cap A_2 \subset A_1$ y $A_1 \cap A_2 \subset A_2$, entonces $St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \subset A_1$ y $St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \subset A_2$, entonces $x \in Int_{\mu_B} A_1$ y $x \in Int_{\mu_B} A_2$, así $x \in Int_{\mu_B} A_1 \cap Int_{\mu_B} A_2$.
   $(\supseteq)$
   Sea $x \in Int_{\mu_B} A_1 \cap Int_{\mu_B} A_2$. Entonces $x \in Int_{\mu_B} A_1$ y $x \in Int_{\mu_B} A_2$. Existen $W_1' \in \mathcal{V}(p(x))$, $(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_1') \in \mu_{W_1'}$, tales que $W_1' \subset B$ y $St(x,\mathcal{U}_1 \curlywedge \mathcal{U}_1') \subset A_1$, existen $W_2' \in \mathcal{V}(p(x))$, $(\mathcal{U}_2,\mathcal{U}_2') \in \mu_{W_2'}$, tales que $W_2' \subset B$ y $St(x,\mathcal{U}_2 \curlywedge \mathcal{U}_2') \subset A_2$.

Sean $W = W_1' \cap W_2' \in \mathcal{V}(p(x))$, $(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_1') \mid_{X_W}$ y $(\mathcal{U}_2,\mathcal{U}_2') \mid_{X_W}$. Ya que $\{\mu_W\}$ es una g-uniformidad fibra a fibra, existe $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$ tal que $(\mathcal{U},\mathcal{U}') < (\mathcal{U}_i,\mathcal{U}_i') \mid_{X_W}$, para $i \in \{1,2\}$, entonces $(\mathcal{U}_i,\mathcal{U}_i') \mid_{X_W} < (\mathcal{U}_i,\mathcal{U}_i')$, para $i \in \{1,2\}$. Entonces $(\mathcal{U},\mathcal{U}') < (\mathcal{U}_i,\mathcal{U}_i')$, para $i \in \{1,2\}$, luego $St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \subset St(x,\mathcal{U}_1 \curlywedge \mathcal{U}_1') \subset A_1$ y $St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \subset St(x,\mathcal{U}_2 \curlywedge \mathcal{U}_2') \subset A_2$, entonces $St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \subset A_1 \cap A_2$, luego $x \in Int_{\mu_B}(A_1 \cap A_2)$.

4. $(\subseteq)$ Se tiene por el item 1, notando $A = Int_{\mu_B}A$.

   $(\supseteq)$ Sea $x \in Int_{\mu_B}A$. Existen $W \in \mathcal{V}(p(x))$, $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$ tales que $W \subset B$ y $St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \subset A$. De la condición (FGU) que posee $\{\mu_W\}$ como g-uniformidad fibra a fibra, existe $W' \in \mathcal{V}(p(x))$ tal que $W' \subset W$ y $(Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U}, Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U}') \in \mu_{W'}$. Se mostrará que $St(x, Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U} \curlywedge Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U}') \subset Int_{\mu_B}A$.

   Para lograr esto, probaremos que $St(x, Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U} \curlywedge Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U}') \subset Int_{\mu_{W'}}(St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}'))$ y por hipótesis se tendrá que $Int_{\mu_{W'}}(St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}')) \subset Int_{\mu_{W'}}A \subset Int_{\mu_B}A$.

   Sea $y \in St(x, Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U} \curlywedge Int_{\mu_{W'}}\mathcal{U}')$. Existe $(U,U') \in (\mathcal{U},\mathcal{U}')$ tal que $y \in Int_{\mu_{W'}}U \cap Int_{\mu_{W'}}U' = Int_{\mu_{W'}}(U \cap U')$. Es decir existen $W'' \in \mathcal{V}(p(x))$ y $(\mathrm{V},\mathrm{V}') \in \mu_{W''}$ tales que $W'' \subset W'$ y $St(y,\mathrm{V} \curlywedge \mathrm{V}') \subset U \cap U'$. Sabemos que $U \cap U' \subset St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}')$, luego $St(y,\mathrm{V} \curlywedge \mathrm{V}') \subset St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}')$, así $y \in Int_{\mu_{W'}}(St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}'))$ y por hipótesis se tiene que $y \in Int_{\mu_B}A$.

$\square$

Lema 3.1. *Para cada $Y \subset X$ y cada conjunto abierto W de B se cumple que, $Int_{\mu_W}Y = Int_{\mu_B}Y \cap X_W$.*

Demostración.

$(\subseteq)$ Sea $x \in Int_{\mu_W}Y$. Entonces $x \in X_W$ y existen $W' \in \mathcal{V}(p(x))$, $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_{W'}$ tales que $W' \subset W \subset B$ y $St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \subset Y$, de aquí $x \in Int_{\mu_B}Y$, luego $x \in X_W$ y $x \in Int_{\mu_B}Y$ entonces $x \in X_W \cap Int_{\mu_B}Y$.

$(\supseteq)$ Sea $x \in X_W \cap Int_{\mu_B}Y$. Entonces $x \in X_W$ y $x \in Int_{\mu_B}Y$, existen $W \in \mathcal{V}(p(x))$,

$(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$ tales que $W \subset B$ y $St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \subset Y$. Entonces $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \mid_{X_{W'}}$, $W' \subset W$ y $St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \subset Y$. Luego $x \in Int_{\mu_W} Y$. □

El siguiente teorema relaciona la topología de un espacio topológico fibrado X sobre B con la topología g-uniforme fibra a fibra asociada al espacio g-uniforme fibrado (X, μ).

Teorema 3.1. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico fibrado sobre B y sea $\{\mu_W^0\}$ un sistema de pares conjugados de cubrimientos abiertos de $\{X_W\}$ que cumple las condiciones (2),(4) y (5) de la Definición 3.5. Entonces $\{\mu_W^0\}$ es una base g-uniformidad fibrada compatible con la topología τ_X si y solo si $\mathcal{B}(x) = \{St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \mid W \in \mathcal{V}(p(x)),\ (\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W^0\}$ es un sistema básico de vencindades de x, para cada $x \in X$.*

Demostración.
($\Rightarrow$) Sea $V \in \mathcal{V}(x)$. Existen $W \in \mathcal{V}(p(x))$, $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W^0$ tales que $St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \subset V$. Así tenemos que $St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \in \mathcal{B}(x)$.
($\Leftarrow$) $\{\mu_W^0\}$ satisface las condiciones (2),(4) y (5) de la Definición 3.5. Falta que cumpla la condición (FGU) de la Definición 3.7. Antes de probar la condición (FGU), veamos que de la Proposición 3.3 se tiene que $Int_{\tau_X} Y = Int_{\mu_B} Y$ para $Y \subset X$.
En efecto,
($\subseteq$) Sea $x \in Int_{\tau_X} Y$. Existe $St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}')$ tal que $W \in \mathcal{V}(p(x))$, $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W^0$, $x \in St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}')$ y $St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \subset Y$.
($\supseteq$) Sea $x \in Int_{\mu_B} Y$. Existen $W \in \mathcal{V}(p(x))$, $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W^0$ tales que $W \subset B$ y $St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \subset Y$. Como $St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \in \mathcal{B}(x)$, entonces $Y \in \mathcal{V}(x)$.
Dado $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W^0$, donde $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$ son cubrimientos abiertos de X_W, para cada $U \in \mathcal{U}$, del Lema 3.1 y de la igualdad $Int_{\tau_X} Y = Int_{\mu_B} Y$ se tiene que

$$Int_{\mu_W} U = X_W \cap Int_{\mu_B} U = X_W \cap Int_{\tau_X} U = X_W \cap U = U.$$

Así dados $W \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W^0$ con $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}'$ cubrimientos abiertos de X_W, existen $W' = W$, $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') = (\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W^0$, tales que $W' \subset W$ y $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') < (Int_{\mu_W}\mathcal{U}, Int_{\mu_W}\mathcal{U}')$.
□

Capítulo 4

El Completado fibrado de $(X, \{\mu_W\})$.

En este capítulo consideraremos $(X, \{\mu_W\})$ como un espacio g-uniforme fibra a fibra y $\{\mu_W^0\}$ como una base para la g-uniformidad fibra a fibra $\{\mu_W\}$ obtenida de la Definición 3.6. Comenzaremos por definir las versiones fibradas de conceptos presentados en el libro de Morita-Nagata [10] como son b-filtro de Cauchy, b-filtro estrictamente de Cauchy, b-filtro de Cauchy minimal, b-filtro estrella, b-filtro estrella débil, espacio completo y completado de un espacio g-uniforme. Probaremos que bajo ciertas condiciones sobre el espacio de las fibras $(X, \{\mu_W\})$, se tiene la igualdad entre los b-filtros estrella, estrella débil y de Cauchy minimal. También mostraremos una construcción del completado fibra a fibra de un espacio g-uniforme fibrado.

4.1. b-filtros de Cauchy y b-filtros estrictamente de Cauchy.

En esta sección definiremos los b-filtros de Cauchy y los b-filtros estrictamente de Cauchy y probaremos que todo b-filtro estrictamente de Cauchy es de Cauchy.

Definición 4.1 (Base de b-filtro)**.** Sea X un conjunto fibrado (resp. espacio topológico fibrado) sobre B. Una base de filtro $\mathcal{F}$ en X es base de b-filtro, si $b \in B$ es un punto límite del filtro $P_*(\mathcal{F}) = [P(\mathcal{F})] = \{A \subset B \mid \exists\, F \in \mathcal{F},\ P(F) \subset A\}$ sobre B. Es decir el filtro de vencindades de b, $\mathcal{V}(b)$ está contenido en el filtro $P_*(\mathcal{F})$.

Definición 4.2 (b-filtro de Cauchy)**.** Sea $(X, \{\mu_W\})$ un espacio g-uniforme fibrado y sea $\mathcal{F}$ una base de b-filtro. $\mathcal{F}$ es de Cauchy si para cada $W \in \mathcal{V}(b)$, $(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \in \mu_W$ existen $F \in \mathcal{F}$ y $(U, U') \in (\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ tales que $F \subset U \cap U'$.

Definición 4.3 (b-filtro estrictamente de Cauchy)**.** Sea $(X, \{\mu_W\})$ un espacio g-uniforme fibrado y sea $\mathcal{F}$ base de b-filtro. $\mathcal{F}$ es estrictamente de Cauchy si para cada $W \in \mathcal{V}(b)$, $(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \in \mu_W$ existen $W' \in \mathcal{V}(b)$, $F \in \mathcal{F}$, $(U, U') \in (\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ y $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') \in \mu_{W'}$ tales que $St(F, \mathrm{V} \curlywedge \mathrm{V}') \subset U \cap U'$.

Proposición 4.1. *Para un espacio g-uniforme fibrado $(X, \{\mu_W\})$ se cumple que:*

1. *Cada b-filtro $\mathcal{F}$ estrictamente de Cauchy es de Cauchy.*
2. *El filtro de vencindades de x es un b-filtro de Cauchy.*
3. *El b-filtro generado por $\mathcal{F}_x = \{\{x\}\}$ es estrictamente de Cauchy.*

Demostración.

1. Sean $W \in \mathcal{V}(b)$, $(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \in \mu_W$. Existen $W' \in \mathcal{V}(b)$, $F \in \mathcal{F}$, $(U, U') \in (\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ y $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') \in \mu_{W'}$ tales que $St(F, \mathrm{V} \curlywedge \mathcal{V}') \subset U \cap U'$, en consecuencia se tiene $F \subset St(F, \mathrm{V} \curlywedge \mathrm{V}')$. En efecto, sea $x \in F$, como $W' \in \mathcal{V}(b)$ y $\mathcal{F}$ es una base de filtro, entonces $P(F) \subset W'$ para $F \in \mathcal{F}$, es decir $x \in X_{W'}$ y como $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') \in \mu_{W'}$ entonces $x \in V \cap V'$ para $(V, V) \in (\mathrm{V}, \mathrm{V}')$, luego $V \cap V' \cap F \neq \emptyset$, así $x \in St(F, \mathrm{V} \curlywedge \mathrm{V}')$. Por lo tanto $F \subset U \cap U'$.

2. Sea $W \in \mathcal{V}(b)$ y sea $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$. Por la condición (FGU) existen $W' \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathrm{V},\mathrm{V}') \in \mu_{W'}$ tales que $(\mathrm{V},\mathrm{V}') < (Int_{\mu_W}\mathcal{U}, Int_{\mu_W}\mathcal{U}')$, es decir dado $(V,V') \in (\mathrm{V},\mathrm{V}')$ existe $(Int_{\mu_W}U, Int_{\mu_W}U') \in (Int_{\mu_W}\mathcal{U}, Int_{\mu_W}\mathcal{U}')$ tal que $V \subset Int_{\mu_W}U$, $V' \subset Int_{\mu_W}U'$, así $x \in V \cap V'$. Entonces $x \in St(x, \mathrm{V} \curlywedge \mathrm{V}') \subset Int_{\mu_W}U \cap Int_{\mu_W}U' \subset U \cap U'$, donde $St(x, \mathrm{V} \curlywedge \mathrm{V}') \in \mathcal{V}(x)$.

3. Sea $[\mathcal{F}_x] = \{F \subset X \mid \exists C \in \mathcal{F}_x, C \subset F\}$ el b-filtro generado por $\mathcal{F}_x = \{\{x\}\}$ y sean $W \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$, entonces $W \in P_*([\mathcal{F}_x])$. Existe $C \in \mathcal{F}_x$ tal que $P(C) \subset W$, es decir $p(x) \in W$. Por la condición (FGU), existen $W' \in \mathcal{V}(p(x))$ y $(\mathrm{V},\mathrm{V}') \in \mu_{W'}$ tales que $W' \subset W$ y $(\mathrm{V},\mathrm{V}') < (Int_{\mu_W}\mathcal{U}, Int_{\mu_W}\mathcal{U}')$, de esto último tenemos que $St(C, \mathrm{V} \curlywedge \mathrm{V}') \subset U \cap U'$.

$\square$

Definición 4.4 (Bases de b-filtro estrictamente de Cauchy equivalentes)**.** Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ dos bases de filtro estrictamente de Cauchy. $\mathcal{F}$ es equivalente a $\mathcal{F}'$ escribimos $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}'$ si para cada $W \in \mathcal{V}(b)$, $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$ y $F \in \mathcal{F}$, existen $W' \in \mathcal{V}(b)$, $(\mathrm{V},\mathrm{V}') \in \mu_{W'}$ y $F' \in \mathcal{F}'$ tales que $W' \subset W$ y $St(F', \mathrm{V} \curlywedge \mathrm{V}') \subset St(F, \mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}')$.

Esta relación de la Definición 4.4 produce una relación de equivalencia, enunciada en el siguiente Lema.

Lema 4.1. *La relación $\sim$ establecida en la Definición 4.4., es una relación de equivalencia entre b-filtros estrictamente de Cauchy sobre X.*

Lema 4.2. *Sea $\{\mu_W^0\}$ base de g-uniformidad fibrada para la g-uniformidad fibrada $\{\mu_W\}$ y sea $\mathcal{F}$ una base de b-filtro, entonces la colección*

$$\mathcal{G} = \{St(F,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \mid F \in \mathcal{F},\, (\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W^0,\, W \in \mathcal{V}(b)\}$$

es una base de b-filtro.

Demostración.

- $\mathcal{G} \neq \emptyset$ ya que $\mathcal{F}$ es una base de b-filtro y $\mu_W^0 \subset \mu_W$.
- $\emptyset \notin \mathcal{G}$, ya que $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
- Sean $St(F_1,\mathcal{U}_1 \curlywedge \mathcal{U}_1')$, $St(F_2,\mathcal{U}_2 \curlywedge \mathcal{U}_2') \in \mathcal{G}$, F_1, $F_2 \in F$, $(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_1')$, $(\mathcal{U}_2,\mathcal{U}_2') \in \mu_W^0$ luego existen $F_3 \in \mathcal{F}$, $(\mathcal{U}_3,\mathcal{U}_3') \in \mu_W^0$ tales que $F_3 \subset F_1 \cap F_2$ y $(\mathcal{U}_3,\mathcal{U}_3') < (\mathcal{U}_i,\mathcal{U}_i')$ $i = 1, 2$. Así $St(F_3,\mathcal{U}_3 \curlywedge \mathcal{U}_3') \subset St(F_1,\mathcal{U}_1 \curlywedge \mathcal{U}_1') \cap St(F_2,\mathcal{U}_2 \curlywedge \mathcal{U}_2')$.
- Se probará que $\mathcal{V}(b) \subset P_*(\mathcal{G})$.

  Sea $W \in \mathcal{V}(b)$. Ya que $\mathcal{F}$ es base de b-filtro, entonces $P(F) \subset W$ para algún $F \in \mathcal{F}$, es decir $F \subset X_W$ y para cada $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W^0$ es claro que $St(F,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \subset X_W$, luego $P(St(F,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}')) \subset W$, por tanto $W \in P_*(\mathcal{G})$.

$\square$

4.2. b-filtro estrella, b-filtro estrella débil y b-filtro de Cauchy minimal.

En esta sección se definirán conceptos importantes para la construcción del completado fibrado de $(X, \{\mu_W\})$ como son ellos, b-filtro estrella de $\mathcal{F}$ con respecto a una base $\{\mu_W^0\}$ para una g-uniformidad fibra a fibra $\{\mu_W\}$, b-filrtro estrella débil con respecto a la base $\{\mu_W^0\}$, b-filtro de Cauchy minimal y algunas consecuencias.

Definición 4.5 (b-filtro estrella de $\mathcal{F}$ con respecto a la base $\{\mu_W^0\}$)**.** Sea $\mathcal{F}$ una base de b-filtro estrictamente de Cauchy y sea $\{\mu_W^0\}$ una base g-uniformidad fibra a fibra para $\{\mu_W\}$, entonces el b-filtro generado por $\mathcal{G} = \{St(F,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \mid F \in \mathcal{F},\ (\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W^0,\ W \in \mathcal{V}(b)\}$ es el b-filtro estrella de $\mathcal{F}$ con respecto a $\{\mu_W^0\}$. Notación $St(\mathcal{F}; \{\mu_W^0\}) = [\mathcal{G}]$.

Proposición 4.2. *Todo b-filtro estrella es de Cauchy.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata de las Definiciones 4.2 y 4.5. $\square$

Proposición 4.3. *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ bases de b-filtro estrictamente de Cauchy. Entonces $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}'$, si y solo si $St(\mathcal{F};\{\mu_W^0\}) = St(\mathcal{F}';\{\mu_W^0\})$.*

Demostración. $(\Rightarrow)$
$\subseteq$ Sea $St(F,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \in St(\mathcal{F};\{\mu_W^0\})$, $F \in \mathcal{F}$, $W \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W^0$, ya que $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}'$ existen $W' \in \mathcal{V}(b)$, $(\mathrm{V},\mathrm{V}') \in \mu_{W'}^0$ y $F' \in \mathcal{F}'$ tales que $W' \subset W$ y $St(F',\mathrm{V} \curlywedge \mathrm{V}') \subset St(F,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}')$, luego $St(F,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \in St(\mathcal{F}';\{\mu_W^0\})$.
$\supseteq$ Sea $St(F',\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \in St(\mathcal{F}';\{\mu_W^0\})$. Por la simetría de la relación de equivalencia $(\sim)$, existen $W' \in \mathcal{V}(b)$, $(\mathrm{V},\mathrm{V}') \in \mu_{W'}^0$ y $F \in \mathcal{F}$ tales que $W' \subset W$ y $St(F,\mathrm{V} \curlywedge \mathrm{V}') \subset St(F',\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}')$, luego $St(F',\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \in St(\mathcal{F};\{\mu_W^0\})$.
$(\Leftarrow)$ Sean $W \in \mathcal{V}(b)$, $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W^0$ y $F \in \mathcal{F}$, como $\mathcal{F}'$ es base de b-filto estrictamente de Cauchy existen $W' \in \mathcal{V}(b)$, $(\mathrm{V},\mathrm{V}') \in \mu_{W'}^0$, $F' \in \mathcal{F}'$ que forman la estrella $St(F',\mathrm{V} \curlywedge \mathrm{V}')$ y por hipótesis $St(F',\mathrm{V} \curlywedge \mathrm{V}') \subset St(F,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}')$. $\square$

Definición 4.6 (b-filtro estrella débil con respecto a $\{\mu_W^0\}$)**.** Sea $\mathcal{F}$ un b-filtro de Cauchy, entonces $\mathcal{F}$ es b-filtro estrella débil con respecto a $\{\mu_W^0\}$, si para cada $F \in \mathcal{F}$ existen $W \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W^0$ tales que para cada $U \cap U' \in (\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \cap \mathcal{F}$ se tiene que $U \cap U' \subset F$. Es decir $\bigcup((\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \cap \mathcal{F}) \subset F$.

Definición 4.7 (b-filtro de Cauchy minimal)**.** Un b-filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ es minimal si $\mathcal{F}$ no contiene ningún otro b-filtro de Cauchy.

Lema 4.3. *Para cada b-filtro estrella débil $\mathcal{F}$, $W \in \mathcal{V}(b)$ y cada $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$ se tiene*

$$(\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \cap \mathcal{F} \neq \emptyset.$$

Demostración. Se cumple directamente de la definición de b-filtro estrella débil con respecto a $\{\mu_W^0\}$. $\square$

Lema 4.4. *Sean $\{\mu_W^0\}$ y $\{\mu_W^1\}$ bases para la g-uniformidad fibra a fibra $\{\mu_W\}$. Entonces $\mathcal{F}$ es un b-filtro estrella débil con respecto a $\{\mu_W^0\}$ si y solo si $\mathcal{F}$ es un b-filtro estrella débil con respecto a $\{\mu_W^1\}$*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un b-filtro estrella débil con respecto a $\{\mu_W^0\}$. Para cada $F \in \mathcal{F}$ existen $W \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \{\mu_W^0\}$ tales que $\bigcup(\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \cap \mathcal{F} \subset F$. Como $\mu_W^0 \subset \mu_W$, entonces $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$ y existe $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') \in \mu_W^1$ tal que $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') < (\mathcal{U},\mathcal{U}')$; en consecuencia $\mathrm{V} \curlywedge \mathrm{V}' \subset \mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}'$ y $\mathrm{V} \curlywedge \mathrm{V}' \cap \mathcal{F} \subset \mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}' \cap \mathcal{F}$, así $\bigcup(\mathrm{V} \curlywedge \mathrm{V}') \cap \mathcal{F} \subset F$.
Sea $\mathcal{F}$ un b-filtro estrella débil con respecto a $\{\mu_W^1\}$. De manera análoga se tiene que $\mathcal{F}$ es un b-filtro estrella débil con respecto a $\{\mu_W^0\}$. □

Proposición 4.4. *Cada b-filtro estrella es un b-filtro estrella débil.*

Demostración. Sean $\mathcal{F}$ un b-filtro estrictamente de Cauchy y $\mathcal{F}' = St(\mathcal{F}, \{\mu_W^0\})$ un b-filtro estrella, entonces por la Proposición 4.1. $\mathcal{F}$ es un b-filtro de Cauchy.
Para cada $F' \in \mathcal{F}'$ existen $F \in \mathcal{F}$, $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W^0$ y $W \in \mathcal{V}(b)$ tales que $St(F,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \subset F'$.
Para cada $U \cap U' \in (\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \cap \mathcal{F}'$, $U \cap U' \in \mathcal{F}'$. Es decir existen $F_1 \in \mathcal{F}$ y $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') \in \mu_W^0$ tales que $St(F_1, \mathrm{V} \curlywedge \mathrm{V}') \subset U \cap U'$, de aquí se desprende la cadena ascendente de contenencias $U \cap U' \cap F \supset St(F_1, \mathrm{V} \curlywedge \mathrm{V}') \cap F \supset F_1 \cap F \neq \emptyset$. Así $U \cap U' \subset St(F,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \subset F'$. □

Proposición 4.5. *Si $\mathcal{F}$ es un b-filtro estrella débil entonces $\mathcal{F}$ es b-filtro de Cauchy minimal.*

Demostración. Sean $\mathcal{F}$ un b-filtro estrella débil y $\mathcal{F}'$ un b-filtro de Cauchy tal que $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$. Probaremos que $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$.
Sea $F \in \mathcal{F}$, existen $W \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W^0$ con $\{\mu_W^0\}$ base de una g-uniformidad $\{\mu_W\}$, tales que $\cup((\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \cap \mathcal{F}) \subset F$. Ya que $\mathcal{F}'$ es un b-filtro de Cauchy, para $W \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$, existen $F' \in \mathcal{F}'$ y $(U, U') \in (\mathcal{U},\mathcal{U}')$ tales que $F' \subset U \cap U'$. Entonces

$U \cap U' \in \mathcal{F}'$, así $U \cap U' \in (\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \cap \mathcal{F}'$.
Por hipótesis $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ luego $U \cap U' \in \mathcal{F}$, es decir $U \cap U' \subset \cup((\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \cap \mathcal{F}) \subset F$, en consecuencia $F \in \mathcal{F}'$, por tanto $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ así que $\mathcal{F}$ es minimal. $\square$

Como consecuencia de las Proposiciones 4.4 y 4.5, se deduce que cada b-filtro estrella es b-filtro de Cauchy minimal. Los recíprocos de las Proposiciones 4.4 y 4.5 en general no se cumplen, sin embargo el siguiente teorema muestra que un b-filtro de Cauchy minimal es un b-filtro estrella y por tanto se tiene la igualdad entre los b-filtros estrella, estrella débil y de Cauchy minimal.

Teorema 4.1. *Sea $p : X \to B$ una función cerrada es decir (X, p, B) es espacio topológico cerrado fibra a fibra. Supóngase que para cada $W \in \mathcal{V}(b)$ y cada cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X_W existen $W' \in \mathcal{V}(b)$, $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') \in \mu_{W'}$ tales que $W' \subset W$ y $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') < (\mathcal{U}, \mathcal{U})$.*
Entonces cada b-filtro de Cauchy converge.

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir existe $\mathcal{F}$ b-filtro de Cauchy que no converge a ningún punto de la fibra X_b. Luego para cada $x \in X_b$ existe una vencindad abierta U_x de x tal que $U_x \not\supseteq F$ para todo $F \in \mathcal{F}$.
Consideremos el cubrimiento abierto $\mathcal{U}_0 = \{U_x \mid x \in X_b\}$ de la fibra X_b, entonces $\bigcup\limits_{x \in X_b} U_x$ es una vencindad de la fibra X_b y como X es cerrado fibra a fibra entonces por la Proposición 1.8 del libro de James [6], existe una vencindad $W \in \mathcal{V}(b)$ tal que $X_W \subset \bigcup\limits_{x \in X_b} U_x$. Por hipótesis existen $W' \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') \in \mu_{W'}$ tales que $W' \subset W$ y $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') < (\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_0) \mid_{X_W}$. Como $\mathcal{F}$ es b-filtro de Cauchy existen $F \in \mathcal{F}$ y $(V, V') \in (\mathrm{V}, \mathrm{V}')$ tales que $F \subset V \cap V'$, $V \cap V' \in \mathcal{F}$ y $V \cap V' \subset U_x$ esto último contradice la no convergencia de $\mathcal{F}$. $\square$

Corolario 4.1. *Un b-filtro de Cauchy minimal es un b-filtro estrella.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un b-filtro de Cauchy minimal por el Teorema 4.1 $\mathcal{F}$ converge a un punto $x \in X_b$, es decir el filtro de vencindades de x está contenido en $\mathcal{F}$. El b-filtro generado por $\mathcal{F}_x = \{\{x\}\}$ es estrictamente de Cauchy y por la Proposición 4.1 el b-filtro generado por $\mathcal{F}_x = \{\{x\}\}$ es de Cauchy, como $\mathcal{F}$ es minimal tenemos que $\mathcal{V}(x) = [\mathcal{F}_x] = St(\mathcal{F}_x, \{\mu_W^0\}) = \mathcal{F}$. Así $\mathcal{F}$ es un b-filtro estrella. □

Definición 4.8 (Espacio completo fibra a fibra)**.** Un espacio g-uniforme fibrado $(X, \{\mu_W\})$ es completo fibra a fibra si cada b-filtro estrella débil con respecto a la base $\{\mu_W^0\}$ converge.

La siguiente proposición afirma que en un espacio g-uniforme fibrado los b-filtro estrella débil convergen independientemente de la base y por ende la completez fibra a fibra de un espacio g-uniforme fibrado es independiente de la base.

Proposición 4.6. *Sean $\{\mu_W^0\}$ y $\{\mu_W^1\}$ bases para la g-uniformidad fibrada $\{\mu_W\}$. Entonces un b-filtro estella débil converge con respecto a $\{\mu_W^0\}$ si y solo si el b-filtro estrella débil con respecto a $\{\mu_W^1\}$ converge.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata del Lema 4.4. □

4.3. Completado fibra a fibra de un espacio g-uniforme fibrado.

Definición 4.9 (Completado fibra a fibra de $(X, \{\mu_W\})$)**.** Sean $(X, \{\mu_W\})$, $(Y, \{\nu_W\})$ espacios g-uniformes fibrados con $X \subset Y$. El espacio $(Y, \{\nu_W\})$ es un completado fibra a fibra de $(X, \{\mu_W\})$ si satisface lo siguiente:

1. $(Y, \{\nu_W\})$ es completo fibra a fibra.

2. $\{\nu_W \mid_X\} = \{\mu_W\}$.

3. $(X, \tau(\{\mu_W\}))$ es denso en $(Y, \tau(\{\nu_W\}))$.

Ahora construiremos un completado fibra a fibra de un espacio g-uniforme fibrado $(X, \{\mu_W\})$.
Sea Θ el conjunto de los b-filtro estrella débil con respecto a la base $\{\mu_W^0\}$ que no convergen y sea $X^* = X \cup \Theta$. Convertiremos a X^* en un espacio topológico fibrado como también en un espacio g-uniforme fibra a fibra. Para lograr esto último construiremos una base g-uniformidad fibra a fibra $\{\mu_W^0\}^*$ sobre X^* y por la Proposición 3.2. item b) $\{\mu_W\}^*$ es una g-uniformidad fibra a fibra. Así mostraremos que $(X^*, \{\mu_W\}^*)$ es el completado fibra a fibra de $(X, \{\mu_W\})$, esto es posible mediante una serie de lemas auxiliares presentados en el siguiente orden.
Para $X^* = X \cup \Theta$ donde Θ es el conjunto de aquellos b-filtro estrella débil con respecto a $\{\mu_W^0\}$ que no convergen y para $G \subset X$ definimos:

$$G^* = G \cup \{\mathcal{F} \in \Theta \mid G \in \mathcal{F}\} \subset X^*.$$

Lema 4.5. *Sean G y H subconjuntos de $(X, \{\mu_W\})$. Entonces*

1. *$G \subset H$ si y solo si $G^* \subset H^*$.*

2. *$(G \cap H)^* = G^* \cap H^*$.*

Demostración.

1. $(\Rightarrow)$ Sea $x \in G$ luego $x \in H$ y sea $\mathcal{F} \in G^*$ entonces $G \in \mathcal{F}$, como $G \subset H$ entonces $H \in \mathcal{F}$, así $\mathcal{F} \in H^*$.
   $(\Leftarrow)$ $G \subset G^* \subset H^*$ entonces $G \subset H$.

2. $(\subseteq)$ Sea $x \in G \cap H$ entonces $x \in G$ y $x \in H$. Sea $\mathcal{F} \in (G \cap H)^*$, $\mathcal{F} \in \Theta$ y $G \cap H \in \mathcal{F}$, como $G \cap H \subset G$ y $G \cap H \subset H$ entonces $G \in \mathcal{F}$ y $H \in \mathcal{F}$, así tenemos que $\mathcal{F} \in G^* \cap H^*$.
   $(\supseteq)$ Sea $x \in G^* \cap H^*$ entonces $x \in G$ y $x \in H$, así $x \in G \cap H$, $x \in (G \cap H)^*$; de

otro lado sea $\mathcal{F} \in G^* \cap H^*$ entonces $\mathcal{F} \in \Theta$, $G \in \mathcal{F}$ y $H \in \mathcal{F}$, entonces $G \cap H \in \mathcal{F}$ luego $\mathcal{F} \in (G \cap H)^*$.

$\square$

Definimos la proyección $p^* : X^* \to B$ como $p^*(y) = \begin{cases} p(y), & \text{si } y \in X, \\ b & \text{si } y = \mathcal{F} \in \Theta, \end{cases}$

y $(X^*)_W = (p^*)^{-1}(W)$, $W \subset B$.

Recordemos que la topología para un espacio g-uniforme fibrado $(X, \{\mu_W\})$ está dada por $\tau(\{\mu_W\}) = \{O \subset X \mid \forall x \in X, O \in \mathcal{V}(x)\}$ donde $\mathcal{V}(x) = \{O \subset X \mid \exists W \in \mathcal{V}(p(x)), \exists (\mathcal{U}, \mathcal{U}') \in \mu_W$, tal que $St(x, \mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \subset O\}$.

Proposición 4.7. *Sea (X^*, p^*) un conjunto fibrado sobre un espacio topológico B, entonces la colección $\mathcal{B}^* = \{G^* \cap (X^*)_W \mid G \in \tau(\{\mu_W\}), W \in \tau_B\}$ es una base para una topología sobre X^*, la topología generada por $\mathcal{B}^*$ se denota por $\tau(\{\mu_W\})^*$.*

Demostración. Sea $x \in (G_1^* \cap (X^*)_{W_1}) \cap (G_2^* \cap (X^*)_{W_2})$ con G_1, $G_2 \in \tau(\{\mu_W\})$, $W_1 W_2 \in \tau_B$. Entonces $x \in G_1^* \cap G_2^* \cap (X^*)_{W_1} \cap (X^*)_{W_2}$, por el Lema 4.6. y dado que $W_1 \cap W_2 \in \tau_B$, se tiene que $x \in (G_1 \cap G_2)^* \cap (X^*)_{W_1 \cap W_2} \in \mathcal{B}^*$, luego $(G_1 \cap G_2)^* \cap (X^*)_{W_1 \cap W_2} \subset (G_1^* \cap (X^*)_{W_1}) \cap (G_2^* \cap (X^*)_{W_2})$. $\square$

Proposición 4.8. *La función $p^* : X^* \to B$ es continua y hace de X^* un espacio topológico fibrado sobre B.*

Demostración. Sea $x \in (p^*)^{-1}(W) = (X^*)_W$, $W \in \tau_B$. Existe $G^* \cap (X^*)_W \in \mathcal{B}^*$ tal que $G^* \cap (X^*)_W \subset (X^*)_W$. $\square$

El siguiente lema define la existencia de cubrimientos de $(X^*)_W$ que forman un par conjugado de cubrimientos de $(X^*)_W$.

Lema 4.6. *Sea* $\{\mu_W^0\}$ *una base g-uniformidad fibra a fibra, para cada* $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W^0$ *sean los cubrimientos* $\mathcal{U}^* = \{U^* \cap (X^*)_W \mid U \in \mathcal{U}\}$, $\mathcal{U}'^* = \{U'^* \cap (X^*)_W \mid U' \in \mathcal{U}'\}$. *Entonces el par* $(\mathcal{U}^*,\mathcal{U}'^*)$ *es un par conjugado de cubrimientos de* $(X^*)_W$.

Demostración. Sea $x \in X \cap (X^*)_W$. Ya que $(\mathcal{U},\mathcal{U}')$ es un par conjugado de cubrimientos de X_W, existe $(U,U') \in (\mathcal{U},\mathcal{U}')$ tal que $x \in U \cap U'$. Así $x \in U^* \cap U'^* \cap (X^*)_W$. Sea $\mathcal{F} \in \Theta \cap (X^*)_W$, entonces $p^*(\mathcal{F}) = b \in W$ y $\mathcal{F} \in \Theta$. Como $\mathcal{F}$ es un b-filtro estrella débil, $\mathcal{F}$ es b-filtro de Cauchy y por hipótesis $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W^0$, entonces existen $F \in \mathcal{F}$ y $(U,U') \in (\mathcal{U},\mathcal{U}')$ tales que $F \subset U \cap U'$. Así $U \cap U' \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in (U \cap U')^* = U^* \cap U'^*$ y $\mathcal{F} \in (X^*)_W$ luego $\mathcal{F} \in U^* \cap U'^* \cap (X^*)_W$. □

Lema 4.7. *Para cada conjunto abierto* O *de* X^*, *cada* $y \in O$ *y* $b = p^*(y)$, *existen* $W \in \mathcal{V}(b)$ *y* $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$ *tales que* $St(y,\mathcal{U}^*,\mathcal{U}'^*) \subset O$.

Demostración. Sea $O \in \tau(\{\mu_W\})^*$ entonces existen $G \in \tau(\{\mu_W\})$ y una vencindad abierta W' de b tales que $y \in G^* \cap (X^*)_{W'} \subset O$.

Si $y \in X$ entonces $y \in G \cap X_{W'}$, $y \in G$ y $y \in X_{W'}$ entonces existen $W \in \mathcal{V}(b)$, $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$ tales que $W \subset W'$ y $St(y,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \subset G \cap X_W$. Mostraremos que $St(y,\mathcal{U}^* \curlywedge \mathcal{U}'^*) \subset O$. Sea $x \in X \cap St(y,\mathcal{U}^* \curlywedge \mathcal{U}'^*)$, existe $(U,U') \in (\mathcal{U},\mathcal{U}')$ tal que $\{x,y\} \subset U^* \cap U'^* \cap (X^*)_W \subset U^* \cap U'^*$, $\{x,y\} \subset U \cap U'$, así $x \in St(y,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \subset G \cap X_W$ entonces $x \in G^* \cap (X^*)_W \subset O$. Sea $\mathcal{F} \in \Theta \cap St(y,\mathcal{U}^* \curlywedge \mathcal{U}'^*)$, existe $(U,U') \in (\mathcal{U},\mathcal{U}')$ tal que $\{\mathcal{F},y\} \subset U^* \cap U'^* \cap (X^*)_W \subset U^* \cap U'^*$, $y \in U \cap U'$ y $\mathcal{F} \in U^* \cap U'^*$ de aquí $U \cap U' \in \mathcal{F}$. Entonces $U \cap U' \subset St(y,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \subset G \cap X_W \subset G$, $G \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in G^*$, como $\mathcal{F} \in (X^*)_W$ entonces $\mathcal{F} \in G^* \cap (X^*)_W \subset O$.

Si $y \in X^* - X$ entonces $y = \mathcal{F} \in \Theta \cap G^* \cap (X^*)_{W'}$, $\mathcal{F} \in G^*$ entonces $G \in \mathcal{F}$, como $\mathcal{F}$ es un b-filtro estrella débil existen $W \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$ tales que $\cup((\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \cap \mathcal{F}) \subset G$. Mostraremos que $St(\mathcal{F},\mathcal{U}^* \curlywedge \mathcal{U}'^*) \subset O$.

Sea $x \in X \cap St(\mathcal{F},\mathcal{U}^* \curlywedge \mathcal{U}'^*)$ entonces existe $(U,U') \in (\mathcal{U},\mathcal{U}')$ tal que $\{x,\mathcal{F}\} \subset U^* \cap U'^* \cap (X^*)_W$, $x \in U \cap U'$ y $\mathcal{F} \in U^* \cap U'^*$ de aquí $U \cap U' \in \mathcal{F}$, $U \cap U' \in (\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \cap \mathcal{F}$ entonces $U \cap U' \subset \cup((\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \cap \mathcal{F}) \subset G$, así $x \in G$ y $x \in X_W$, $x \in G \cap X_W \subset G^* \cap (X^*)_W \subset O$.

Ahora sea $\mathcal{K} \in \Theta \cap St(\mathcal{F}, \mathcal{U}^* \curlywedge \mathcal{U}'^*)$, existe $(U, U') \in (\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ tal que $\{\mathcal{K}, \mathcal{F}\} \subset U^* \cap U'^* \cap (X^*)_W \subset U^* \cap U'^*$, es decir $\mathcal{F} \in U^* \cap U'^*$ y $\mathcal{K} \in U^* \cap U'^*$. Si $\mathcal{F} \in U^* \cap U'^*$ entonces $U \cap U' \in \mathcal{F}$, $U \cap U' \in (\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \cap \mathcal{F} \subset \cup((\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \cap \mathcal{F}) \subset G$. Si $\mathcal{K} \in U^* \cap U'^*$ entonces $U \cap U' \in \mathcal{K}$, $G \in \mathcal{K}$ y $\mathcal{K} \in G^*$, como $\mathcal{K} \in (X^*)_W$ entonces $\mathcal{K} \in G^* \cap (X^*)_W \subset O$. □

Observación 9. Del Lema 4.7. se tiene que X es denso en X^*.

En efecto, sea O abierto en X^* y sean $y \in O$, $b = p^*(y)$. Si $y \in X$, obtenemos que $O \cap X \neq \emptyset$. Si $y \in X^* - X$ por Lema 4.8. existen $W \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \in \mu_W$ tales que $St(y, \mathcal{U}^* \curlywedge \mathcal{U}'^*) \subset O$. Sean $U \in \mathcal{U}$ y $U' \in \mathcal{U}'$ tales que $U \cap U' \neq \emptyset$, tenemos que $y \in U^* \cap U'^*$ luego $U \cap U' \subset U^* \cap U'^* \subset St(y, \mathcal{U}^* \curlywedge \mathcal{U}'^*) \subset O$, así $O \cap X \neq \emptyset$.

Lema 4.8. *Sea G un conjunto abierto de X. Para cada conjunto abierto W de B y cada $(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \in \mu_W$ se cumple*

$$St(G^*, \mathcal{U}^* \curlywedge \mathcal{U}'^*) \subset [St(G, \mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}')]^*.$$

Demostración. Sea $x \in X \cap St(G^*, \mathcal{U}^* \curlywedge \mathcal{U}'^*)$, existe $(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \in \mu_W$ tal que $x \in U^* \cap U'^*$ y $G^* \cap U^* \cap U'^* \neq \emptyset$, entonces $x \in U \cap U'$ y $G \cap U \cap U' \neq \emptyset$, $x \in St(G, \mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}')$ así $x \in [St(G, \mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}')]^*$.
Ahora sea $\mathcal{F} \in \Theta \cap St(G^*, \mathcal{U}^* \curlywedge \mathcal{U}'^*)$ entonces existe $(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \in \mu_W$ tal que $\mathcal{F} \in \Theta \cap (U^* \cap U'^* \cap (X^*)_W)$ y $G^* \cap U^* \cap U'^* \cap (X^*)_W \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{F} \in U^* \cap U'^*$ y $G \cap U \cap U' \neq \emptyset$, $U \cap U' \in \mathcal{F}$ y $U \cap U' \subset St(G, \mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}')$, así $St(G, \mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in [St(G, \mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}')]^*$. □

Definición 4.10. Para una base de g-uniformidad fibra a fibra $\{\mu_W^0\}$ de X, definimos:

$$(\mu_W^0)^* = \{(\mathcal{U}^*, \mathcal{U}'^*) \mid (\mathcal{U}, \mathcal{U}') \in \mu_W^0\}.$$

Lema 4.9. *Para $U \subset X$ se cumple que, $(Int_{\mu_W^0} U)^* \cap (X^*)_W \subset Int_{(\mu_W^0)^*} U^*$.*

Demostración. Tomemos $x \in X \cap (Int_{\mu_W^0} U)^* \cap (X^*)_W$ entonces $x \in Int_{\mu_W^0} U$ y $x \in (X^*)_W$, si $x \in Int_{\mu_W^0} U$ entonces existen $W' \in \mathcal{V}(p(x))$ y $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') \in \mu_W^0$ tales que $W' \subset W$ y $St(x, \mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \subset U$. Entonces existe $W' \in \mathcal{V}(p(x) = p^*(x))$ y $(\mathrm{V}^*, \mathrm{V}'^*) \in (\mu_W^0)^*$ tales

que $W' \subset W$ y $[St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}')]^* \subset U^*$, por el Lema 4.8. se tiene que $St(x,\mathcal{U}^* \curlywedge \mathcal{U}'^*) \subset U^*$, así $x \in Int_{(\mu_W^0)^*} U^*$.
Ahora tomemos $\mathcal{F} \in \Theta \cap (Int_{\mu_W^0} U)^* \cap (X^*)_W$, como $Int_{\mu_W^0} U \in \tau(\{\mu_W\})$ entonces $(Int_{\mu_W^0} U)^* \in \tau(\{\mu_W\})^*$ y por el Lema 4.7. existen $W' \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') \in \mu_{W'}^0$ tales que $W' \subset W$ y $St(\mathcal{F}, \mathrm{V}^* \curlywedge \mathrm{V}'^*) \subset (Int_{\mu_W^0} U)^* \subset U^*$, así $\mathcal{F} \in Int_{(\mu_W^0)^*} U^*$. □

Lema 4.10. *Sea $\{\mu_W^0\}$ una base de g-uniformidad fibra a fibra compatible con la topología de X. Entonces*

1. *$\{(\mu_W^0)^*\}$ es una base de g-uniformidad fibra a fibra compatible con la topología de X^*.*

2. *Sea $\mu^* = \{(\mu_W)^*\}$ la g-uniformidad fibra a fibra generada por $\{(\mu_W^0)^*\}$. Entonces $\{(\mu_W)^*\}$ no depende de la escogencia de una base $\{\mu_W^0\}$.*

Demostración. Por el Teorema 3.1., la colección $\{St(x,\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \mid W \in \mathcal{V}(p(x)),\ (\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W^0\}$ es un sistema básico de vencindades de x en X. Este teorema lo aplicaremos para demostrar 1.

1. Por el Lema 4.7., la colección $\{St(y,\mathcal{U}^* \curlywedge \mathcal{U}'^*) \mid W \in \mathcal{V}(b),\ (\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W^0\}$ es un sistema básico de vencindades de y en X^*; queda por demostrar que $\{(\mu_W^0)^*\}$ es una base de g-uniformidad fibra a fibra es decir si $\{(\mu_W^0)^*\}$ satisface la Definición 3.7.

   Como $\{\mu_W^0\}$ es una base de g-uniformidad fibra a fibra, entonces para cada $(\mathcal{U}_i,\mathcal{U}_i') \in \mu_W^0$, $i = 1,2$, existe $(\mathcal{U}_3,\mathcal{U}_3') \in \mu_W^0$ tal que $(\mathcal{U}_3,\mathcal{U}_3') < (\mathcal{U}_i,\mathcal{U}_i')$, $i = 1,2$. Entonces para cada $(\mathcal{U}_i^*,\mathcal{U}_i'^*) \in (\mu_W^0)^*$, $i = 1,2$, existe $(\mathcal{U}_3^*,\mathcal{U}_3'^*) \in (\mu_W^0)^*$ tal que $(\mathcal{U}_3^*,\mathcal{U}_3'^*) < (\mathcal{U}_i^*,\mathcal{U}_i'^*)$, $i = 1,2$. Luego $\{(\mu_W^0)^*\}$ satisface la condición (2) de la Definición 3.5.

   Para la condición (4) de la Definición 3.5. Sea $(\mathcal{U}^*,\mathcal{U}'^*) \in (\mu_W^0)^*$ y sea $b \in W$ entonces para $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W^0$ existen $W' \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathrm{V}, \mathrm{V}') \in \mu_{W'}^0$ tales que $W' \subset W$

y $(\mathrm{V}',\mathrm{V}) < (\mathcal{U},\mathcal{U}')$. Entonces para $(\mathcal{U}^*,\mathcal{U}'^*) \in (\mu^0_W)^*$ existen $W' \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathrm{V}^*,\mathrm{V}'^*) \in (\mu^0_W)^*$ tales que $W' \subset W$ y $(\mathrm{V}'^*,\mathrm{V}^*) < (\mathcal{U}^*,\mathcal{U}'^*)$.

Para $W' \subset W$, $\mu^0_{W'} \supset \mu^0_W |_{X_{W'}}$, por el Lema 4.5. item 1 tenemos que $(\mu^0_{W'})^* \supset (\mu^0_W)^* |_{(X^*)_{W'}}$. Así $\{(\mu^0_W)^*\}$ satisface la condición (5) de la Definición 3.5.

Para la condición (FGU). Sean $b \in B$, $W \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathcal{U}^*,\mathcal{U}'^*) \in (\mu^0_W)^*$ donde $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu^0_W$, ya que $\{\mu^0_W\}$ es una base de g-uniformidad fibra a fibra, existen $W' \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathrm{V},\mathrm{V}') \in \mu^0_{W'}$ tales que $W' \subset W$ y $(\mathrm{V},\mathrm{V}') < (Int_{\mu^0_{W'}}\mathcal{U}, Int_{\mu^0_{W'}}\mathcal{U}')$. Es decir existen $W' \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathrm{V}^*,\mathrm{V}'^*) \in (\mu^0_{W'})^*$ tales que $W' \subset W$ y $(\mathrm{V}^*,\mathrm{V}'^*) < ((Int_{\mu^0_{W'}}\mathcal{U})^*, (Int_{\mu^0_{W'}}\mathcal{U}')^*)$. Por el Lema 4.9. $((Int_{\mu^0_{W'}}\mathcal{U})^*, (Int_{\mu^0_{W'}}\mathcal{U}')^*) < (Int_{(\mu^0_W)^*}\mathcal{U}^*, Int_{(\mu^0_W)^*}\mathcal{U}'^*)$ entonces $(\mathrm{V}^*,\mathrm{V}'^*) < (Int_{(\mu^0_W)^*}\mathcal{U}^*, Int_{(\mu^0_W)^*}\mathcal{U}'^*)$.

Luego $\{(\mu^0_W)^*\}$ es compatible con la topología de $(X^*, \{(\mu^0_W)^*\})$.

2. Sea $\{\mu^1_w\}$ otra base de g-uniformidad fibra a fibra para $\{\mu_W\}$, del Lema 4.4. para un b-filtro $\mathcal{F}$ en X, $\mathcal{F}$ es un b-filtro estrella débil con respecto a $\{\mu^0_W\}$ si y solo si $\mathcal{F}$ es un b-filtro estrella débil con respecto a $\{\mu^1_W\}$. Es decir si $\{\mu^1_W\}$ es una base de g-uniformidad fibra a fibra compatible con la topología de X entonces de item 1., $\{(\mu^1_W)^*\}$ es una base de g-uniformidad fibra a fibra compatible con la topología de X^*, es fácil ver que $\{(\mu^0_W)^*\}$ y $\{(\mu^1_W)^*\}$ generan la misma g-uniformidad fibrada $\{(\mu_W)^*\}$.

□

Observación 10. Se deducen de los Lemas 4.7. y 4.10. item 1., que $\tau(\{\mu_W\})^* = \tau(\{(\mu_W)^*\})$

En efecto.

$(\subseteq)$ Sea $S^* \in \tau(\{\mu_W\})^*$ entonces para cada $x \in S^*$ existe $G^* \cap (X^*)_W$ tal que $x \in G^* \cap (X^*)_W \subset S^*$, donde $G \in \tau(\{\mu_W\})$, $W \in \mathcal{V}(p^*(x))$ vencindad abierta de $p^*(x) = b$, por el Lema 4.7. existen $W' \in \mathcal{V}(b)$, $(\mathcal{U},\mathcal{U}')$ tales que $W' \subset W$,$St(x,\mathcal{U}^* \curlywedge \mathcal{U}'^*) \subset S^*$, entonces $S^* \in \tau(\{(\mu_W)^*\})$.

($\supseteq$) Sea $S^* \in \tau(\{(\mu_W)^*\})$, existen $W \in \mathcal{V}(p^*(x))$, $(\mathcal{U}^*,\mathcal{U}'^*) \in (\mu_W^0)^*$ tales que $St(x,\mathcal{U}^* \curlywedge \mathcal{U}'^*) \subset S^*$, por el Lema 4.10 item 1 se tiene que $S^* \in \tau(\{\mu_W\})^*$.

Observación 11. A partir del Lema 4.10. item 2, se deduce que $(X^*, \{(\mu_W)^*\})$ es un espacio g-uniforme fibra a fibra.

Lema 4.11. *1. Si $\mathcal{M}$ es un b-filtro estrella débil con respecto a $\{(\mu_W^0)^*\}$, entonces*

$$R(\mathcal{M}) = \{F \subset X \mid \exists W \in \mathcal{V}(b),\ \exists(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W^0,\ \exists(U,U') \in (\mathcal{U},\mathcal{U}') \text{ tales que}$$

$$U^* \cap U'^* \cap (X^*)_W \in \mathcal{M},\ U \cap U' \subset F\}$$

es un b-filtro estrella débil con respecto a $\{\mu_W^0\}$.

2. Si $\mathcal{F}$ es un b-filtro estrella débil con respecto a $\{\mu_W^0\}$, entonces

$$E(\mathcal{F}) = \{F \subset X^* \mid \exists W \in \mathcal{V}(b),\ \exists(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W^0,\ \exists(U,U') \in (\mathcal{U},\mathcal{U}') \text{ tales que}$$

$$U \cap U' \in \mathcal{F},\ U^* \cap U'^* \cap (X^*)_W \subset F\}$$

es un b-filtro estrella débil con respecto a $\{(\mu_W^0)^*\}$.

3. $E[R(\mathcal{M})] = \mathcal{M}$ y $R[E(\mathcal{F})] = \mathcal{F}$.

Demostración. 1. Necesitamos probar que:

a. $R(\mathcal{M})$ es b-filtro.

b. $R(\mathcal{M})$ es b-filtro de Cauchy y por último que

c. $R(\mathcal{M})$ es b-filtro estrella débil con respecto a $\{\mu_W^0\}$.

a. $R(\mathcal{M})$ es un filtro. $R(\mathcal{M}) \neq \emptyset$ ya que existen $(U,U') \in (\mathcal{U},\mathcal{U}')$, $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W^0$ y $B \in \mathcal{V}(b)$ tales que $U^* \cap U'^* \cap (X^*)_B \in \mathcal{M}$, $U \cap U' \subset U \cap U'$.
$\emptyset \notin R(\mathcal{M})$, porque $U \cap U' \neq \emptyset$ para cada $(U,U') \in (\mathcal{U},\mathcal{U}')$.
Sean $F_1, F_2 \in R(\mathcal{M})$ entonces existen $W_1 \in \mathcal{V}(b)$, $(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_1') \in \mu_{W_1}^0$, $(U_1,U_1') \in (\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_1')$ tales que $U_1^* \cap U_1'^* \cap (X^*)_{W_1} \in \mathcal{M}$, $U_1 \cap U_1' \subset F_1$ y existen $W_2 \in \mathcal{V}(b)$,

$(\mathcal{U}_2,\mathcal{U}_2') \in \mu^0_{W_2}$, $(U_2,U_2') \in (\mathcal{U}_2,\mathcal{U}_2')$ tales que $U_2^* \cap U_2'^* \cap (X^*)_{W_2} \in \mathcal{M}$, $U_2 \cap U_2' \subset F_2$. Sean $W = W_1 \cap W_2$, $F_3 = F_1 \cap F_2$, $\mathcal{U}_3 = \mathcal{U}_1 \curlywedge \mathcal{U}_2$ y $\mathcal{U}_3' = \mathcal{U}_1' \curlywedge \mathcal{U}_2'$ se tiene que $W \in \mathcal{V}(b)$, $(\mathcal{U}_3,\mathcal{U}_3') \in \mu^0_W$, $(U_3,U_3') \in (\mathcal{U}_3,\mathcal{U}_3')$ y además $U_3^* \cap U_3'^* \cap (X^*)_W \in \mathcal{M}$, $U_3 \cap U_3' \subset F_3$, así $F_3 \in R(\mathcal{M})$.

Es inmediato que si $F \in R(\mathcal{M})$ y si $F \subset G$ entonces $G \in R(\mathcal{M})$.

$b \in B$ es un punto límite del filtro $P_*(R(\mathcal{M}))$. Sea $W \in \mathcal{V}(b)$ y sea $M \in \mathcal{M}$, como $\mathcal{M}$ es b-filtro estrella estrella débil con respecto a $\{(\mu^0_W)^*\}$ existen $W \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathcal{U}^*,\mathcal{U}'^*) \in (\mu^0_W)^*$ tales que $\cup((\mathcal{U}^* \curlywedge \mathcal{U}'^*) \cap \mathcal{M}) \subset M$, es decir $U^* \cap U'^* \cap (X^*)_W \in \mathcal{M}$. Es conocido que $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu^0_W$, $(U,U') \in (\mathcal{U},\mathcal{U}')$, $U \cap U' \in R(\mathcal{M})$ y $U \cap U' \subset X_W$ entonces $X_W \in R(\mathcal{M})$.

b. $R(\mathcal{M})$ es b-filtro de Cauchy. Sean $W \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu^0_W$. Porsupuesto $\mathcal{M}$ es b-filtro de Cauchy, entonces existen $M \in \mathcal{M}$ y $(U^* \cap (X^*)_W, U'^* \cap (X^*)_W) \in (\mathcal{U}^*,\mathcal{U}'^*)$ tales que $M \subset U^* \cap U'^* \cap (X^*)_W$. Es decir $U^* \cap U'^* \cap (X^*)_W \in \mathcal{M}$, existen $U \cap U' \in R(\mathcal{M})$ y $(U,U') \in (\mathcal{U},\mathcal{U}')$ tales que $U \cap U' \subset U \cap U'$.

c. Antes de probar que $R(\mathcal{M})$ es b-filtro estrella débil con respecto a $\{\mu^0_W\}$, se mostrará que para cada $W \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu^0_W$ se tiene:

$$(\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \cap R(\mathcal{M}) = \{U \cap U' \mid U^* \cap U'^* \cap (X^*)_W \in (\mathcal{U}^* \curlywedge \mathcal{U}'^*) \cap \mathcal{M}\}.$$

$(\subseteq)$ Sea $U \cap U' \in (\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \cap R(\mathcal{M})$ entonces $U \cap U' \in \mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}'$ y $U \cap U' \in R(\mathcal{M})$. Si $U \cap U' \in R(\mathcal{M})$, existen $W' \in \mathcal{V}(b)$, $(\mathrm{V},\mathrm{V}') \in \mu^0_{W'}$ y $(V,V') \in (\mathrm{V},\mathrm{V}')$ tales que $V^* \cap V'^* \cap (X^*)_{W'} \in \mathcal{M}$, $V \cap V' \subset U \cap U'$ y $W' \subset W$. Entonces $V^* \cap V'^* \cap (X^*)_{W'} \subset U^* \cap U'^* \cap (X^*)_W$, así $U^* \cap U'^* \cap (X^*)_W \in \mathcal{M}$, $U^* \cap U'^* \cap (X^*)_W \in (\mathcal{U}^* \curlywedge \mathcal{U}'^*) \cap \mathcal{M}$.

$(\supseteq)$ $U \cap U' \in \mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}'$ y por definición de $R(\mathcal{M})$ $U \cap U' \in R(\mathcal{M})$, así $U \cap U' \in (\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \cap R(\mathcal{M})$.

En seguida se prueba que $R(\mathcal{M})$ es un b-filtro estrella débil.

Sea $F \in R(\mathcal{M})$, existen $W \in \mathcal{V}(b)$, $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu^0_W$ y $(U,U') \in (\mathcal{U},\mathcal{U}')$ tales que $U^* \cap U'^* \cap (X^*)_W \in \mathcal{M}$, $U \cap U' \subset F$. Dado que $\mathcal{M}$ es b-filtro estrella débil con respecto a $\{(\mu^0_W)^*\}$, existen $W' \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathrm{V}^*,\mathrm{V}'^*) \in (\mu^0_{W'})^*$ tales que $\cup((\mathrm{V}^* \curlywedge \mathrm{V'}^*) \cap \mathcal{M}) \subset U^* \cap U'^* \cap (X^*)_W$.

Así se tiene que para cada $V^* \cap V'^* \cap (X^*)_{W'} \in (\mathrm{V}^* \curlywedge \mathrm{V'}^*) \cap \mathcal{M})$, $V^* \cap V'^* \cap (X^*)_{W'} \subset U^* \cap U'^* \cap (X^*)_W$ y para cada $V \cap V' \in ((\mathrm{V} \curlywedge \mathrm{V'}) \cap R(\mathcal{M}))$, $V \cap V' \subset U \cap U'$ es decir $\cup((\mathrm{V} \curlywedge \mathrm{V'}) \cap R(\mathcal{M})) \subset U \cap U' \subset F$.

2. De manera dual se tiene que

$$(\mathcal{U}^* \curlywedge \mathcal{U}'^*) \cap E(\mathcal{F}) = \{U^* \cap U'^* \cap (X^*)_W \mid U \cap U' \in (\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \cap \mathcal{F}\}$$

y que $E(\mathcal{F})$ es un b-filtro estrella débil con respecto a $\{(\mu_W^0)^*\}$.

3. Se obtienen inmediatamente de las definiciones de $R(\mathcal{M})$ y de $E(\mathcal{F})$.

□

Lema 4.12. *Sean $\mathcal{M}$ y $R(\mathcal{M})$ los b-filtros definidos como en 1. del Lema 4.11.*

1. Si $R(\mathcal{M})$ converge a x en X, entonces $\mathcal{M}$ converge a x en X^*.

2. Supóngase que $R(\mathcal{M})$ no converge a ningún punto en X, luego $R(\mathcal{M}) \in \Theta$ y $R(\mathcal{M})$ define un punto $y \in X^* - X$. Entonces $\mathcal{M}$ converge a y en X^*.

Demostración.

1. Sea G^* una vencindad abierta de x en $X^* = X \cup \Theta$ tal que $x \in G^*$. Ya que $R(\mathcal{M})$ converge a x en X, $x \in G$ y existe $F \in R(\mathcal{M})$ tal que $F \subset G$. Luego $G \in R(\mathcal{M})$ y $R(\mathcal{M})$ es b-filtro estrella débil con respecto a $\{\mu_W^0\}$, existen $W \in \mathcal{V}(b)$, $(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \in \mu_W^0$ tales que para cada $U \cap U' \in (\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}) \cap R(\mathcal{M})$, $U \cap U' \subset G$. Entonces $U^* \cap U'^* \cap (X^*)_W \subset G^*$, desde luego $U^* \cap U'^* \cap (X^*)_W \in (\mathcal{U}^* \curlywedge \mathcal{U}'^*) \cap \mathcal{M}$, $U^* \cap U'^* \cap (X^*)_W \in \mathcal{M}$ así $G^* \in \mathcal{M}$.

2. Sea O una vencindad abierta de $y = R(\mathcal{M})$ en X^* y sea $p^*(y) = b$, entonces por el Lema 4.7., existen $W \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \in \mu_W$ tales que $St(y, \mathcal{U}^* \curlywedge \mathcal{U}'^*) \subset O$. Es

decir $y = R(\mathcal{M}) \in U^* \cap U'^* \cap (X^*)_W$ para algún $U \cap U' \in (\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}')$, entonces $U \cap U' \in R(\mathcal{M})$. Así $U \cap U' \in (\mathcal{U} \curlywedge \mathcal{U}') \cap R(\mathcal{M})$, $U^* \cap U'^* \cap (X^*)_W \in (\mathcal{U}^* \curlywedge \mathcal{U}'^*) \cap \mathcal{M}$ entonces $U^* \cap U'^* \cap (X^*)_W \in \mathcal{M}$ y $U^* \cap U'^* \cap (X^*)_W \subset St(y, \mathcal{U}^* \curlywedge \mathcal{U}'^*) \subset O$, en consecuencia $O \in \mathcal{M}$. Así $\mathcal{M}$ converge a y en X^*.

$\square$

Los Lemas 4.11 y 4.12 garantizan que $(X^*, \{(\mu_W)^*\})$ es completo fibra a fibra. La condición 2. de la Definición 4.9 se satisface inmediatamente y la condición 3. de la Definición 4.9 se cumple por el Lema 4.7. Así se ha demostrado el siguiente resultado.

Teorema 4.2. $(X^*, \{(\mu_W)^*\})$ *es un completado fibra a fibra de* $(X, \{\mu_W\})$.

Consideraciones finales.

1. De una manera similar como se construyó el completado fibra fibra de una g-uniformidad fibrada, quedaría por mostrar la construcción del completado fibra a fibra para una semiuniformidad fibrada.

2. Profundizar en la Categoría de los espacios uniformes fibra a fibra con las funciones fibradas uniformemente continuas fibra a fibra como morfismos, para estudiar allí una propiedad universal que exprese la unicidad, salvo isomorfismos, del completado fibra a fibra.

3. Encontrar una descripción en términos de cubrimientos uniformes de los campos de espacios uniformes estudiados por Dauns-Hofmann, en los cuales la topología del espacio de las fibras está dada en términos de tubos alrededor de secciones locales para la proyección p y en donde existe una uniformidad para p.

Bibliografía.

[1] Bourbaki, N., *General Topology, Part 1, Elements of mathematics*, Addison- Wesley, (1966).

[2] Engelking, R., *General Topology*, Heldermann, rev.ed. Berlín, (1989).

[3] Gantner T. E and Steinlage R. C., *Characterizations of quasi-uniformities*, J. London Mathematical Society., Vol**5**, (1972), pp. 48-52

[4] Gómez, Camilo Alfonso., Trabajo de grado., *Sobre algunas versiones fibradas de conceptos topológicos*, Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, (2005).

[5] Howes, N. R., *Modern Analysis and Topology*, Springer, Berlín, (1995).

[6] James, I. M., *Fibrewise Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, (1989).

[7] Konami, Y. and Miwa T., *Fibrewise covering uniformities and completions*, Acta Math. Hungar., Vol **119**, (2008), pp. 127-157

[8] Konami, Y. and Miwa T., *Fibrewise extensions, Shanin compactification and extensions of fibrewise maps*, Acta Math. Hungar., Vol **122**, No(1-2), (2009), pp. 1-28

[9] Kreyszig, Erwin., *Introductory functional analysis with applications*, Ed. Jhon Wiley y Sons, (1978).

[10] Morita, K and Nagata, J., Extension of mappings I, in: *Topics in General Topology*, eds., North-Holland, Amsterdam, (1989), pp. 1-39.

[11] Nagata, Jun-Iti., *Modern General Topology*, North-Holland, Amsterdam, (1968).

[12] Neira, Clara M., *Topología General - Notas de clase*, www.docentes.unal.edu.co/docs/topologia.

[13] Pareigis, Bodo., *Categories and Functors*, Academic Press, University of Munich, (1970), pp. 1-33

[14] Pasynkov, B. A., On the extension to maps of certain notions and assertions concerning spaces, in : *Maps and Functors*, Moscow State University, Moscow, (1984), pp.72-102 (in Russian).

[15] Rubiano, Gustavo N., *Topologia General 2° edición*, Universidad Nacional de Colombia, (2002)

[16] Simmons, George F., *Introduction to topology and modern analysis*, International student edition, McGrawill-Hill, (1963).

[17] Willard, S., *General Topology*, Addison Wesley, (1968).